УДК 539.375 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.17

Камінський А. О.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Дудик М. В.[2], к.ф.-м.н., доц.,
Решітник Ю. В.[2], к.ф.-м.н., доц.

Двопараметрична модель зони передруйнування у квазіпружному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: dfm11@ukr.net
[2] Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, 20300, м. Умань, вул. Садова, 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com, dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

A. O. Kaminsky[1], Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
M. V. Dudyk[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.
Yu. V. Reshitnyk[2], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Two-parameter model of the prefracture zone in a quasi-elastic material near the tip of an interface crack

[1] S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterov str., 3,
e-mail: dfm11@ukr.net
[2] Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, 20300, Uman, Sadova str., 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com, dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

Розвинуто модель зони передруйнування, яка в умовах плоскої деформації поширюється з вершини міжфазної тріщини під кутом до плоскої межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Зону передруйнування подано лінією розриву переміщення, на якій виконується двопараметричний критерій міцності типу Мізеса – Хілла. Параметрами моделі служать опір відриву і опір зсуву матеріалу, в якому розвивається зона. Модель враховує крихкий і пластичний механізми руйнування і може бути використана для опису квазікрихкого руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Показано можливість переходу між крихким і пластичним механізмами руйнування при зміні відношення опорів відриву і зсуву матеріалу.

Ключові слова: міжфазна тріщина, зона передруйнування, критерій міцності Мізеса – Хілла.

A model of the pre-fracture zone, which under plane strain conditions extends from the tip of the interface crack at an angle to the plane interface of two different homogeneous isotropic materials, has been developed. The pre-fracture zone is represented by the displacement discontinuity line, on which the strength condition of the Mises - Hill type is satisfied. The parameters of the model are the tensile resistance and shear resistance of the material in which the zone develops. The model takes into account brittle and ductile fracture mechanisms and can be used to describe the quasi-brittle fracture of a piece-homogeneous body with an interface crack. The possibility of a transition between brittle and ductile fracture mechanisms is shown when the ratio of tensile and shear resistance of the material changes.

Key Words: interface crack, pre-fracture zone, Mises-Hill strength criterion.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. У механіці руйнування для дослідження процесів в околі концентраторів напружень поширеним є використання різного роду моделей зон передруйнування. Строгий опис процесів передруйнування ускладнений нелінійністю визначальних рівнянь, які задають напружено-деформований стан матеріалу в зоні. Це зумовило впровадження ряду спрощених моделей зон з використанням тих чи інших критеріїв руйнування, які за певних умов допускають аналітичне розв'язання. До таких моделей відносяться, зокрема, модель пластичної зони Дагдейла і зони процесу Леонова – Панасюка, які подають зони передруйнування поверхнями розриву переміщення з заданими критеріальними обмеженнями на компоненти тензора напружень.

Моделі Дагдейла і Леонова – Панасюка використовують однопараметричні критерії руйнування типу Треска – Сен-Венана і спочатку призначались для дослідження зон передруйнування в однорідних матеріалах. Згодом з'явились приклади їх успішного застосування до моделювання зон передруйнування біля вершин тріщин в кусково-однорідних та анізотропних тілах. Однак ці

© А.О. Камінський, М.В. Дудик, Ю.В. Решітник, 2023

моделі викликають питання про достатність використання в них однопараметричних критеріїв у випадку квазікрихкого типу процесів руйнування, або за складного характеру навантаження. У зв'язку з цим на увагу заслуговують багатопараметричні критерії руйнування.

У роботах [1, 2] використано двопараметричний критерій міцності типу Мізеса – Хілла [3] для побудови моделей зон передруйнування біля вершини тріщини в ортотропних та кусково-однорідних тілах відповідно. Параметрами моделей служили опір відриву і опір зсуву матеріалу, в якому розвивається зона. Ефективність моделей в [1] була підтверджена експериментально, в [2] – успішним порівнянням передбачуваних та спостережуваних на досліді кутів повороту міжфазної тріщини.

Метою даної роботи є дослідження в рамках моделі [2] впливу процесів пластичного і крихкого механізмів руйнування на формування зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини.

Опис моделі. Розглядається модель маломасштабної зони передруйнування в умовах плоскої деформації біля вершини розкритої міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно. Зону передруйнування подано лінією розриву переміщення, нахиленою під кутом α до межі розділу (рис. 1). Нормальне і дотичне напруження на лінії розриву задовольняють критерій міцності типу Мізеса – Хілла

$$(\sigma_\theta / \sigma_1)^2 + (\tau_{r\theta} / \tau_1)^2 = 1, \qquad (1)$$

де σ_1, τ_1 – опори відриву та зсуву першого матеріалу, в якому передбачається утворення зони. Довжина зони передруйнування l вважається значно меншою, ніж довжина тріщини L *(l<< L)* (рис. 1).

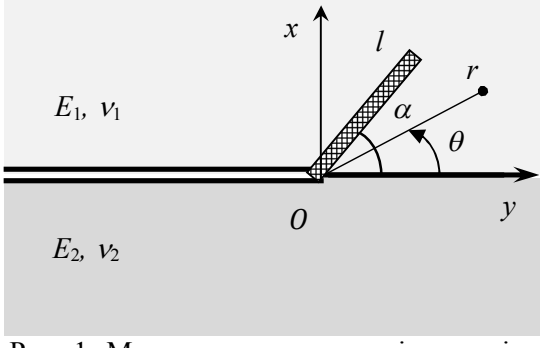

Рис. 1. Модель кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною і зоною передруйнування

Умову на нескінченості сформульовано у вигляді можливості зшивання шуканого розв'язку на відстанях $l = r = L$ з асимптотикою розв'язку аналогічної задачі без лінії розриву [4].

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача про розрахунок параметрів зони зведено до функціонального рівняння Вінера – Гопфа, для якого отримано наближений розв'язок. Використовуючи умову обмеженості напружень в кінці лінії розриву, знайдено рівняння для розрахунку довжини зони l [2]:

$$\left[\frac{G_{11}^{0+}(-1)}{\sigma_1 K^+(-1)}\left(2\,\mathrm{Re}\left(CF_1 l^{\lambda_0} N_1\right)+\frac{\mathcal{H}_{12}}{2\pi}\right)\right]^2 +$$

$$+\left[\frac{G_{22}^{0+}(-1)}{\tau_1 K^+(-1)}\left(2\,\mathrm{Re}\left(CF_2 l^{\lambda_0} N_2\right)+\frac{\mathcal{H}_{21}}{2\pi}\right)\right]^2 = 1,$$

де $C = -ie'KL^{-i\omega}$, $e' = \dfrac{\sqrt{(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)}}{2\sqrt{2\pi}[(e+\kappa_1)^2-(1+e\kappa_2)^2]}$,

$\omega = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{e+\kappa_1}{1+e\kappa_2}$, $e = \dfrac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\dfrac{E_1}{E_2}$, $\kappa_{1(2)} = 3-4\nu_{1(2)}$;

$\lambda_0 = -0.5 + i\omega$ – показник сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини; K – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень, який характеризує величину і конфігурацію зовнішнього навантаження. Решта позначень приведено в [2] і опущено тут через громіздкість. Орієнтація зони передруйнування визначається з умови максимуму величини дисипації енергії в зоні, для якої в [2] отримано відповідний аналітичний вираз. Виведено формули для розкриття тріщини у її вершині $\delta u = \sqrt{\langle u_\theta(0,\alpha\rangle^2 + \langle u_r(0,\alpha\rangle^2}$ та середнього значення фазового кута напружень в зоні $\psi = \mathrm{arctg}\dfrac{(\tau_{r\theta}/\tau_1)}{(\sigma_\theta/\sigma_1)}$.

Числовий аналіз моделі. Дослідимо наслідки моделі щодо впливу процесів пластичного і крихкого механізмів руйнування на параметри зони передруйнування. В якості прикладу розглянемо внутрішню міжфазну тріщину довжиною L у кусково-однорідній площині, навантаженій на нескінченності рівномірно розподіленими тангенціальними і розтягувальними нормальними зусиллями ($\tau_{xy}=q$, $\sigma_x=p>0$ при $x^2+y^2\to\infty$ в декартовій системі координат, зображеній на рис. 1). Нормований комплексний КІН в кінці тріщини визначається як $K=K_1+iK_2$ [4], де

$$K_1 = \frac{(p-2\omega q)\sqrt{\pi L}}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\pi\omega}, \quad K_2 = \frac{(2\omega p+q)\sqrt{\pi L}}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\pi\omega}.$$

Зовнішнє навантаження задаємо безрозмірним модулем $f = \sqrt{p^2+q^2}/\sigma_1$ та конфігурацією, що визначається фазовим кутом $\varphi = \mathrm{arctg}(q/p)$. Результати числових розрахунків для сталих ко-

ефіцієнтів Пуассона $\nu_1=\nu_2=0.3$ подано на рис. 2, де графіки *a*, *b*, *c*, *d* відображають залежності від відношення опорів відриву та зсуву матеріалу, в якому виникла зона, відповідно відносної довжини зони передруйнування $x=l/L$, кута α нахилу зони до межі розділу, фазового кута ψ напруження в зоні та нормованого розкриття тріщини у її вершині $\delta\tilde{u}=\dfrac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\dfrac{\delta u}{L}$.

Як випливає з аналізу рис. 2, у залежності параметрів зони передруйнування від відношення опорів відриву і зсуву передбачається два специфічних ефекти. Перший полягає у переході від крихкого характеру руйнування матеріалу до пластичного та проявляється у швидкому зростанні розмірів зони і розкриття тріщини при перевищенні опором відриву σ_1 матеріалу значення опору зсуву τ_1 (рис. 2*a*, *d*). При цьому також змінюється характер залежності кута нахилу зони до межі розділу (рис. 2*b*) і фазового кута напружень в зоні (рис. 2*c*) від відношення σ_1/τ_1. Даний ефект може спостерігатися при зміні температури твердих тіл, оскільки при нагріванні опір відриву змінюється мало, тоді як опір зсуву помітно зменшується [5]. Підтвердженням цього можуть бути результати експериментів з дослідження впливу температури на поширення міжфазної тріщини у багатошарових вуглепластикових ламінатах [6]. Як встановлено в [6], кут повороту тріщини від межі розділу двох різнонаправлених шарів зменшується зі збільшенням температури. Цей результат узгоджується зі зменшенням кута нахилу зони передруйнування при збільшенні відношення σ_1/τ_1 (суцільні лінії на рис. 2*b* для $\varphi\le 0°$) і пов'язаний зі зменшенням опору зсуву матеріалу шару при підвищенні температури. Однак розвинута вище модель не забезпечує кількісний аналіз результатів роботи [6], оскільки не враховує залежність від температури пружних характеристик і теплове розширення матеріалів, що приводитиме до викривлення межі розділу та появи додаткових напружень.

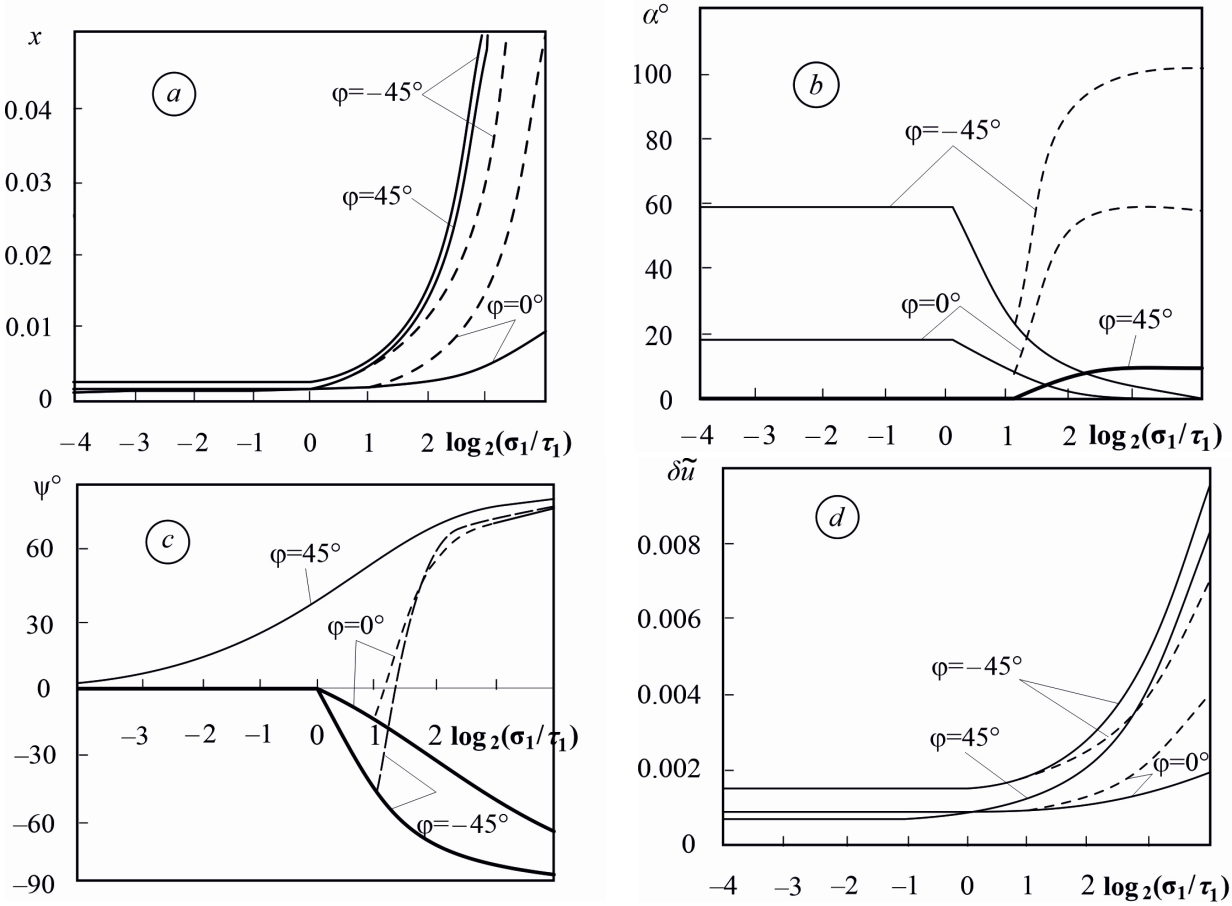

Рис. 2. Залежність параметрів зони передруйнування від відношення опорів відриву і зсуву

Другий ефект від зміни відношення опорів відриву і зсуву проявляється в розгалуженні зони передруйнування при $\sigma_1\ge 2\tau_1$ і $\varphi\le 0°$. Одна із гілок зони (їй відповідають суцільні лінії на графіках) повертається до межі розділу, а інша (пунктирні лінії) відхиляється від межі на значний кут (рис. 2*b*). Крім того, в них виявляється різним напрямок дотичних напружень (рис. 2*c*). Оскільки при

$\sigma_1 \geq 2\tau_1$ процеси руйнування в зоні набувають переважно пластичного характеру і пов'язані з зсувними деформаціями, розгалуження зони передруйнування можна розглядати як непрямий наслідок закону парності дотичних напружень. Розгалуження пластичної зони демонструють, зокрема, результати числового моделювання в [7] маломасштабного поля пластичних деформацій у пружнопластичному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини. Однак слід зазначити, що розвинута вище модель лише вказує на можливість розгалуження зони передруйнування, але непридатна для визначення параметрів її гілок, оскільки базується на припущенні про наявність лише однієї гілки.

Висновки. В статті досліджено двохпараметричну модель маломасштабної зони передруйнування в квазіпружному матеріалі композитного з'єднання біля вершини міжфазної тріщини. Особливістю моделі є використання критерію міцності типу Мізеса – Хілла, параметрами якого служать опір відриву і опір зсуву матеріалу. Модель враховує одночасно крихкий і пластичний процеси руйнування матеріалу в зоні та призначена для вивчення квазікрихкого руйнування кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Виконано числовий аналіз параметрів зони передруйнування в кінці внутрішньої міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині при її навантаженні віддаленими рівномірно розподіленими тангенціальним і розтягувальним нормальним зусиллями. Виявлено існування переходу між крихким і пластичним механізмами руйнування у вузькому інтервалі значень відношення опорів відриву і зсуву біля $\sigma_1/\tau_1 \approx 2$.

Список використаних джерел

1. *Kaminsky A.A.* On modelling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary / A.A. Kaminsky, O.S. Bogdanova, V.N. Bastun // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 2010. – Vol. 34. – P. 345–355.
2. *Kaminsky A.O.* An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials / A.O. Kaminsky, M.V. Dudyk, Y.V. Reshitnyk, Y.O. Chornoivan // Int. J. Solids and Struct. – 2023. – Vol. 267. – N 112117.
3. *Hill R.A.* Theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals / R.A. Hill // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1948. – Vol. 193. – P. 281–297.
4. *Rice J.R.* Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks / J.R. Rice // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1988. – Vol. 55, N 3. – P. 98–103.
5. *Фридман Я.Б.* Механические свойства металлов. Часть 1. Деформация и разрушение / Я.Б. Фридман. – М.: Машиностроение, 1972. – 472 с.
6. *Yamamoto S.* Effect of temperature on crack kinking and jumping in a cross-ply laminated beam / S. Yamamoto, T. Ikeda, A. Senba // Arch. Mech. – 2016. – Vol. 68, N 5. – P. 349–369.
7. *Shih C.F.* Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part II – Structure of small-scale yielding / C.F. Shih, R.J. Asaro // J. Appl. Mech. – 1989. – Vol. 56. – P. 763–779.

References

1. KAMINSKY, A.A., BOGDANOVA, O.S. & BASTUN, V.N. (2010) On modelling cracks in orthotropic plates under biaxial loading: synthesis and summary. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 34. p.345-355.
2. KAMINSKY, A.O., DUDYK, M.V., RESHITNYK, Y.V. & CHORNOIVAN Y.O. (2023) An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials. *Int. J. Solids and Struct*. 267 (112117).
3. HILL, R.A. (1948) Theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. Roy. Soc. London.* 193. p.281-297.
4. RICE, J.R. (1988) Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.* 55 (3). p.98-103.
5. FRIDMAN, Ya.B. (1972) *Mehanicheskie svoystva metallov.* Part 1. Moskva: Mashinostroenie.
6. YAMAMOTO, S. , IKEDA, T. & SENBA, A. (2016) Effect of temperature on crack kinking and jumping in a cross-ply laminated beam. *Arch. Mech*. 68 (5). p.349-369.
7. SHIH, C.F. and ASARO, R.J. (1989) Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part II – Structure of small-scale yielding. *J. Appl. Mech.* 56. p.763-779.

Надійшла до редколегії 20.08.23