УДК 539.375

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.16

Зражевський Г.М.[1], к.ф.-м.н., доцент,
Зражевська В.Ф.[2], к.ф.-м.н., доцент.

Застосування BPOE та CVaR при визначенні оптимальних керувань формами коливань круглої платівки

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т Глушкова 4,
e-mail: greg.zrazhevsky@knu.ua

[2] Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т Перемоги, 37,
e-mail: vera.zrazhevska@gmail.com

G.M. Zrazhevsky[1], PhD,
V.F. Zrazhevska[2], PhD.

Application of BPOE and CVaR in the determination of optimal controls of round plate oscillations

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Glushkova av., 4,
e-mail: greg.zrazhevsky@knu.ua

[2] National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, Peremogi av., 37,
e-mail: vera.zrazhevska@gmail.com

Робота присвячена моделюванню вимушених моногармонійних коливань круглої платівки, що опирається на активні опори з метою визначення оптимального розташування мінімальної кількості опор та оптимального керування опорами, що забезпечують відхилення від заданої форми хвильового руху поверхні платівки з необхідною точністю. Припускалось, що на платівці розташовується ансамбль малих неоднорідностей (дефектів) з невідомими геометричними та фізичними характеристиками. Дефекти моделювались сингулярностями високого порядку, що забезпечують еквівалентність розв'язання граничної задачі з точністю до заданого степеня малого параметра, що є характерною площею областей окремих дефектів. За основний метод дослідження задачі обрана стохастична оптимізація. В якості критерію оптимальності розглянута ймовірність перевищення середньоквадратичним відхиленням форми коливань керованої платівки від заданого хвильового профілю (ймовірність відмови). Формування кількісної характеристики ймовірності відмови проводилось шляхом побудови сценаріїв зі згенерованими дефектами з випадковими характеристиками. Запропоновано використання мір ризику bPOE та CVaR, розглянуті в [1], що є квазіопуклими відносно випадкових величин.

Ключові слова: керування, коливання платівки, bPOE, CVaR.

The work is devoted to the modeling of forced mono harmonic oscillations of a circular plate on active supports in order to determine the optimal location of the minimum number and optimal controls of supports, which ensure the deviation from the given shape of the wave motion of the plate surface with the required accuracy. It was assumed that the plate contains an ensemble of small inhomogeneities (defects) with unknown geometric and physical characteristics. Defects were modeled by high-order singularities, which ensure the equivalence of the boundary value problem solution with specified accuracy to a given power of a small parameter, which is the characteristic area of the regions of individual defects. Stochastic optimization is chosen as the main method of problem research. The probability of exceeding the rms deviation of the oscillation form of the controlled plate from the given wave profile (probability of failure) is considered as a criterion of optimality. The formation of a quantitative characteristic of the probability of failure was carried out by constructing scenarios with generated defects with random characteristics. It is proposed to use the risk measures bPOE and CVaR considered in [1], which are quasi-convex with respect to random variables.

Key words: control, vibration of plate, bPOE, CVaR..

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

У роботі узагальнені та розвинуті результати, отримані раніше в [2-4], де досліджуються задачі знаходження оптимальних параметрів механічних пристроїв для збудження та формування хвильового руху. Такі пристрої можна використовувати для генерації, перетворення та передачі інформації та хвильової енергії. В даній роботі, розглянуто задачу модуляції дзеркала, закріпленого на активних опорах. Завдання полягає в пошуку керуючих сил та їх характеристик - точок прикладання, амплітуди та фази сил, які забезпечують найкраще наближення заданої форми та фази коливань дзеркала з урахуванням структурних неоднорідностей (дефектів) з невизначеними геометричними та механічними характеристиками. В області неоднорідностей змінюється щільність матеріалу, модуль Юнга та циліндрична жорсткість, що є невизначеними. Невизначеними є також розташування дефектів, їх розміри та форма (з деякими накладеними обмеженнями). Дослідження складається з детермінованої та стохастичної частин.

В детермінованій частині вважались відомими характеристики дефектів. Вона зведена до задачі знаходження мінімуму функціоналу, що будується на середньоквадратичному відхиленні прогинів платівки від заданого хвильового профілю. Параметрами оптимізації були точки прикладання, амплітуди та фази керуючих сил активних опор [4]. Для прискорення розв'язання граничної задачі рівноваги платівки, розв'язок якої формує цільову функцію оптимізаційної задачі, дефекти моделювались точковими сингулярностями високого порядку згідно з технікою, основи якої розвинуто в [4-5], що забезпечило точність заданого порядку по відношенню до малого параметра - площі області неоднорідності в припущенні не виродження розмірності дефекту. При розв'язанні детермінованої задачі використовувались методи узагальненої функції Гріна та гармонійний аналіз з контролем кількості гармонік при розкладі по коловій координаті платівки.

В стохастичній частині вважалось, що кількість дефектів та їх характеристики є невизначеними чи щодо них є часткова інформація. Відповідно до цього застосовано метод стохастичної оптимізації на основі методу Монте-Карло. Зазвичай у теорії надійності ризик кількісно визначається ймовірністю відмови. Хоча ймовірність відмови дуже популярна, вона має небажані математичні властивості, такі як некогерентність та розрив для вибіркових розподілів. Щоб подолати ці недоліки, у [1] було розроблено нову альтернативну міру ризику — буферизовану ймовірність відмови (BPF). Вона враховує ступінь перевищення порогу відмови і є більш консервативною, ніж класична ймовірність відмови. Буферизована ймовірність перевищення, bPOE, запропонована в [6], узагальнює BPF у випадку, коли поріг відмови системи може бути будь-яким числом (не тільки 0). Ці міри ризику базуються на властивостях міри ризику CVaR [7]. bPOE має виняткові математичні властивості (за загальних умов bPOE є квазіопуклим відносно випадкової величини).

Постановка та розв'язання задачі

Математичною постановкою детермінованої задачі є гранична задача для рівняння відносно прогину серединної поверхні платівки w та згинаючого моменту $\vec{M}$ в області Ω:

$$\begin{gathered}\mathrm{LL}_1\mathrm{L}_2 w - k^4 w = \frac{q}{D_0} + \\ \mathrm{L}_1\mathrm{L}_2 w\sum_{j=1}^{J}\kappa_{Dj}\mathrm{L}\theta(P_j) - k^4 w\sum_{j=1}^{J}\kappa_{\rho j}\theta(P_j)\end{gathered}, (x,y)\in\Omega \quad (1)$$

з граничними умовами на границі області Γ:

$$\begin{cases} w(x,y)=0 \\ M_n(x,y)=0 \end{cases}, (x,y)\in\Gamma \quad (2)$$

де $\mathrm{L},\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2$ - лінійні матричні диференціальні оператори [4], $\rho_0\omega^2 / D_0 = k^4$ - нормоване хвильове число, q - зовнішнє навантаження (керуючі сили, що моделюють активні опори), $\Delta D_j / D_0 = \kappa_{Dj}$, $\Delta\rho_j / \rho_0 = \kappa_{\rho j}$, $j=\overline{1,J}$ - нормовані зміни циліндричної жорсткості та густини в області j - го дефекту, $\theta(P_j)$ - функція області j - го дефекту. В [4] показано, що для еліптичних дефектів має місце:

$$\begin{gathered}\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2 w\sum_{j=1}^{J}\kappa_{Dj}\mathrm{L}\theta(P_j) - k^4 w\sum_{j=1}^{J}\kappa_{\rho j}\theta(P_j) = \\ \sum_{j=1}^{J}\kappa_{Dj}S_{Pj}\left\{v_x(\xi_j)\partial^2\delta(x-X_j)/\partial x^2\delta(y-Y_j) + \right. \\ 2v_{xy}(\xi_j)\partial\delta(x-X_j)/\partial x\,\partial\delta(y-Y_j)/\partial y + \\ \left. v_y(\xi_j)\partial^2\delta(y-Y_j)/\partial y^2\,\delta(x-X_j)\right\} - \\ -k^4\sum_{j=1}^{J}\kappa_\rho S_{Pj}w(\xi_j)\delta(x-X_j)\delta(y-Y_j) + \underline{\underline{O}}(S_P{}^2)\end{gathered} \quad (3)$$

де S_{Pj} , $j=\overline{1,J}$ - площа j - го дефекту, $S_P = \max S_{Pj}$, $\xi_j = (X_j, Y_j)$ - середня точка j - го дефекту, $\delta(.)$ - дельта функція Дірака, $\vec{v}(\xi_j) = -\vec{M}(\xi_j)/(D_0 - \Delta D)$. В цьому дослідженні доведено, що (3) як перше наближення в просторі узагальнених функцій має місце для дефектів довільної форми при умові однозв'язності та не виродження областей дефектів. В цьому випадку під ξ_j треба розуміти центр площі j - го дефекту. Розроблена техніка для отримання наближень правої частини (1) вищих порядків, одначе використання вищих наближень поскладнено тим, що на відміну від першого наближення має місце інтерференція дефектів, а отже принцип суперпозиції не виконується. Використання моделі дефектів (3) та моделювання активних опор точковими силами дозволяє побудувати розв'язок (1) - (2) з використанням узагальненої функції Гріна.

Оптимізаційна задача в детермінованій постановці при зафіксованому ансамблю дефектів з масивом характеристик D=$J, \left\{\xi_j, \Delta D_j, \Delta\rho_j\right\}_{j=1}^{J}$ (кількість дефектів J , їх положення на платівці ξ_j, геометричні та фізичні характеристики $\Delta D_j, \Delta\rho_j$) має вигляд:

$$
\begin{gathered}
I(w) = \int\limits_{\Omega} \left| w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; \mathrm{D}) - W(\vec{x}) \right|^2 d\Omega_x \underset{\vec{R},\vec{F}}{\rightarrow} \min \\
\left\{\vec{R}, \vec{F}\right\} \in U
\end{gathered} \tag{4}
$$

де $\vec{R} = \{x_i, y_i\}_{i=1}^{N}$ визначає розташування опор, $\vec{F} = \left\{F_i\right\}_{i=1}^{N}$ - комплексні амплітуди сил, що моделюють опори, $W(\vec{x})$ - заданий хвильовий профіль, що має бути наближений. U - область допустимих змін параметрів оптимізації. Оскільки $w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; \mathrm{D})$ є розв'язком граничної задачі (1) - (3), то функціонал в (4) не є квадратичним. Показано, що у випадку, коли опори розташовуються на концентричних колах з довільними радіусами, функціонал в (4) є опуклим. У випадку, коли D є стохастичним, $w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; \mathrm{D})$ стає випадковою функцією та значення функціоналу в (4) є випадковим. А отже, оптимізаційна задача (4) з врахуванням параметризації $w = w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; \mathrm{D})$ має бути трансформована до вигляду мінімізації функції:

$$
\begin{gathered}
H(\vec{R}, \vec{F}) = \eta\left(I(w(\vec{x}; \vec{R}, \vec{F}; \mathrm{D}))\right) \underset{\vec{R},\vec{F}}{\rightarrow} \min \\
\left\{\vec{R}, \vec{F}\right\} \in U
\end{gathered} \tag{5}
$$

де $\eta(.)$ є деякою мірою ризику. В проведеному дослідженні в якості мір ризику було використано CVaR та bPOE. За означенням, CVaR (Conditional Value-at-Risk) від випадкової величини X (що характеризують втрати) визначається як математичне очікування значень, що перевищують значення квантілі з рівнем α :

$$
CVaR_\alpha\left(X\right) = E\left[X : X \ge q_\alpha\left(X\right)\right]. \tag{6}
$$

де для заданої функції розподілу $F_X\left(x\right) = P\left\{X \le x\right\}$, квантіля рівня α визначається як $q_\alpha\left(X\right) = F_X^{-1}\left(\alpha\right) = \inf\left\{x : \alpha \le F_X\left(x\right)\right\}, \alpha \in \left(0,1\right).$ CVaR є консервативною оцінкою по відношенню до значення квантілі (VaR - Value-at-Risk), що є природною мірою ризику та часто використовується в теорії надійності, але має суттєво кращі математичні властивості: гладкість та опуклість по відношенню до випадкової величини, отже суттєво спрощує оптимізаційну процедуру. В [7] надається правило для підрахунку CVaR:

$$
CVaR_\alpha\left(X\right) = \min_u \left(u + E\left[X - u\right]^+ / (1-\alpha)\right),
$$

де $\left[\cdot\right]^+ = \max\left\{\cdot, 0\right\}$.

Якщо CVaR (як і VaR) визначає значення в просторі X , тобто середнє значення втрат, що перевищують значення квантілі з заданим рівнем то обернена до неї величина bPOE визначається як обернена величина до CVaR, тобто ймовірність того, що середнє значення втрат перевищить заданий рівень [6]:

$$
bPOE_x(X) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \ge \sup X; \\ 1 - CVaR^{-1}(x; X) & \text{if } EX < x < \sup X; \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

Аналогічно bPOE є консервативною оцінкою для POE (probability of exceedance): $p_X\left(x\right) = P\left\{X > x\right\} = 1 - F_X\left(x\right)$ та має ті є властивості, що і CVaR. Використання CVaR чи bPOE є альтернативним, і призводить до однакових результатів.

Результатом досліджень стала розробка програмного пакету в середовищі MATLAB, що дозволяє визначати оптимальні параметри керування при заданій хвильовій формі поверхні кругового дзеркала. В якості засобу розв'язання задач умовної опуклої оптимізаці використовується продукт компанії AORDA (http://www.aorda.com) PSG MATLAB. Розроблений алгоритм продемонстрував високу ефективність та продуктивність на рівні real time calculating.

Список використаних джерел

1. *Rockafellar T.* On buffered failure probability in design and optimization of structures / T. Rockafellar, J. O. Royset // Reliability Engineering and System Safety. – 2010. - № 95. – P. 499 - 510.
2. *Zrazhevsky G.* Mathematical Methods to Find Optimal Control of Oscillations of a Hinged Beam (Deterministic Case) / G. Zrazhevsky, A. Golodnikov, S. Uryasev // Cybernetics and Systems Analysis. – 2019. – № 55. – P. 1009 - 1026. – Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.1007/s10559-019-00211-x
3. *Zrazhevsky G.* Application of Buffered Probability of Exceedance in Reliability Optimization Problems / G. Zrazhevsky, A. Golodnikov, S. Uryasev // Cybernetics and Systems Analysis. – 2020. – № 56. – P. 476 - 484. – Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.1007/s10559-020-00263-4
4. *Zrazhevsky, G.M.* Developing a Model for a Modulating Mirror Fixed on Active Supports. Deterministic Problem / G. M. Zrazhevsky, V.F. Zrazhevska, A.N. Golodnikov // Cybernetics and Systems Analysis. – 2022. – № 58. – P. 707 - 712
5. *Зражевський Г.М.* Моделювання скінченних неоднорідностей дискретними особливостями / Г.М. Зражевський, В.Ф. Зражевська // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2021. - № 1 (135). – С. 138-144.
6. *Mafusalov A.* Buffered probability of exceedance: mathematical properties and optimization./ A. Mafusalov // SIAM. J. Optim. – 2018. – V. 28. – P. 1077–1103. - Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.1137/15M1042644
7. *Rockafellar R.T.* Optimization of conditional value-at-risk / R.T. Rockafellar, S. Uryasev // The Journal of Risk. – 2000. - V. 2. – №. 3. - P. 21-41. - Режим доступу до журн.: https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038.

References

1. ROCKAFELLAR, T. & ROYSET, J. O. (2010) On buffered failure probability in design and optimization of structures. *Reliability Engineering and System Safety*. 95. p. 499 - 510.
2. ZRAZHEVSKY, G., GOLODNIKOV, A. & URYASEV, S. (2019) Mathematical Methods to Find Optimal Control of Oscillations of a Hinged Beam (Deterministic Case). *Cybernetics and Systems Analysis.* 55. p. 1009-1026.
3. ZRAZHEVSKY, G., GOLODNIKOV, A. & URYASEV, S. (2020) Application of Buffered Probability of Exceedance in Reliability Optimization Problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 56. p. 476-484.
4. ZRAZHEVSKY, G.M, ZRAZHEVSKA V.F. & GOLODNIKOV, A.N. (2022) Developing a Model for a Modulating Mirror Fixed on Active Supports. Deterministic Problem. *Cybernetics and systems analysis.* 58. p. 707-712.
5. ZRAZHEVSKY, G.M, & ZRAZHEVSKA V.F. (2021) Modelyuvannya skinchennykh neodnoridnostey dyskretnymy osoblyvostyamy. *Zhurnal obchyslyuval'noyi ta prykladnoyi matematyky.* 1(135). p. 138-144.
6. MAFUSALOV, A. & URYASEV, S. (2018) Buffered probability of exceedance: mathematical properties and optimization. *SIAM. J. Optim*. 28. p. 1077-1103.
7. ROCKAFELLAR, R.T. & URYASEV S. (2000) Optimization of conditional value-at-risk *The Journal of Risk.* 2 (3). p. 21-41.

Надійшла до редколегії 11.08.2023