

УДК 539.375

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.13>

Даляк Т. М.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н, доц.,  
Шацький І. П.<sup>2</sup>, д. ф.-м. н, проф.

T. M. Dalyak<sup>1</sup>, Cand. Phys. & Math. Sc., Ass. Prof.  
I. P. Shatsky<sup>2</sup>, Dr. Phys. & Math. Sc., Prof.

### Про крихке руйнування тіла з частково залікованою зірчастою тріщиною

### On brittle fracture of a body with partial healed star-shaped crack

Лабораторія моделювання демпфуючих систем  
Інституту прикладних проблем механіки і  
математики ім. Я. С. Підстригача НАН  
України, 76002, м. Івано-Франківськ, вул.  
Микитинецька, 3,

Laboratory of Modeling of Damping Systems,  
Pidstryhach-Institute for Applied Problems in  
Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,  
76002, Ivano-Frankivsk, Mykytynetska str., 3,

<sup>1</sup> e-mail: [tdalyak@gmail.com](mailto:tdalyak@gmail.com)

<sup>1</sup> e-mail: [tdalyak@gmail.com](mailto:tdalyak@gmail.com)

<sup>2</sup> e-mail: [ipshatsky@gmail.com](mailto:ipshatsky@gmail.com)

<sup>2</sup> e-mail: [ipshatsky@gmail.com](mailto:ipshatsky@gmail.com)

*Експрес-методика оцінки міцності тіла з частково залікованою тріщиною використовується для моделювання реновації тіла із зіркоподібним дефектом циклічно-симетричної структури. За розв'язками задачі механіки тріщин у однорідному за пружними властивостями та неоднорідному за тріщиностійкістю тілі дослідили залежності ефективності залікування від ступеня заповнення тріщини та від якості з'єднувального шару. Детально розглянуто два варіанти залікування: поблизу вершин та поблизу центра зірчастого дефекту.*

*Ключові слова: тверде тіло, зірчаста тріщина, крихке руйнування, ефективність залікування.*

*In this article, the express methodology for assessing the strength of a brittle material with a partially healed crack is used to model the renovation of a body with a star-shaped defect of a cyclically symmetrical structure. The rheology of the joint layer is not taken into account, but the specific surface energy in the healed area is generally different than in the solid body. Therefore, we have the problem of crack mechanics in a body that is homogeneous in terms of elastic properties and heterogeneous in terms of crack resistance. The degree of crack healing was described by two parameters: the ratio of the crack resistance of the joint and body materials and the ratio of the length of the healed area to the length of the initial crack. The subject of the analytical study was the efficiency of healing - the ratio of ultimate loads of brittle failure for a healed and primary crack. Two treatment options are considered in detail: near the peaks and near the center of the star defect.*

*Key Words: solid, star crack, brittle fracture, healed efficiency.*

Статтю представив член-кореспондент НАН України Я.О.Жук

#### Вступ

Проблема продовження терміну експлуатації елементів конструкцій залишається актуальною на сьогоднішній день. Руйнування матеріалу внаслідок розвитку тріщин є однією із найпоширеніших причин втрати його цілісності.

Відновлення суцільності дефектної конструкції на частині тріщини закономірно

знижує концентрацію напружень біля її вершин. Це, однак, відбувається за рахунок підвищення напружень на залікованій ділянці. Ця обставина мусить бути врахована під час оцінки утримувальної здатності відремонтованої деталі.

Мета цієї роботи – оцінити ефективність часткового залікування крихкого тіла із зірчастою тріщиною.

### Модель залікованої тріщини. Постановка задачі

Експрес-методика оцінки міцності тіла з частково залікованою тріщиною [1] у цьому повідомленні використовується для моделювання реновації тіла із зіркоподібним дефектом циклічно-симетричної структури. Тріщина у деформованому тілі розуміється як поверхня розриву переміщень. Якщо у деякій підобласті цієї поверхні відновити суцільність тіла, то дістанемо новий об'єкт – частково заліковану тріщину. Реологія неконтрастного з'єднувального шару не враховується, однак питома поверхнева енергія  $\gamma_h$  на залікованій ділянці загалом вважається інакшою, ніж  $\gamma_0$  у суцільному тілі. Таким чином, маємо задачу механіки тріщин у однорідному за пружними властивостями та неоднорідному за тріщиностійкістю тілі.

Ступінь заліковування тріщини описували двома параметрами: відношенням тріщиностійкостей матеріалів з'єднання та тіла:  $\eta = \sqrt{\gamma_h / \gamma_0}$  та відношенням довжини залікованої ділянки до довжини початкової тріщини:  $\psi = l_h / l_0 \in [0, 1]$ . Ефективність заліковування шукали як відношення граничних навантажень для залікованої та первинної тріщини:  $\chi = p_h / p_0$ .

У межах припущень плоскої задачі теорії пружності розглядали безмежну площину із зірчастою  $N$ -ланковою тріщиною за умов всебічного розтягу напруженнями  $p = \text{const}$ . Побудуємо залежність  $\chi(\eta, \psi)$  для різних варіантів залікування.

#### Тріщина, залікована в околі вершин

Нехай зірчаста тріщина залікована поблизу вершин на ділянках  $(l, l_0)$ , тобто маємо  $N$ -ланкову систему укорочених тріщин завдовжки  $l$  (рис. 1).

Тоді коефіцієнт інтенсивності напружень для вихідної тріщини буде:

$$k_1^0 = p\sqrt{\pi l_0} F^0(N), \quad (1)$$

а для залікованої –

$$k_1^h = p\sqrt{\pi l} F^0(N), \quad (2)$$

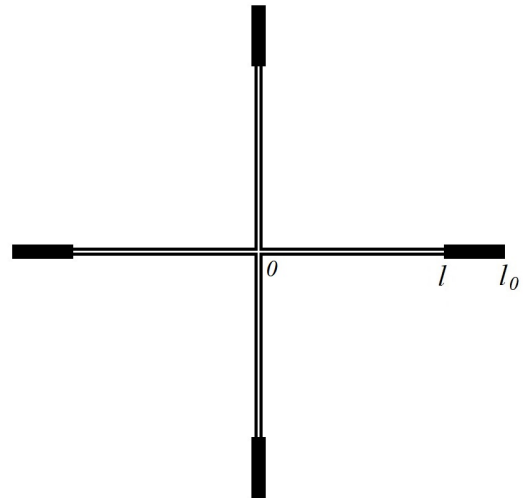


Рис. 1 Зірчаста тріщина, залікована поблизу вершин

де  $F^0(N)$  – відома функція від кількості ланок [2–4].

Враховавши співвідношення критерію Гріффітса [4]:

$$\begin{aligned} k_1^0 &= K_{1C}^0 = \sqrt{2E\gamma_0}, \\ k_1^h &= K_{1C}^h = \sqrt{2E\gamma_h}, \end{aligned}$$

із формул (1) і (2) маємо граничні навантаження:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\sqrt{2E\gamma_0}}{F^0(N)\sqrt{\pi l_0}}, \\ p_h &= \frac{\sqrt{2E\gamma_h}}{F^0(N)\sqrt{\pi l}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Знайдемо ефективність заліковування:

$$\chi = \frac{p_h}{p_0} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\psi}}. \quad (4)$$

Для залікованої поблизу вершин тріщини ефективність (4) ніяк не залежить від кількості ланок дефекту. Із зростанням відносної протяжності ділянки заліковування  $\psi$  спостерігаємо зростання стримувальної здатності (рис. 2). Використання матеріалів з більшою тріщиностійкістю також позитивно впливає на значення ефективності  $\chi$ . Зазначимо також, що процедура відновлення цілісності має сенс, якщо  $\chi > 1$ .

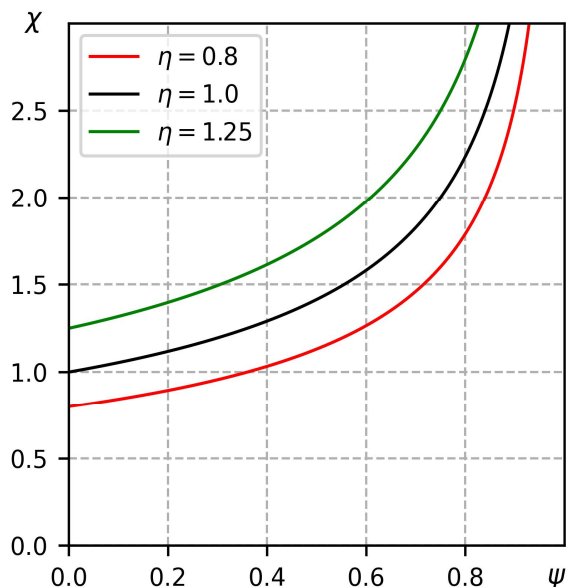


Рис. 2 Вплив ступеня заліковування вершин тріщини на утримувальну здатність тіла

### Тріщина, залікована в околі центра

Нехай тепер суцільність тіла відновлено в околі центра зірчастої тріщини на ділянках  $(0, a)$  (рис. 3). Задача для залікованої тріщини трансформується у відому задачу розтягу площини з циклічною системою радіальних розрізів  $(a, l_0)$  [4, 5], за розв'язками якої маємо співвідношення для коефіцієнтів інтенсивності зусиль:

$$k_1^\pm = p\sqrt{\pi l}F^\pm(\lambda, N), \quad (5)$$

Рис. 3 Зірчаста тріщина, залікована поблизу центра

де  $F^\pm(\lambda, N)$  відображає взаємне розташування розрізів, а  $l = (l_0 - a)/2$ ,  $\lambda = l/R$ ,  $R = (a + l_0)/2$ .

Застосувавши критерій Гріффітса до співвідношення (5) та виконавши аналогічні до попереднього пункту перетворення, дістали вираз для граничного навантаження:

$$p_h = \min\left(\frac{\sqrt{2E\gamma_h}}{\sqrt{\pi l}F^-(\lambda, N)}, \frac{\sqrt{2E\gamma_0}}{\sqrt{\pi l}F^+(\lambda, N)}\right). \quad (6)$$

Врешті, скориставшись значеннями граничних навантажень (3) і (6), отримали формулу для ефективності заліковування тріщини поблизу

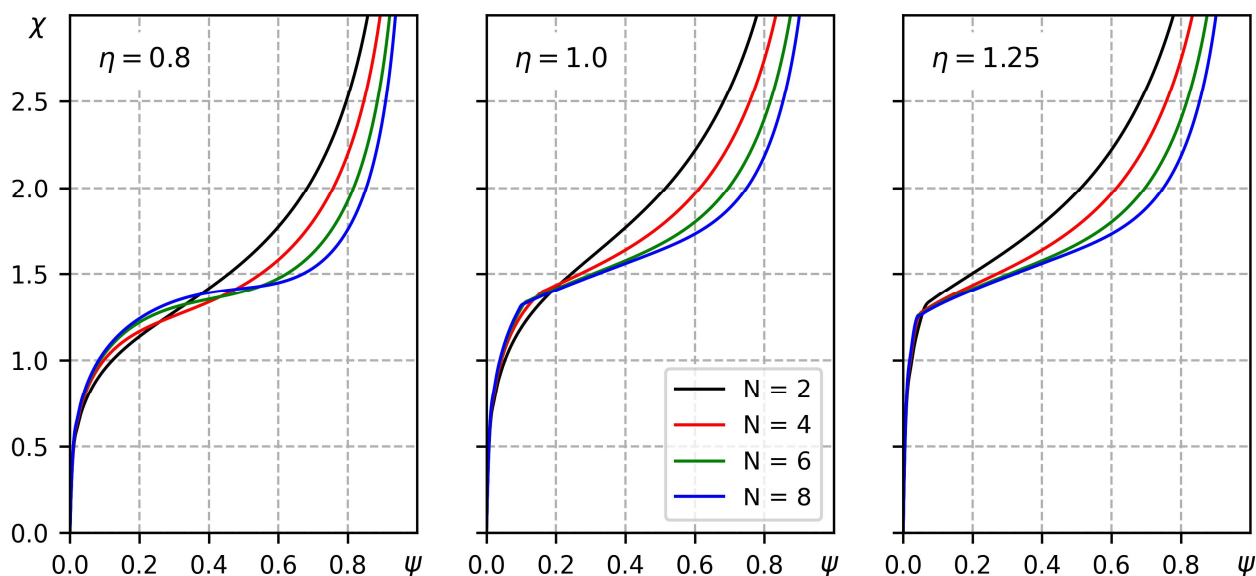


Рис. 4 Вплив ступеня заліковування центра тріщини на утримувальну здатність тіла

центра:

$$\chi = \frac{\sqrt{2} F^0(N)}{\sqrt{1-\psi}} \min \left( \frac{\eta}{F^-\left(\frac{1-\psi}{1+\psi}, N\right)}, \frac{1}{F^+\left(\frac{1-\psi}{1+\psi}, N\right)} \right). \quad (9)$$

Тут враховано, що  $l/l_0 = (1-\psi)/2$ ,  
 $\lambda = (1-\psi)/(1+\psi)$ .

На рис. 4 подано залежність утримувальної здатності дефектного тіла від довжини ділянки заліковування для різної кількості дефектів та різних характеристиках якості матеріалу відновлення. У випадку  $\eta < 1$  небезпечною завжди є зона заліковування. Для малих  $\psi$  ефективність зростає зі збільшенням кількості ланок дефекту, для більших  $\psi$  – ефект протилежний. За відсутності контрасту ( $\eta = 1$ ) спостерігаємо зміну тенденцій – для малих  $\psi$  небезпечною буде все ще внутрішня частина, в той час як для  $\psi > 0.15$  ( $N = 4$ ),  $\psi > 0.11$  ( $N = 6$ ) і  $\psi > 0.1$  ( $N = 8$ ) небезпечнішими стають зовнішні вершини тріщини. Така зміна характеру руйнування відображається зламами на графіках. Винятком є випадки  $N = 2; 3$ . Із зростанням  $\eta > 1$

перерозподіл відбувається для усіх варіантів кількості ланок, а точки зміни типу руйнування зміщуються уліво.

### Висновки

Розроблена методика дозволяє отримати аналітичні оцінки міцності крихкого тіла із частково залікованою зірчастою тріщиною. Аналітичний результат досягається за рахунок радикального спрощення – нехтуємо реологією з'єднання берегів тріщини.

Збільшення зони відновлення та підвищення якості зчеплення сприяють зростанню утримувальної здатності матеріалу.

У разі заліковування поблизу вершин зіркоподібної тріщини ефективність заліковування не залежить від числа ланок.

У разі заліковування поблизу центра позитивний результат досягається для не надто коротких ділянок зчеплення (не мале  $\psi$ ). Крім того, для малих  $\eta$  небезпечні є внутрішні вершини, а при більших – зовнішні вершини залікованої тріщини. Про зміну механізму руйнування свідчать злами на графіках.

### Список використаних джерел

1. Шацький І. П. Гранична рівновага пластини з частково залікованою тріщиною / І. П. Шацький // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 25–31.
2. Westmann R. A. Pressurized star crack // J. Math. and Phys. – 1964. – 43, N 3. – P. 191–198.
3. Williams W. E. A star-shaped crack deformed by an arbitrary internal pressure // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – 9, N. 8. – P. 705–712.
4. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под ред. Панасюка В. В. – Киев: Наук. думка, 1988. – Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М. П. – 1988. – 620 с.
5. Tweed J., Rooke D. P. The stress intensity factor of a star-shaped array of cracks in infinite elastic solid // Int. J. Eng. Sci. – 1974. – 12. N 5. – P. 423–431.

### References

1. SHATS'KYI, I.P. (2015) Limiting Equilibrium of a Plate with Partially Healed Crack. *Mater Sci.* 51. p. 322–330
2. WESTMANN, R. A. (1964) Pressurized star crack. *J. Math. and Phys.* 43 (3). p. 191–198.
3. WILLIAMS, W. E. (1971) A Star-Shaped Crack Deformed by an Arbitrary Internal Pressure. *Int. J. Eng. Sci.* 9 (8). p. 705–712.
4. SAVRUK, M. P. (1988) *Intensity factors stresses in bodies with cracks*, Fracture mechanics and Strength of Materials: A Reference Guide under General edited by Panasyuk V.V. V.2. - Kyiv: Nauk. Dumka.
5. TWEED J., ROOKE D. P. (1974) The Stress Intensity Factor of a Star-Shaped Array of Cracks in Infinite Elastic Solid. *Int. J. Eng. Sci.* 12 (5). p. 423–431.

Надійшла до редколегії 19.06.23