

University of South Alabama

JagWorks@USA

University Faculty and Staff Publications

1991

Ein Beitrag Zur Klassifikation Von Koppelkurven (A Contribution to the Classification of Coupler Curves)

Jorg Feldvoss

Wolfram Funk

Peter Tolle

Follow this and additional works at: https://jagworks.southalabama.edu/usa_faculty_staff_pubs



Part of the [Mathematics Commons](#)

EIN BEITRAG ZUR KLASSIFIKATION VON KOPPELKURVEN

J. FELDVOSS

Mathematisches Seminar der Universität Hamburg,
Bundesstrasse 55, W-2000 Hamburg 13, Bundesrepublik Deutschland
W. FUNK

Universität der Bundeswehr Hamburg,
Institut für Konstruktions- und Fertigungstechnik
Holstenhofweg 85, W-2000 Hamburg 70, Bundesrepublik Deutschland
P. TOLLE

CADEC GmbH, Lütjenseer Str. 8, W-2077 Trittau,
Bundesrepublik Deutschland

Abstract. A study of the coupler curves of four-bar and Watt mechanisms is undertaken either theoretically or based on a computer program that is integrated in a CAD-System. This leads even in the case of four-bar linkages to some new insights concerning the existence of nodes and cusps. The possible real singularities of non-degenerate coupler curves of the Watt mechanism are determined and by means of our computer program, we demonstrate their difficult structure.

Keywords. Coupler curves, multiple point, crunode, acnode, cusp, genus, tacnode, rhamphoid cusp, four-bar mechanism, Watt mechanism, instantaneous pole, moving polode, Ball point, straight-line motion

EINLEITUNG

Die große Formenvielfalt der Koppelkurven von ebenen Gelenkgetrieben ist zwar im Hinblick auf technische Anwendungen willkommen, läßt aber schon bei einfachen Getriebetypen einen Überblick unmöglich erscheinen. Deshalb ist es sinnvoll, die Koppelkurve eines gegebenen Getriebes nach bestimmten Gesichtspunkten zu unterteilen. Da die Koppelkurvengestalt in starkem Maße von der Beschaffenheit der vorhandenen Singularitäten bzw. Flachpunkte abhängt, bieten sich Kurven, die durch deren Sonderfälle definiert sind, für eine Klassifizierung der Koppelkurvenformen eines gegebenen Getriebes geradezu an.

R. MÜLLER (1889/1891) legte für den einfachsten Fall der Viergelenkgetriebe eine Einteilung der Koppelkurve hinsichtlich der Gestaltänderung der zugehörigen Koppelkurven vor. Dabei benutzte er die folgenden drei geometrischen Orte - nämlich

Gangpolkurve,
Flachpunktcurve (Ball-Kurve),
Übergangskurve,

deren Koppelkurven sich bezüglich der vorhandenen Doppelpunkte bzw. Flachpunkte nicht unterscheiden. Für praktische Anwendungen hat J. Volmer (1958) später einen Koppelkurvenatlas erstellt, der die Kurven bezüglich ihrer Doppelpunkte klassifiziert. Ergänzt wurde dies von Fichter/Hunt (1979) durch eine Untersuchung der Sonderdoppelpunkte und Inflexionstangenten. Diese Klassifikation wird außerdem mit der bekannten Systematik der Viergelenkgetriebe in Beziehung gesetzt. Im folgenden Beitrag ergänzen wir die eben genannten Arbeiten durch Betrachtung von Spitzenpunkten bzw. Gangpolkurven für Viergelenkgetriebe mit bis zu einem Schubgelenk und eine Klassifikation der möglichen reellen Singularitäten für das Watt-Zweistandgetriebe.

* Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden während des durch die DFG geförderten Projekts "Punktrastgetriebe" gefunden.

DOPPELPUNKTE UND HÖHERE SINGULARITÄTEN

Sei k eine ebene reelle Kurve und P ein Punkt auf k , dann heißt die Ordnung des niedrigsten nicht-verschwindenden Terms in der Taylor-Entwicklung der Kurvengleichung um P Multiplizität von k in P und wird im folgenden durch $\mu_P(k)$ abgekürzt. P heißt r -facher Punkt von k , falls P die Multiplizität r hat, d.h. jede Gerade durch P schneidet k mit einer Vielfachheit $> r$ (vgl. Hilton, 1932; S. 23). Ist $r > 1$, so nennt man P singulär. Man beachte, daß k in einem r -fachen Punkt r (nicht notwendig verschiedene) Tangenten besitzt, deren Gleichung man durch Nullsetzen des niedrigsten nicht-verschwindenden Terms in der entsprechenden Taylor-Entwicklung erhält und die deshalb k $(r+1)$ -punktig berühren. P heißt gewöhnlicher r -facher Punkt von k , falls k in P genau r verschiedene (möglicherweise komplexe) Tangenten besitzt.

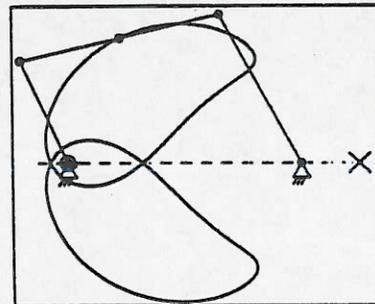


Bild 1: Koppelkurve einer Kurbelschwinge mit zwei reellen Selbstschnittpunkten und einem reellen isolierten Punkt

Doppelpunkte sind die einfachsten auftretenden Singularitäten, wobei folgende drei Typen unterschieden werden. Doppelpunkte mit zwei verschiedenen reellen Tangenten heißen Knotenpunkte (Selbstschnittpunkte), solche mit zwei imaginären Tangenten heißen isolierte Punkte (Bild 1). Fallen beide Tangenten zusammen, so

entstehen Spitzenpunkte (Bild 2). Um das Fehlen höherer Singularitäten (d.h. Punkte mit einer Multiplizität > 2) für beliebige Koppelkurven ebener Viergelenkgetriebe zu zeigen, führen wir das Geschlecht g einer algebraischen Kurve vom Grad n ein (vgl. Hilton, 1932; S. 116):

$$g := \frac{1}{2} (n-1)(n-2) - \frac{1}{2} \sum_{P \text{ singularär}} \mu_P(k) [\mu_P(k)-1] \quad (*)$$

Die Koppelkurve k_4 eines viergliedrigen Drehgelenkgetriebes hat mindestens drei Doppelpunkte (vgl. Ebner, 1906; S. 53), wovon einer stets reell ist und die anderen beiden konjugiert-komplex sind. Außerdem ist k_4 eine trizirkulare (d.h. die beiden imaginären Kreispunkte sind Tripelpunkte von k_4) algebraische Kurve sechsten Grades (vgl. Ebner, 1906; S. 49). Da das Geschlecht für nicht-zerfallende Kurven (d.h. durch ein irreduzibles Polynom beschreibbar) eine nicht-negative Zahl ist, bekommt man:

$$0 \leq g = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \sum_{P \text{ singularär}} \mu_P(k_4) [\mu_P(k_4)-1]$$

d.h.

$$\sum_{P \text{ singularär}} \mu_P(k_4) [\mu_P(k_4)-1] \leq 2$$

Daraus folgt, daß k_4 höchstens einen weiteren Doppelpunkt, aber keine höheren Singularitäten besitzt. Dieser sogenannte Sonderdoppelpunkt kommt in der Verzweigungslage durchschlagfähiger Gelenkvierecke auch wirklich vor (Bild 2). Andererseits treten bei durchschlagfähigen viergliedrigen Drehgelenkgetrieben mit zwei oder drei Verzweigungslagen fünf bzw. sechs Doppelpunkte auf (vgl. Fichter/Hunt, 1979; S. 1030). Dies steht aber im Einklang mit der obigen Betrachtung, weil die zugehörigen Koppelkurven in einen Kreis und eine Quartik bzw. drei Kreise zerfallen. Eine ganz analoge Argumentation läßt sich auch auf Viergelenkgetriebe mit Schubgelenken anwenden.

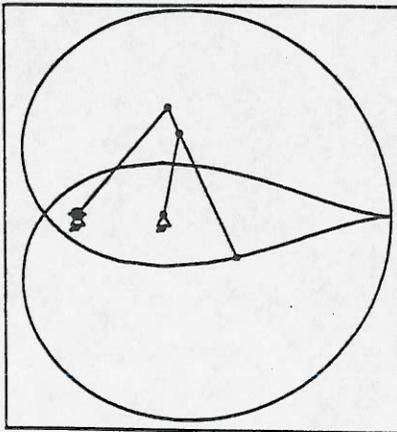


Bild 2: Koppelkurve einer durchschlagfähigen Innen-Außenschwinge mit einer reellen Spitze in der Verzweigungslage

Die Übergangskurve q ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Bahnkurven Selbstberührungspunkte (d.h. zwei zusammenfallende Doppelpunkte) besitzen. q trennt die Koppel Ebene in zwei Gebiete, deren Punkte entweder Bahnkurven mit drei reellen Doppelpunkten oder Bahnkurven mit einem reellen Doppelpunkt aufweisen (Müller, 1889/1891).

Die Bahnkurven k_6 und k_6^* der Punkte der beiden höheren Koppel Ebenen DE bzw. CD eines Watt-Zwei-

standgetriebes (Bild 3) besitzen jeweils fünf und zwanzig (komplexe) Doppelpunkte (Primrose u.a., 1967; S. 29).

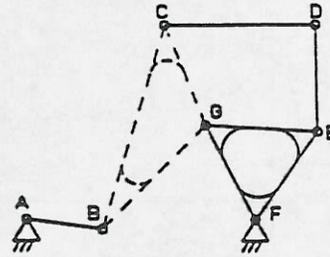


Bild 3: Die höheren Koppel Ebenen CD und DE des Watt-Zwei-standgetriebes

Außerdem ist k_6 eine siebenfach zirkulare algebraische Kurve vierzehnten Grades und k_6^* eine achtfach zirkulare algebraische Kurve sechzehnten Grades (Primrose u.a., 1967; S.40). Für nicht-zerfallende Koppelkurven k_6 und k_6^* erhält man wie eben aus (*) :

$$\sum_{P \text{ singularär}} \mu_P(k_6) [\mu_P(k_6)-1] \leq 22$$

bzw.

$$\sum_{P \text{ singularär}} \mu_P(k_6^*) [\mu_P(k_6^*)-1] \leq 48$$

Daraus folgt, daß k_6 höchstens fünffache Punkte und k_6^* höchstens siebenfache Punkte besitzt. Außerdem zeigt Tafel 1, welche reellen Singularitäten für eine nicht-zerfallende Bahnkurve k_6 höchstens auftreten können. Eine entsprechende Tabelle für k_6^* konnte aus Platzgründen nicht aufgenommen werden. Das ist ein weiteres Anzeichen für die Komplexität der Koppelnkurven dieser sogenannten Punkttrastebene (vgl. Hain, 1981).

Tafel 1: Reelle Singularitäten von nicht-zerfallenden Koppelkurven k_6 des Watt-Zwei-standgetriebes

Multiplizitäten	maximale Anzahl reeller Singularitäten						
2	26	27	30	27	30	33	36
3	0	1	0	3	2	1	0
4	0	1	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0

SPITZENPUNKTE

Die Koppelkurven k_4 eines durchschlagfähigen Viergelenkgetriebes mit einer Verzweigungslage zerfallen nicht und haben aufgrund der Existenz des Sonderdoppelpunktes und (*) das Geschlecht Null. Da k_4 sechsten Grades ist, besitzt k_4 höchstens drei Spitzenpunkte (Hilton, 1932; S. 114). Für durchschlagfähige Viergelenke mit mehr als einer Verzweigungslage gibt es offenbar höchstens zweispitzige Koppelkurven, und für alle anderen Getriebetypen existieren überhaupt nur drei Doppelpunkte. Insgesamt ist damit gezeigt, daß Koppelkurven von Viergelenkgetrieben im allgemeinen höchstens drei Spitzenpunkte besitzen. Man beachte aber, daß Sonderdoppelpunkte durchaus zu Spitzen entarten können (Bild 2).

Für die Existenz zweispitziger Koppelkurven von Viergelenkgetrieben ist es hinreichend, daß mindestens ein Lenker kürzer als das Gestell ist (Hain, 1987). Im Falle umlaufender Viergelenkgetriebe (z.B. Doppelkurbeln) scheint diese Bedingung auch notwendig zu sein, was jedoch für totalschwingfähige Viergelenkgetriebe nicht zutrifft (Hain, 1987; S.90).

A.E. Mayer (1938) gibt eine sehr einfache Konstruktion eines Viergelenkgetriebes an, so daß mindestens eine Koppelpunktbahn in drei vorgegebenen Lagen einen Spitzenpunkt durchläuft. Außerdem ist es für die Existenz dreispitziger Koppelkurven notwendig, daß die Gestelllänge maximal ist (Mayer, 1938; S. 398). Es ist zu beachten, daß dreispitzige Koppelkurven umlauffähiger Viergelenke höchstens zwei Spitzenpunkte in einem Kurvenzweig haben können. Nur diese zwei Spitzen stehen also für praktische Anwendungen zur Verfügung. Der Sonderdoppelpunkt bei dreispitzigen Koppelkurven durchlauffähiger Viergelenkgetriebe ist der Mittelpunkt des Inkreises des Spitzendreiecks (Mayer, 1938; S. 426).

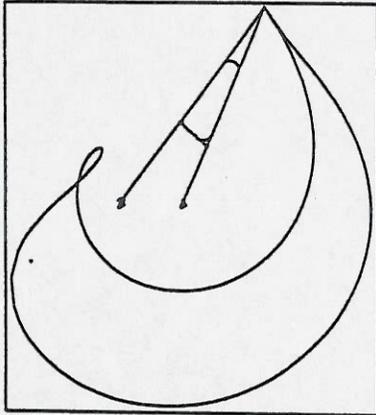


Bild 4: Koppelkurve einer Innen-Außenschwinge mit einer Schnabelspitze

Man kann von einer Spitze im allgemeinen kein Koppelrastgetriebe ableiten, da der zugehörige Krümmungsradius verschwindet. Im Sonderfall der sogenannten Schnabelspitze (d.h. beim Zusammenfallen eines Selbstschnittpunktes mit einer Spitze bzw. beim Zusammenfallen zweier Spitzen) ist der entsprechende Krümmungsradius nicht Null, und die beiden Kurvenbögen liegen auf derselben Seite der Spitzentangente (Bild 4). Ein Koppelpunkt eines Viergelenkgetriebes durchläuft eine Schnabelspitze S, wenn S mit dem Momentanpol zusammenfällt und die Verbindungsgerade von S mit dem Schnittpunkt von Gestell und Koppelgerade senkrecht auf dem Gestell steht (Müller, 1897; S. 269/270). S hat dann einen fünfpunktig berührenden Krümmungskreis, d.h. es handelt sich um einen sogenannten Burmester-Punkt, und besitzt außerdem eine vierpunktig berührende Tangente, d.h. S ist auch ein sogenannter Ball-Punkt. Koppelkurven mit Schnabelspitzen für das Watt-Zweistandgetriebe lassen sich mit den Methoden von Shimojima/Ogawa (1975) erzeugen.

GANGPOLKURVEN

Die Gangpolkurve p ist der geometrische Ort aller Punkte der Koppelenebene, deren Bahnkurven einen Punkt mit verschwindender Momentangeschwindigkeit besitzen. Nun haben Koppelpunkte in einer Spitze ihrer Bahnkurve die Geschwindigkeit Null, d.h. der geometrische Ort aller Punkte der Koppelenebene, deren Bahnkurven Spitzen durchlaufen, ist in der Gangpolkurve enthalten. Für Viergelenkgetriebe stimmen beide Kurven überein, und sie teilen die Koppelenebene in zwei Gebiete, deren Punkte entweder Bahnkurven mit reellen Selbstschnittpunkten oder mit reellen isolierten Punkten durchlaufen (Ebner, 1906).

Außerdem ist p im Falle eines viergliedrigen Drehgelenkgetriebes eine bizirkulare algebraische Kurve achter Ordnung mit vierfachen Punkten in den Koppel-drehgelenken (vgl. Wunderlich, 1970; S. 75). Daher

geht p zweimal durch die imaginären Kreispunkte und besitzt noch vier weitere Fernpunkte (d.h. Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden). Diese sind alle imaginär (d.h. p verläuft ganz im Endlichen), wenn das Gestell das kürzeste Glied ist (z.B. für die Doppelkurbel). Aus (*) folgt weiter:

$$\sum_{\text{Palinglieder}} \mu_p(p) [\mu_p(p)-1] \leq 14$$

d.h. die Gangpolkurve hat höchstens zwei Tripelpunkte bzw. sieben Doppelpunkte. Es gibt also für jedes Viergelenkgetriebe höchstens zwei dreispitzige bzw. sieben zweispitzige Koppelkurven. Andererseits existieren Viergelenke mit zwei dreispitzigen Koppelkurven (z.B. die beiden bezüglich der Koppel gespiegelten dreifachsymmetrischen Koppelkurven der Doppelinnenschwinge, deren Gestell doppelt so lang wie alle anderen Glieder ist) und Hain (1987) gibt eine Doppelinnenschwinge mit sechs zweispitzigen Koppelkurven an. Für das Watt-Zweistandgetriebe sind achtspeitzige Koppelkurven bekannt (Primrose u.a., 1967). Allerdings sind die Gangpolkurven aufgrund ihrer Kompliziertheit einem direkten Studium nicht zugänglich (vgl. Bild 5 mit Bild 6).

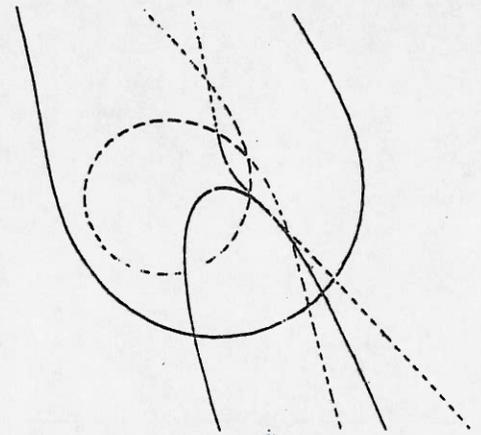


Bild 5: Rast- und Gangpolkurve eines durchschlagfähigen Viergelenkgetriebes mit Schubgelenk

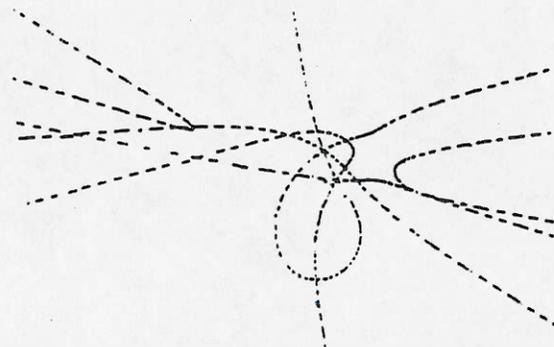


Bild 6: Gangpolkurve eines Watt-Zweistandgetriebes

Die Übergangskurve und die Gangpolkurve berühren sich in den zwölf Punkten, deren Bahnkurven eine Schnabelspitze haben, und schneiden sich außerdem noch in vierundzwanzig Punkten, deren Bahnkurven einen Selbstberührungspunkt und einen Spitzenpunkt durchlaufen (Müller, 1897; S. 271).

ANWENDUNGEN

Für die Berechnung und Darstellung der Polkurven und der Flachpunktcurven vier- bzw. sechsgliedriger Gelenkgetriebe wurden Programme entwickelt, die Bestandteil einer umfangreichen Kinematik-Programmbibliothek sind. Diese wiederum ist vollständig in das

2D-CAD-System PROREN integriert. Dadurch steht während der Anwendung der Module jederzeit der Komfort des CAD-Systems z.B. beim interaktiven Identifizieren von Punkten und bei der Ermittlung von Winkeln zur Verfügung.

Nun sind die genannten Kurven primär eher von theoretischem Interesse. Dem in der Praxis tätigen Konstrukteur können sie jedoch bei vielen Aufgaben eine große Hilfe sein, wenn er nur von ihren Eigenschaften hinreichende Kenntnisse besitzt. Als wesentliche Forderung an die Programme wurde deshalb die Aufbereitung der Ergebnisse in eine dem Praktiker nützliche Form verlangt. Die Bedienoberfläche ist dann so zu gestalten, daß der interaktive Dialog den Anwendungsfall in den Vordergrund stellt, solange und soweit dies möglich ist.

Bekanntlich kann man mit einem geringen Antriebsmoment im Bereich der Spitze einer Koppelkurve große Kräfte erzeugen. Daher eignen sich Rast- und Gangpolkurven als Hilfe zur Synthese von Pressen, Kniehebelschließern von Druckgußmaschinen, Stanzen und Prägemaschinen. Es wurde ein Programm geschrieben, mit dessen Hilfe der Anwender auf einfachste Weise im interaktiven Dialog die Möglichkeiten überblicken kann, mit einem in den Grundabmessungen bereits bekannten Getriebe Spitzen zu erzeugen. Nachdem dazu auf dem Bildschirm die Rastpolbahn dargestellt wurde, kann u.a. mit einem Knopfdruck ein kleiner Koppelkurvenatlas erstellt werden (Bild 7). Die Variation der Maße des Grundvierecks ist schon durch die Möglichkeiten des hier verwendeten CAD-Systems sehr einfach. Dadurch ist man in der Lage, Entwicklungstendenzen der Koppelkurvengestalt bei Veränderung der Getriebemaße rasch zu erkennen.

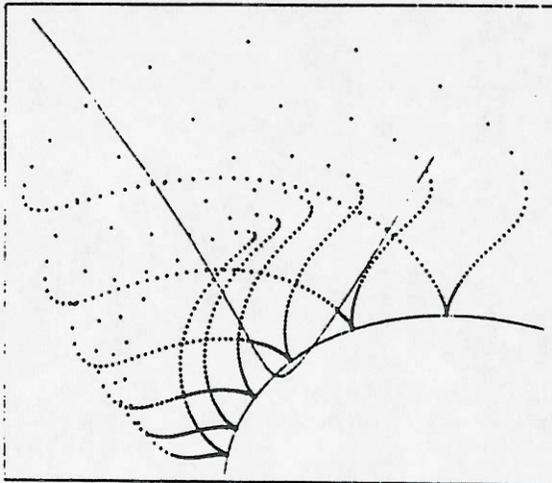


Bild 7: Einspitzige Koppelkurven einer Kurbelschwinge

Mit Hilfe anderer Rahmenprogramme, die z.B. den Modul zur Generierung von Wendekreisen nutzen, konnten weitere Synthesehilfen für den Konstrukteur geschaffen werden. In Bild 8 sind z.B. die Wendekreise einer Doppelkurbel in der Gangebene dargestellt, die zur Erzeugung von Geradfürungen genutzt werden können. Eine genauere Erläuterung der zugehörigen Vorgehensweise ist an dieser Stelle jedoch nicht möglich (vgl. Göttlicher, 1987).

AUSBLICK

In der vorliegenden Arbeit werden einige Eigenschaften von Koppelkurven vier- und sechsgliedriger Getriebe untersucht, die zu ihrer Klassifikation beitragen können. Damit wird es möglich, eine Antwort auf die Frage zu geben, ob die betrachtete Koppelkurve prin-

zipiell geeignet ist, eine bestehende Aufgabe zu lösen. Die hierzu entwickelten Programme wurden desweiteren so aufbereitet, daß sie unmittelbar als Synthesehilfe für einige aus der Praxis stammende Fragestellungen Verwendung finden können. Im Laufe der Arbeiten zeigte es sich, daß sowohl auf dem Gebiet der theoretischen Grundlagen als auch bei deren Umsetzung insbesondere für höhere Koppelkurven noch ein weites Feld für Forschung und Entwicklung offen ist.

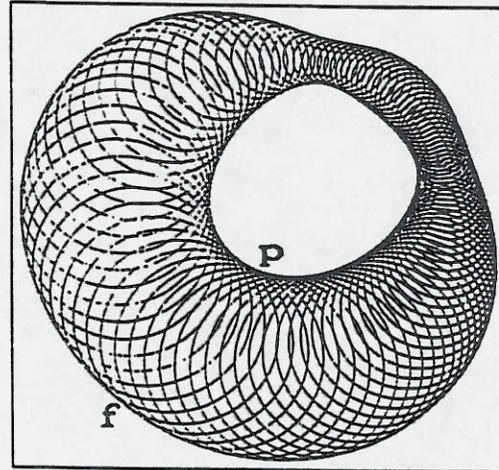


Bild 8: Gangpolkurve p und Flachpunktcurve f einer Doppelkurbel als Einhüllende der Wendekreise

LITERATUR

- Ebner, F. (1906). Leitfaden der technisch wichtigen Kurven, Teubner-Verlag, Leipzig.
- Fichter, E.F. and K.H. Hunt (1979). The variety, cognate relationships, class, and degeneration of the coupler curves of the planar 4R linkage. Proceedings of the Fifth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 1028-1031.
- Göttlicher, M. (1987). Polbahnen, Wendekreise und Ball-Kurven als Analyse- und Synthesehilfen für vier- und sechsgliedrige Gelenkgetriebe, Studienarbeit am Institut für Konstruktions- und Fertigungstechnik, Uni. der Bundeswehr Hamburg.
- Hain, K. (1981). Das sechsgliedrige Punktrastgetriebe für Werkstück- und Werkzeugführungen besonderer Art. Werkstatt und Betrieb 114, 333-337.
- Hain, K. (1987). Getriebeberechnungen für hohe Ansprüche mit Ausnutzung der Koppelkurvenkrümmungen. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Hilton, H. (1932). Plane Algebraic Curves. Oxford University Press, London.
- Mayer, A.E. (1938). Koppelkurven mit drei Spitzen und spezielle Koppelkurven-Büschel. Mathematische Zeitschrift 43, 389-445.
- Müller, R. (1889/1891). Über die Doppelpunkte der Koppelkurve. Zeitschrift für Mathematik und Physik 34, 303-305 und ebenda 36, 372-375.
- Müller, R. (1897). Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Zeitschrift für Mathematik und Physik 42, 247-271.
- Primrose, E.J.F., F. Freudenstein and B. Roth (1967). Six-bar motion I, The Watt mechanism. Archive for Rational Mechanics and Analysis 24 (1), 22-41.
- Shimajima, H. and K. Ogawa (1975). Synthesis of planar six-link path-generator (Part 2, On the cusps of Watt mechanisms). Bulletin JSME, 18, 426-433.
- Volmer, J. (1958). Koppelkurvenatlas als Mittel zur Konstruktionsvereinfachung. VDI-Berichte, Band 29, 103-108.
- Wunderlich, W. (1970). Ebene Kinematik. BI-Verlag, Mannheim.