

CÁLCULO DE ASÍNTOTAS GENERALIZADAS DE CURVAS ALGEBRAICAS

ELENA CAMPO-MONTALVO, MARIÁN FERNÁNDEZ DE SEVILLA, SONIA PÉREZ-DÍAZ

RESUMEN. Se presenta un algoritmo para calcular las *asíntotas generalizadas* o *g-asíntotas* de una curva algebraica plana, \mathcal{C} , definida implícitamente en \mathbb{C}^2 . Las *g-asíntotas* generalizan el concepto clásico de asíntota de una curva definida por un polinomio de la forma $yg(x) - f(x)$. Para ello, se definen los conceptos de ramas infinitas y ramas convergentes, y se establecen los fundamentos a partir de los cuales se definirán las *g-asíntotas*, es decir, las curvas aproximantes y las curvas perfectas. Estos conceptos constituyen una herramienta fundamental para analizar el comportamiento de una curva en el infinito.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una solución algorítmica que permite determinar el comportamiento en el infinito de una curva algebraica plana, \mathcal{C} , mediante el cálculo de las *asíntotas generalizadas*, o *g-asíntotas*, de sus ramas en puntos con coordenadas suficientemente grandes. Este concepto, generaliza el concepto clásico de asíntota y sus métodos de cálculo (véase p.e. [1, 2]).

De manera intuitiva, dada una curva \mathcal{C} , se dice que $\tilde{\mathcal{C}}$ es una *g-asíntota* de \mathcal{C} , si $\tilde{\mathcal{C}}$ es una curva del menor grado posible que aproxima a \mathcal{C} en el infinito (véase [3, 4]).

El algoritmo que se presenta en la Sección 3, se sustenta sobre los estudios preliminares de la Sección 1, así como en los conceptos de *curva perfecta* y *g-asíntota* definidos en la Sección 2. Además, en la Sección 3 se presenta el algoritmo y un ejemplo que ilustra el método que se desarrolla en este trabajo.

Además, señalar que las novedades respecto los trabajos previos se basan en una mejora e implementación de los resultados que aquí se exponen, ilustrándolos mediante un algoritmo cuya complejidad se reduce al cálculo de una serie de Puiseux.

1. PRELIMINARES Y NOTACIÓN

En esta sección se introducen los conceptos de *ramas infinitas*, *ramas convergentes* y *curvas aproximantes*, derivados de investigaciones previas (ver [3, 4, 5, 6]).

Sea una curva algebraica plana irreducible, \mathcal{C} , definida en el espacio afín por un polinomio irreducible $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ en el cuerpo \mathbb{C} . Debido a las implicaciones prácticas, se asume que la curva es real y, por ello, el polinomio implícito viene definido sobre \mathbb{R} . Sea $\mathcal{C}^* \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ su correspondiente curva proyectiva definida por el polinomio homogéneo $F(x, y, z) = f_d(x, y) + zf_{d-1}(x, y) + z^2f_{d-2}(x, y) + \dots + z^df_0(x, y) \in \mathbb{R}[x, y, z]$, con

Date: 12/02/2022.

La tercera autora ha sido parcialmente financiada por el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación PID2020-113192GB-I00 (Visualización Matemática: Fundamentos, Algoritmos y Aplicaciones).

La ponencia en el Encuentro EACA 2022 ha sido presentada por la primera autora.

$d := \text{grado}(\mathcal{C})$, y sean los puntos de infinito de \mathcal{C}^* de la forma $(1 : m : 0)$, $m \in \mathbb{C}$ (en caso de existir el punto de infinito $(0 : 1 : 0)$, se aplica un cambio lineal de coordenadas).

En estas condiciones, a partir de la curva definida por el polinomio $g(y, z) = F(1 : y : z)$ y calculando las series de Puiseux, φ_i , $i = 1 \dots \text{grado}_y(g)$ de $g(y, z) = 0$ alrededor de $z = 0$, se obtienen las *ramas* de \mathcal{C} (véase [4]). En lo que sigue denotamos como $\varphi(t) = m + a_1 t^{N_1/N} + a_2 t^{N_2/N} + a_3 t^{N_3/N} + \dots$, $a_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}$, con $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots$, y $0 < N_1 < N_2 < \dots$ a una de estas series. Por tanto $g(\varphi(t), t) = 0$ en un entorno de $t = 0$ donde $\varphi(t)$ converge.

Definición 1.1. Se denomina *rama infinita* de la curva plana afín \mathcal{C} , en el punto de infinito $P = (1 : m : 0)$, $m \in \mathbb{C}$, al conjunto $B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$, donde $r(z) = z\varphi(z^{-1}) = mz + a_1 z^{1-N_1/N} + a_2 z^{1-N_2/N} + a_3 z^{1-N_3/N} + \dots$ y M es un cierto número natural.

Definición 1.2. Dadas dos *ramas*, $B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$ y $\bar{B} = \{(z, \bar{r}(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > \bar{M}\}$, se dice que son *convergentes* si $\lim_{z \rightarrow \infty} (\bar{r}(z) - r(z)) = 0$.

Definición 1.3. Sea una curva algebraica plana \mathcal{C} con una rama infinita B . Se dice que una curva \mathcal{D} se *aproxima* a \mathcal{C} en su rama infinita B , si $\lim_{z \rightarrow \infty} d((z, r(z)), \mathcal{D}) = 0$ ($d(p, \mathcal{D}) = \min\{d(p, q) : q \in \mathcal{D}\}$).

En [4] se demuestra que si \mathcal{C} es una curva plana con una rama infinita B entonces, una curva plana $\bar{\mathcal{C}}$ aproxima a \mathcal{C} en B si y sólo si $\bar{\mathcal{C}}$ tiene una rama infinita \bar{B} tal que B y \bar{B} son convergentes.

2. ASÍNTOTAS GENERALIZADAS Y CURVAS PERFECTAS

A partir de los conceptos introducidos en la Sección 1, se obtienen las siguientes definiciones (véase [3]).

Definición 2.1. Una curva de grado d es una *curva perfecta* si no puede ser aproximada por ninguna curva de grado menor que d .

Obsérvese que una curva \mathcal{C} que no sea perfecta puede aproximarse por otras curvas de menor grado.

Definición 2.2. Sea una curva algebraica plana \mathcal{C} con una rama infinita B . Una curva, $\tilde{\mathcal{C}}$, es una *g-asíntota* o *asíntota generalizada* de \mathcal{C} en B , si es una curva perfecta que aproxima a \mathcal{C} en B (en lo sucesivo se utilizará el término asíntota para referirse a estas).

Sea \mathcal{C} con una rama $B = \{(z, r(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M\}$, donde $r(z) = mz + a_1 z^{1-N_1/N} + \dots + a_k z^{1-N_k/N} + a_{k+1} z^{1-N_{k+1}/N} + \dots$, con $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{C}$, $N, N_1, N_2, \dots \in \mathbb{N}$, y $0 < N_1 < N_2 < \dots$. Supongamos que $N_k \leq N < N_{k+1}$, i.e. los términos $a_j z^{1-N_j/N}$ con $j \geq k+1$ tienen exponente negativo. En lo que sigue, escribimos

$$r(z) = mz + a_1 z^{1-n_1/n} + \dots + a_k z^{1-n_k/n} + a_{k+1} z^{1-N_{k+1}/N} + \dots$$

con $\text{mcd}(N, N_1, \dots, N_k) = b$, $N_j = n_j b$, $N = nb$, $j = 1, \dots, k$. Es decir, simplificamos los exponentes tal que $\text{mcd}(n, n_1, \dots, n_k) = 1$. Nótese que $0 < n_1 < n_2 < \dots$, $n_k \leq n$, y $N < n_{k+1}$, i.e. los términos $a_j z^{1-N_j/N}$ con $j \geq k+1$ tienen exponentes negativos. Sea

$\tilde{r}(z) = mz + a_1z^{1-n_1/n} + \dots + a_kz^{1-n_k/n}$ los términos con exponente no negativo de $r(z)$.

Aplicando el cambio $z = t^n$, se obtiene la parametrización propia de una curva $\tilde{\mathcal{C}}$

$$\tilde{\mathcal{P}}(t) = (t^n, mt^n + a_1t^{n-n_1} + \dots + a_kt^{n-n_k}) \in \mathbb{C}[t]^2,$$

donde $n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(n, n_1, \dots, n_k) = 1$, y $0 < n_1 < \dots < n_k$, que es una asíntota de \mathcal{C} (véase [3]).

3. ALGORITMO PARA CALCULAR ASÍNTOTAS DE CURVAS DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE

El siguiente algoritmo calcula las parametrizaciones de las asíntotas de las ramas infinitas de la curva \mathcal{C} . Además, se ilustra el algoritmo con un ejemplo.

Data: \mathcal{C} , curva algebraica plana irreducible definida por $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$

Result: Asíntotas de \mathcal{C}

begin

$F(x, y, z) \leftarrow \text{CurvaProyectiva}(\mathcal{C})$

$P_1, \dots, P_n \leftarrow \text{PuntosdeInfinito}(F(x, y, 0))$

$g(y, z) \leftarrow F(1, y, z)$

$\phi_1, \dots, \phi_m \leftarrow \text{RaícesdePuiseux}(g(y, 0))$

foreach ϕ_i de P_i **do**

$r_i(z) \leftarrow z\phi_i(z^{-1}), B_i \leftarrow \{(z, r_i(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_i\}$ /* Def. 1.1 */

$\tilde{r}_i(z) \leftarrow m_i z + a_{1,i}z^{1-n_{1,i}/n_i} + \dots + a_{k_i,j}z^{1-n_{k_i,i}/n_i}$ /* Def. 2.2 */

$\tilde{\mathcal{P}}_i(t) \leftarrow (t^{n_i}, \tilde{r}_i(t^{n_i})) \in \mathbb{C}[t]^2$

end

return $\tilde{\mathcal{C}}_i \leftarrow \tilde{\mathcal{P}}_i(t), i = 1, \dots, n$

end

Para calcular las series de Puiseux puede utilizarse el paquete `algcures` incluido en el sistema informático de álgebra `Maple`. También cabe señalar que el algoritmo anterior se ha implementado en `Maple`. Como se ha comentado anteriormente la complejidad del algoritmo depende de la complejidad de la expansión en series de Puiseux (véase [7]).

Ejemplo 3.1. Sea una curva \mathcal{C} , de grado $d = 6$, definida por el polinomio irreducible $f(x, y) = y^6 + 2y^5x + 3x^2 + 4xy \in \mathbb{R}[x, y]$. Como $f_6(x, y) = y^6 + 2y^5x$, se tiene que los puntos de infinito son $P_1 = (1 : 0 : 0)$ y $P_2 = (1 : -2 : 0)$.

1. Sea $P_1 = (1 : 0 : 0)$

Iteración 1: Se tiene la rama infinita, $B_1 = \{(z, r_1(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_1\}$ con

$$r_1(z) = -\frac{48^{1/5}}{2}z - \frac{72^{1/5}}{12}z^{-3} + \frac{108^{1/5}}{18}z^{-7} - \frac{162^{1/5}13}{432}z^{-11} + \dots$$

$$\text{a) } \tilde{r}_1(z) = -\frac{48^{1/5}}{2}z. \quad \text{b) } \tilde{\mathcal{P}}_1(t) = (t^5, -\frac{48^{1/5}}{2}t).$$

2. Sea $P_2 = (1 : -2 : 0)$

Iteración 2: Se tiene la rama infinita, $B_2 = \{(z, r_2(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathbb{C}, |z| > M_2\}$ con

$$r_2(z) = -2z - \frac{5}{32}z^{-3} + \dots$$

$$\text{a) } \tilde{r}_2(z) = -2z. \quad \text{b) } \tilde{\mathcal{P}}_2(t) = (t, -2t).$$

En la Figura 1 se representa la curva \mathcal{C} y sus asíntotas generalizadas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ y $\tilde{\mathcal{C}}_2$, definidas por las parametrizaciones $\tilde{\mathcal{P}}_1$ y $\tilde{\mathcal{P}}_2$, respectivamente.

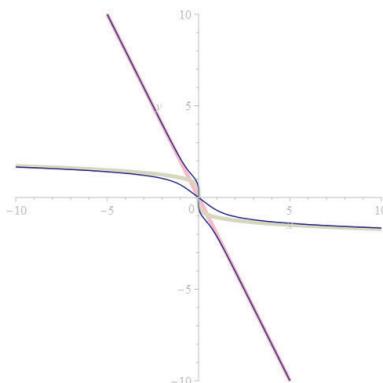


FIGURA 1. Asíntotas infinitas $\tilde{\mathcal{C}}_1$ (beige) y $\tilde{\mathcal{C}}_2$ (rosa) de la curva \mathcal{C} .

4. CONCLUSIONES

Las g-asíntotas determinan el comportamiento de una curva en el infinito. Con ellas, se pueden establecer modelos predictivos o de cálculo de tendencias, que mejoren los resultados de la regresión lineal simple. Además, como trabajo futuro, se plantea generalizar estos resultados a curvas definidas por una parametrización ([5, 6]), así como para superficies y estudiar las familias de asíntotas existentes.

REFERENCIAS

1. E. A. Maxwell, *An Analytical Calculus* vol. 3, Cambridge University Press, New York, (1962).
2. G. Zeng, *Computing the asymptotes for a real plane algebraic curve*. J. Algebra, (2) **316** (2007), 680–705.
3. A. Blasco, S. Pérez-Díaz, *Asymptotes and Perfect Curves*. C. Aided. Geom. D., (2) **31** (2014), 81-96.
4. A. Blasco, S. Pérez-Díaz, *Asymptotic Behavior of an Implicit Algebraic Plane Curve*. Comput. Aided. Geom. D., (7-8) **31** (2014), 345-357.
5. E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla, S. Pérez-Díaz, *Computing branches and asymptotes of curves defined by a not rational parametrization*. Enviado, (2022).
6. E. Campo-Montalvo, M. Fernández de Sevilla, S. Pérez-Díaz, *A simple formula for the computation of branches and asymptotes of curves and some applications*. Comput. Aided. Geom. Design. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2022.102084>. (2022).
7. A. Poteaux, M. Rybowicz *Complexity bounds for the rational Newton-Puiseux algorithm over finite fields*. AAECC **22** (2011), 187–217.

Universidad de Alcalá. Dept. de Automática. 28871 Alcalá de Henares, Spain
 Email address: elena.campo@uah.es

Universidad de Alcalá. Dept. de Ciencias de la Computación. 28871 Alcalá de Henares, Spain
 Email address: marian.fernandaz@uah.es

Universidad de Alcalá. Dept. de Física y Matemáticas. 28871 Alcalá de Henares, Spain
 Email address: sonia.perez@uah.es