Article

« Les problèmes d'arithmétique : traits de surface, modes de résolution et taux de réussite »

Marc Weisser

Revue des sciences de l'éducation, vol. 25, n° 2, 1999, p. 375-399.

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXV, n° 2, 1999, p. 375 à 399

Les problèmes d'arithmétique : traits de surface, modes de résolution et taux de réussite

Marc Weisser
Professeur

École élémentaire Ottmarsheim, LIO, Université de Haute-Alsace

Résumé – Cette étude s'intéresse à l'effet que des modifications superficielles de l'énoncé d'un problème d'arithmétique pourraient avoir soit sur les taux de réussite, soit sur les modes de résolution. À structure mathématique constante, on s'aperçoit que la présence de grands nombres, de mots inducteurs, de même que la présentation des données numériques dans l'ordre de leur future utilisation diminuent le taux de succès. On constate également un phénomène d'apprentissage autonome concernant les démarches mises en œuvre, allant dans le sens d'un accroissement de l'efficacité conjugué à une diminution de la dépense cognitive.

Les problèmes posent problème

Les évaluations nationales pratiquées dans le système scolaire français auprès de l'ensemble des élèves de CE2 (troisième année de l'enseignement élémentaire, enfants de 8 ans) montrent que, si 65 % d'entre eux savent résoudre un problème à une seule opération, ce résultat tombe à 41 % dans des situations plus complexes. En sixième (première année de l'enseignement secondaire, enfants de 11 ans), si 80 à 95 % des élèves maîtrisent le sens de l'addition, de la soustraction ou de la multiplication, un élève sur trois seulement réussit dans un problème qui met en œuvre une division. Encore ne parle-t-on pas du degré de complexité des énoncés, du nombre de pas à mettre en œuvre pour aboutir à la solution. (Monde de l'éducation, 167, janvier 1990.) Au Québec, les programmes d'études en mathématiques insistent eux aussi sur la richesse et la difficulté des activités de résolution de problèmes, et Schmidt (1996) met l'accent sur les pistes qu'il reste à explorer quant à la formation des enseignants sur ce sujet.

C'est à partir de ce constat que nous allons tenter de cerner de plus près le cheminement intellectuel d'élèves de CM2 (cinquième et dernière année de l'enseignement élémentaire, enfants de 10 ans). Mais auparavant, il nous faut définir ce qu'est un problème arithmétique et tâcher d'en discerner les caractéristiques sujettes à variation.

Pour Richard (1984), «un problème est défini par trois catégories d'éléments: la situation initiale, la situation terminale ou but à atteindre, les transformations permises pour y arriver» (p. 227). Comment dans ce cadre caractériser plus finement ce qui est du domaine particulier de l'arithmétique? Par opposition à l'algèbre, on pourrait dire qu'ici, les calculs intermédiaires sont effectués pas à pas, en fonction du sens construit lors de la lecture de l'énoncé, en considérant les relations entre les objets et les grandeurs, et non les relations plus abstraites entre les nombres et les opérations. En algèbre par exemple, comme la division n'est que l'«inverse» de la multiplication, il est aisé à partir de certaines manipulations techniques de passer de l'une à l'autre; pour des élèves plus jeunes et n'ayant pas atteint le stade de la réversibilité, chaque situation nouvelle est au contraire un problème nouveau. Cette étude pourrait ainsi précéder, chronologiquement et psychologiquement, celle que relatent dans cette même revue Radford et Grenier (1996); elle traite d'une séquence d'introduction à l'algèbre en troisième secondaire (neuvième année d'enseignement) et montre à l'œuvre des élèves s'initiant progressivement au maniement des symboles (niveau concret, niveau semi-concret, niveau symbolique).

Aussi, il me semble que la résolution de problèmes d'arithmétique est l'une des situations les plus complexes qu'il soit possible de rencontrer à l'école élémentaire; elle fait appel à la fois à la lecture, aux techniques opératoires, à la logique, voire à la schématisation. Toutes ces activités entrent en compétition et tendent à saturer la mémoire de travail, dont la capacité est limitée, et à laquelle incombe de plus le stockage des informations relevées dans le contexte. L'automatisation de certaines parties de la démarche aide à éviter la surcharge cognitive; Fischer (1987) en indique les avantages:

- économie cognitive du fait de sa rapidité, mais aussi de son statut non conscient,
- non-interférence avec une autre activité mentale, consciente elle, en cours de traitement dans la mémoire de travail (p. 17).

Le calcul mental et la lecture silencieuse sont deux exemples typiques de compétences à automatiser.

La théorie de Piaget pose un développement unidimensionnel de l'intelligence, ce qui implique que le franchissement d'un stade se manifeste dans tous les domaines, à plus forte raison sur des énoncés de problèmes à structure mathématique identique. Mais il observe déjà des décalages horizontaux, dus soit à la manière dont sont posées les questions, soit aux relations entre les aspects figuratifs des dispositifs présentés et les aspects opératifs des problèmes à résoudre (Laurendeau, 1968). Sur quoi alors fonder l'équivalence de deux énoncés? Vergnaud (1994) distingue six relations de base avec, à chaque fois, trois positions possibles pour l'inconnue – soit dix-huit modalités – rien que dans l'ensemble des problèmes relevant du champ conceptuel additif (voir Vergnaud, 1981, p. 133-149, pour plus de détails). C'est dire la richesse et la trop grande variété de l'espace de réflexion qui s'ouvre à nous. L'isomorphisme des structures mathématiques ne peut à lui seul suffire à classer les problèmes; les traits de surface deviennent des caractéristiques pertinentes, du moins certains d'entre eux (Seeger, 1991). Il reste à définir leurs poids respectifs pour pouvoir prédire leur influence éventuelle sur le choix de la démarche de résolution. Ceci dans le but d'établir une taxinomie d'énoncés, équivalents du point de vue algébrique, mais différents du point de vue arithmétique. La question sous-jacente est celle du transfert: faut-il consacrer une leçon à chaque structure mathématique? à chaque sous-classe d'énoncés en fonction de certaines variations de traits de surface? à chaque énoncé? Ce qui conduirait à une atomisation de la pédagogie. À ce sujet, Roubtsov (1991, p.153-156), distingue «problèmes d'apprentissage», généralisables, transférables, et «problèmes concrets et pratiques», réponses ponctuelles à des situations particulières isolées.

Cette étude vise donc à rendre l'enseignant attentif au fait que la formulation d'un énoncé de problème n'est pas accessoire: l'élève, qui ne structure pas ses connaissances autour de principes comme le fait l'expert, est amené à prendre en considération certains traits de la situation non pertinents sur le plan mathématique. Diverses recherches ont été menées dans ce sens: Bastien (1987) sur le contexte verbal et l'ordre des éléments; Denis (1989), sur les relations entre valeurs imaginatives des adjectifs et mémorisation; Ehrlich (1990), sur l'opposition transformations/relations dans le cadre de problèmes additifs ou multiplicatifs. À signaler également une recherche récente de Baffrey-Dumont (1996), dans laquelle la chercheuse s'intéresse à la façon dont des élèves de huit ans s'ingénient («structure effective») à résoudre des problèmes composés à partir de typologies d'experts (structure de fond, ou «structure proposée») qui distinguent des problèmes additifs de recherche de l'état final, de l'état initial, de la transformation.

Pour notre part, nous avons retenu quatre traits de surface susceptibles de varier d'un énoncé à l'autre, à savoir a) avec mots inducteurs contre sans mots inducteurs; b) énoncé ordonné contre énoncé non ordonné; c) phrases simples contre phrases complexes; d) grands nombres contre petits nombres.

Avec mots inducteurs contre sans mots inducteurs

Les mots inducteurs étaient caractéristiques d'une certaine pédagogie du problème: on apprenait à l'élève à passer directement d'un mot relevé dans l'énoncé à une opération («En tout» => additionner). Actuellement, ces mots seraient plutôt employés, en classe et dans les manuels, pour restreindre le champ sémantique ouvert à la lecture, pour s'assurer que, placés devant un même énoncé, tous les élèves y voient le même problème, c'est-à-dire se fabriquent une représentation unique de la situation. Mais les mots sont ainsi détournés de leur sens habituel ou, du moins, se trouvent en position de forte redondance. L'écolier a tendance à y voir un signal implicite de la part du maître, et émet des hypothèses tout à fait gratuites à propos de leur présence. Or, une telle façon de faire place à l'apprenant dans une situation où ce ne sont plus les relations entre grandeurs numériques qui lui permettent de résoudre le problème, mais uniquement son habillage; c'est tout le contraire des situations adidactiques préconisées par Brousseau (1986) car ici, on «souffle» la réponse. L'énoncé ainsi surdidactisé n'est plus fidèle ni à la réalité ni même aux règles élémentaires qui régissent les échanges discursifs (Grice, 1979); c'est un genre littéraire nouveau, qui appelle ses propres techniques d'exégèse.

Certaines batteries d'exercices étudient les mots inducteurs de façon plus systématique encore (Ehrlich, 1990), en particulier dans les cas de contre-emploi, comme «Perdre» associé à une addition. Je tâcherai quant à moi de voir si, associés à leurs opérations habituelles, les mots inducteurs augmentent le taux de réussite à un problème et en modifient le mode de résolution.

Énoncé ordonné contre énoncé non ordonné

L'ordre des informations à l'intérieur d'un énoncé a été peu étudié; on peut citer Gombert (1988): «Une formulation d'énoncé qui favorise la sélection des données pertinentes et l'organisation en mémoire de travail de données retenues augmente la performance de façon importante» (p. 58). Deux facteurs, selon nous, plaident en faveur de cette mise en ordre de l'énoncé. D'une part, le fait que les données seront mémorisées dans l'ordre de leur lecture: si l'ordre de rappel pour opérations est identique, le sujet fera une économie d'énergie cognitive. D'autre part, il est bien évident que des élèves de CM2 sont des professionnels de l'école et qu'ils ont des compétences pragmatiques bien établies à ce sujet: il est de coutume que les données apparaissent dans l'ordre de leur traitement ultérieur. Une telle compétence, non dite et non enseignée, est très difficile à remettre en question du fait même de son caractère implicite (Weisser, 1995).

En effet, tout message délivré par l'enseignant «se reflète d'emblée dans une sorte de miroir aux alouettes, provoquant une multitude de réactions de la part de ceux avec lesquels il est appelé à interagir durant la relation didactique» (Jonnaert, 1996*b*, p.117), réactions qui parfois vont à l'encontre de l'information qui circule dans le réseau officiel de la communication.

Phrases simples contre phrases complexes

Brissiaud et Escarabajal (1986) notent qu'un accroissement de la complexité du texte peut apporter une gêne au repérage des indices pertinents à la résolution du problème. L'énoncé classique, fait de propositions grammaticales indépendantes, est très proche d'un schéma représentant la situation; une partie du travail de mathématisation du réel a déjà été effectuée par l'auteur du texte.

Mais à l'opposé, il faut signaler la réflexion de Gaonac'h (1990) issue, il est vrai, de la didactique des langues étrangères. Pour cet auteur, l'appel à des textes simplifiés à l'extrême induit un traitement pas à pas de phrases courtes, au détriment des activités plus globales d'intégration; l'élève en situation de facilité se croirait alors dispensé d'établir des relations sémantiques au niveau du paragraphe ou du texte.

Grands nombres contre petits nombres

La dernière source de variation que nous retenons oppose grands nombres et petits nombres. Piaget (1976, p.10) indique que les «petits nombres» semblent s'arrêter à 30, la notion d'infini n'étant accessible qu'au niveau hypothéticodéductif. De la sorte, les énoncés fonctionnent tant que le sujet peut appréhender la grandeur des nombres proposés; ensuite, ce n'est plus que manipulation de signifiants vides de sens. Il convient de plus de souligner que, sur un plan purement technique, les procédures pas à pas, constructives, sont allongées par la présence de grands nombres dans l'énoncé, sont rendues inefficaces par la lassitude qu'elles engendrent. C'est d'ailleurs la raison d'être des procédures canoniques de résolution, telle la règle de trois, non pertinentes du point de vue du sens de l'opération, mais efficaces, parce qu'elles sont systématisées, automatisées.

L'hypothèse de la recherche s'énonce donc de la manière suivante: à concept mathématique identique, des modifications des traits de surface de l'énoncé entraînent une modification des démarches de résolution d'un problème, et une variation de l'efficacité de ces démarches.

Expérimentation

Afin d'éviter au maximum des interférences avec le cursus habituel de la classe expérimentale, le concept mathématique servant de fondement à la série de problèmes proposés a été délibérément choisi hors du programme de l'école élémentaire. De cette manière, chaque élève dispose de tous ses acquis antérieurs, sans exception, et sans que l'un ou l'autre de ces savoir-faire soit *a priori* désigné comme le plus adapté à la résolution du problème.

Il se retrouve donc dans une situation problème telle que la définit Brousseau (1981) : si les phases de validation et d'institutionnalisation sont absentes de l'expérimentation (comme souvent, l'expérimentation en sciences de l'éducation essaie d'éviter les phénomènes parasites liés à... l'apprentissage !), celles d'action et de formulation demeurent. L'aspect nouveauté, tension, énigme est préservé, de même que la neutralité cognitive de l'enseignant, à travers les précautions prévues par le dispositif expérimental relatif aux variables étudiées. Les conflits cognitifs potentiels, « sources éventuelles du développement conceptuel », ne sont donc pas minimisés ici, ce qui va réclamer des élèves une attitude courageuse de remise en question radicale de leurs habitudes opératoires (Bednarz, 1991).

L'énoncé de base est le suivant :

« Pour fêter son anniversaire, Lucie a acheté 20 parts de pâtisserie : des éclairs à 5 F et des mille-feuilles à 7 F. Elle a dépensé 116 F.

Combien a-t-elle acheté d'éclairs ?

Combien a-t-elle acheté de mille-feuilles ? »

Cet énoncé est caractérisé par les traits de surface suivants (voir ci-dessus) : sans mots inducteurs, informations ordonnées, phrases simples, petits nombres.

La structure mathématique renvoie de façon canonique à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, qui n'est pas au programme de l'école élémentaire :

$\{ x + y = N0$

$\{ N1x + N2y = N3$

avec ici :

$N0 = 20$

$N1 = 5$

$N2 = 7$

$N3 = 116$

et la solution $(x;y) = (12;8)$.

La combinaison des possibilités de variations croisées a permis d'engendrer seize énoncés isomorphes (deux modalités pour quatre variables). Voici, à titre d'exemple, celui qui possède les caractéristiques avec mots inducteurs (soulignés ici), informations dans le désordre, phrases complexes, grands nombres:

«Une cave coopérative viticole du pied des Vosges remplit ses tonneaux à la fin des vendanges. Elle possède des petits tonneaux qui contiennent chacun 160 hl. Elle a obtenu au total 6 120 hl de vin qu'elle va mettre dans 35 tonneaux de deux tailles différentes. En plus des petits tonneaux, elle en a aussi des grands qui contiennent chacun 200 hl.

Combien remplit-elle de grands tonneaux en tout?

Combien remplit-elle de petits tonneaux en tout?»

avec:

N0 = 35

N1 = 160

N2 = 200

N3 = 6120

et le couple solution (x;y) = (22;13), qui est obtenu en résolvant le même système d'équations que pour le problème de l'anniversaire de Lucie. (Voir l'ensemble des énoncés en annexe 1)

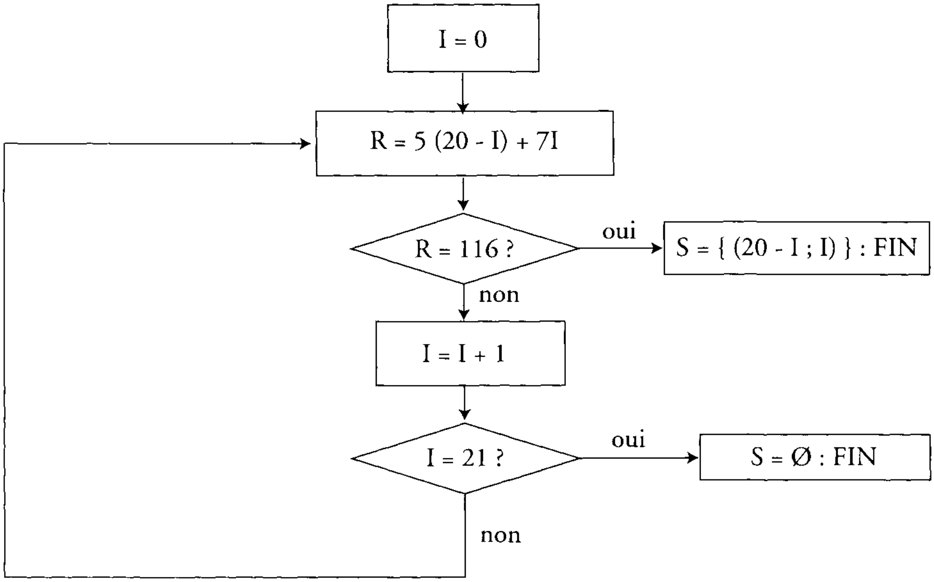
Cette série de seize énoncés a été proposée au cours du premier trimestre de l'année scolaire au sous-groupe de la classe expérimentale formé des élèves qui avaient passé avec succès un prétest de même nature (effectif: 15 enfants); le restant du groupe s'est vu proposer une pédagogie de remédiation portant sur les lacunes observées au prétest (effectif: 9 enfants; étude non détaillée ici).

Les protocoles des élèves ont été analysés selon deux axes: la démarche utilisée, la présence ou non de la solution numérique exacte. Les traitements statistiques (χ^2 et AFC) sont détaillés ci-dessous.

Voici les démarches qu'il nous a semblé possible de caractériser après l'analyse des 16 x 15 = 240 travaux d'élèves. En effet, comme aucun d'entre eux ne maîtrise la méthode de résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues, il leur a été nécessaire d'inventer des voies inédites vers la solution. Pour plus de clarté, les valeurs N0 à N3 seront celles du premier énoncé cité en exemple ci-dessus. Ces démarches, qui vont se stabiliser par instants (voir ci-dessous), sont autant de modèles de relations dégagés par les élèves, et matérialisés dans leurs réponses par l'ordonnancement de leurs calculs, de leurs essais, de leurs renoncements (voir Semenova 1991, p. 191 et ss).

D1 : démarche systématique

Tableau 1
Démarche systématique



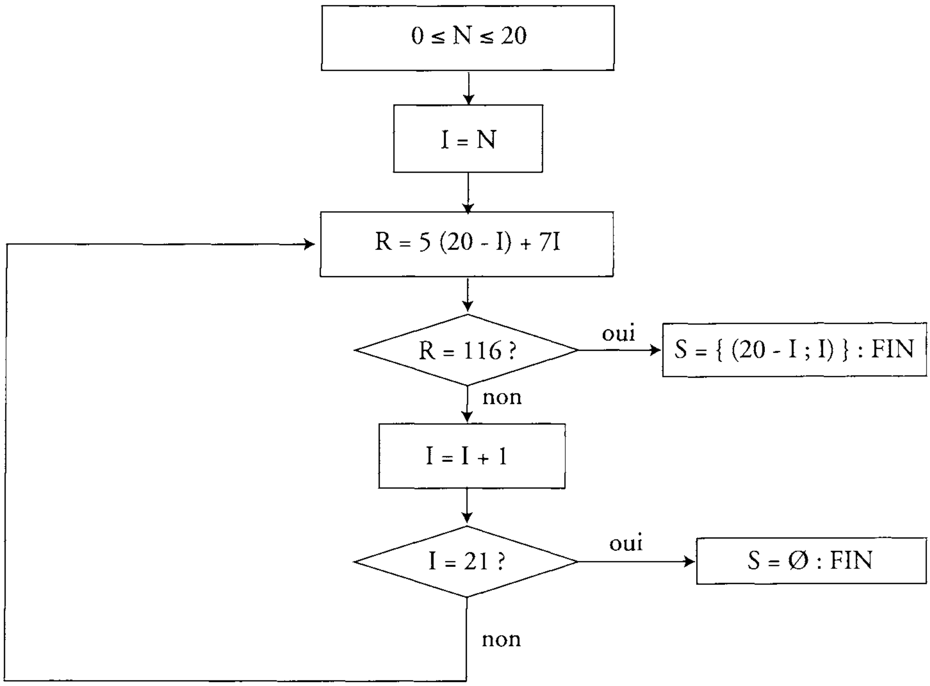
Ce qui donne concrètement sur les feuilles des élèves :

19 x 5 = 95	1 x 7 = 7	95 + 7 = 102
18 x 5 = 90	2 x 7 = 14	90 + 14 = 104
17 x 5 = 85	3 x 7 = 21	85 + 21 = 106
16 x 5 = 80	4 x 7 = 28	80 + 28 = 108
etc.		
12 x 5 = 60	8 x 7 =56	60 + 56 = 116

Du fait sans doute de son grand coût cognitif, cette démarche n'apparaît que dans le prétest; elle est remplacée dans la suite par D2 ou par D3 (voir plus bas).

D3: démarche semi-systématique

Tableau 2
Démarche semi-systématique



L'élève commence l'exploration systématique au hasard, entre 0 et 20 (entre 0 et N0 dans le cas général); si la solution initiale n'est pas la bonne, il incrémente I. En particulier chez certains, N = 20/2 = 10 (dans le cas général: N = N0/2). Chez d'autres, dans le cas où, après avoir incrémenté I deux ou trois fois, on s'éloigne de 116F (N3), on revient à N et on décrémente cette fois-ci.

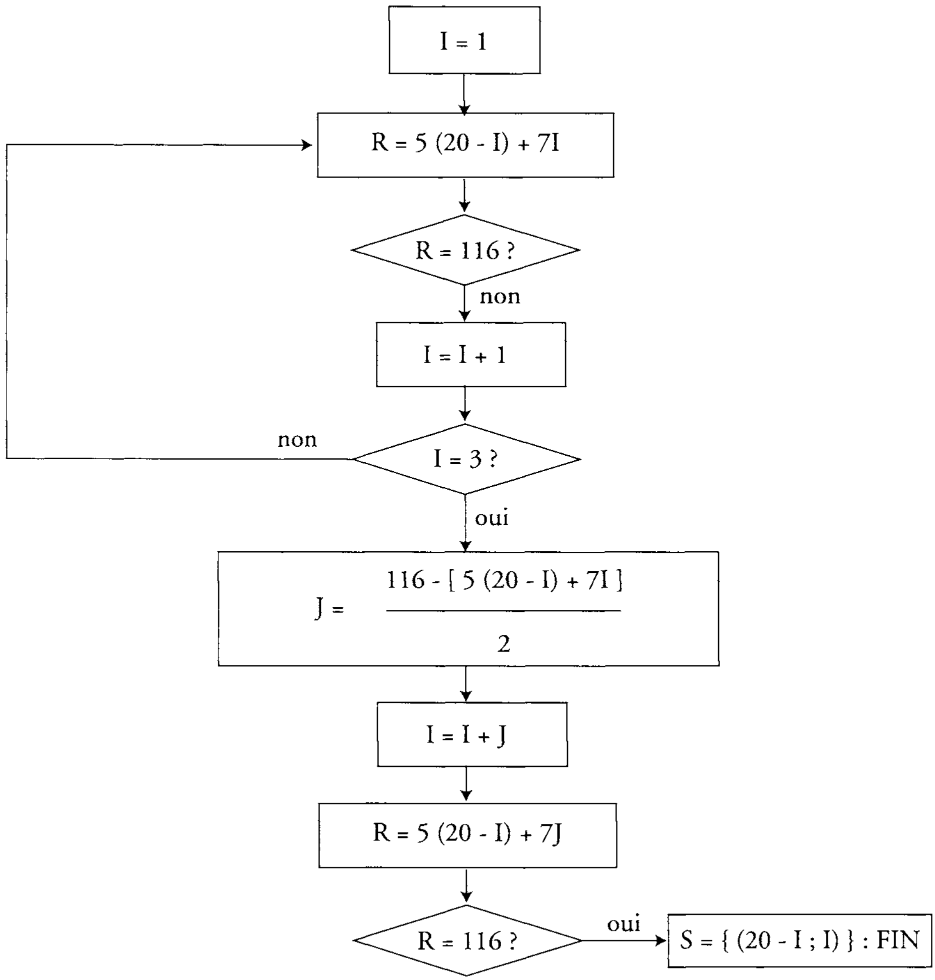
Par exemple:

18	2	90
x5	x7	+14
90	14	104
17	3	85
x5	x7	+21
85	21	106
etc.		

(Voir un exemple en annexe 2, élève J13)

D3: démarche mixte

Talbeau 3
Démarche mixte



L'élève a remarqué que la somme R décroissait régulièrement de 2 (ce qui est dû dans le premier énoncé à la différence des deux prix unitaires: 7F - 5F = 2F). Il a alors calculé en (1) (voir tableau 3) combien de pas de programme restaient à faire; il en a déduit la valeur solution!

Ce qui donne par exemple pour le premier énoncé:

on choisit (x;y) hypothétique,

par exemple x = y = 20/2 = 10.

D'où les opérations:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 5 \\ \hline 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ \times 7 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ +70 \\ \hline 120 \end{array}$$

On calcule l'écart entre cette somme et N3, prix total à atteindre:

120 - 116 = 4

On divise cet écart par N1 - N2 = 7 - 5 = 2:

4 / 2 = 2

On incrémente directement x de 2 unités et on vérifie:

x = 10 + 2 = 12 y = 10 - 2 = 8

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \times 7 \\ \hline 56 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 60 \\ +56 \\ \hline 116 \end{array}$$

Voici les commentaires d'un élève à qui l'on a demandé de justifier sa méthode (à propos d'un autre énoncé):

« Il y a une différence de 3 entre les deux nombres [N1 = 12; N2 = 15], alors en descendant de 1 à chaque fois [en décrémentant x d'une unité à chaque pas de programme], ça ne sert à rien. Alors, je suis descendu de 10 [x => x - 10; y => y + 10], et je suis arrivé tout près. Ensuite, la différence [par rapport à N3] n'était plus que de 3, alors je suis descendu de 1 encore. » Cette capacité à l'autoévaluation, à l'autocontrôle des résultats par rapport au but assigné démontre, s'il en est besoin, que ce type d'activité s'inscrit davantage dans la «tradition investigative» que dans la « tradition scolaire » (Cobb, Perlwitz et Underwood, 1994), et qu'elle fait appel à l'expression vraie de l'élève, aussi bien à travers le protocole écrit que lors de l'interview oral visant à mieux comprendre ses réflexions (Palacio-Quintin, 1995, p. 45).

(Voir en annexe 3 deux exemples: élèves J6 et J16)

Si l'on compare pour un même problème D2 et D3, on a, pour la première, quinze opérations effectuées, qui correspondent à cinq pas de programme de trois opérations chacune, et pour la seconde, neuf opérations effectuées seulement.

D4: démarche par observation de multiples

En considérant que la moitié des multiples de 5 (premier énoncé) se terminent par 0, l'élève cherche un multiple de 7 se terminant par 6 pour obtenir le bon chiffre des unités au prix total (116F). Il vient: $7 \times 8 = 56$, d'où $116 - 56 = 60$, d'où $x = 12$.

Cette démarche ne persiste que dans les énoncés où apparaissent le nombre 5 ou le nombre 10, les seuls dont les tables de multiplication sont «intéressantes».

D5: démarche incomplète

Oubli de l'une des deux équations, en général de $x + y = 20$ (cas général: $x + y = N0$). Ce qui revient à mettre en œuvre D2, en incrémentant à chaque boucle d'une unité, mais sans respecter la condition ci-dessus.

D6: démarche par division

De type 116 / 20, ou 116 / 5, ou 116 / 7: la solution n'est jamais atteinte. (cas général: N3 / N0; N3 / N2; N3 / N2: le «grand» divisé par l'un des «petits».)

D7: démarches impossibles à caractériser

Sans commentaire.

Voyons maintenant les résultats expérimentaux: quelles variations de traits de surface ont eu un effet sur les taux de réussite et les modes de résolution de ces seize problèmes?

— Mots inducteurs

Le tableau ci-dessous oppose les huit énoncés comportant des mots inducteurs aux huit autres moins caractéristiques du genre littéraire «manuel scolaire». Les valeurs entre parenthèses correspondent aux effectifs théoriques, nécessaires aux calculs de χ^2.

	Réussites	Échecs	Total
Avec mots inducteurs	89 (95)	31 (25)	120
Sans mots inducteurs	101 (95)	19 (25)	120
Total	190	50	240

χ^2 calculé = 3,64

χ^2 à 1 dl:	à P = 0,10	2,71
	à P = 0,05	3,84
	à P = 0,01	6,64

L'hypothèse nulle peut être rejetée à P = 0,10, l'absence de mots inducteurs semble favoriser la réussite du problème. Les mots inducteurs, du fait de leur position fortement redondante au sein de l'énoncé, ont tendance à provoquer l'émission d'hypothèses de lecture fausses, qui empêchent alors l'élève de résoudre correctement l'exercice qui lui est proposé (Weisser, 1997). C'est du moins ce que le traitement statistique laisse supposer.

L'un des travaux de l'élève J10 est relativement explicite et constitue à ce titre un indice supplémentaire (voir annexe 4). La démarche utilisée vers la fin de la séance est de type D5, avec oubli de x + y = N0. Il apparaît après lecture et interprétation que ce qui est recherché comme résultat des opérations, c'est le nombre 417200 (N3):

«On a envoyé de pompes à eau *en tout* [37200]. Ça ne va pas, ce n'est pas assez.»

«On a envoyé d'émetteurs radio *en tout* [48600]. Ça ne va pas, il n'y en a pas assez.»

«On a envoyé de pompes à eau en tout.»

La formule est très stéréotypée, quasiment incantatoire: le mot inducteur *en tout* est, comme dans les questions de l'énoncé, associé successivement aux pompes à eau et aux émetteurs radio. Par contre, le résultat numérique est toujours imaginé comme supérieur à 37200 et à 48600, c'est-à-dire égal à 417200. Il semble donc probable que cet élève a été poussé à associer de façon constante le mot en tout au nombre le plus élevé de l'énoncé (au «total», N3), alors qu'en fait ses deux occurrences correspondent à deux valeurs différentes et inférieures (x et y).

Il apparaît ici que les tentatives des enseignants (ou des auteurs de manuels) pour favoriser la réussite de la classe qui leur est confiée ont parfois un effet contraire, une hyperprécision du langage étant interprétée plutôt comme le signe d'un piège caché que comme une perche tendue.

En ce qui concerne les démarches de résolution, on peut se borner à souligner que c'est D2 qui est la plus usitée, que l'énoncé soit avec ou sans mots inducteurs (respectivement 86 et 88 occurrences), suivie de D3 (20 et 16) et de D5 (10 et 12), les autres démarches se partageant les quatre dernières copies. Il ne semble donc pas y avoir de relation privilégiée entre démarche et mots inducteurs.

Ordre des informations

	Réussites	Échecs	Total
Énoncé ordonné	88 (95)	32 (25)	120
Énoncé non ordonné	102 (95)	18 (25)	120
Total	190	50	240

χ^2 deux calculé = 4,96

À P = 0,05, l'hypothèse nulle peut être rejetée, les énoncés non ordonnés favorisent la réussite! Une simplification à outrance du travail de l'élève n'engendre pas forcément chez lui un effort de réflexion; une part de la mise en forme des données reste à sa charge; il devient alors, de simple lecteur de l'énoncé, explorateur de la situation problème. L'aménagement de l'espace problème n'est pas du seul ressort de l'enseignant, qui peut s'arrêter en chemin et par là favoriser l'activité réelle de l'élève. Nous proposons en annexe deux illustrations de cette idée.

Dans la première (annexe 5), on s'aperçoit que l'élève J9 adopte progressivement, au fil des séances, un codage des quatre données numériques toujours présentes, afin «de s'y retrouver» comme il le dit à l'interview:

N0: cadre rectangulaire;

N1 et N2: cadres circulaires;

N3: souligné.

Dans la seconde (annexe 6), l'élève J13 résume et ordonne l'énoncé à sa guise, «pour ne pas être obligé de toujours chercher dans le texte».

Ces deux manipulations, premiers pas vers la schématisation, constituent sans doute une preuve de lecture attentive de l'énoncé et de sa traduction sous une forme particulièrement parlante à chacun des deux sujets apprenants.

En ce qui concerne les démarches de résolution, le calcul du χ^2 ne donne pas de résultat statistiquement significatif; D2 (86 et 88) et D3 (19 et 17) sont encore majoritairement représentées, avec D5 (11 et 11).

Complexité grammaticale des phrases

	Réussites	Échecs	Total
Phrases simples	92 (95)	28 (25)	120
Phrases complexes	98 (95)	22 (25)	120
Total	190	50	240

χ^2 calculé = 0,9

Quelle que soit P, l'hypothèse nulle est conservée, le degré de complexité des phrases ne modifie pas le taux de réussite.

Nous avons souligné plus haut l'analogie qu'il était possible de faire entre énoncé à phrases simples et schéma. À la lumière de ce qui vient d'être démontré, ce jugement peut être complété: l'énoncé mène à un plus grand taux de réussite si, de plus, il présente les informations dans un relatif désordre, là encore comme le schéma. En effet, ce dernier s'oppose à la chaîne écrite par sa disposition spatiale, à deux dimensions. Pour le parcourir et prélever les renseignements utiles qu'il comporte, il existe de nombreux cheminements perceptifs. Chacun d'eux n'est pas contenu dans la figure de façon originaire, mais est choisi, construit par tout nouveau lecteur, qui s'empare ainsi plus activement du problème. Il serait intéressant dans une autre recherche de comparer les taux de réussites sur des situations identiques sur le plan mathématique, mais présentées tantôt sous forme de texte, tantôt sous forme de dessin ou de schéma.

Il n'existe pas, une fois encore, de relation directe entre la complexité des phrases et la démarche de résolution des problèmes.

Grandeur des données numériques

	Réussites	Échecs	Total
Grands nombres	84 (95)	36 (25)	120
Petits nombres	106 (95)	14 (25)	120
Total	190	50	240

χ^2 calculé = 12,22

À P = 0,01, l'hypothèse nulle est rejetée, les problèmes à petits nombres sont significativement plus faciles. Cette baisse significative des résultats nous semble un trait caractéristique de l'approche arithmétique des problèmes par opposition à une approche algébrique.

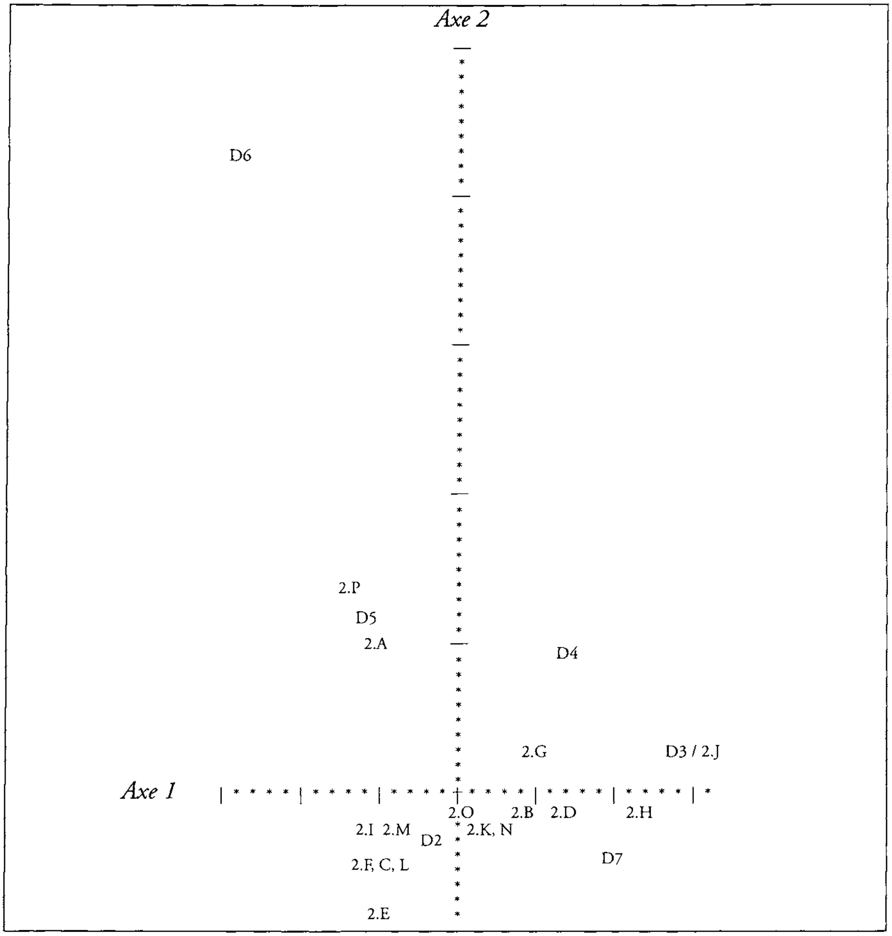
En effet, on peut constater d'une part que la démarche choisie en priorité (D2) a un fort coût. L'énergie des élèves, leur envie de trouver la solution sont mises à rude épreuve, dans le cas des énoncés à grands nombres, par la lourdeur de chacune des opérations à poser (erreurs dans les tables de multiplications, dans les additions), ainsi que par le nombre croissant de pas de programme qu'il convient d'effectuer pour approcher petit à petit la solution, nombre accru encore lorsque x et y sont loin de N0/2 (voir plus haut).

On s'aperçoit d'autre part, conformément à ce qui était prévu dans les hypothèses de départ, que certains se laissent submerger par les grands nombres et ne travaillent plus qu'en les considérant comme des signifiants vides de sens; ils se privent par là de leurs facultés d'autocontrôle en regard de la plausibilité des résultats. On sacrifie la vraisemblance au plaisir ou au devoir de calculer. Si la fonction calculatrice du signifiant subsiste, elle occulte totalement, dans ce cas, sa fonction référentielle (Vergnaud, 1994, p. 72).

La démarche mise en œuvre de façon majoritaire est cette fois-ci D2 (93 occurrences sur les grands nombres contre 81 sur les petits nombres) devant D5 (14 contre 8) et D3 (10 contre 26). Ces différences sont statistiquement significatives à P = 0,01. Il apparaît en particulier que la démarche la plus économique mais la plus difficile à comprendre, D3, est employée de préférence dans les situations avec petits nombres: ce que l'élève investit dans la complexité du mode de résolution, il veut le récupérer à travers la simplicité de l'énoncé et des calculs à effectuer.

En synthèse de cette étude des relations entre traits de surface et modes de résolution d'un problème arithmétique, il a été établi une analyse factorielle des correspondances (tableau 4).

Tableau 4
Analyse factorielle des correspondances



Les deux axes principaux, retenus ici, contribuent respectivement pour 54,2% et 20,4% à l'inertie totale, soit un pourcentage cumulé de 74,6%, taux qui permet de titrer quelques conclusions valables de ce genre de représentation statistique.

Le premier axe oppose pour ce qui est des démarches D3 (72,3% de contribution relative à l'inertie expliquée par l'axe) d'une part à D5 (11,8%) et D2 (8,6%) d'autre part. On peut dire qu'il oppose des démarches pas à pas, simples mais coûteuses en temps et en calculs (D2 et D5), à une démarche directe, économique, mais de compréhension délicate (D3).

Pour ce qui est des seize énoncés (notés 2A à 2P), ce premier axe oppose 2J et 2H (respectivement 28 et 21% de contribution) à 2P et 2A (11,4 et 6%). De manière plus générale, nous avons à gauche (abscisses négatives) les énoncés proposés avant l'invention de D3 par la classe, et à droite (abscisses positives), ceux qui ont été traités à l'aide de D3 par certains élèves.

Ce premier axe, de loin le plus significatif, met donc face à face, tant au niveau des démarches que des énoncés, des aspects laborieux, rudimentaires et plus ou moins fiables, et une façon de faire rapide, très fiable, mais moins souvent perçue par les élèves. Nous proposons d'appeler cet axe « Des fourmis aux cigales ».

Quant au second axe, il oppose D2 (16,4 % de contribution), démarche choisie dans la majorité des cas, et les énoncés qui lui ont été associés de préférence, à D5 (47 %), D6 (26,1 %), D4 et D3, avec les quelques énoncés où elles sont fortement représentées. Cet axe pourrait s'intituler « De l'indifférencié au différencié » ou « Du polyvalent au particulier », tant la démarche semi-systématique se distingue des autres, aussi bien en ce qui concerne la fréquence d'emploi que ses circonstances.

Cette AFC met ainsi en évidence l'évolution qui a eu lieu chez certains élèves tout au long de l'expérimentation. Il s'est produit au fil des seize énoncés un phénomène d'apprentissage non prévu de façon explicite par l'enseignant, de modification de certaines démarches de résolution, allant dans le sens d'une économie cognitive et d'une fiabilité accrue.

Discussion

L'analyse, qui met en regard démarches et variations des traits de surface, montre que c'est la variable indépendante « Grandeur des données numériques » qui, seule, a une influence statistiquement significative sur le choix de la démarche. Les élèves font ainsi appel plus fréquemment à D2 et D5, modes de résolution pas à pas. Dans le domaine pédagogique, ceci plaide en faveur de l'automatisation de tout ce qui est calcul numérique, techniques opératoires et autres tables de multiplications, afin que l'élève puisse consacrer toute son attention et ses capacités d'autoévaluation à l'enchaînement des étapes de sa réflexion, pour qu'il ne perde de vue ni les contraintes initiales de l'énoncé (dégradation de D2 en D5, voir plus haut) ni le but à atteindre.

Quel est l'objectif précis de cette recherche de l'automatisation? Il s'agit principalement d'éviter au maximum la surcharge cognitive chez l'apprenant, en traitant à un niveau infraconscient tout ce qui est du ressort des techniques opératoires, depuis les tables de multiplication jusqu'aux problèmes de retenues de dizaines et de mise en page. Un autre domaine à exercer de façon systématique est celui du calcul mental approché, aide précieuse dans les moments de réflexion critique à propos de la plausibilité du résultat numérique trouvé, surtout quand l'élève est appelé à utiliser de grands nombres. Morf (1994) nous met cependant en garde contre les inconvénients possibles d'une automatisation trop étendue, « économique à court terme, mais coûteuse à long terme parce qu'[elle] ne résiste pas aux changements de conditions et [est] réfractaire aux modifications» (p. 38-39). Il convient donc de bien distinguer dans une tâche d'enseignement-apprentissage quels niveaux taxinomiques supérieurs doivent garder une certaine souplesse cognitive sous peine de se muer en obstacles épistémologiques futurs.

Il ne faut pas pour autant négliger les trois autres traits de surface. En l'absence de la variable «Grandeur des données numériques», elles peuvent infléchir les décisions des élèves et diminuer les taux de réussite (mots inducteurs, énoncés ordonnés). Baffrey-Dumont (1996) parvient à une conclusion analogue s'agissant du comportement d'élèves plus jeunes: les typologies prenant en compte la structure mathématique profonde «sont des outils adaptés à la construction d'énoncés variés» (p. 336). Par contre, elles ne sauraient, à elles seules, prévoir les modes de résolution mis en œuvre par les élèves, fruits d'une reconstruction systématique et personnelle des liens entre les propositions de l'énoncé étudié, sous l'influence de son habillage pédagogique.

Nous désirons encore souligner la spécificité de D3, dont l'efficacité n'a jamais été mise en défaut, même par les grands nombres dont la prépondérance a été signalée ci-dessus. Cette démarche semble gommer tous les traits de surface. La raison en est peut-être que, dès après le premier calcul de son protocole, l'élève évalue exactement l'écart au but et s'en sert pour trouver immédiatement la solution: supériorité du téléologique sur le productif? (Saada-Robert 1989)

La question peut se préciser encore. Ce fort taux de réussite est-il dû directement à la démarche ou bien n'est-il pas plutôt propre aux élèves qui savent l'utiliser spontanément? Autrement dit, ces mêmes élèves n'auraient-ils pas trouvé aussi régulièrement la solution numérique exacte s'ils avaient été contraints de rester sur D2? La recherche purement descriptive doit ici laisser la place à l'intervention pédagogique, une fois qu'elle a désigné les leviers didactiques pertinents.

Le suivi pas à pas de cet apprentissage, dans une perspective diachronique, peut se révéler riche d'enseignements. Quelle est la genèse de D3? Comment ce nouvel objet émerge-t-il du cadre conceptuel ancien, quels sont les éléments qui ont permis de le penser, de l'imaginer, de l'inventer? (Radford, 1997)

Cette genèse apparaît «spontanément» et simultanément chez quatre élèves, lors du problème 2B. Cet énoncé est le neuvième de la série de seize (ordre d'apparition: A, I, F, P, C, L, E, M, B, K, G, N, D, J, H, O, pour respecter la distribution des variables expérimentales); les quatre élèves en question ont traité les problèmes précédents par la démarche D2, dont l'algorithme est donc pour eux stabilisé par régulation interne. Cet enchaînement de calculs a été «modularisé» et est demeuré disponible comme outil (Johsua, 1996, p. 152; Bruner, 1983, p. 121) jusqu'à sa modification décrite ici. Six élèves supplémentaires vont par la suite se convertir à D3. La plupart de ces dix sujets lui resteront fidèles.

Quelles sont les caractéristiques de l'énoncé 2B qui pourraient expliquer cet apprentissage, et partant nous amener à le considérer comme non intentionnel plutôt que comme spontané? Selon les variables expérimentales, on peut le décrire de la manière suivante:

- avec mots inducteurs,
- ordonné,
- à phrases simples,
- sans grands nombres.

Avec en particulier

- N0 = 25,
- N1 = 2
- N2 = 3
- N3 = 52.

C'est bien sûr cette proximité N2 - N1 = 1 qui a été le facteur déclenchant: l'importance de la grandeur des données numériques nous apparaît une fois de plus, la différence des deux valeurs étant réduite au minimum et correspondant directement au nombre de pas d'incrémentation restants. La situation habituelle a été légèrement modifiée par l'enseignant, ce qui a permis à l'élève de «tester la viabilité des connaissances qu'il mobilise pour [la] traiter», et qui l'a poussé à rationaliser sa stratégie de résolution (Jonnaert, 1996*a*, p. 241).

Les travaux de Lenoir (1996, p. 235-240 tout spécialement) nous permettent de relire ce processus d'apprentissage de la manière suivante (on se reportera pour D2 et D3 aux annexes 2 et 3): à partir d'une démarche maîtrisée par l'élève grâce à ses outils habituels (médiation cognitive entre le sujet et son objet, par le biais des systèmes de signes: calculs, textes), l'enseignant peut aménager la situation pour permettre à l'élève de franchir un seuil, pour l'attirer aussi loin que possible à l'intérieur de sa zone proximale de développement (médiation didactique par le biais de l'introduction de circonstances un peu différentes), ce qui débouche finalement sur un nouveau palier stable, stabilité prouvée par ce que les élèves savent en dire (médiation cognitive de nouveau). Cette mise en forme de l'acquis constitue une sorte de modélisation de la nouvelle démarche, qui tient compte des capacités d'abstraction présentes des élèves (en attendant la mise en équations quelques années plus tard).

L'intérêt pédagogique des travaux de Vygotsky (1934) et de Bronckart, John-Steiner, Panofsky, Piaget, Schneuwly, Vygotsky et Wertsch (1985) traitant de l'importance de l'interaction dans l'apprentissage, interaction à un double niveau (cognitif et didactique), mais toujours supportée par les messages perçus / émis, ne saurait plus nous échapper: même dans des domaines où la connaissance est produite et organisée de façon très stricte (sciences «dures» et mathématiques), sa redécouverte par le jeune enfant nécessite échange, confrontation, débat (voir les thèses défendues dans Brossard, 1993, p. 196-198, en particulier «L'intégration des activités cognitives dans les contextes sociaux»).

En tout cas, cette étude aura permis de distinguer nettement les élèves qui se bornent à opérer sur les données numériques contenues dans l'énoncé, des élèves qui acceptent de choisir un hypothétique couple solution, de le tester et de modifier leur choix en cas d'insuccès, soit pas à pas (D2), soit en allant immédiatement au but (D3). C'est d'ailleurs ce même type de résolution qui est mis en œuvre en Mésopotamie antérieurement au XXV^{e} siècle av. J. C. «Le passage de l'arithmétique à l'algèbre se ferait au moment où l'on arrête de penser en termes de fausses solutions choisies plus ou moins astucieusement [comme dans cette étude] et où l'on décide de penser en termes de la valeur exacte de la quantité qu'on cherche» (Radford et Grenier, 1996, p. 257). Cette ouverture de l'espace problème sur l'essai, sur l'autoévaluation, donne bien entendu un statut tout à fait particulier à l'erreur, qui devient l'élément moteur de l'apprentissage, qui pointe, par son écart au but connu, le chemin qui reste à faire, et que chacun, selon la démarche retenue, va parcourir plus ou moins rapidement, avec plus ou moins de fiabilité.

On peut se demander quel peut bien être l'intérêt didactique d'une telle recherche concernant les de situations d'apprentissage plus habituelles.

Il me semble que le premier résultat s'énonce de la manière suivante à l'intérieur de la théorie de la situation problème de Brousseau: la phase de recherche, en ce qu'elle demeure adidactique, fonctionne bien mieux si l'énoncé comporte de petits nombres et se passe de mots inducteurs. La situation mise en place est alors à la fois ouverte (Weisser, 1997) et peu gourmande en énergie cognitive. Cette absence de surcharge, cette disponibilité se traduisent par une plus grande variété des démarches mises en œuvre. Grands nombres et mots inducteurs sont à ce titre à concevoir comme du bruit informatif dans ce moment initial de la situation problème. Il est toujours encore temps par la suite, dans les phases d'entraînement, de corser la difficulté. Est ainsi mis en exergue le rôle de «catalyseur du développement» que Schneuwly (1995, p. 29), reprenant les idées de Vygotsky, attribue à l'enseignant. Il nous rappelle que l'apprentissage scolaire ne porte ses fruits que s'il devance le développement naturel des facultés psychiques de l'élève, que s'il amène ce dernier vers un degré d'abstraction toujours plus élevé. Cette étude illustre à cet égard les capacités propres des élèves de cinquième année de primaire, pour peu que la situation qui leur est proposée fasse réellement problème, tout en demeurant suffisamment proche des habiletés qu'ils maîtrisent déjà pour pouvoir les fédérer en une nouvelle démarche de résolution. Nous sommes loin là des «épistémologies professorales» décrites par Schubauer-Leoni et Ntamakiliro (1994, p. 92) où l'enseignant s'occupe à la fois des questions et des réponses!

De façon plus générale, cette expérimentation met en évidence le fait qu'il appartient à tout enseignant de décider du seuil d'abstraction auquel il va définir ses objectifs pédagogiques. Cette même question a d'ailleurs été soulevée dans un autre contexte vygotskien, celui de l'évaluation dynamique du potentiel d'apprentissage (White, 1995, p. 95), où l'autrice se demande ce que recouvre exactement l'intervention de l'adulte: «instruction directe de stratégies? aides facilitant la résolution du problème? aides motivationnelles?» Autrement dit et pour reprendre le cas particulier des problèmes d'arithmétique, il est illusoire de vouloir traiter toutes les situations types, leur nombre étant trop considérable et leur classification nécessitant de toute façon des compétences que possèdent l'enseignant mais pas l'élève (domaine métacognitif: «Ce problème ressemble à quel autre que j'ai déjà résolu? Sous quels aspects?»). Ceci revient à substituer à une pédagogie de l'application, de l'instanciation de schémas de résolution figés, une pédagogie de la recherche ouverte, de la réflexion critique. Et donc en partie à répondre aux interrogations de White (1995): ce qui appartient au domaine de la motivation est pris en charge par la sécurité affective garantie lors de l'instauration d'une situation problème adidactique (Laborde, 1991, p. 31-32). Sur le plan cognitif, c'est l'aménagement des traits de surface des énoncés successifs qui va permettre aux élèves de développer leurs propres stratégies de résolution, dans l'idée que cette autoproduction les rendra plus facilement transférables; ce qui est le cas dans la présente expérimentation.

L'apprenant de son côté y gagne un certain nombre d'attitudes, de compétences transversales, en particulier le courage d'essayer au risque de se tromper, mais avec l'idée de vérifier la plausibilité de ses résultats, savoir-faire complexe réclamé dans le processus de dévolution didactique (Jonnaert, 1996*b*, p. 139-140), moteur de l'acquisition des savoirs mathématiques. «Oser oser» est bel et bien un comportement social, témoin de l'image qu'a de soi l'enfant en tant qu'élève, image qu'il accepte de mettre en péril dans sa relation au savoir (mathématique ici) à reconstruire par la résolution d'une situation problème. Le social constitue donc une source du développement conceptuel de l'enfant (Garnier, Bednarz et Ulanovskaya, 1991*b*, p. 9) qui va progressivement intérioriser et formaliser ses connaissances. Cet effort de formalisation me semble des plus importants et peut se suivre pas à pas à travers les seize solutions successivement proposées par un élève donné.

L'analyse des traces écrites met bien en évidence le rôle capital des systèmes de signes dans la construction et la transformation des processus mentaux de l'individu (Wertsch, 1985), par la capacité du langage [des langages] à fixer, à organiser la pensée, à autoriser un retour réflexif sur ce qui a déjà été symbolisé. Le social apparaît ici une seconde fois, non plus sous l'aspect d'une rencontre interpersonnelle, mais sous les traits d'une médiation intrapersonnelle entre la situation et le sujet apprenant, par le biais d'outils cognitifs explicites et conventionnels, connus et utilisés par tous (Seeger, 1991, p. 143).

Abstract – This study describes the effect that superficial changes to an arithmetic problem statement can have on either the success rate or on the resolution procedures. Within a constant mathematical structure, the author notes that the presence of large numbers and of inductive words, as well as the presentation of numerical data in the order of their use decreases the success rate. As well, he notes a phenomenon of independant learning regarding the procedures adopted and an increasing efficiency combined with a decrease in cognitive demand.

Resumen –Este estudio se interesa al efecto que las modificaciones superficiales del enunciado de un problema de aritmética podrían tener sea sobre el logro de la solución, sea sobre los modos de resolución del mismo. Guardando la estructura matemática constante, se pudo observar que la presencia de grandes cifras, de palabras inductoras así como la presentación de los datos numéricos en el orden de la futura utilización disminuyen el índice de aciertos. Se ha constatado igualmente un fenómeno de aprendizaje autónomo en lo que respecta los procedimientos utilizados, los cuales se orientan hacia un aumento de la eficacidad conjugado a una disminución de la inversión cognitiva necesaria al aprendizaje.

Zussammenfassung – Diese Studie interessiert sich für die Auswirkungen von Oberflächenveränderungen beim Besprechen arithmetischer Aufgaben auf den möglichen Erfolgsgrad sowie die Lösungsverfahren. Bei gleichbleibender Aufgabenstellung hat sich ergeben, dass die Verwendung großer Zahlen, induktiver Erklärungen sowie die Verwendung numerischer Daten in der Reihenfolge ihrer späteren Abarbeitung den Erfolgsgrad beeinträchtigen. Weiterhin wurde das Phänomen eines autonomen Lernvorgangs festgestellt, bei dem sich je nach der gewählten Vorführungsart eine Relation zwischen zunehmendem Lösungserfolg und abnehmendem kognitiven Einsatz herstellen lässt.

RÉFÉRENCES

Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. *Revue des sciences de l'éducation, XXII*(2), 321-343.

Bastien, C. (1987). *Schèmes et stratégies dans l'activité cognitive de l'enfant.* Paris: Presses universitaires de France.

Bednarz, N. (1991). Interactions sociales et construction d'un système d'écriture des nombres en classe primaire. *In* C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (dir.), *Après Vygotsky et Piaget* (p. 51-68). Bruxelles: De Bœck.

Brissiaud, R. et Escarabajal, M.-C. (1986). Formulation des énoncés: classique vs récit. *Revue française de pédagogie, 86*, 47-52.

Bronckart, J.-P., John-Steiner, V., Panofsky, C.P., Piaget, J., Schneuwly, B., Vygotsky, L.S. et Wertsch, J.V. (1985). *Vygotsky aujourd'hui.* Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Brossard, M. (1993). Un cadre théorique pour aborder l'étude des élèves en situation scolaire. *Enfance, 2*, 189-200.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherche en didactique des mathématiques*, 37-127.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 33-115

Brousseau, G. (1988). Représentations et didactique du sens de la division. *Recherche en didactique des mathématiques*, 47-63.

Bruner, J.S. (1983). *Le développement de l'enfant: savoir faire, savoir dire.* Paris: Presses universitaires de France.

Cobb, P., Perlwitz, M. et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation, XX*(1), 41-61.

Denis, M. (1989). *Image et cognition.* Paris: Presses universitaires de France.

Ehrlich, S. (1990). *Sémantique et mathématique.* Paris: Nathan.

Fischer, J.-P. (1987). L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue française de pédagogie, 80*, 17-24.

Gaonac'h, D. (1990). Lire dans une langue étrangère: approche cognitive. *Revue française de pédagogie, 93*, 75-100.

Garnier, C., Bednarz, N. et Ulanovskaya, I. (1991b). Deux visions différentes de la recherche en didactique. *In* C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (dir.), *Après Vygotsky et Piaget* (p.7-26). Bruxelles: De Bœck.

Gombert, J. É. (1988). Autocontrôle par l'enfant de ses réalisations dans des tâches cognitives. *Revue française de pédagogie, 82*, 47-59.

Grice, P.H. (1979). Logique et conversation. *Communications, 30*, 31-56.

Johsua, S. (1996). Le concept de contrat didactique et l'approche vygotskienne. *In* C. Raisky et M. Caillot (dir.), *Au-delà des didactiques, le didactique* (p. 145-158). Bruxelles: De Bœck.

Jonnaert, Ph. (1996a). Apprentissages mathématiques en situation: une perspective constructiviste. *Revue des sciences de l'éducation, XXII*(2), 233-252.

Jonnaert, Ph. (1996b). Dévolution vs contre-dévolution! *In* C. Raisky et M. Caillot (dir.), *Au-delà des didactiques, le didactique* (p. 115-144). Bruxelles: De Bœck.

Laborde, C. (1991). Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques. *In* C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (dir.), *Après Vygotsky et Piaget* (p.29-50). Bruxelles: De Bœck.

Laurendeau, J. (1968). *Les premières notions spatiales chez l'enfant.* Paris: Presses universitaires de France.

Lenoir, Y. (1996). Médiation cognitive et médiation didactique. *In* C. Raisky et M. Caillot (dir.), *Au-delà des didactiques, le didactique* (p. 223-270). Bruxelles: De Bœck.

Morf, A. (1994). Une épistémologie pour la didactique: spéculations autour d'un aménagement conceptuel. *Revue des sciences de l'éducation, XX*(1), 29-40.

Palacio-Quintin, E. (1995). Éducation cognitive au préscolaire chez les enfants des milieux socio-économiques faibles. *Psychologie et éducation, 20*, 37-47.

Piaget, J. (1976). Une heure avec Jean Piaget (à propos de l'enseignement des mathématiques). *Revue française de pédagogie, 37*, 5-12.

Radford, L. (1997) L'invention d'une idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre. *Repères, 28*, 81-98.

Radford, L. et Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, XXII*(2), 253-276.

Richard, J.-F. (1984). La construction de la représentation du problème. *Psychologie française, 29*, 226-230.

Roubtsov, V. (1991). L'activité d'apprentissage et les problèmes de formation de la pensée théorique des écoliers. *In* C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (dir.), *Après Vygotsky et Piaget* (p. 151-162). Bruxelles: De Bœck.

Saada-Robert, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème. *Psychologie française, 34*, 193-206.

Schmidt, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, XXII*(2), 277- 294.

Schneuwly, B. (1995). De l'importance de l'enseignement pour le développement. Vygotsky et l'école. *Psychologie et éducation, 21*, 25-37.

Schubauer-Leoni, M. L. et Ntamakiliro, L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des sciences de l'éducation, XX*(1), 87-113.

Seeger, F. (1991). Interaction and knowledge in mathematics education. *Recherche en didactique des mathématiques, 11*(2-3), 125-166.

Semenova, M. (1991). La formation théorique et scientifique de la pensée des écoliers. *In* C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (dir.), *Après Vygotsky et Piaget* (p. 189-200). Bruxelles: De Bœck.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne: Peter Lang.

Vergnaud, G., Chartier, D., Esperet, E. et Fayol, M. (dir.) (1994). *Apprentissages et didactiques, où en est-on?* Paris: Hachette.

Vygotsky, L. S. (1934, éd. 1985). *Pensée et langage.* Paris: Messidor / Éditions Sociales.

Weisser, M. (1995). *Le rôle de l'implicite dans l'apprentissage.* Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, Université de Strasbourg II et Université de Padoue.

Weisser, M. (1997). *Pour une pédagogie de l'ouverture: approches sémiotiques de l'acte d'apprendre.* Paris: Presses universitaires de France.

Wertsch, J. V. (1985). La médiation sémiotique de la vie mentale: L. S. Vygotsky et M. M. Bakhtine. *In* J.-P. Bronckart, V. John-Steiner, C.P. Panofsky, J. Piaget, B. Schneuwly, L.S. Vygotsky et J.V. Wertsch (dir.), *Vygotsky aujourd'hui* (p. 139-168). Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

White, F. (1995). Vygotsky et l'éducation: une application dans le domaine de l'évaluation. *Psychologie et éducation, 21*, 89-100.