recursion, metarecursion, および分解について

大 橋 健 八 郎

目　　次

recursion, metarecursion, および分解について

大 橋 健 八 郎

recursion, metarecursion, and decomposition

KEMPACHIRO OHASH

This paper deals with several problems concerning the decomposition of recursively (metarecursively) enumerable sets, which has been extensively developed over the last few years.

Here we present five results in this field :

R 1. There are two recursively enumerable sets A, B such that,

(i) $A \subset B$,

(ii) A is recursive in B, and

(iii) $B - A$ is not recursively enumerable.

R 2. There are recursively enumerable sets A, B, C, which satisfy the following csonditions ;

(i) A and $B \cup C$ have the same degree,

(ii) $B \cap C = \phi$,

(iii) for arbitrary recursively enumerable sets A_0, A_1, it $\overline{\overline{A}}_0 = \overline{\overline{B}}$ & $\overline{\overline{A}}_1 = \overline{\overline{C}}$, then $A \neq A_0 \cup A_1$ or $A_0 \cap A_1 = \phi$, where $\overline{\overline{A}}$ denotes the degree of A.

R 3. There are recursively enumerable sets A and B of the same degree such that $B \supset A$ and such that $B - A$ is not recursively enumerable.

R 4. Let S be any non-hyperaithmetic Π : set. Then, there are Π : sets S_1, S_2, …… S_n such ahat

(i) $\bigcup_{j=1}^{n} S_j = S$,

(ii) $S_i \subset S_j = \phi$ $(i \neq j)$., and

(iii) there exists no hyperarithmetic set A such that $S_j = S \cap A$, for any j.

R 5. Each regular non-metarecursive metarecursively enumerable set is the disjoint union of two metarecursively enumerable sets of incomparable metadegrees.

Post [1] によって考察された recursively enumerable 集合の degree of unsolvability による hierarchy に関して興味ある問題の1つは，degree の分解についてゞあろう。[2]

この小文はその分野における2つの結果を証明し，他の基本的な1つの結果を証明を省略して挙げる。(§1)

recursion theory の拡張に関してえられた多くの結果は [3]，recursive ordinals のrecursion theory の成立を予測させていたが，それはまた，それ自身としても独立した面白さをもっている。

その1つに metarecursion theory [4] があるが，recursion theory において成立した基本的性質が metarecursion theory においても成立するか否かは興味ある問題であろう。§2 において〔11〕，〔12〕，〔13〕[5] でえられた recursion theory における性質が metarecursion theory においても成立することを示す。

§1. recursively enumerable degree に関する3つの命題

よく知られていることであるが，recursively enumerable degrees a, b について $a \leq a \cup b$, $b \leq a \cup b$ である。このことは a, b は $a \cup b$ より "recursivity" が低いことはないと見做すことを保証しているように考えられる。すなわち a, b は $a \cup b$ より以上に "recursive" であると考えられる。しかしながら，〔3〕において $0<a<b$ で $a \cup x=b$, $x<b$ であるような recursively enumerable degree x が存在しない2つの，recursively enumerable degrees a, b の存在が示された。

"recursive" の比較は他の面から見る視点もある。すなわち，$A \subset B$ である recursively enumerable 集合 A, B に対して，A が B に "recursive" であれば $B-A$ も B に "recursive" である。従って $B-A$ が B より以上に "recursive" であることより，$B-A$ も recursively enumerable であってもよいと思われる。しかし，次の命題はこの予測を覆している。

命題 1. $A \subset B$, A が B に recursive であり，しかも $B-A$ が recursively enumerable でないような recursively enumerable 集合 A, B が存在する。

証明　Dekker は〔14〕[6] で，任意の recursive でない recursively enumerable degree α に対して，α を degree としてもつ hypevsimple 集合 A が存在することを示した。

それにならって，$\alpha \leq \beta$ である recursively enumerable degrees α, β をそれぞれ degree としてもつ hypersimple 集合 A, B を $A \subset B$ であるように構成することができれば命題1は証明される。$B-A$ が recursively enumerable 集合であれば，A が simple 集合ではなくなるから，A, B は hypersimple である必要はなく，単に simple でありさえすればよい。

R_0, R_1, R_2, ………, R_n, …… を recursively enumerable 集合全部を算出する1つの標準的な enumeration とする。

この enumeration で段階 s までに算出された集合 X の要素全部の集合を X^s で示す。各段階

s で算出される要素は有限個であるから，各段階 s に対して唯1つの n があって，

$R_n{}^s-R_n{}^{s-1}\neq\phi$ であると仮定してよい。

$R_n{}^s-R_n{}^{s-1}\neq\phi$ である n を $n=n\ (s)$ とする。

$f(s)\in R^s_{n(s)}-R^{s-1}_{n(s)}$,

$n_0=n(s)$ とおく。

n が段階 s で適合的であるとは次の条件を満足するものとする。

$C_n{}^s\neq\phi$, $D_n{}^s-A^s\neq\phi$, $n>m$ であるすべての m に対して $D_n{}^s-D_m{}^s\neq\phi$ である。

1． $s=0$ である場合

1．1． $f(0)>\dfrac{n_0(n_0+5)}{2}+3$ である場合

$A^0=C^0_{n_0}=\{f(0)\}$,

$B^0=\left\{f(0),\ \dfrac{n_0(n_0+5)}{2}+3\right\}$,

$D^0_{n_0}=\left\{\dfrac{n_0(n_0+5)}{2}+3\right\}$,

$n_0\neq m$ であるすべての m に対して，

$C^0_m=D^0_m=\phi$,

$N^0=\{n_0\}$

とおく。

1．2． $f(0)\leq\dfrac{n_0(n_0+5)}{2}+3$ である場合

$A^0=B^0=N^0=C_n{}^0=D_n{}^0=\phi\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,$

とおく。

2． $s>0$ である場合

2．1． $f(s)\leq\dfrac{n_0(n_0+5)}{2}+3$ であるか，

n_0 が適合的であるか，あるいは

$f(s)>\dfrac{n_0(n_0+5)}{2}+3$ で $f(s)\in A^{s-1}$ である場合

$A^s=A^{s-1}$, $B^s=B^{s-1}$, $C^s=C^{s-1}$, $D^s=D^{s-1}$, $N^s=N^{s-1}$

とおく。

2．2． n_0 が適合的でなく，$f(s)>\dfrac{n_0(n_0+5)}{2}+3$, $f(s)\notin B^{s-1}$ である場合、

$a\leq\dfrac{n_0(n_0+3)}{2}$ で $a\notin B^{s-1}$ である最大の自然数を a_0 とする。

$A^s=A^{s-1}\cup\{f(s)\}$, $B^s=B^{s-1}\cup\{f(s),\ a_0\}$,

$N^s=N^{s-1}\cup\{n_0\}$,

$C^s_{n_0}=C^{s-1}_{n_0}\supset\{f(s)\}$, $D^s_{n_0}=D^{s-1}_{n_0}\cup\{a_0\}$,

$n_0 \neq m$ であるすべての m に対して

$$C^s_m = C^{s-1}_m,\ D^s_m = D^{s-1}_m$$

とおく。

2. 3. n_0 が適合的でなく，$f(s) > \dfrac{n_0(n_0+5)}{2} + 3$, $f(s) \notin A^{s-1}$, $f(s) \in B^{s-1}$, である場合

$a_1 \leq \dfrac{n_0(n_0+5)}{2} + 3$ で $a_1 \notin B^{s-1}$ である最大の自然数を a_1 とする。

$$A^s = A^{s-1} \cup \{f(s)\},$$

$$C^s_{n_0} = C^{s-1}_{n_0} \cup \{f(s)\},\ D^s_{n_0} = D^{s-1}_{n_0} \cup \{f(s),\ a_1\},$$

$$N^s = N^{s-1} \cup \{n_0\},$$

$D^{s-1}_n - A^s = \phi$ であるようなすべてのに n 対して，

$b_n \leq \dfrac{n(n+5)}{2} + 3$ で $b_n \notin B^s$ であるような最大の自然数を b_n として

$$D^s_n = D^{s-1}_n \cup \{b_n\}$$

その他の n について

$$D^s_n = D^{s-1}_n,$$

最後に　$B^s = B^{s-1} \subset (\bigcup_{n=0}^{\infty} D^s_n) \cup \{f(s)\}$,

とおく。

補題 1　$A^s = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overset{s}{C}{}^s_n$, $B^s = \bigcup_{n=0}^{\infty} D^s_n$, $C^s_n \subset R^s_n$, $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots)$

証明　　A, B, C の構成から容易に理解できる。

補題 2　R_n が無限集合であるとき，

$A \cap R_n \neq \phi$

証明　　n がある段階 s で適合的であれば，

補題 1 より　$\phi \neq A^s \cup C^s_n = C^s_n \subset A \cup R^s_n$

R_n が無限集合であるから，$n(s) = n$ で $f(s) > \dfrac{n(n+5)}{2} + 3$ であるような s が無限個存在する。このような s の最初のものを s' とする。n が $s'-1$ で適合的でなければ，

$f(s) \in R^s_n$　で　$A^s = A^{s-1} \cup \{f(s)\}$

となる。

補題 3　R_n が無限集合であるとき，n は適合的である。

証明　　n が段階 $s-1$ で適合的であって段階 s が適合的でなくなったとする。

$n' < n$ で $n(s) = n'$ で $f(s) \in D^{s-1}$

であるような n' が存在しなければならないことは，s に関する数学的帰納法によって示される。これより n が適合的でなくなるのは高々 n 回であることが導かれる。

$s_0=\mu s(A^s-A^{s-1}\neq\phi)$

とすれば，$s=s$ ではすべての n は適合的でなくなることはない。

$s=s'$ で $A^s-A^{s-1}\neq\phi$ とする。

$n(s)=n$ とすれば $n'\leq n$ では $f(s)$ を A^s に組み入れることによっては適合的でなくなることはない。

従って$D^s_n-C^s_n$ は高々 $n+1$ 個の要素しか含まない。従ってその要素はすべて

$\frac{(n-1)(n+4)}{2}+3$ より大きい。

$\therefore\quad D^s_n-D^s_{n'}\neq\phi\quad n>n'$

このことより s'' が存在して段階 s'' で n は適合的となり，それ以後は適合的でなくなることはない。

補題 4　$B-A$ は無限集合である。

証明　R_n が無限集合であるとき $m<n$ なるすべての m に対して，$D_n-D_m\neq\phi$

また明らかに R_n が無限集合であるような n は無限個存在し，$B-A=\bigcup_{n=0}^{\infty}D_n$

補題 5　B は無限集合である。

証明　$a\in B$ で $a\leq\frac{n(n+5)}{2}+5$ である a は高々 $\frac{n(n+3)}{2}+1$ 個であるから，

$b\leq\frac{n(n+5)}{2}+3$ である少なくとも $n+2$ 個の b について

$b\in B$

補題 6　A，B は simple 集合である。

証明　$A\subset B$ であり，A，B は構成より recursively enumerable 集合であるから，補題 2 より導かれる。

補題 7　$B-A$ は recursively enumerable 集合でない。

証明　$B-A$ が recursively enumerable 集合であれば，A が simple 集合でないか，$B-A$ が有限集合であるが，補題 6，7 よりこれは不可能である。

補題 8　A は B に recursive である。

証明　段階 s で $f(s)\in A^s$ であったとすれば $g(s)\leq\frac{n(s)(n(s)+5)}{2}+3<f(s)$ であるような $g(s)$ が存在して，$g(s)\in D^s_{n(s)}\subset B^s$ となる。

$K(l)=\mu t(s)(a)(t<s\ \&\ a\in B^s-B^{s-1}\rightarrow l>a)$

とおけば $K(l)$ は B に recursive な関数である。このとき，

$x\in A\equiv(Ey)(f(y)=x\&y<K(x))$

従って A は B に recursive である。

$A\subset B$ である recursively enumerable 集合 A，B について，$B-A$ が recursive 集合であれ

ば，A と B の degree は等しい。

逆に，recursively enumerable 集合 A，B に対して，その degree が等しいとき $B-A$ は recursive であろうか？

次の命題はこれに対する否定的解答を与えている。

命題 2　$A\subset B$ で，$B-A$ が recursively enumerable でないような degree の等しい recursively enumerable 集合 A，B がある。

証明　命題 1 で A，B を構成した際，さらに B が A に recursive であるようにすればよい。

R_0，R_1，………，R_n，………は命題 1 の証明での要求を満しているものとする。

n が適合的であるとは，次の条件を満足することをいう。

$C_n^s\neq\phi$，$D_n^s\neq\phi$，$E_n^s\neq\phi$　$K<n$ であるすべての K に対して

$D_n^s-(D_k^s\cup E_k^s)\neq\phi$

1．$S=0$ のとき

1．1　$f(0)>\dfrac{n(n^2+11)}{3}+1$ であるとき，

$A^0=C_{n_0}^0=\{f(0)\}$

$B^0=\{f(0),\ \dfrac{n(n^2+11)}{3}+1\}$

$D_{n_0}^0=B^0-A^0$，$E_{n_0}^0=\left\{\dfrac{n(2n^2-3n+25)}{6}-2\right\}$

$N^0=\{n_0\}$

$n\neq n_0$ であるすべての n について

$C_n^0=D_n^0=E_n^0=\phi$

1．2　$f(0)\leq\dfrac{n(n^2+11)}{3}+1$ のとき

$A^0=B^0=C_n^0=D_n^0=E_n^0=N^0=\phi$

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots$

2．$S>0$ のとき

2．1　$f(s)\leq\dfrac{n(n^2+11)}{3}+1$ であるか，

n_0 が適合的であるか，

$f(s)>\dfrac{n(n^2+11)}{3}+1$ で $f(s)\in A^{s-1}$ であるとき

$A^s=A^{s-1}$，$B^s=B^{s-1}$，$C_n^s=C_n^{s-1}$，$D_n^s=D_n^{s-1}$，$E_n^s=E_n^{s-1}$，$N^s=N^{s-1}$ $n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$

2．2　n_0 が適合的でなく，$f(s)>\dfrac{n(n^2+11)}{3}+1$ で $f(s)\notin B^{s-1}$ であるとき

$b_0<\dfrac{n(n^2+11)}{3}+1$ で $b_0\notin B^{s-1}$

である最大の自然数を b_0 とする。

$a_0 < \dfrac{n(2n^2-3n+25)}{6} - 2$ で $a_0 \notin B^{s-1}$ である最大の自然数を a_0 とする。

$A^s = A^{s-1} \cup \{f(s),\ a_0\}$,

$C^s_{n_0} = C^{s-1}_{n_0} \cup \{f(s)\}$,

$D^s_{n_0} = D^{s-1}_{n_0} \cup \{b_0\}$,

$E^s_{n_0} = E^{s-1}_{n_0} \cup \{a_0\}$,

$B^s = B^{s-1} \cup A^s \cup D^s_{n_0}$

$n \neq n_0$ であるすべてのnについて

$C^s_n = C^{s-1}_n,\ D^s_n = D^{s-1}_n,\ E^s_n = E^{s-1}_n,\ N^s = N^s \cup \{n_0\}$

とおく。

2.3 n_0 が適合的がなく，$f(s) > \dfrac{n(n^2+11)}{3} + 1$，$f(s) \notin A^{s-1}$ で $f(s) \in B^{s-1}$であるとき，

$b_1 \leq \dfrac{n(n^2+11)}{3} + 1$ で $b_1 < B^{s-1}$ であるような最大の b_1 をとる。

$a_1 \leq \dfrac{n(2n^2-3n+25)}{6} - 2$ で $a_1 < B^{s-1}$ であるような a_1 の最大のものを a_1 とする。

$C^s_{n_0} = C^{s-1}_{n_0} \cup \{f(s)\}$,

$D^s_{n_0} = D^{s-1}_{n_0} \cup \{b_1\}$,

$E^s_{n_0} = E^{s-1}_{n_0} \cup \{a_1\}$,

$n \neq n_0$，$n \notin N^{s-1}$ であるすべての n に対して

$C^s_n = C^{s-1}_n,\ D^s_n = D^{s-1}_n,\ E^s_n = E^{s-1}_n,\ N^s = N^{s-1} \cup \{n_0\}$,

$n \neq n_0$ かつ $D^{s-1}_n - (A^{s-1} \cup C^s_{n_0} \cup E^s_{n_0}) = \phi$，$n \in N^{s-1}$ であるとき，

$b_n \leq \dfrac{n(n^2+11)}{3} + 1$ で$b^n \notin B^{s-1}$ である最大の自然数を b_n。

$a_n \leq \dfrac{n(2n^2-3n+25)}{6} - 2$ で $a_n \notin B^{s-1}$ である最大の自然数を a_n とする。

$D^s_n = D^{s-1}_n \cup \{b_n\}$,

$E^s_n = E^{s-1}_n \cup \{a_n\}$,

その他の n に対して

$D^s_n = D^{s-1}_n,\ E^s_n = E^{s-1}_n$,

$$A^s = A^{s-1} \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n^s) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n^s),$$

$$B^s = A^s \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n^s)$$

補題 1　A, B は recursively enumerable 集合である。

証明　　構成より明らか

補題 2　R_n が無限集合であるとき,

$A \cup R_n \neq \phi$

証明　　命題 1 における補題 2 と同様な証明で示される。

補題 3　R_n が無限集合であるとき, D_n, E_n は空集合ではない。

証明　　n が適合的でない場合, ある段階 s において $n \in N^s$ となり, このとき $D_n^s \neq \phi$, $E_n^s \neq \phi$ となる。

次の補題 4 ～ 6 は命題 1 における対応する補題におけると同様にして示される。

補題 4　$B-A$ は無限集合である。

補題 5　B は無限集合である。

補題 6　A, B は simple 集合である。

補題 7　A は B に recursive である。

補題 8　B は A に recursive である。

証明　　命題 1 の補題 3 と同様にnが不適合でなくなるのは高々 n 回である。

D_n, E_n はともに$\dfrac{n(n-1)}{2}+2$ 個の収容力をもっていて, 狭義の増加関数 $d_0(n)$, $d_1(n)$, $e_0(n)$, $e_1(n)$があって

$b \in D_n^s - D_n^{s-1}$ならば, $d_0(n) < b \leq d_1(n)$

$a \in E_n^s - E_n^{s-1}$ならば, $e_0(n) < a \leq e_1(n)$,

従って段階 s で

$x \in A^s - A^{s-1}$ であれば

$y < x$ であるような y があって

$y \in B^s - B^{s-1}$ であるか

$\mu n \{e_0(n) < x \leq e_1(n)\} = n_x$ とおくと

$d_0(n_x) < b \leq d_1(n_x)$

であるような b があって

$b \in B^s - B^{s-1}$

逆に $b \in B^s - B^{s-1}$ であれば

$a < b$ であるような数 a があって

$a \in A^s - A^{s-1}$

従って補題7，8がえられる。

recursively enumerable degrees a, b, c があって $a = b \cup c$ であるとき，degree a をもつ recursively enumerable 集合 A はそれぞれ degree b, c をもつ recursively enumerable 部分集合 A_0, A_1, に分解されうることは可成りありそうなことである。しかるにこれに対して，次の結果をえたが証明は他の場所で与えることにする。

命題3　つぎの条件を満足する recursively enumerable 集合 A, B, C が存在する。

(i)　A と $B \cap C$ の degree は等しい。

(ii)　$B \cap C = \phi$

(iii)　$A = A_0 \cup A_1$, $A_0 \cap A_1 = \phi$,

A_0 と B, A_1 と C が等しい degree をもつような recursively enumerable 集合A_0, A_1 は存在しない。

§2. metarecursion theory における2つの結果

〔9〕で，Sacks と Kreisel は recursively enumerable 集合における多くの結果が metarecursion theory においても類似して成立することを指摘しているが，こゝでは non-hyperarihmetic Π_1^1 集合に関する1つの性質と metarecursively enumerable degree についての基本的な性質について考察する。

命題4　すべての non-hyperavithmetic Π_1^1 集合 S に対して，つぎの条件を満足する Π_1^1 集合 S_1, S_2, , ………S_n が存在する。

(i)　$\overset{n}{\underset{i=1}{U}} S_i = S$,

(ii)　$S_i \cap S_j = \phi$ (空集合) $i \neq j$

(iii)　すべての i に対して，$S_i = S \cap A$ であるような hyperarithmetic 集合 A は存在しない。(〔13〕における1つの定理に対応している。)

証明　S, A_1, A_2, ………, A_α, $(\alpha < \omega_1)$ をSとすべての hyperarithmetic 集合の simultaneous metarecursivee numeration とする。

S^σ, $A_\alpha{}^\sigma$ をこの enumeration での段階 σ までに算出された要素のそれぞれの集合とする。

S_i^σ は各段階 σ でつぎの要領で要素を組み入れることによって構成されるが，σ までに組み入れられた要素の集合を S_i^σ で表わす。$(i \leq n)$

A_α^σ は $i \leq n$ であるすべての i について $S_i^\sigma \cap A_\alpha^\sigma \neq \phi$ であるとき適合的であると呼ばれる。

構成が完了したときについても同様に $i \leq n$ であれば $S_i \cup A_\alpha \neq \phi$ であるとき A_α は適合的であると呼ぶ。

1. $\sigma=0$ のとき

$$S_i^\sigma=\phi \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

とおく。

2. $\sigma>0$ のとき

2.1 σ が極限数でないとき，

$n\in S^\sigma-S^{\sigma-1}$ とする。

2.1.1 $n\in A^\sigma_{\alpha\sigma}$, かつ $A^\sigma_{\alpha\sigma}$ が σ で適合的でないような順序数 α_σ があったとき，その最小のものをあらためて α_σ とする。

$A^\sigma_{\alpha\sigma}\cap S_i^{\sigma-1}=\phi$ であるような自然数 i が存在するが，その最小のものを i_σ として，

$$S^\sigma_{i\sigma}=S^{\sigma-1}_{i\sigma}\cup\{n\},$$

$$S_i^\sigma=S_i^{\sigma-1} \quad (i\neq i_\sigma)$$

とおく。

2.1.2 n を含む A^σ_α がすべて適合的であるか，あるいは n を含む A^σ_α が存在しないとき

$$S_1^\sigma=S_1^{\sigma-1}\cup\{n\},$$

$$S_i^\sigma=S_i^{\sigma-1} \quad (1<i)$$

とおく。

2.2 σ が極限数であるとき

$$S_i^\sigma=\bigcup_{\alpha<\sigma}S_i^\alpha$$

とする。

明らかにすべての σ に対して

$$S^\sigma=\bigcup_{i=1}^{n}S_i^\sigma, \qquad S_i^\sigma\cap S_j^\sigma=\phi \quad (i\neq j)$$

$$S_i=\bigcup_{\alpha<\omega_1}S_i^\alpha$$

とおいて構成を終了する。

$i\neq j$ であれば $S_i\cup S_j=\phi$

であることは容易に知られる。

S_1, S_2, ………, S_n が命題の条件を満足していることを示すために，$S_{i_0}=S\cap A_\alpha$ であるような自然数 i_0 と順序数 α が存在したと仮定して，矛盾を導く。

hyperarithmetic 集合の補集合は hyperarithmetic であるから，A_α の補集合 $\overline{A}_\alpha$ に対して，順序数 β が存在して

$A_\beta = \overline{A}_\alpha$

となる。

$S_{i_0} \subset A_\alpha$ であるから，明らかに

$S_{i_0} \cap A_\beta = \phi$

$S_i \cap A_\alpha = S_i \cap S \cap A_\alpha = S_i \cap S_{i_0}$

であるから

$S_i \cap A_\alpha = \phi \quad (i \neq i_0)$

従って A_α，A_β は共に適合的でない。

$A_\alpha^\sigma \subset A_\alpha$，$A_\beta^\sigma \subset A_\beta \quad (\sigma < \omega_1)$

であるから，結局，各段階 σ において

A_α^σ，A_β^σ は適合的でないことがわかる。

n は有限であるから，

$n \in S^\sigma - S^{\sigma-1}$で，$n \in A_\alpha^{\sigma-1}$であるか，

あるいは，$n \in S^\sigma - S^{\sigma-1}$ で $n \in A_\beta^{\sigma-1}$ であるような σ が無限個あれば A_α か A_β の少なくとも 1 つは適合的となる。従って，ある段階 $\sigma_0 < \omega_1$ があって，$\sigma_0 \leq \sigma$ である段階 σ では常に

$n \in S^\sigma - S^{\sigma-1}$ であれば

$n \notin A_\alpha^{\sigma-1}$ かつ $n \notin A_\beta^{\sigma-1}$

でなければならない。

従って $n \in A_\alpha^{\sigma-1} \cap A_\beta^{\sigma-1} \quad (\sigma_0 > \sigma)$

であれば $\sigma \leq \tau - 1$ であるような τ について $n \in S^\tau - S^{\tau-1}$ であってはならない。

結局，$\sigma_0 < \sigma$ で $n \in \left\{A_\alpha^{\sigma-1} \cup A_\beta^{\sigma-1}\right\} - S^\sigma$ であれば $n \notin S$

$A_\alpha \cup A_\beta = \{$自然数全体の集合$\}$

であるから，すべての自然数 n に対して順序数 $\sigma_n < \omega_1$ が存在して

$\sigma_n < \sigma$ であれば

$n \in A_\alpha^\sigma \cup A_\beta^\sigma$

となる。

以上のことから S の補集合 $\overline{S}$ はつぎのように表わされる。

$$S = \left(A_\alpha^{\sigma_0} \cup A_\beta^{\sigma_0} - S^{\sigma_0}\right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \geq \sigma_0} \{x \mid x \notin S^\sigma - S^{\sigma-1} \,\&\, x \in A_\alpha^{\sigma-1} \cup A_\beta^{\sigma-1}\right)$$

$\overline{S}$ は明らかに Π_1^1 集合であるから，

S は hyperarithmetic 集合となる。

これは仮定に反して，命題の証明は完了した。

命題4の証明と〔13〕の定理2の証明から容易に次の命題が成立することが示される。

命題5　すべての non-hyperarithmetic Π_1^1 集合 S に対して，つぎの条件を満足する Π_1^1 集合の無限列 S_1，S_2，………が存在する。

(i)　$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = S$

(ii)　$S_i \cap S_j = \phi \quad i \neq j$

(iii)　すべての i に対して，$S_i = S \cap A$

であるような hyperarithmetic 集合 A は存在しない。

正則でない non-metarecursive metarecursively enumerable 集合 A についても次の命題が成立するか否かは未だ知られていない。(〔10〕)

命題6　すべての正則で non-metarecursive metarecursively enumerable 集合 A は互いに比較不可能な metarecursively enumerable metadegree をもつ2つの互いに素な metarecursively enumerable 集合の和である。

証明　　A を重複なしに算出する metarecursive 関数を $f(\alpha)$ とする。

$\{\phi(e, \alpha)\}$ を metarecursive 関数の標準的な enumeration とする。(〔9〕)

$z(\sigma)$，$t_i(\sigma)$，$K_i(\sigma, e)$，$g_i(\sigma)$，$\tau_i(\sigma)$，$m_i(\sigma, e)$ は次の要領で定義される metarecursive 関数とする。

1．$\sigma=0$ のとき

$z(\sigma)=t_i(\sigma)=K_i(\sigma, e)$

$=m_i(\sigma, e)=0$

$g_1(0)=f(0), \qquad i=0,$

$\tau_1(0)=0$

$g_0(0)=f(1)$，$\tau_0(0)=0$

2．$\sigma<0$ のとき

$$t_i(\sigma)=\begin{cases}\mu e_{e\leq\sigma}(E\tau)\{f(\sigma)<K_i(\tau, e)\&\tau<\sigma\} \\ \qquad \text{このような } e \text{ が存在したとき} \\ \sigma+1 \qquad\qquad \text{その他の場合}\end{cases}$$

$$z(\sigma)=\begin{cases}1 & t_1(\sigma)\geq t_0(\sigma) \text{ であるとき} \\ 0 & \text{他の場合}\end{cases}$$

σ が極限数でないとき

$$\tau_i(\sigma)=\begin{cases}\tau_i(\sigma-1)+1 & i=z(\sigma)\text{，であるとき} \\ \tau_i(\sigma-1) & \text{その他の場合}\end{cases}$$

σ が極限数であるとき，

$$\tau_i(\sigma)=\lim_{\tau<\sigma}\tau_i(t)$$

$g_i(\tau_i(\sigma)=\alpha$ 　　$i=z(\sigma)$, $f(\sigma)=\alpha$ であるとき

$m_i(\sigma,\ e)=\mu\tau\sim(\alpha)_{\alpha\leq\tau}(\omega)_{\omega<\alpha}\{f(\alpha)<\phi((e)_1,\ \omega)\to(E_\beta)\{g(\beta)<\phi((e)_2,\ \omega)\ \&\ \alpha\leq\beta\leq\sigma\}$

$m_i(\sigma,\ e)$ は σ についての metarecursive 関数である。

$$K_i(\sigma,\ e)=\begin{cases}\lim_{\tau<\sigma}K_i(\tau,\ e)\ \ (\alpha)(\alpha<m_i(\sigma,\ e)\to(E_\tau)_{\tau<\sigma}\phi((e)_1,\ \alpha)\leq K_i(\tau,\ e)) & \text{であるとき}\\ \mu\tau(\alpha)(\alpha<m_i(\sigma,\ e)\to\phi((e)_1,\ \alpha)\leq\tau) & i=0,\ 1,\end{cases}$$

とおく。

$\{K_i(\sigma,\ e)\,|\,i<2\&0\leq\sigma\}$ が有界でないような最小の e を e^* とおく。さらに

$\{K_i(\sigma,\ e^*)\,|\,i<2\&0\leq\sigma\}$ が有界でないような最小の i を i^* とする。

補題 1　$\sigma'\leq\sigma$ ならば $z(\sigma)=1-i^*$ であるか $e^*<t_{i*}(\sigma)$ であるような σ' が存在する。

証明　　$\{\sigma\,|\,2(\sigma)=i^*\&e^*\leq t_{i*}(\sigma)\}$ が有界でないと仮定する。

$S=\{\sigma\,|\,e^*\leq\sigma\&z(\sigma)=i^*\&e^*\geq t_{i*}(\sigma)\}$

とおく。

すべての σ に対して

$t_{z(\sigma)}(\sigma)\geq t_{1-z(\sigma)}(\sigma)$ であるから $\sigma\in S$ ならばは $0\leq t_{1-i*}(\sigma)\leq t_{i*}(\sigma)\leq e^*$

S は有界でないから

$R\subset S$ であるような有界でない集合 R と e^{**} が存在して

$\sigma\in R$ ならば　　$t_{1-i*}(\sigma)=e^{**}$

従って

$\sigma\in R$ であれば

$e^{**}=t_{1-i*}(\sigma)\leq t_{i*}(\sigma)\leq e^*\leq\sigma$

従ってまた，A は正則であるから

$f(\sigma)<K_{1-i*}(\tau,\ e^{**})$ で $\tau<\sigma$

であるような τ が存在する。

即ち

$\{K_{1-i*}(\tau,\ e^{**})\,|\,0\leq\sigma\}$ は有界でない。従って

$e^{**}=e^*$

でなければならない。

このとき $i^*<1-i^*$ であるから $i^*=0$ $z(\sigma)=0$ で $t_{i*}(\sigma)=t_{1-i*}(\sigma)=e^*=e^{**}$

しかるに $t_1(\sigma)=t_0(\sigma)$ であれば $z(\sigma)=0$

これは矛盾

従って補題は証明された。

補題 2　$\sigma'<\sigma$ で $z(\sigma)=i^*$ で $\tau<\sigma$ であれば $f(\sigma)\geq K_{i*}(\tau,\ e^*)$

であるような σ' が存在する。

証明　　補題 1 と $z(\sigma)$ の定義から導かれる。

補題 3　$\{K_i(\sigma,\ e)\,|\,0\leq\ \sigma\}$ が有界でなく，metarecursive 関数 $h(\sigma)$ に対して，σ' が存在して

$S=\{h(\sigma)\mid\sigma'\leq\sigma\&(\tau)(\tau<\sigma\rightarrow K(\tau,\ e)\leq h(\sigma))\}$

とおけば，S は metarecursive 集合である。

証明　　$F(\alpha)=\mu\sigma\{\alpha\leq K(\sigma,\ e)\}$

とおけば，$F(\alpha)$ は metarecursive 関数である。

S の補集合 $\bar{S}$ に対して

$\alpha\in S\equiv(\sigma)(\sigma\leq F(\alpha)\rightarrow f(\sigma)\neq\alpha)$

となって，S は metarecursively enumerable 集合となるから，S が metarecursive となる。

補題 4　$\{f(\sigma')\mid\sigma<\sigma'<\omega_1\}$ は metafinite である。

証明　　A は正則であることから明らか。

補題 5　S は metarecursive である。

証明　　補題 3，4 より導かれる。

以上で命題は証明された。

参　考　文　献

1) 〔1〕 E. L. Post, Bull. Amer. Math .Soc., 50 (1944), 284—316,

2) 〔2〕 G. E. Sacks, Ann. of Math. 80 (1964), 300—312,

〔3〕 A. H. Lachlan, Jour. of symb. Log., 31 (1966), 434—454,

3) 〔4〕 S. C. Kleene, Bull. Amer. Math. Soc., 61 (1955), 193—213,

〔5〕 〃 〃, Amer. Jour. of Math., 77 (1955), 405—428,

〔6〕 C. Spector, Jour. of symb. Log. 20 (1955), 151—163,

〔7〕 A. Mostowski, Recursiue Function Theory, Proc. of Symp. in pure Math., 5 (1962), 29—48

〔8〕 G. Kreisel, The Theory of Models, (1965)

4) 〔9〕 G. Kreisel & G. E. Sacks, Jour. of Symb. Log. 30 (1965), 318—338

〔10〕 G. E. Sacks, Bull. of Amer. Math. Soc., 72 (1966), 59—67,

5) 〔11〕 R. M. Friedberg, Proc. of Nat. Acad. of Sci. U. S. A., 43 (1957), 236—238,

〔12〕 〃 〃, Jour. of Symb. Log., 23 (1958), 309—316,

〔13〕 K. Ohashi, Notre Dame Jour. of Form. Log., 5 (1964), 10—12,

〔14〕 J. C. E. Dekker, Proc. of Amer. Math. Soc., 5 (1958), 791—796,

〔15〕 G. E. Sacks, degrees of unsolvability (1963).