

明治大学 理工学研究科

1999年度

博士学位請求論文

ファジィ論理関数の基本的性質と簡単化

学位請求者 荒木智行

目次

1	はじめに	1
1.1	研究の背景	1
1.2	本研究の概略	3
1.2.1	定数係数をもったファジィ論理関数 - ファジィ論理関数, 多値クリーネ論理関数の拡張 -	3
1.2.2	ファジィ論理における Nelson の定理	3
1.2.3	不完全指定ファジィ論理関数の簡単化	3
1.2.4	不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化と不完全指定ファジィ論理関数への応用	3
1.3	本研究の工学的応用分野	4
2	これまでの研究	7
2.1	クリーネ代数	7
2.2	B-3 値論理関数	8
2.2.1	B-3 値論理関数の定義	8
2.2.2	B-3 値論理関数の標準形	10
2.2.3	B-3 値論理関数の特徴付け	11
2.3	正則 3 値論理関数	12
2.3.1	正則 3 値論理関数の定義と特徴付け	12
2.3.2	正則 3 値論理関数の表現	14
2.3.3	正則 3 値論理関数の標準形	16
2.4	ファジィ論理関数	17
2.4.1	ファジィ論理関数の定義と基本的性質, 論理式表現	18
2.4.2	ファジィ論理関数の簡単化	20
2.5	多値クリーネ論理関数	24
2.5.1	多値クリーネ論理関数の定義	24
2.5.2	諸性質	24

2.5.3	多値クリーネ論理関数の表現と標準形	26
3	定数係数をもったファジィ論理関数	31
3.1	まえがき	31
3.2	定数係数をもったファジィ論理関数の基本的性質	32
3.3	主加法標準形, 主乗法標準形	37
3.4	標準形と定義域の関係	39
3.5	むすび	48
4	ファジィ論理における Nelson の定理	50
4.1	まえがき	50
4.2	コンセンサス, 主項展開, P-乗法標準形	51
4.3	ファジィ論理における Nelson の定理	54
4.4	定数付きファジィ節展開法	58
4.5	最簡形式	60
4.6	ファジィ論理関数への適用	66
4.7	むすび	69
5	不完全指定ファジィ論理関数の簡単化	70
5.1	まえがき	70
5.2	不完全指定ファジィ論理関数	70
5.3	量子化と実現可能性	76
5.4	不完全指定ファジィ論理関数の簡単化	80
5.4.1	提案アルゴリズム	80
5.4.2	アルゴリズムが正しいことの証明	81
5.5	例題	83
5.6	不完全指定ファジィ論理関数の代数的構造	84
5.7	むすび	86
6	不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化とファジィ論理関数の簡単化への応用	87
6.1	はじめに	87
6.2	諸準備	88
6.3	不完全指定正則 3 値論理関数と不完全指定ファジィ論理関数	93
6.4	実現可能性と量子化	94
6.5	簡単化アルゴリズム	95
6.5.1	アルゴリズム	95
6.5.2	アルゴリズムが正しい事の証明	97

6.6 例題	99
6.7 不完全指定ファジィ論理関数およびファジィ論理回路への応用	100
6.8 むすび	102
7 本研究のまとめと応用例について	105

1 章

はじめに

1.1 研究の背景

L.A.Zadeh がファジィ集合の概念 [4] の基礎として、集合の特性関数（ファジィ集合論ではメンバーシップ関数と呼ばれている）の値域に実閉区間 $[0,1]$ を採用することにより、あいまいさのある程度表現できる事を示して以来、ファジィ理論では、実閉区間 $[0,1]$ は、ファジィ理論の基礎の中で、重要な意味のある集合として取り扱われてきた。そして、ファジィ理論の枠組みの中で、ファジィ命題の真理値が、実閉区間 $[0,1]$ 上の値を取る論理が研究され、ファジィ論理と呼ばれるようになった。

また、一方、多値論理の分野で、命題の真理値が無限値を取る研究が、L.A.Zadeh のファジィ理論の以前から、駒宮 [3] により研究されてきていた。更に、論理回路のハザードの解析やフェールセーフ論理の研究 [5, 6] の中で、クリーネ (S.C.Kleene) が、アルゴリズム論の基礎となる Computable Functions を議論する際に導入した 3 値論理 [1]（この論理は、後にクリーネ代数 [12, 30] と呼ばれる代数系により意味論が議論されるようになった。）の研究がなされてきた。それらの研究の中で、B-3 値論理と呼ばれる 2 値論理をその特殊な場合として含む 3 値論理が多くの研究者により提案、研究された。そして B-3 値論理関数 [7] は、上述のファジィ論理において研究されてきたファジィ論理関数と、代数的な観点からは同型であることが向殿 [7, 9] により証明され、その結果からファジィ論理の研究は、クリーネ代数のモデルとなる論理関数の研究としてなされるようになった。それらの研究で提案された論理関数としては、上述の B-3 値論理関数 [7]、ファジィ論理関数 [9, 10, 11, 13, 15, 34, 35, 37, 36, 39] の他に、正則 3 値論理関数 [8, 17]、多値クリーネ論理関数 [21, 22, 23, 24, 25] などが代表として挙げられる。

通常、論理の研究では、含意 (implication) の解釈を中心に行われることが多いが [2, 29]、ファジィ論理では当初、ファジィ集合論における演算である集合の積、和、補集合演算に対応する論理積、論理和、否定の解釈に対応する論理演算 $AND(\cdot)$, $OR(\vee)$, $NOT(\sim)$ と、実閉区間 $[0,1]$ 上の値を取る変数から構成される論理関数の研究が、その中心であった。

以上のように、ファジィ論理の研究では、以下のような特徴を持つ論理関数族の研究が中心に

行われてきた。

- (1) 真理値の集合は、実数濃度の実閉区間 $[0, 1]$ ，または、有限濃度の意味のある部分集合とすること。
- (2) 論理演算として $\text{AND}(\cdot)$ ， $\text{OR}(\vee)$ ， $\text{NOT}(\sim)$ を基本とすること。
- (3) クリーネ代数のモデルとなること。

これらの条件の中でこれまで研究されてきたのが、

- B-3 値論理関数
- 正則 3 値論理関数
- ファジィ論理関数
- 多値クリーネ論理関数

などであり、その研究の分野を大きく分類すると以下のようになる。

- 基本的性質
- 論理式表現
- 数え上げ問題
- 簡単化
- 数学的基礎
- 応用

これらの研究の分類の中で、簡単化の問題は、最も古くから興味を持たれていた問題の一つである。しかしながら、完全指定された（don't care を含まない）論理関数については、その基本的性質が明らかになっていたので、多くの研究がなされてきたが、不完全指定された（don't care を含む）論理関数については、その基本的性質が十分明らかになっていなかったため、十分な解決がなされていなかった。

本研究では、これまでに研究されてきた上述の論理関数族を、特殊な場合として含む一般的な関数として、定数係数をもったファジィ論理関数を最初に提案し、上に挙げた分野の研究の中でも、特に基本的性質と簡単化の問題を、完全指定の場合、不完全指定の場合の双方について考察している。

1.2 本研究の概略

1.2.1 定数係数をもったファジィ論理関数 –ファジィ論理関数、多値クリーネ論理関数の拡張–

本項目は、3章において述べられている。ここでは、1.1節の(1)～(3)の条件のもとにファジィ論理関数を多値クリーネ論理関数も、その特殊な場合として含むよう一般的に拡張した論理関数として、定数係数をもったファジィ論理関数を定義している。そして定数係数をもったファジィ論理関数の基本的性質と、関数の表現能力の限界を明らかにしている。この論文で提案されている論理関数は、これまで研究されてきたクリーネ代数のモデルとなるようなすべての論理関数を、その特殊な場合として含む論理関数である。

1.2.2 ファジィ論理における Nelson の定理

本項目は、4章において述べられている。ここでは、2値論理関数の主項展開、最簡形を求めるための最も基本的な定理として知られる Nelson の定理を、定数係数をもったファジィ論理関数にまで適用できるよう拡張した定理 –ファジィ論理における Nelson の定理– を証明している。この定理を用いれば、定数係数をもったファジィ論理関数の特殊な場合である論理関数族は、すべて簡単化可能となる。

1.2.3 不完全指定ファジィ論理関数の簡単化

本項目は、5章において述べられている。ここでは、不完全指定ファジィ論理関数の簡単化について考察を行っている。1.2.2項(4章)で示された手法は、論理関数の入力に「don't care」が含まれない、即ち、完全指定された論理関数に関して有効であるが、入力に「don't care」を含むような場合には、必ずしも有効ではない。本論文では、入力に「don't care」を含むような場合、即ち、不完全指定ファジィ論理関数の簡単化の問題を考察し、その簡単化手法を提案している。また、不完全指定されたファジィ論理関数の代数的構造も明らかにしている。

1.2.4 不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化と不完全指定ファジィ論理関数への応用

本項目は、6章において述べられている。ここでは、不完全指定ファジィ論理関数を別の視点から再定義する試みを行っている。ファジィ論理関数の特徴の一つとして、正規性 [9] と呼ばれる性質を持つことが挙げられる。正規性とは、入力が2値であれば、関数の出力は必ず2値となる性質である。この性質を持つことにより、ファジィ論理関数は、2値論理関数を、その特殊な部分集合として必ず含むことが保証されている。しかしながら、この性質は同時に、関数の値が指定されていない2値の入力に対しても、その出力を2値に限ることを要請している。このことは関数の値が指定されていないという概念(不完全指定, don't care)から考えると不自然である。このことに着目して、不完全指定ファジィ論理関数を、2値論理関数をその特殊な場合としては必ずしも含まないが、不完全指定という概念から考えると自然な関数として再定義を行っている。ここで定

義した関数は、定数として 0, $1/2$, 1 を持つ定数係数をもったファジィ論理関数となり、代数的には正則 3 値論理関数と同型となるものである。これらの事実から不完全指定されたファジィ論理関数の簡単化の問題は、不完全指定された正則 3 値論理関数の簡単化の問題となる。本論文では、不完全指定された正則 3 値論理関数の簡単化の手法を示し、同時に再定義された不完全指定ファジィ論理関数の簡単化も可能であることも示している。更に、不完全指定されたファジィ論理関数の定義として、本論文での定義を用いると、その論理式表現はより簡単になることを示した。更にこの結果の応用例として、ファジィ論理回路の中でも最も基本的な素子である AND-OR 型のファジィ PLA (Programmable Logic Array) でファジィ論理回路を構成する際、従来の不完全指定ファジィ論理関数の定義を採用するよりも、より面積を小さく構成できることを示している。

1.3 本研究の工学的応用分野

本研究は、前節に述べたように定数係数をもったファジィ論理関数および、その部分集合となる論理関数族の基本的性質と簡単化について、理論的な側面を中心に考察している。しかしながら、その結果は、単に数学的な側面や理論的な側面のみならず、以下のような分野に応用の可能性がある。

(1) ファジィ論理回路の設計法

近年、ますます半導体素子の高集積化が必要とされてきている。半導体素子の高集積化を達成するためには、回路で使用する半導体の面積を削減することが必須となる。論理回路の設計において、実現する論理関数の簡単化は、面積削減を実現するためには、必須の技術である。本研究で提案しているファジィ論理関数の簡単化手法は、今後ますます需要が高まらばであろうファジィ論理回路の実現法、および設計法に適用が可能である。この応用に関しては 6 章において、ファジィ論理回路の中で、最も基本的な素子の一つである AND-OR 型のファジィ PLA の実現に関して考察している。現在までに知られている手法の中で、6 章における結果は、単純な AND-OR 型のファジィ PLA の面積削減のための手法としては、最も良い結果を得ている。

(2) 並列／分散システムの設計法

並列システム、分散システムにおけるタスクスケジューリング方式として、ファジィ推論による手法が有効であることが知られている。しかしながら、現在までに知られている手法は、プロセッサ数などが、静的に割り振られている場合に有効な手法であった。近年、分散システムの中でも、機能できるプロセッサの種類や数が動的に変化しながらも、システムの構成要素であるプロセッサが自律的に分散処理を行い、さらにシステム全体として、耐故障性、オンライン拡張性などの優れた性質を持つ自律分散システムの研究が盛んに行われている。本論文 3 章で提案している定数係数をもったファジィ論理関数の応用として、自律分散システムの構成要素であるプロセッサへの動的なタスク割り当て法が文献 [51, 60]

において著者らにより提案され、現実のアプリケーションとして、自律分散オフィスアプリケーションの試作が既に行われている。文献[51, 60]において用いられた手法は、ファジィ推論や事例推論等による手法に比べ、推論コストが小さく、かつシステム管理者の専門的なチューニングを必要としない簡便なものである。

近年、計算機システムにおいて、単体のプロセッサによる高速化は限界に近づいており、その限界に対する近い将来の解決策としては、並列／分散処理が現実的である。しかしながら、並列／分散システムにおいてのタスクの負荷の評価やスケジューリング手法等は、未だ専門家による綿密なチューニングを必要とする状況である。本研究で提案している定数係数をもったファジィ論理関数などを用いた手法が今後、必須となると考えられる。

(3) データ・マイニング

大規模なデータの集合から、知識を抽出し、利用する試みが近年盛んに行われている。しかしながら、現実世界で取り扱われるデータは、明確な物を少なく、あいまいさや矛盾を多く含んでいる場合が多い。また、データの量は大量であっても、その中で特徴的なデータが少なく、データの集合全体の特徴がすべて含まれてない場合、即ち、特徴が不完全指定である場合も多い。

データ・マイニングの研究分野では、データに含まれている知識を統計的手法や、ニューラルネットワークによる学習などの方法などにより抽出し、それを If-then ルールに変換する手法が用いられることが多い。それに対して本研究の応用としては、データに含まれる知識を論理式で表現し、特徴を論理式として抽出する方式を前提にしている。この手法の研究としては、文献[27, 28]において菊池、向殿により、知識をファジィ論理関数の論理式として抽出する試みが既になされており、ニューラルネットワーク等を使用する手法との間で、比較検討がなされている。しかしながら、文献[27, 28]における手法では、表現された知識の簡略な表現については考察がなされていない。一般にデータ・マイニングによって得られた知識は、その後別の処理のために利用される場合が多く、計算機への実装を考えると、なるべく簡便な表現である方が都合が良く、コストも低くなる。本研究の5章、6章で考察されている不完全指定ファジィ論理関数の単純化の手法は、不完全指定のデータの取り扱いや、知識を簡便な表現に置き換えるための有用な手法となり得る。

(4) 不完全に指定されたファジィ測度上での積分や可能性理論

ファジィ評価の分野で、有用な評価手法として菅野積分が提案されている。菅野積分は、単調な定数係数をもったファジィ論理関数で表現可能であることが、高萩、著者により文献[32]で報告されている。しかしながら、文献[32]で得られている結果は、ファジィ測度空間として、議論領域のすべての部分集合に対してファジィ測度が割り当てられた場合に限って成立するものである。現実の世界では、評価対象からなる議論領域において、そのすべての部分集合に対して、測度が割り当てられることは希であり、測度が不完全に指定されている場合が多い。

著者は、以下の予想が成立するものと考えている。

不完全に指定されたファジィ測度空間上で菅野積分が可能になるための必要十分条件は、菅野積分に対応する不完全指定された定数係数をもったファジィ論理関数の最簡形が単調であるとき、およびそのときに限る。

以上の予想が成立すれば、以下の事項が明らかにされる。

- 不完全指定されたファジィ測度空間上での菅野積分による評価の意味づけ。
- 不完全指定されたファジィ測度空間上での菅野積分は、可能性測度に基づく評価を表していること。
- 菅野積分と双対な関係にある積分は、必然性測度に基づく評価を表していること。

以上のことから、本研究の結果は、工学的な意味において、ファジィ評価の分野に対して有用な応用があると考えられる。

2 章

これまでの研究

本章では、本研究に関係の深いこれまでの研究について述べる。

2.1 クリーネ代数

ブール代数は以下の定義 1 で特徴付けられる代数系である。

[定義 1] もし代数系が以下の公理系を満たすならば、それはブール代数と呼ばれる。

- (1) $A \cdot A = A,$ $A \vee A = A$
- (2) $A \cdot B = B \cdot A,$ $A \vee B = B \vee A$
- (3) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
- (4) $A \vee A \cdot B = A,$ $A \cdot (A \vee B) = A$
- (5) $A \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C,$ $A \vee (B \cdot C) = (A \vee B) \cdot (A \vee C)$
- (6) $\sim(\sim A) = A$
- (7) $\sim(A \vee B) = \sim A \cdot \sim B,$ $\sim(A \cdot B) = \sim A \vee \sim B$
- (8) $1 \cdot A = A,$ $1 \vee A = 1$
- (9) $0 \cdot A = 0,$ $0 \vee A = A$
- (10) $A \vee \sim A = 1,$ $A \cdot \sim A = 0$

□

クリーネ代数は、ブール代数の公理 (10) 排中律を、更に弱い公理- クリーネ律 - で置き換えた代数系である。

[定義 2] クリーネ代数は、以下の公理系で特徴付けられる代数系である。

- (1)~(9) ブール代数と同じ。
- (10') $(A \cdot \sim A) \cdot (B \vee \sim B) = A \cdot \sim A,$ $A \cdot \sim A \vee (B \vee \sim B) = B \vee \sim B$

□

クリーネ代数の典型的なモデルとして、B-3 値論理関数、ファジィ論理関数、正則 3 値論理関数、多値クリーネ論理関数などが提案されており、研究されてきている。そしてそれらは、代数

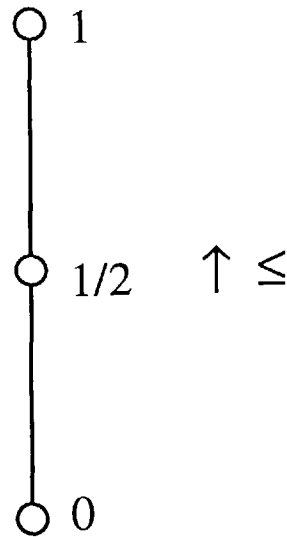


図 2.1: $\langle V_3, \leq \rangle$

的な観点からは、本質的に3値であることが知られている。また、これらの関数は、未知、矛盾、不明確さや真から偽、偽から真への遷移状態を表現するのに適していることが知られている。

2.2 B-3 値論理関数

多値論理の分野において、数学的な観点からは、3値論理が最も古くから研究されてきた論理の一つである。特にB-3値論理は、最も古くから研究されてきた3値論理の一つである。しかしながら、B-3値論理は、数学的には、関数完全性を満たさないために、長い間研究がなされてないままであった。

一方、工学の分野では、組み合わせ論理回路や順序回路のハザードの検出の研究、ファールセーフ論理回路の研究が活発になされていた。これらの研究の中で遷移状態や故障状態は、1が真を、0が偽を表すとしたときに、第3の値1/2に割り当てて研究がなされるようになった。ここで使われている論理は、本質的にB-3値論理であった。そのような研究の中で、上述した問題を解決するために、向殿は文献 [7] において、B-3値論理関数の基本的性質を明らかにした。

本節では、B-3値論理関数の基本的性質について述べる。

2.2.1 B-3 値論理関数の定義

真理値の集合として、2値の真理値の集合を $V_2 = \{0, 1\}$ 、3値の真理値の集合を $V_3 = \{0, 1/2, 1\}$ とする。このとき、 V_3 における通常の順序 \leq によるハッセ図は、図 2.1のようになり、全順序関係となる。

V_3 上の論理結合子，論理積 (\cdot)，論理和 (\vee)，否定 (\sim) の解釈を，それらが 2 値論理の論理結合子が，その特殊な場合となるよう以下のように定義する．

$$x \cdot y = \min(x, y)$$

$$x \vee y = \max(x, y)$$

$$\sim x = 1 - x$$

このとき，これらの論理結合子の表す真理値表は表 2.1，表 2.2，表 2.3に示される．

表 2.1: $x \cdot y$

		x		
		0	1/2	1
y	0	0	0	0
	1/2	0	1/2	1/2
	1	0	1/2	1

表 2.2: $x \vee y$

		x		
		0	1/2	1
y	0	0	1/2	1
	1/2	1/2	1/2	1
	1	1	1	1

表 2.3: $\sim x$

x	0	1
	1/2	1/2
	1	0

[定義 3] n 変数の B-3 値論理関数は， V_3^n から V_3 への写像であり，以下で定義される B-3 値論理式で表現される．

- (1) 定数 0, 1/2, 1, 変数 x_1, x_2, \dots, x_n は論理式である．
- (2) もし F, G が論理式であれば， $\sim F, F \cdot G, F \vee G$ も論理式である．
- (3) (1), (2) で定義されるもののみが論理式である．

□

2.2.2 B-3 値論理関数の標準形

もし、B-3 値論理式 φ_1 と φ_2 が異なっても、これらの表現している B-3 値論理関数は同じ場合がある。本節では、任意の B-3 値論理関数に対して一意に定まる B-3 値論理式 – B-3 値論理関数の標準形 – について述べる。

[定義 4] 変数 x_i と、その否定 $\sim x_i$ は文字と呼ばれる。いくつかの文字の論理積（論理和）を積項（和項）という。ただし、積項（和項）では、同じ文字は省略されているものとする。同じ変数について、その肯定と否定を同時に持たない積項（和項）を単積項（単和項）という。□

加法形式（乗法形式）の定義は、2 値論理関数と同様の定義を用いるものとする。B-3 値論理においては、分配律、べき等律、ドモルガン律等が成立することから、任意の B-3 値論理関数は、加法形式（乗法形式）に展開し、表現することが可能である。しかしながら、B-3 値論理においては、2 値論理における排中律 $A \vee \sim A = 1$ 、矛盾律 $A \cdot \sim A = 0$ が成立するかわりに、それらよりも弱い条件としてクリーネ律 $A \cdot \sim A \cdot (B \vee \sim B) = A \cdot \sim A$ および $A \cdot \sim A \vee (B \vee \sim B) = B \vee \sim B$ が成立するのみなので、B-3 値論理関数の加法形式（乗法形式）には、ある変数について肯定と否定を同時に持つ積項（和項）が現れることがある。

[定義 5] 少なくとも一つの変数 x_i について、その肯定と否定を同時に持つ積項（和項）を相補項（相補和項）という。相補項（相補和項）で、すべての変数を持つものを相補最小項（相補最大項）という。□

[定義 6] もし積項 α' （和項 β' ）が、積項 α （和項 β ）の持つ文字をすべて持つとき、 α' は α に包含される（ β' は β を包含する）いい、 $\alpha' \subseteq \alpha$ （ $\beta \subseteq \beta'$ ）と記される。□

[定義 7] 他の積項に包含される積項（他の和項を包含する和項）を省略した後に残った積項の論理和（和項の論理積）は B-3 値加法形式（B-3 値乗法形式）と呼ばれる。□

[定義 8] B-3 値論理関数 f の加法形式（乗法形式）が、単積項と相補最小項のみ（単和項と相補最大項）から構成されている場合、 f は B-3 値主加法標準形（B-3 値主乗法標準形）で表現されていると言われる。□

[補題 1] クリーネ律から $x_i \cdot \sim x_i \leq 1/2 \leq x_j \vee \sim x_j$ が成立することから以下が成立する。

$$(1) x_i \cdot \sim x_i = x_i \cdot \sim x_i \cdot (x_j \vee \sim x_j) = x_i \cdot \sim x_i \cdot x_j \vee x_i \cdot \sim x_i \cdot \sim x_j$$

$$(2) x_i \vee \sim x_i = x_i \vee \sim x_i \vee x_j \cdot \sim x_j = (x_i \vee \sim x_i \vee x_j) \cdot (x_i \vee \sim x_i \vee \sim x_j)$$

□

補題 1 より、すべての相補項（相補和項）は相補最小項の和（相補最大項の積）に一意に展開できることを示している。このことから以下の定理が直ちに得られる。

[定理 1] 任意の B-3 値論理関数は、B-3 値主加法標準形（B-3 値主乘法標準形）で積項（和項）の順番を無視すれば、一意に表現できる。 □

[例 1] (1) $f = x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$ は加法形式で表現された B-3 値論理関数である。ここで $x_2 \cdot x_3$ は単積項であり、 $x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$ は相補項である。

(2) 相補項 $x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$ は、以下のように二つの相補最小項の論理和に展開可能である。

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \cdot (x_3 \vee \sim x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3$$

(3) (1) の加法形式で表現された B-3 値論理関数は、(2) の結果から以下のような B-3 値主加法標準形で一意に表現可能である。

$$f = x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3$$

ただし、相補最小項 $x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \cdot x_3$ は、単積項 $x_2 \cdot x_3$ により包含されて省略されている。

□

2.2.3 B-3 値論理関数の特徴付け

まず最初に V_3 におけるあいまいさに関する半順序関係を定義する。

[定義 9] $0 \leq 1/2, 1 \leq 1/2, a \leq a \ (a \in V_3)$ □

この半順序において、真理値 0 は偽を、1 は真を表すものとし、第 3 の真理値 $1/2$ は、真偽不明であることを表している。この半順序関係のハッセ図を図 2.2 に示す。また、この半順序関係を以下のように n 次元の場合に拡張定義する。

[定義 10] V_3^n 上の n 次元の二つの論理ベクトルを $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ とする。このとき、 $A \leq B$ とは $\forall i(a_i \leq b_i)$ が成立することである。 □

定義 9、定義 10 において定義されたあいまいさに関する半順序関係により、3 値論理関数が B-3 値論理関数であるための必要十分条件が以下のように導かれる。

[定理 2] n 変数の 3 値論理関数 f が以下の (B1), (B2) を満たすとき、およびそのときに限り f は B-3 値論理関数である。

(B1) [正規性 (Normarity)] もし $A \in V_2^n$ ならば $f(A) \in V_2$.

(B2) [あいまいさに関する単調性] $A \leq B$ ならば $f(A) \leq f(B)$.

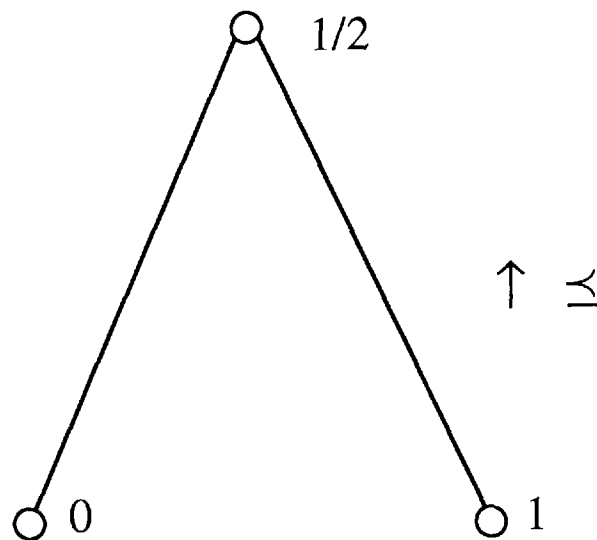


図 2.2: あいまいさに関する半順序関係のハッセ図

2.3 正則 3 値論理関数

論理やアルゴリズムは、一般に 2 値の原理に基づいている。しかしながら、現実世界では、はっきりと真、偽を決めることができなかつたり、決める必要のない場合も少なくない。

S.C.Kleene [1] は、3 値論理を、原始帰納的関数 (partial recursive function) における問題や、不明確さを伴う問題を取り扱うために導入した。その中で正則性 (regularity) と呼ばれる概念が提案された。本節で述べる正則 3 値論理関数 (regular ternary logic function) は、S.C.Kleene の正則性の概念を 3 値論理関数に拡張したものであり、あいまいさや不明確さなどの、真、偽を一意に決められないような論理的対象を取り扱うことに適した論理関数である。また、正則 3 値論理関数は、2.2 節で述べた B-3 値論理関数や 2 値論理関数を、その特別な場合として含む 3 値論理関数への自然な拡張となっている。

2.3.1 正則 3 値論理関数の定義と特徴付け

[定義 11] 論理式を以下のように定義する。

- (1) 定数 0 , $1/2$, 1 , 変数 x_1, x_2, \dots, x_n は論理式である。
- (2) もし F , G が論理式であれば $\sim F$, $F \cdot G$, $F \vee G$ も論理式である。
- (3) (1), (2) で定義されるもののみが論理式である。

□

[定義 12] 3 値論理関数が論理式で表現可能なとき、その 3 値論理関数を論理式で表現可能な 3 値論理関数という。ただし、論理結合子の解釈は、表 2.1, 表 2.2, 表 2.3 で定義されるものとする。 □

[例 2] $F = x_1 \cdot \sim x_2 \vee (1/2) \cdot x_2 \vee x_3 \cdot \sim x_3$, $G = (x_1 \vee \sim x_2) \cdot (1/2 \vee x_2) \cdot (x_3 \vee \sim x_3)$ は論理式で表現可能な 3 値論理関数である。 □

以降、以下のような三つの条件 (C1, C2, C3) のもとに 3 値論理関数を考察することにする。

[条件 C1] 3 値論理関数が論理式で表現可能な 3 値論理関数であるための条件

[条件 C2] (正則性: regularity, S.C.Kleene [1]) もし $F(A) \in V_2$ ならば $A' \preceq A$ なるすべての A' に対して $F(A') = F(A)$ 。

[定義 13] 条件 C2 を満たす n 変数 3 値論理関数を正則 3 値論理関数と定義する。 □

定義 13 は、S.C.Kleene の正則性の概念の n 変数関数への拡張である。S.C.Kleene のオリジナルな定義によると、正則性は、3 値の真理値表に対して、 $1/2$ の行 (列) の各セルにおいて、そのセルのある列 (行) のすべての値が 0 または 1 のみになっていない限り、そのセルの値は、0 または 1 を決して取らない、即ち、 $1/2$ であるということである。条件 C2 は、この S.C.Kleene の正則性の概念の自然な拡張となっている。

[条件 C3] (あいまいさに関する単調性) もし $A' \preceq A$ ならば $f(A') \preceq f(A)$ である。

[定義 14] 条件 C3 を満たす 3 値論理関数を A-3 値論理関数と定義する。 □

A-3 値論理関数は、真理値 $1/2$ を故障の状態に割り当てることにより、フェールセーフ論理回路の設計に適用可能であることが知られている。

以上のように、3 値論理関数に三つの異なる条件 C1, C2, C3 が定義された。これらの条件は、互いに同値であることが向殿 [8] により証明されている。このうち条件 C2 と条件 C3 が同値であること示す定理が、以下の定理 3 である。また、条件 C1 ならば条件 C2 が成立することを示しているのが、以下の定理 4 である。ここで定理 4 の逆が示されれば、三つの条件は互いに同値であることが示されるのであるが、それについては、2.3.2 項の正則 3 値論理関数の表現において示す。

[定理 3] F が正則 3 値論理関数であるとき、およびそのときに限り、 F は A-3 値論理関数である。 □

[定理 4] もし F が論理式で表現可能な 3 値論理関数であれば、 F は正則 3 値論理関数である。 □

2.3.2 正則 3 値論理関数の表現

[補題 2] F を正則 3 値論理関数, A を V_3^n の元とする. このとき条件 C2, および条件 C3 から明らかに以下が成立する.

- (1) もし $F(A) = 1$ ならば, $A' \preceq A$ するすべての元に対して $F(A') = 1$.
- (2) もし $F(A) = 0$ ならば, $A' \preceq A$ するすべての元に対して $F(A') = 0$.
- (3) もし $F(A) = 1/2$ ならば, $A \preceq A'$ するすべての元に対して $F(A') = 1/2$.

□

F を n 変数の正則 3 値論理関数とする. このとき以下のような三つの部分集合 $F^{-1}(1)$, $F^{-1}(0)$, $F^{-1}(1/2)$ を考える.

$$F^{-1}(i) = \{A \in V_3^n | F(A) = i, i \in V_3\}$$

このとき明らかに $F^{-1}(i) \cap F^{-1}(j) = \emptyset$ ($i \neq j$), $\bigcup_{i \in V_3} F^{-1}(i) = V_3^n$ が成立している. 補題 2 から以下の補題が導かれる.

[補題 3] $F^{-1}(1)$, $F^{-1}(0)$, $F^{-1}(1/2)$ は, あいまいさに関する半順序関係 \preceq に関して半順序集合を成す. そして $F^{-1}(1)$, $F^{-1}(0)$ はその極大元で, $F^{-1}(1/2)$ はその極小元により一意に定まる.

□

正則 3 値論理においては, 2.2.2 項における B-3 値論理と同様の方法で, 定数と変数によりいくつかの種類に積項 (和項) が定義できる. ただし, 正則 3 値論理においては B-3 値論理において定数として見なされなかった $1/2$ が定数として見なされるので, B-3 値論理における積項 (和項) とは異なる種類のものが存在する. 以下, 正則 3 値論理における積項 (和項) で, B-3 値論理における積項 (和項) と同じ名前の積項 (和項) が定義されるが, 誤りの恐れのない限り, 同じ名前を用いる.

[定義 15] 積項 (和項) で, $x_i \cdot \sim x_i$ ($x_i \vee \sim x_i$) のような変数の組を持たず, 定数として 1 (0) 以外を持たないものを単積項 (単和項) という. ただし, 単積項 (単和項) において定数 1 (0) は省略されて表記されることがある. $x_i \cdot \sim x_i$ ($x_i \vee \sim x_i$) のような変数の組を持たず, 定数 $1/2$ を持つ積項 (和項) を $1/2$ 単積項 ($1/2$ 単和項) という. また, $1/2$ 単積項 ($1/2$ 単和項) で, すべての変数を持つものを $1/2$ 最小項 ($1/2$ 最大項) という. 少なくとも一つの変数について $x_i \cdot \sim x_i$ ($x_i \vee \sim x_i$) なる変数の組を持つ積項 (和項) を相補項 (相補和項) という. また, すべての変数を持つ相補項 (相補和項) を相補最小項 (相補最大項) という.

□

B-3 値論理同様 (補題 1 参照) $x_i \cdot \sim x_i \leq 1/2 \leq x_j \vee \sim x_j$ が成立することから, 任意の $1/2$ 単積項や相補項 ($1/2$ 単和項や相補和項) は, $1/2$ 最小項や相補最小項の論理和 ($1/2$ 最大項や相補最大項の論理積) に展開可能である.

[定義 16] 以下のように $A = (a_1, \dots, a_n) \in V_3^n$ なる元と単積項 $\alpha = x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$ (単和項 $\beta = x_1^{a_1} \vee \dots \vee x_n^{a_n}$) の間に対応付けを行う.

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) & \text{for } a_i = 1 \\ 1 & (0) & \text{for } a_i = 1/2 \\ \sim x_i & (x_i) & \text{for } a_i = 0 \end{cases}$$

[例 3] $A = (1, 1/2, 0)$ とすると, A に対応する単積項は $x_1 \cdot \sim x_3$ であり, 単和項は $\sim x_1 \vee x_3$ である. □

[定義 17] $A = (a_1, \dots, a_n)$, $A' = (a'_1, \dots, a'_n)$ を V_3^n の元とする. このとき, A と A' が互いに分離的 (disjoint) であるとは, ある i が存在して $a_i \in V_2$ であり, かつ $a_i = \sim a'_i$ が成立しているときである. このとき, $\langle V_3^n, \preceq \rangle$ において, A と A' の下限は存在しない. また, このことを $A \Delta A' = \phi$ と表記する. □

[補題 4] A を V_3^n の元とする. そして α, β は, それぞれ定義 16 で A に対応づけられる単積項と単和項とする. このとき以下が成立する.

- (1) $A' \preceq A$ iff $\alpha(A) = 1$.
- (2) $A \Delta A' = \phi$ iff $\alpha(A') = 0$.
- (3) $A' \not\preceq A$ and $A \Delta A' \neq \phi$ iff $\alpha(A') = 1/2$.
- (4) $A' \preceq A$ iff $\beta(A') = 0$.
- (5) $A \Delta A' = \phi$ iff $\beta(A') = 1$.
- (6) $A' \not\preceq A$ and $A \Delta A' \neq \phi$ iff $\beta(A') = 1/2$.

□

定義 16 と補題 4 により, 任意の与えられた正則 3 値論理関数に対応する論理式を構成できる.

[定理 5] 任意の正則 3 値論理関数 F は, 以下のような論理式で表現可能である.

$$F = F^1 \cdot \vee (1/2) \cdot F^0$$

ただし, F^1 は $F^{-1}(1)$ の極大元に対応する単積項の論理和であり, F^0 は $F^{-1}(0)$ の極大元に対応する単和項の論理積である. □

定理 5 は, 2.3.1 項の定理 5 の逆の証明を与えており, 正則 3 値論理関数であれば, 論理式で表現可能な 3 値論理関数あることが示された.

表 2.4: 例の正則 3 値論理関数

		x_2		
		0	1/2	1
x_1	0	1/2	1/2	1
	1/2	1/2	1/2	1
	1	0	1/2	1

[例 4] 正則 3 値論理関数 F が表 2.4 のように与えられたとする。このとき、

$$\begin{aligned} F^{-1}(1) &= \{(0, 1), (1/2, 1), (0, 1)\} \\ F^{-1}(0) &= \{(1, 0)\} \end{aligned}$$

を得る。ここで $F^{-1}(1)$ の極大元は $(1/2, 1)$ のみであり、 $F^{-1}(0)$ の極大元は $(1, 0)$ のみである。したがって定義 16 と定理 5 から、正則 3 値論理関数の表現として $F = x_2 \vee (1/2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2)$ を得る。□

以上で述べたように、2.3.1 項で述べた三つの条件 C1, C2, C3 は互いに同値であることが証明された。したがって、正則 3 値論理関数は、S.C.Kleene の正則性の概念の 3 値論理関数への拡張というだけではなく、論理式で表現可能であること、およびあいまいさに関する単調性を持つ関数であることがわかる。

2.3.3 正則 3 値論理関数の標準形

定理 5 から、 $F = F^1 \vee (1/2) \cdot F^0$ は、任意の与えられた正則 3 値論理関数 F に対して一意に定まる論理式であり、標準形として採用できる論理式である。正則 3 値論理関数では、分配律、ドモルガン律、2 重否定等が成立するので、2 値論理関数や B-3 値論理関数同様に以下のような加法形式、乗法形式に展開が可能である。

$$\text{加法標準形: } F = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_\ell \quad \text{乗法標準形: } F = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_m$$

ただし、 α_i は積項であり、 β_j は和項である。

本項では、加法形式、乗法形式に基づく標準形として、主加法標準形と主乗法標準形について考察する。

[定義 18] 正則 3 値論理関数の加法形式（乗法形式）で、そこに現れる積項（和項）が単積項と 1/2 最小項、相補最小項のみ（単和項と 1/2 最大項、相補最大項のみ）であるものを主加法標準形（主乗法標準形）という。□

[定理 6] 任意の正則 3 値論理関数は、積項（和項）の順番を無視すれば主加法標準形（主乗法標準形）で一意に表現できる。□

[例 5] 2 変数の場合を考える.

(1) $\sim x_1 \cdot \sim x_2$ は単積項である.

(2) $1/2 \cdot \sim x_2$ は $1/2$ 単積項であり, 以下のようにして二つの $1/2$ 最小項の論理和に展開できる.

$$1/2 \cdot \sim x_2 = (x_1 \vee \sim x_1) \cdot 1/2 \cdot \sim x_2 = 1/2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \vee 1/2 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2$$

(3) $x_2 \cdot \sim x_2$ は, 相補項であり, 以下のようにして二つの相補最小項の論理和に展開できる.

$$x_2 \cdot \sim x_2 = (x_1 \vee \sim x_1) \cdot x_2 \cdot \sim x_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$$

(4) $x_1 \vee x_2$ は単和項である.

(5) $1/2 \vee x_2$ は $1/2$ 単和項であり, 以下のようにして二つの $1/2$ 最大項の論理積に展開できる.

$$1/2 \vee x_2 = 1/2 \vee x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 = (1/2 \vee x_1 \vee x_2) \cdot (1/2 \vee \sim x_1 \vee x_2)$$

(6) $x_2 \vee \sim x_2$ は相補和項であり, 以下のようにして二つの相補最大項に展開可能である.

$$x_2 \vee \sim x_2 = x_1 \cdot \sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 = (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2)$$

□

[例 6] 例 5 の結果から, ある正則 3 値論理関数の加法形式 $F = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee 1/2 \cdot \sim x_2 \vee x_2 \cdot \sim x_2$ を, 主加法標準形で表現すると $F = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee 1/2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$ となる. 同様に, ある正則 3 値論理関数の乗法形式 $G = (x_1 \vee x_2) \cdot (1/2 \vee \sim x_2) \cdot (x_2 \vee \sim x_2)$ を主乗法標準形で表現すると $G = (x_1 \vee x_2) \cdot (1/2 \vee \sim x_1 \vee \sim x_2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2)$ となる. □

2.4 ファジィ論理関数

正則 3 値論理関数と同様に, ファジィ論理関数も B-3 値論理関数の自然な拡張である.

ファジィ理論の概念は, 1965 年に L.A.Zadeh [4] により提出され, その概念は論理の分野にも採用されるようになった. 一方, 駒宮 [3] は多値論理の分野で, L.A.Zadeh よりも古く 1949 年に, 命題の真理値が連続値を有する論理として, 無限多値論理の研究を行っている.

これらの二つの研究は, 向殿によって B-3 値論理の拡張として統合され, ファジィ論理関数の研究として, その基本的性質が明らかにされてきた.

2.4.1 ファジィ論理関数の定義と基本的性質、論理式表現

以降、真理値の集合として $V = [0, 1]$ を用いることにする。

[定義 19] n 変数ファジィ論理関数は V^n から V への写像であり、以下で定義される論理式により表現される論理関数である。

- (1) 定数 0, 1, 変数 x_1, x_2, \dots, x_n は論理式である。
- (2) もし F, G が論理式であれば, $\sim F, F \cdot G, F \vee G$ は論理式である。
- (3) (1), (2) で定義されるもののみが論理式である。

ただし、定数は 0 変数の演算と見なし、論理結合子は、 $x \cdot y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, $\sim x = 1 - x$ と解釈するものとする。これらの解釈は、B-3 値論理における論理結合子の解釈である表 2.1, 表 2.2, 表 2.3 の拡張である。□

以降、 n 変数のファジィ論理関数と、それを表現している論理式を誤りの恐れのない限り同一視することにする。また、論理積の記号 (\cdot) は、省略されることがある。

以下の定義により、B-3 値論理、正則 3 値論理で用いられてきたあいまいさに関する半順序関係 (定義 9 参照) をファジィ論理において適用できるよう拡張する。

[定義 20] a, b を V の元とする。このとき $a \preceq b$ とは、以下の関係が成立するとき、およびそのときに限る。

$$0 \leq a \leq b \leq 0.5 \quad \text{または} \quad 0.5 \leq b \leq a \leq 1$$

また、あいまいさに関する半順序関係 \preceq を、以下のように n 次元の論理ベクトルまで拡張定義する。 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ を V^n の元とする。そのとき、 $A \preceq B$ とは、 $\forall i (a_i \preceq b_i)$ が成立することである。□

[定義 21] $A = (a_1, \dots, a_n)$, $A' = (a'_1, \dots, a'_n)$ を V^n の元とする。このとき、 A と A' が互いに分離的 (disjoint) であるとは、ある i が存在して $a_i \in V_2$ であり、かつ $a_i = \sim a'_i$ が成立しているときである。このとき、 $\langle V^n, \preceq \rangle$ において、 A と A' の下限は存在しない。また、このことを $A \Delta A' = \phi$ と表記する。□

定義 20, 定義 21 の記号 \preceq や Δ は、定義 9, 定義 17 と異なる概念であるが、誤りの恐れのない限り、同一の記号を用いる。

[定理 7] F をファジィ論理関数とする。また、 A, B を V^n の元とする。このとき B-3 値論理関数同様 (定理 2 参照) 以下が成立する。

- (1) $A \in V_2^n \wedge$ ならば $F(A) \in V_2$ 。
- (2) $A \preceq B$ ならば、 $F(A) \preceq F(B)$ 。

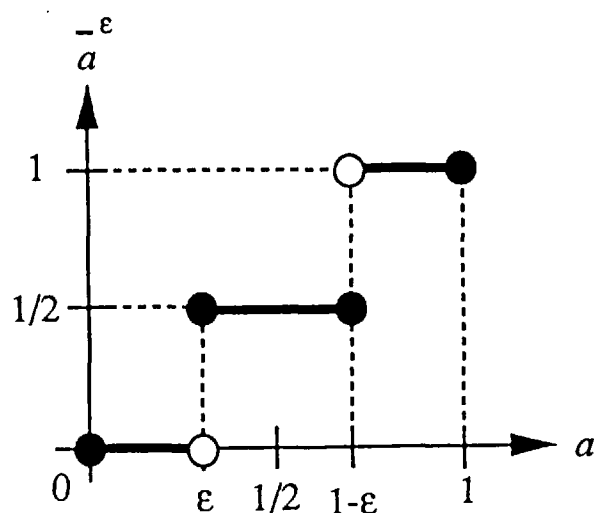


図 2.3: 量子化

□

次に V から V_3 への写像である量子化を定義する.

[定義 22] (量子化) a を V の元とする. このとき \bar{a}^ϵ は以下のように定義される V から V_3 への写像であり. 量子化と呼ばれる (図 2.3). ただし, $0 < \epsilon \leq 0.5$ とする.

$$\bar{a}^\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{for } a \leq a < \epsilon \\ 0.5 & \text{for } \epsilon \leq a \leq 1 - \epsilon \\ 1 & \text{for } 1 - \epsilon < a \leq 1 \end{cases}$$

更に, 量子化を n 次元の論理ベクトルに対しても適用できるように拡張する. V^n の元 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対して, その量子化を $\bar{A}^\epsilon = (\bar{a}_1^\epsilon, \bar{a}_2^\epsilon, \dots, \bar{a}_n^\epsilon)$ と定義する. 明らかに \bar{A}^ϵ は V_3^n の元である. □

[補題 5] F を n 変数のファジィ論理関数とし, A を V^n の元とする. $0 < \epsilon \leq 0.5$ であるとき, $\overline{F(A)}^\epsilon = F(\bar{A}^\epsilon)$ が成立する. □

補題 5 により, 以下の定理が直ちに導かれる.

[定理 8] F と G を n 変数のファジィ論理関数とし, A を V^n の元, B を V_3^n の元とする. このとき, $\forall A \in V^n (F(A) = G(A))$ と $\forall B \in V_3^n (F(B) = G(B))$ は同値である. □

定理 8 は, 二つのファジィ論理関数が等しいための必要十分条件を与えている. このことから n 変数のファジィ論理関数の集合から n 変数の B-3 値論理関数の集合への一対一の写像が存在する

ことも結論できる。即ち、 n 変数のファジィ論理関数と n 変数の B-3 値論理関数は、代数的な観点からは同型であることが結論でき、ファジィ論理関数は、本質的に 3 値論理関数であることも結論できる。これらの事実と、ファジィ論理関数が論理式で表現できることを併せると、以下のようにファジィ論理関数の論理式を B-3 値論理関数の論理式表現により定義できる。標準形についても同様である。

- (1) ファジィ加法形式は、B-3 値加法形式に対応。
- (2) ファジィ乗法形式は、B-3 値乗法形式に対応。
- (3) ファジィ主加法標準形は、B-3 値主加法標準形に対応。
- (4) ファジィ主乗法標準形は、B-3 値主乗法標準形に対応。

以上のことから以下の定理が導かれる。

[定理 9] 任意のファジィ論理関数は、主加法標準形（主乗法標準形）で、積項（和項）の順番を無視すると一意に表現できる。 \square

2.4.2 ファジィ論理関数の簡単化

本項では、最初にファジィ論理関数の表現として、与えられたファジィ論理関数のすべてのファジィ主項の論理和 - ファジィ主項展開 - を導き出す手法について述べる。そして第 2 にファジィ論理関数の最簡形を導き出す手法について述べる。

[定義 23] α を積項とする。もし $\forall A \in V^n (\alpha(A) \leq F(A))$ が成立するならば、 α は F の内項という。さらに α からいかなる文字を取り除いても $\forall A \in V^n (\alpha(A) \leq F(A))$ が成立しなくなるような積項 α を F のファジィ主項という。 \square

尚、定義 23 において、 $\forall A \in V^n (\alpha(A) \leq F(A))$ を $\forall B \in V_3^n (\alpha(B) \leq F(B))$ と置き換えても良い。なぜならば、定理 8 からファジィ論理関数は、B-3 値論理関数と見なして取り扱っても良いことになるからである。

[定義 24] ファジィ論理関数 F のすべてのファジィ主項の論理和をファジィ主項展開という。 \square

[定理 10] F をファジィ加法形式で表現されたファジィ論理関数とする。このとき F に現れるすべての単積項は、 F のファジィ主項である。 \square

[定義 25] α と β を積項とする。もしある変数 x_i について、 $\alpha = x_i^* \cdot \alpha_0$ ($\alpha_0 \not\leq \sim x_i^*$) かつ $\beta = \sim x_i^* \cdot \beta_0$ ($\beta_0 \not\leq x_i^*$) なる x_i が存在するとき（ただし、 x_i^* は、 x_i または $\sim x_i$ のいずれかを意味する）、 α と β のファジィコンセンサスは、相補項であり、以下のように定義される。ここで、 $F(\alpha, \beta)$ は、 α と β により生成できるすべてのファジィコンセンサスの集合を表す。

- (1) もし $\alpha_0 \cdot \beta_0$ が相補項ならば, $\alpha_0 \cdot \beta_0 \in FC(\alpha, \beta)$.
- (2) もし $\alpha_0 \cdot \beta_0$ が単積項ならば, $\alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot x_j \cdot \sim x_j \in FC(\alpha, \beta)$ である. ただし, $i \neq j$.
- (3) $FC(\alpha, \beta)$ は (1), (2) で定義されるもののみである.

□

[例 7] α, β を x_1, x_2, x_3 上の積項とする.

- (1) $\alpha = x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$, $\beta = \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$ のとき, $FC(\alpha, \beta) = \{x_2 \cdot \sim x_2\}$.
- (2) $\alpha = x_1 \cdot x_2$, $\beta = \sim x_1 \cdot x_2$ のとき, $FC(\alpha, \beta) = \{x_2 \cdot \sim x_2, x_3 \cdot \sim x_3\}$.
- (3) $\alpha = x_1$, $\beta = \sim x_1$ のとき, $FC(\alpha, \beta) = \{x_2 \cdot \sim x_2, x_3 \cdot \sim x_3\}$.

□

[定理 11] ファジィ加法形式 $F = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$ は, 以下の二つの条件が成立しているとき, およびそのときに限りファジィ主項展開である.

- (1) 他の積項によって包含される積項がない.
- (2) 任意の二つの積項から生成されるコンセンサスが存在しない, または, 生成できても他の積項に包含されてしまう.

□

定理 11により, 与えられたファジィ論理関数のファジィ主項展開を求めるための以下のようなアルゴリズムを得ることができる.

[アルゴリズム 1]

(STEP1) 与えられたファジィ論理関数 F を以下のようにファジィ加法標準形で表現する.

$$F = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m \quad (\alpha_i \not\subseteq \alpha_j, i \neq j)$$

(STEP2) F の任意の二つの積項のファジィコンセンサスを見いだす. もし, ファジィコンセンサスが見いだせない場合には STEP4 へ. その他の場合には STEP3 へ.

(STEP3) STEP2 で見いだされたすべてのファジィコンセンサスを $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$ へ加え, 他の積項に包含される積項を省略する. STEP2 で見いだされたファジィコンセンサスがすべて, 他の積項に包含され省略される場合には STEP4 へ. その他の場合には, ここで得られた積項を新たに $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$ として STEP2 へ.

(STEP4) 得られたファジィ加法形式が F のファジィ主項展開である.

次にファジィ論理関数の最簡形について述べる.

[定義 26] F をファジィ加法標準形で表現されたファジィ論理関数とする. このとき F が以下の条件を満たすとき, F は最簡形で表現されていると定義する.

- (1) F に現れる積項の数が最少である.
- (2) F に現れる文字数が最少である.

□

ファジィ論理関数の最簡形は, 必ず一意に定まるとは限らない. 一つのファジィ論理関数 F に対して複数の最簡形が存在することもあり得る.

[定理 12] ファジィ論理関数 F の最簡形は, F のファジィ主項の論理和として表現される. □

[定義 27] もしファジィ論理関数 F のファジィ主項 α_1 が, F のいかなる最簡形にも現れるとき, α_1 を F の必須項という. また F のファジィ主項 α_2 が, F のいかなる最簡形にも現れないとき, α_2 は F の不必要項という. □

[定理 13] 任意のファジィ論理関数の単積項のファジィ主項は, すべて必須項である. □

[定理 14] α_1, α_2 をファジィ論理関数 F の単積項のファジィ主項とする. そして α_3 を α_1, α_2 から生成されたファジィコンセンサスとする. このとき, α_3 は F の不必要項である. □

定理 12, 定理 13, 定理 14 から, 任意の与えられたファジィ論理関数の最簡形を求めるための以下のようなアルゴリズムが得られる. このアルゴリズムでは, 定理 14 の結果から, 不必要項の生成を少なくするよう工夫がなされている.

[アルゴリズム 2]

(STEP1) 与えられたファジィ論理関数 F をファジィ加法形式で表現する. 少なくとも一方が相補項であるような任意の二つの積項のファジィコンセンサスを生成し, 与えられた F のファジィ加法形式に加える. この操作をファジィコンセンサスが存在しないか, または存在しても, すべて他の積項に包含されしまうまで繰り返す. そして, ここで得られた相補項のファジィ主項を $\gamma_1, \dots, \gamma_u$ とする.

(STEP2) F をファジィ主加法標準形に展開し, 得られた F のファジィ主加法標準形が $F = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_s \vee \beta_1 \vee \dots \vee \beta_t$ であるとする. ただし, α_i は単積項であり, β_j は相補最小項である.

(STEP3) $\gamma_1, \dots, \gamma_u$ から以下の条件を満たす最も少ない数の積項の組み合わせ $\gamma_1', \dots, \gamma_u'$ を選び出す (最小被覆問題) .

$$\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_s \vee \gamma_1' \vee \dots \vee \gamma_u' \supseteq \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_s \vee \beta_1 \vee \dots \vee \beta_t$$

(STEP4) $F = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_s \vee \gamma_1' \vee \dots \vee \gamma_u'$ が F の最簡形である .

(アルゴリズム終)

[例 8] 4 変数のファジィ論理関数 F が以下のようにファジィ主加法標準形で与えられたとする .

$$\begin{aligned} F = & \sim x_2 \sim x_4 \vee x_1 x_2 \sim x_3 \vee \sim x_1 x_2 x_4 \vee x_1 \sim x_2 x_3 x_4 \vee \sim x_1 x_2 x_3 \sim x_3 \sim x_4 \\ & \vee x_1 \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \sim x_4 \end{aligned}$$

STEP1 により, 以下のような七つの相補項のファジィ主項を得る .

$$\begin{aligned} & x_4 \sim x_4, \quad x_2 x_3 \sim x_3, \quad x_1 \sim x_1 \sim x_3, \quad x_1 \sim x_1 \sim x_2, \\ & x_3 \sim x_3 \sim x_4, \quad x_1 x_3 \sim x_3, \quad x_1 \sim x_1 x_4 \end{aligned}$$

表 2.5 から, 以下のような六つの最簡形を求めることができる . 表 2.5 からわかるように $x_1 x_3 \sim x_3$ は不必要項である .

表 2.5: 例の最小被覆問題

	$\sim x_1 x_2 x_3 \sim x_3 \sim x_4$	$x_1 \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4 \sim x_4$
$x_4 \sim x_4$			✓
$x_2 x_3 \sim x_3$	✓		
$x_1 \sim x_1 \sim x_3$		✓	
$x_1 \sim x_1 \sim x_2$		✓	
$x_3 \sim x_3 \sim x_4$	✓		
$x_1 x_3 \sim x_3$			
$x_1 \sim x_1 x_4$		✓	

$$\begin{aligned} f = & \sim x_2 \sim x_4 \vee x_1 x_2 \sim x_3 \vee \sim x_1 x_2 x_4 \vee x_1 \sim x_2 x_3 x_4 \\ & \vee \left\{ \begin{array}{c} x_2 x_3 \sim x_4 \\ x_3 \sim x_3 \sim x_4 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{c} x_1 \sim x_1 \sim x_3 \\ x_1 \sim x_1 \sim x_2 \\ x_1 \sim x_1 x_4 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

□

2.5 多値クリーネ論理関数

本節では、多値クリーネ論理関数について述べる。2.3節の正則 3 値論理関数は、B-3 値論理関数の論理式に定数 $1/2$ を加え、S.C.Kleene の 3 値論理における正則性を 3 値論理関数にまで拡張したものであった。2.3節において正則 3 値論理関数の性質を述べる際、三つの条件について考察を行った。即ち、条件 C1:論理式で表現できること、条件 C2:正則性、条件 C3:あいまいさに関する単調性に関する考察である。それ故、これらの条件を基に、正則 3 値論理関数を拡張する際、三つの種類の拡張が考えられる。本節で述べる多値クリーネ論理関数は、これらのうちの条件 C1 の拡張である。即ち、多値クリーネ論理関数は、関数の基数を 3 値から m 値 ($m \geq 4$) に拡張し、その論理式表現を m 値に拡張したものである。

2.5.1 多値クリーネ論理関数の定義

以降、 m 値の真理値の集合として $V_m = \{0, 1/(m-1), 2/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1\}$ を用いるものとする。

[定義 28] n 変数の多値クリーネ論理関数は、 V_m^n から V_m への写像であり、以下で定義される論理式で表現される論理関数である。

- (1) 定数 $0, 1/(m-1), 2/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1$, 変数 x_1, x_2, \dots, x_n は論理式である。
- (2) もし f, G が論理式なら、 $\sim F, F \cdot G, F \vee G$ は論理式である。
- (3) (1), (2) で定義されるもののみが論理式である。

ただし、定数は 0 変数の演算と解釈する、また、論理結合子、論理積 (\cdot)、論理和 (\vee)、否定 (\sim) の解釈は、それぞれ、 $x \cdot y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, $\sim x = 1 - x$ とする。 □

以降、多値クリーネ論理関数と、その表す論理式を、誤りの恐れがない限り同一視することとする。

[例 9] $F = x_1 \cdot \sim x_2 \vee 14 \cdot x_1 \vee x_2 \cdot \sim x_2$ は 2 変数 5 値の多値クリーネ論理関数である。 □

2.5.2 諸性質

[定義 29] あいまいさに関する半順序関係 \preceq を定義する。 a と b を V_m の元とすとき、 $a \preceq b$ とは、以下の二つの式の何れかが成立するとき、およびそのときに限るものとする。

$$0 \leq a \leq b \leq 1/2, \quad 1/2 \leq b \leq a \leq 1$$

また、この半順序関係を n 次元の論理ベクトルに適用できるよう拡張する。 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ を V_m^n の元とする。このとき $A \preceq B$ とは、 $\forall i(a_i \preceq b_i)$ が成立することをいう。 □

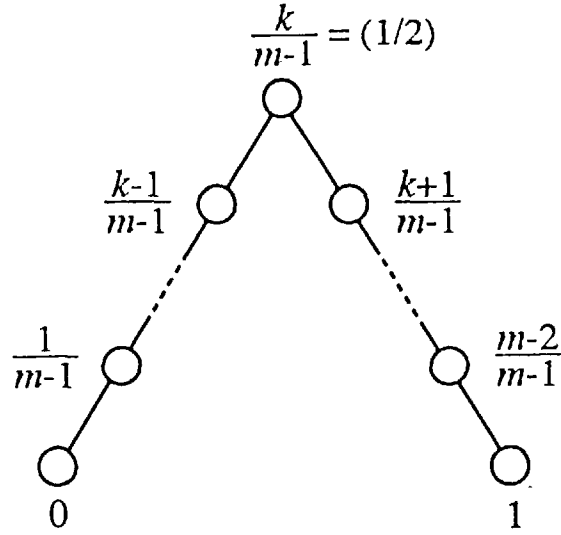


図 2.4: V_m におけるあいまいさに関する半順序関係 \preceq

定義 29で定義された半順序関係による半順序集合 $\langle V_m^n, \preceq \rangle$ においては, その中の任意の2元に対して, 下限が存在するとは限らない. $A, B \in V_m^n$ に対して, A, B の下限の集合を $A \Delta B$ と表すことにする. そして下限が存在しない場合には, $A \Delta B = \phi$ と表記する.

以上で, 定義された記号 \preceq, Δ は, 前節までに別の概念として度々使用されてきているが, 特に謝りの恐れのない限り, 同一の記号を用いることとする.

[定理 15] F を n 変数の多値クリーネ論理関数とし, $A, B \in V_m^n$ とする. もし $A \preceq B$ であれば, $F(A) \preceq F(B)$ が成立する. □

定理 15は, あいまいさに関する単調性を示すものであるが, 同時に正則性を表す性質でもある. 証明は略すが, 2.3節の定理 3, 定理 4, 定理 5と同様にして示すことができる.

[定義 30] (量子化) a を V_m の元とする. このとき \overline{a}^ε を量子化といい, 以下のように定義される. ただし, $0 < \varepsilon \leq 1/2$ とする.

$$\overline{a}^\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq a < \varepsilon \\ 1/2 & \text{if } \varepsilon \leq a \leq 1 - \varepsilon \\ 1 & \text{if } 1 - \varepsilon < a \leq 1 \end{cases}$$

また, 量子化を n 次元のベクトルに対して拡張する. $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ を V_m^n の元とするとき, $\overline{A}^\varepsilon = (\overline{a_1}^\varepsilon, \overline{a_2}^\varepsilon, \dots, \overline{a_n}^\varepsilon)$ と定義する. □

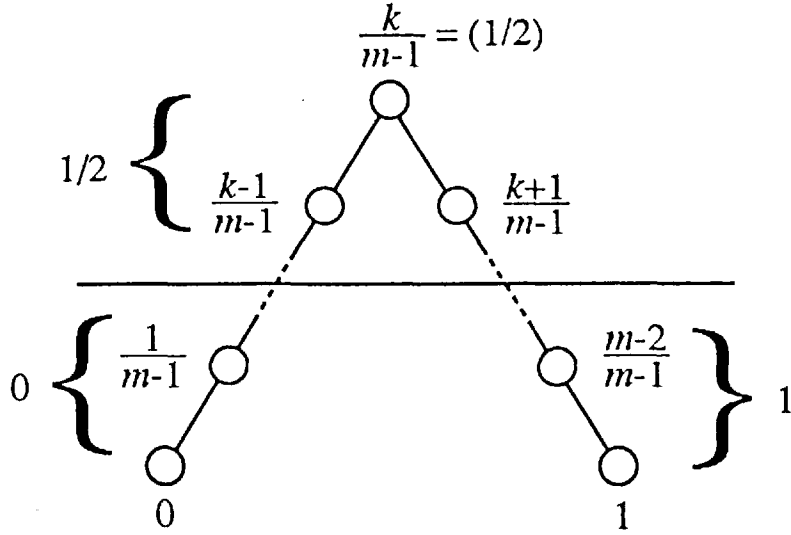


図 2.5: 量子化

[補題 6] F を多値クリーネ論理関数とし, A を V_m^n の元とする. このとき, $F_\varepsilon(\overline{A}^\varepsilon) = \overline{F(A)}^\varepsilon$ が $0 < \varepsilon \leq 12$ なる任意の ε に対して成立する. ただし F_ε は, F に現れる定数 c を \overline{c}^ε で置き換えたものである. \square

[補題 7] F, G を多値クリーネ論理関数とする. もし $F(A) = G(A)$ が任意の $A \in V_m^n$ に成立するならば, $F_\varepsilon(B) = G_\varepsilon(B)$ が任意の $B \in V_3^n$ に対して成立する. \square

[定理 16] F, G を多値クリーネ論理関数とする. $F(A) = G(A)$ が任意の $A \in V_m^n$ に成立するとき, およびそのときに限り, $F(B) = G(B)$ が任意の $B \in V_3^n$ に対して成立する. \square

2.5.3 多値クリーネ論理関数の表現と標準形

表現定理

ここでは, 与えられた真理値表から多値クリーネ論理関数の論理式表現を導き出すための定理「表現定理」について述べる.

[定義 31] 変数 x_i とその否定 $\sim x_i$ を文字という. 文字の論理積を積項という. 積項で, いかなる変数についても $x_i \cdot \sim x_i$ のような組み合わせを持たない積項を単積項という. すべての変数を持つ単積項を最小項という. また, 少なくとも一つの変数について $x_i \cdot \sim x_i$ のような組み合わせを持つ積項を相補項という. すべての変数を持つ相補項を相補最小項という. \square

[定義 32] 単積項 $\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と V_3^n の元 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ との間に一対一対応を以下のように定義する.

$$x^{a_i} = \begin{cases} x_i & \text{for } a_i = 1 \\ 1 & \text{for } a_i = 1/2 \\ \sim x_i & \text{for } a_i = 0 \end{cases}$$

□

[定義 33] 相補項 $\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と $V_3^n - V_2^n$ の元 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ との間に一対一対応を以下のように定義する.

$$x^{a_i} = \begin{cases} x_i & \text{for } a_i = 1 \\ x_i \cdot \sim x_i & \text{for } a_i = 1/2 \\ \sim x_i & \text{for } a_i = 0 \end{cases}$$

□

[補題 8] A, B を V_3^n の元とし, α を A に対応する単積項とする. このとき以下が成立する.

- (1) $B \preceq A$ iff $\alpha(B) = 1$.
- (2) $A \Delta B = \phi$ iff $\alpha(B) = 0$.
- (3) $B \not\preceq A$ iff $\alpha(B) = 1/2$.

□

[補題 9] A を $V_3^n - V_2^n$ の元とし, α を A に対応する相補最小項とする. このとき, $B \in V_3^n$ すると以下が成立する.

- (1) $A \preceq B$ iff $\alpha(B) = 1/2$.
- (2) $A \not\preceq B$ iff $\alpha(B) = 0$.

□

以上の補題 8 および補題 9 により, 与えられた真理値表から多値クリーネ論理関数の論理式表現を導き出すための定理 - 表現定理 - が導き出される.

[定理 17] (表現定理) F を多値クリーネ論理関数とする. このとき, F は以下のように表現可能である.

$$F(X) = \bigvee_{C \in V_3^n} \left\{ \bigwedge_{C' \preceq C} F(C') \alpha_C(X) \vee F(C) \beta_C(X) \right\}$$

ただし, α_C は, 元 C に対応する単積項であり, β_C は, C に対応する相補最小項とする (尚, $C \in V_2^n$ の場合は $\beta_C = 0$ とする).

□

表 2.6: 例の多値クリーネ論理関数の真理値表

		x_2				
		0	1/4	1/2	3/4	1
x_1	0	0	1/4	1/4	1/4	1/4
	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4
	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4
	1	1	3/4	3/4	3/4	3/4

表 2.7: 論理式表現

$C = (x_1, x_2)$	$\alpha_C(X)$	$\beta_C(X)$	$\bigwedge_{C' \preceq C} F(C')\alpha_C(X) \vee F(C)\beta_C(X)$
(0, 0)	$\sim x_1 \sim x_2$	0	0
(0, 1/2)	$\sim x_1$	$\sim x_1 x_2 \sim x_2$	$1/4 \sim x_1 x_2 \sim x_2$
(0, 1)	$\sim x_1 x_2$	0	$1/4 \sim x_1 x_2$
(1/2, 0)	$\sim x_2$	$x_1 \sim x_1 \sim x_2$	$1/2 x_1 \sim x_1 \sim x_2$
(1/2, 1/2)	1	$x_1 \sim x_1 x_2 \sim x_2$	$1/2 x_1 \sim x_1 x_2 \sim x_2$
(1/2, 1)	x_2	$x_1 \sim x_1 x_2$	$1/2 x_2 \vee 1/2 x_1 \sim x_2$
(1, 0)	$x_1 \sim x_2$	0	$x_1 \sim x_2$
(1, 1/2)	x_1	$x_1 x_2 \sim x_2$	$3/4 x_1 \vee 3/4 x_1 x_2 \sim x_2$
(1, 1)	$x_1 x_2$	0	$3/4 x_1 x_2$

【例 10】 定理 17 の表現定理を具体的に適用してみる。表 2.6 より 2 変数 5 値の多値クリーネ論理関数が与えられたとする。このとき、表 2.7 は、 $\bigvee_{C \in V_3^n} \left\{ \bigwedge_{C' \preceq C} F(C')\alpha_C(X) \vee F(C)\beta_C(X) \right\}$ の論理式表現を V_3^n すべての元に関して求めたものである。この結果から、以下のように与えられた多値クリーネ論理関数の論理式表現が求められる。

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2) &= \bigvee_{C \in V_3^n} \left\{ \bigwedge_{C' \preceq C} F(C')\alpha_C(X) \vee F(C)\beta_C(X) \right\} \\
 &= 1/4 \sim x_1 x_2 \sim x_2 \vee 1/4 \sim x_1 x_2 \vee 1/2 x_1 \sim x_1 \sim x_2 \vee 1/2 x_1 \sim x_1 x_2 \sim x_2 \vee \\
 &\quad (1/4 x_2 \vee 1/2 x_1 \sim x_1 x_2) \vee x_1 \sim x_2 \vee (3/4 x_1 \vee 3/4 x_1 x_2 \sim x_2) \vee 3/4 x_1 x_2 \\
 &= 1/4 x_2 \vee 3/4 x_1 \vee x_1 \sim x_2
 \end{aligned}$$

□

本項の結果により、多値クリーネ論理関数の論理式表現を求めるための手法が示された。次の項において、一つの多値クリーネ論理関数に対して一意に定まる標準形 - 主加法標準形 - につい

て述べる.

多値クリーネ論理関数の主加法標準形

多値クリーネ論理関数の論理式表現は, 多値クリーネ論理関数がクリーネ代数のモデルであることから, B-3 値論理関数, 正則 3 値論理関数, ファジィ論理関数同様, 加法形式に展開可能であることは明らかである.

$F = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_m$ を多値クリーネ論理関数の加法形式とする. ただし, γ_i は積項である. 加法形式に現れる積項は, 以下の三つに分類される.

タイプ 1 $c \cdot \alpha$, ただし c は $c > 1/2$ なる定数. α は単積項.

タイプ 2' $c \cdot \alpha$, ただし c は $c \leq 1/2$ なる定数. α は単積項.

タイプ 3' $c \cdot \alpha$, ただし c は $c \leq 1/2$ なる定数. α は相補項.

しかしながら, 多値クリーネ論理関数についても $x_i \cdot \sim x_i \leq 1/2 \leq x_j \vee \sim x_j$ が成立することからタイプ 2' の積項においては, $c < 1/2$ であることから, 定数 c を持った複数の最小項の論理和に展開が可能である. また, タイプ 3' の積項においても, 同様にして定数 c を持った複数の相補最小項の論理和に展開が可能である. したがって, 多値クリーネ論理関数の加法形式は, 以下の 3 種類の積項で表現可能である.

タイプ 1 $c \cdot \alpha$, ただし c は $c > 1/2$ なる定数. α は単積項.

タイプ 2 $c \cdot \alpha$, ただし c は $c \leq 1/2$ なる定数. α は最小項.

タイプ 3 $c \cdot \alpha$, ただし c は $c \leq 1/2$ なる定数. α は相補最小項.

[定義 34] 多値クリーネ論理関数 F の加法形式が, タイプ 1, タイプ 2, タイプ 3 の積項のみで表現されているとき, F は主加法標準形で表現されているという. \square

[例 11] 多値クリーネ論理関数 $F = x_1(1/4x_2 \vee 3/4x_1 \vee x_3 \sim x_3)$ の主加法標準形を求めてみる.

$$\begin{aligned} F &= 1/4x_1x_2 \vee 3/4x_1 \vee x_1x_3 \sim x_3 \\ &= 1/4x_1x_2(x_3 \cdot x_3) \vee 3/4x_1 \vee x_1(x_2 \vee \sim x_2)x_3 \sim x_3 \\ &= 1/4x_1x_2x_3 \vee 1/4x_1x_2 \sim x_3 \vee 3/4x_1 \vee x_1x_2x_3 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_2x_3 \sim x_3 \\ &= 3/4x_1 \vee x_1x_2x_3 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_2x_3 \sim x_3 \end{aligned}$$

\square

例 11 からわかるように, 多値クリーネ論理関数では, 以下の定理が成立する.

【定理 18】 任意の多値クリーネ論理関数は，積項の順番を無視すれば，主加法標準形で一意に表現できる． □

以上では，加法形式について述べたが，同様にして乗法形式に関しても一意に定まる標準形 – 主乗法標準形 – を考えることができるが，ここでは割愛する．

3 章

定数係数をもったファジィ論理関数

— ファジィ論理関数, 多値クリーネ論理関数の拡張 —

3.1 まえがき

古くから命題の真理値が連続値を取る論理に関する研究がなされてきている [3]. 更に L. A. Zadeh によりファジィ集合 [4] の概念が提出されて以来, 変数の取り得る値を実閉区間 $[0, 1]$ とする論理関数 — ファジィ論理関数 — の研究が盛んに行われてきた [9, 10, 11, 13, 15]. また一方, フェイルセーフ [5], 論理回路のハザードの解析 [6] のための 3 値論理関数が研究され, C 形論理関数 [5], B-3 値論理関数 [7], 正則 3 (A-3) 値論理関数 [8] などの研究が行われてきた. また, これらの関数は, クリーネ代数のモデルであることから, 代数的な研究 [12, 30, 31] と併せて, 多値クリーネ論理関数 [21, 22, 24, 25] の研究が行われている. 本章で扱う定数係数をもったファジィ論理関数は, これらの研究の中で, ファジィ論理関数と多値クリーネ論理関数を, その特殊な場合として含むものである. ファジィ論理関数では, 変数は実閉区間 $[0, 1]$ の任意の実数値を取ることを許しているが, その論理式表現に現れる定数としては, 2 値論理と同じく 0, 1 のみであった. また多値クリーネ論理関数では, 定数として 0, 1 以外の離散的な複数の値 (有理数) を許しているが, 変数も離散的な値しか取り得ないものである. 定数係数をもったファジィ論理関数は, 変数の取り得る値も, 定数の値も実閉区間 $[0, 1]$ の任意の実数値を取ることを許し, 両者の特徴を合わせ持った論理関数として位置づけられるものである. このような拡張は, 代数的な観点からというよりもむしろ, 工学的な観点から実閉区間 $[0, 1]$ の任意の値を取り扱うことの必要性によるものである. 代数的な観点からは, 関数の基数や定数の個数などはあまり問題にならず, 公理系が等しい論理関数は数学的に等しいと解釈される. しかしながら工学的な観点からは, 現実のあいまいさを含む問題を取り扱う場合, 実閉区間 $[0, 1]$ の無限個の値が表現するあいまいさの絶対値そのものに意味があり, 実数濃度の無限多値の場合を改めて論じることは意味がある. このことは, 文献 [18] において山本らにより既に指摘されている. また文献 [60, 51] において分散システムの設計法への具体的な適用例が著者により報告されている.

本章では、3.2節において定数係数をもったファジィ論理関数を代数的な観点から考察し、その必要十分条件がファジィ論理関数、多値クリーネ論理関数と同様な形になることを示す。3.3節においては、3.2節の結果をもとに論理式表現の標準形として主加法標準形、主乗法標準形の考察を行う。3.4節では、最初に、3.3節で考察した標準形をもとに、定数係数をもったファジィ論理関数の関数値による定義域の分割を行い、変数の数が有限個（ n 個）の場合、論理式表現に現れる定数は $[0, 1]$ 上の無限個の定数のうち 3^n 個を越えない有限個であることが示される。そして第二に、定数係数をもったファジィ論理関数における入力に対する完全指定、不完全指定の概念が明確に定義される。さらに最後に定数係数をもったファジィ論理関数の表現能力の限界について考察がなされる。

3.2 定数係数をもったファジィ論理関数の基本的性質

本節では、定数係数をもったファジィ論理関数についての定義を与え、その性質について述べる。以降の議論で演算は \sim, \cdot, \vee の順に強いものとし、誤りの恐れのない限り括弧を省略するものとする。

2章 2.1節で述べたように、クリーネ代数は以下の公理を満たす代数系である。

- | | |
|-------------|---|
| (1) べき等律 | $A \cdot A = A, A \vee A = A$ |
| (2) 交換律 | $A \cdot B = B \cdot A, A \vee B = B \vee A$ |
| (3) 結合律 | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$
$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ |
| (4) 吸収律 | $A \vee A \cdot B = A, A \cdot (A \vee B) = A$ |
| (5) 分配律 | $A \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C,$
$A \vee (B \cdot C) = (A \vee B) \cdot (A \vee C)$ |
| (6) 二重否定 | $\sim(\sim A) = A$ |
| (7) ド・モルガン律 | $\sim(A \vee B) = \sim A \cdot \sim B,$
$\sim(A \cdot B) = \sim A \vee \sim B$ |
| (8) 最大元 | $1 \cdot A = A, 1 \vee A = 1$ |
| (9) 最小元 | $0 \cdot A = 0, 0 \vee A = A$ |
| (10) クリーネ律 | $(A \cdot \sim A) \cdot (B \vee \sim B) = A \cdot \sim A,$
$A \cdot \sim A \vee (B \vee \sim B) = B \vee \sim B \quad \square$ |

この代数系のモデルとなる論理関数の代表的なものとしては、B-3値論理関数 [7]、ファジィ論理関数 [9, 10, 11, 13, 15]、正則3値論理関数 [8]、多値クリーネ論理関数 [21, 22, 24, 25] などが提案されている。これらの関数は、量子化と呼ばれる準同型写像により、本質的に3値論理関数であることが示されている [11, 21, 24]。また、任意のクリーネ代数に対して適当な商代数を作れば、代数系 $3 = \langle V, \cdot, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ （台集合は $V = \{0, 1/2, 1\}$ ）であり、演算の定義は $\sim x = 1 - x$, $x \cdot y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$ である代数系）と同型となることが示されている [31]。

[定義 35] V を実閉区間 $[0, 1]$ とする. このとき, n 変数の定数係数をもったファジィ論理関数は V^n から V への写像であり, 以下のように帰納的に定義される論理式で表現される.

- (1) 任意の定数 $c_1, c_2, \dots \in V$, 変数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ は論理式である.
- (2) F, G が論理式であれば, $\sim F, F \cdot G, F \vee G$ も論理式である.
- (3) 以上で定義されるもののみが論理式である.

ただし, 各論理結合子は $\sim x = 1 - x, x_1 \cdot x_2 = \min(x_1, x_2), x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$ と解釈する. また定数は 0 変数の演算と解釈する. □

以降の議論では, 誤りの恐れがない限り, 関数と論理式を同一視する. また, 変数の数は, 一般的には可算無限個まで考察できるが, 本章では有限個 (n 個) とする. また, 定数係数をもったファジィ論理関数のことを Fuzzy/C 論理関数と略記する[†].

[例 12] $f = x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.8 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee 0.4 \cdot x_3 \cdot \sim x_3$ は 3 変数の Fuzzy/C 論理関数である. □

Fuzzy/C 論理関数で扱う真理値および定数の意味付けであるが, 実閉区間 $(0, 1)$ にある真理値および定数は「真 (1) と偽 (0) の中間の正しさ」を表している. これは通常の順序関係 \leq において全順序関係になる. このとき $0.5 (= 1/2)$ は, 最も中間の状態を表しており「真であるか偽であるか不明」であることを表していると考えられ, 最もあいまいであることを表している. このことから真理値および定数の間にあいまいさに関する半順序関係 \preceq が, 2章 2.4 定義 20 同様, 以下のよう導入される.

[定義 36] $a, b \in V$ とする. このとき $a \preceq b$ であるとは, $0 \leq a \leq b \leq 0.5$ または $0.5 \leq b \leq a \leq 1$ のときをいう. この関係 \preceq を V^n の元 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に拡張定義すると, $A \preceq B$ であるとは, $\forall i (a_i \preceq b_i)$ が成立していることである. □

ここで, Fuzzy/C 論理関数と多値クリーネ論理関数の比較を行い, Fuzzy/C 論理関数の特徴について述べる. 多値クリーネ論理関数では, 真理値の集合は奇数個または偶数個の元の有限集合となり, m 値の場合, これを V_m とすると, $V_m = \{0, 1/(m-1), 2/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1\}$ を代表元とするものとなる. $m = 5$ の場合の V_m の元の通常の順序関係 (\leq) および, あいまいさに関する半順序関係 (\preceq) を図 3.1 に示す. 多値クリーネ論理関数では, 真理値も定数も, これらの m 個の元のうちの何れかの値をとる. それに対して Fuzzy/C 論理関数は, 真理値も定数も実閉区間 $V = [0, 1]$ の任意の実数値をとっても良く, ハッセ図中の線分上の連続的な関係となり, \leq および \preceq の何れの関係に関しても連続的な関係となる. この意味することは, \leq の関係において, 多値クリーネ論理関数では真偽の度合いの比較が離散的にしかできなかったものが, Fuzzy/C 論理関数では, 連続的にできることを意味する. 同様に, \preceq の関係に関しても, あいまいさの比較を連続的に行うことができる. これは数学的な観点から見ると, 真理値の集合 $V = [0, 1]$ が完備

[†] /C は with Constants の意味である.

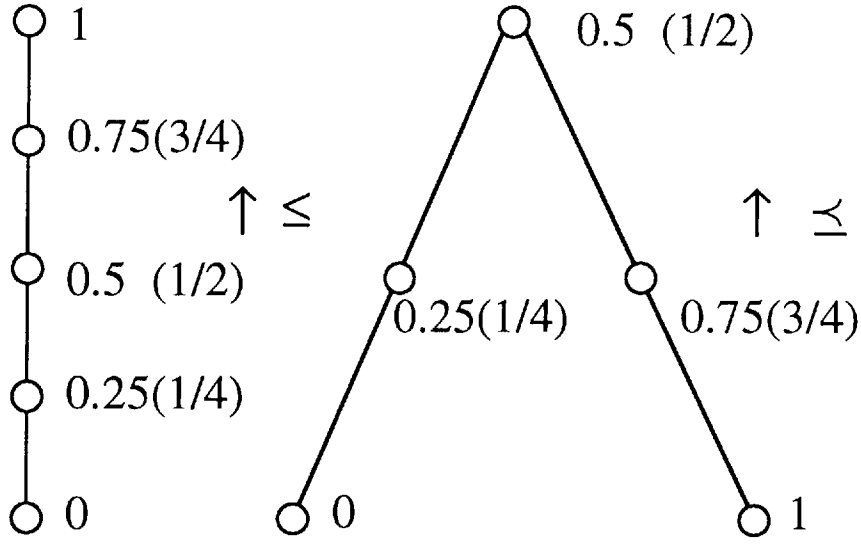


図 3.1: 真理値の順序

であるという性質を利用していることである。また、工学的な応用面を考えると、各真理値の値自体に物理的な意味を持たせていることが多く、連続的に真理値を取り得ること、および、その比較が \leq や \preceq の関係について連続的行えることは重要である。以上のような観点から見ると、多値クリーネ論理関数は、Fuzzy/C 論理関数の真理値の集合を V から V_m に制限したものと見なすこともできる。

以上では、二つの順序関係 \leq および \preceq に着目して議論を行ってきた。以下の定理は、このうちあいまいさに関する半順序関係 \preceq に関して、単調性を持つことを示すものである。

[定理 19] f を Fuzzy/C 論理関数とする。 $A, B \in V^n$ に関して、 $A \preceq B$ であれば $f(A) \preceq f(B)$ である。

(証明) 文献 [9] の定理 1 および文献 [21] の定理 1 と同様に証明できる。 \square

以下の議論では、 n 変数の Fuzzy/C 論理関数から n 変数の多値クリーネ論理関数への準同型写像 (量子化) について述べる。

[定義 37] f を n 変数の Fuzzy/C 論理関数とする。このとき f を表現する論理式に現れる定数が c_1, c_2, \dots, c_ℓ であるとき、 $R_0(f) = \{0, 0.5, 1\} \cup \{c_1, c_2, \dots, c_\ell\} \cup \{1 - c_1, 1 - c_2, \dots, 1 - c_\ell\}$ を基底集合という。 \square

明らかに、基底集合 $R_0(f)$ は必ず奇数個の元よりなる。

[定義 38] f を Fuzzy/C 論理関数とし、 $R_0(f) = \{c_0, c_1, \dots, c_K, c_{K+1}, 1 - c_K, 1 - c_{K-1}, \dots, 1 - c_0\}$ (ただし、 $c_0 = 0$, $c_{K+1} = 0.5$, $c_i < c_{i+1}$) を基底集合とする。 $c_i < \lambda_i \leq c_{i+1}$ なる実数の組

を $M = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_K)$ とする. この実数の組 M を量子化パラメータという. このとき以下のよう定義される $a \in V$ に対する V から $R_0(f)$ への準同型写像を量子化という.

$$\bar{a}^M = \begin{cases} c_0 & (= 0) & (0 \leq a \leq \lambda_0) \\ c_1 & & (\lambda_0 < a \leq \lambda_1) \\ \vdots & & \vdots \\ c_i & & (\lambda_{i-1} < a \leq \lambda_i) \\ \vdots & & \vdots \\ c_K & & (\lambda_{K-1} < a \leq \lambda_K) \\ c_{K+1} & (= 0.5) & (\lambda_K < a < 1 - \lambda_K) \\ 1 - c_K & & (1 - \lambda_K \leq a < 1 - \lambda_{K-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ 1 - c_i & & (1 - \lambda_i \leq a < 1 - \lambda_{i-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ 1 - c_0 & (= 1) & (1 - \lambda_0 \leq a \leq 1) \end{cases}$$

また量子化を V^n に拡張定義して, $A \in V^n$ とするとき $\bar{A}^M = (\bar{a}_1^M, \bar{a}_2^M, \dots, \bar{a}_n^M)$ と定義する. □

[例 13] 例 12 の Fuzzy/C 論理関数 f の基底集合は,

$$\begin{aligned} R_0(f) &= \{0, 0.5, 1\} \cup \{0.4, 0.8\} \cup \{1 - 0.4, 1 - 0.8\} \\ &= \{0, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1\}. \end{aligned}$$

このとき, 量子化パラメータの一つとして $M = (0.1, 0.3, 0.45)$ を選ぶことができる. 量子化の例: $\bar{0.2}^M = 0.2$, $\bar{0.3}^M = 0.2$, $\bar{0.47}^M = 0.5$, $\bar{0.75}^M = 0.8$, $\overline{(0.2, 0.47, 0.75)}^M = (0.2, 0.5, 0.8)$ □

[定理 20] f を Fuzzy/C 論理関数とする. そのとき任意の量子化パラメータ M に対して $f(\bar{A}^M) = \overline{f(A)}^M$ である.

(証明) 文献 [21] の定理 2 と同様に証明できる. □

[補題 10] Fuzzy/C 論理関数 f と g が等しい基底集合を持つ, 即ち, $R_0(f) = R_0(g)$ であるとき, $\forall B \in R_0(f)^n = R_0(g)^n$ に対して $f(B) = g(B)$ であれば, $\forall A \in V^n$ に対して $f(A) = g(A)$ である.

(証明) $c_i = \bar{f(A)}^M$, $c_j = \bar{g(A)}^M$, $c_i, c_j \in R_0(f) = R_0(g)$ とする. このとき $c_i \neq c_j$ を仮定すると定理 20 より $c_i = f(\bar{A}^M)$, $c_j = g(\bar{A}^M)$ であり, $\bar{A}^M \in R_0(f)^n = R_0(g)^n$ であるから, $\forall B \in R_0(f)^n = R_0(g)^n$ に対して $f(B) = g(B)$ であることに矛盾する. よって

$c_i = c_j$ であり, 任意の量子化パラメータ M に対して $\overline{f(A)}^M = \overline{g(A)}^M = c_i$ である. このとき, $\exists A \in V^n$ に対して $f(A) \neq g(A)$ として矛盾することを導けば良い. $f(A) \neq g(A)$ であるから $f(A) > g(A)$ または $f(A) < g(A)$ である. $f(A) > g(A)$ であり, $c_i < 0.5$ である場合, $\lambda_i = (f(A) - g(A))/2$ としたときの量子化パラメータを M_0 とすると $f(\overline{A}^{M_0}) = \overline{f(A)}^{M_0} = c_i$, $g(\overline{A}^{M_0}) = \overline{g(A)}^{M_0} = c_{i+1}$ であり, $\overline{f(A)}^M = \overline{g(A)}^M = c_i$ に矛盾する. $c_i = 0.5$, $c_i > 0.5$ についても同様に証明できる. また $f(A) < g(A)$ に関しても同様である. \square

[定理 21] 基底集合が $R_0(f)$ であるすべての Fuzzy/C 論理関数を要素とする集合は, すべての $|R_0(f)|$ 値の多値クリーネ論理関数を要素とする集合と同型である. また $|R_0(f)|$ 値の多値クリーネ論理関数の関数値に関する性質は, 基底集合が $R_0(f)$ である Fuzzy/C 論理関数においても成立する.

(証明) Fuzzy/C 論理関数 f の基底集合を $R_0(f) = \{c_0, c_1, \dots, c_K, c_{K+1}, 1-c_K, 1-c_{K-1}, \dots, 1-c_0\}$ (ただし, $c_0 = 0$, $c_{K+1} = 0.5$, $c_i < c_{i+1}$) とする. このとき $|R_0(f)|$ 値の多値クリーネ論理関数の真理値の集合は $V_{|R_0(f)|} = \{0, 1/(|R_0(f)| - 1), \dots, i/(|R_0(f)| - 1), \dots, 1\}$ とおける. このとき φ を $R_0(f)$ の元を $V_{|R_0(f)|}$ の元に小さい元から順番に昇順に対応づける写像とすると, φ は一対一かつ上への写像である. また $R_0(f)$ の元は演算 \sim, \cdot, \vee に関して閉じており, かつ, 二つの順序 \leq, \preceq に関して明らかに φ は順序同型写像である. よって任意の Fuzzy/C 論理関数の論理式において, そこに現われる定数を φ によって対応づけられる $V_{|R_0(f)|}$ の元に置き換えると $|R_0(f)|$ 値の多値クリーネ論理関数の論理式が得られる. Fuzzy/C 論理関数および多値クリーネ論理関数は, ともに論理式で表現される関数であるので, 以上のことから明らかに, 基底集合が $R_0(f)$ であるすべての Fuzzy/C 論理関数を要素とする集合は, すべての $|R_0(f)|$ 値の多値クリーネ論理関数を要素とする集合と同型となる. また補題 10により, $|R_0(f)|$ 値の多値クリーネ論理関数の関数値に関する性質は, 基底集合が $R_0(f)$ である Fuzzy/C 論理関数においても成立する. \square

[例 14] 例 12 の Fuzzy/C 論理関数 f の基底集合は例 13 から $R_0(f) = \{0, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1\}$ となる. $|R_0(f)| = 7$ であるからこの f には $V_7 = \{0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1\}$ を真理値の集合とする 7 値の多値クリーネ論理関数 $g = x_1 \cdot \sim x_2 \vee (5/6) \cdot x_2 \cdot x_3 \vee (1/3) \cdot x_3 \cdot \sim x_3$ が対応している. \square

多値クリーネ論理関数の関数値に関する性質の一つとして, 多値クリーネ論理関数が等しいための必要十分条件がある. それは定義域の集合を $\{0, 0.5, 1\}^n$ に制限したときの関数値を調べれば良いという結果であり, 文献 [21, 24] に既に示されている. このことと定理 21 から直ちに以下の定理が Fuzzy/C 論理関数が等しいための必要十分条件として導かれる.

[定理 22] f, g を Fuzzy/C 論理関数とする. $\forall A \in [0, 1]^n (f(A) = g(A))$ と $\forall B \in \{0, 0.5, 1\}^n (f(B) = g(B))$ は同値である. (証明略)

以上の議論では、Fuzzy/C 論理関数の性質が、多値クリーネ論理関数の性質に帰着できることが示され（定理 21）、それをもとに Fuzzy/C 論理関数の関数値としての性質の一つである等しいための必要十分条件が導びかれた（定理 22）。これらから Fuzzy/C 論理関数の代数的な性質は多値クリーネ論理関数と密接に関連していることがわかる。しかしながら以下の点が Fuzzy/C 論理関数と多値クリーネ論理関数では本質的に異なっている。

- (1) m 値の多値クリーネ論理関数では真理値の集合は $V_m = \{0, 1/(m-1), 2/(m-1), \dots, (m-2)/(m-1), 1\}$ として最初から定まっているが、Fuzzy/C 論理関数では、それを表現する論理式に現れる定数から $R_0(f)$ が決定される。このことは、論理式が決定されるまで、関数の基数が決定されないことを意味する。
- (2) $|R_0(f)|$ は必ず奇数であることから Fuzzy/C 論理関数は本質的に基数が奇数である多値クリーネ論理関数に対応する。

3.3 主加法標準形, 主乗法標準形

本節では、論理式表現について考察する。

[定義 39] Fuzzy/C 論理関数の論理式に現れる積項（和項）は以下の 3 種類に分類できる：

（タイプ P1（タイプ C1））定数 (> 0.5 (< 0.5)) を持ち、 $x_i \cdot \sim x_i$ ($x_i \vee \sim x_i$) なる変数の組を持たないもの。もし定数が省略されたときには、定数は 1 (0) であると見なす。

（タイプ P2（タイプ C2））定数 (≤ 0.5 (≥ 0.5)) を持ち、 $x_i \cdot \sim x_i$ ($x_i \vee \sim x_i$) なる変数の組を持たないもの。

（タイプ P3（タイプ C3））少なくとも一つの変数に関して $x_i \cdot \sim x_i$ ($x_i \vee \sim x_i$) なる変数の組を持つもの。定数が省略されたとき、定数は 0.5 と見なす。 □

[定義 40] タイプ P1 とタイプ P2 の積項のことを定数付き単積項（タイプ C1 とタイプ C2 の和項を定数付き単和項）という。定数付き単積項（定数付き単和項）ですべての変数を含むものを定数付き最小項（定数付き最大項）という、またタイプ P3 の積項を定数付き相補項（タイプ C3 の和項を定数付き相補和項）という。定数付き相補項（定数付き相補和項）で、すべての変数を含むものを定数付き相補最小項（定数付き相補最大項）という。 □

任意のタイプ P2 およびタイプ P3 の積項（タイプ C2 およびタイプ C3 の和項）は、 $x_1 \cdot x_i \leq 0.5 \leq x_j \vee x_j$ が常に成立していることから、それぞれ定数付き最小項および定数付き相補最小項の和（定数付き最大項および定数付き相補最大項の積）に展開可能である。

[例 15] 2 変数の場合を考える。

- (1) $0.8 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2$ はタイプ P1 の定数付き単積項である。

- (2) $0.3 \cdot \sim x_2$ はタイプ P2 の定数付き単積項であり、二つの定数付き最小項の和に展開できる。

$$\begin{aligned} 0.3 \cdot \sim x_2 &= (x_1 \vee \sim x_1) \cdot 0.3 \cdot \sim x_2 \\ &= 0.3 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.3 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \end{aligned}$$

- (3) $x_2 \cdot \sim x_2$ はタイプ P3 の定数付き相補項であり、二つの定数付き相補最小項の和に展開できる。

$$\begin{aligned} x_2 \cdot \sim x_2 &= (x_1 \vee \sim x_1) \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \end{aligned}$$

- (4) $0.2 \vee x_1 \vee x_2$ はタイプ C1 の定数付き単和項である。

- (5) $0.7 \vee x_2$ はタイプ C2 の定数付き単和項であり、二つの定数付き最大項の積に展開できる。

$$\begin{aligned} 0.7 \vee x_2 &= 0.7 \vee x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \\ &= (0.7 \vee x_1 \vee x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee x_2) \end{aligned}$$

- (6) $x_2 \vee \sim x_2$ はタイプ C3 の定数付き相補和項であり、二つの定数付き相補最大項の積に展開できる。

$$\begin{aligned} x_2 \vee \sim x_2 &= x_1 \cdot \sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2) \end{aligned}$$

□

以降では、特に誤りの恐れがない限り、定数付き単積項（定数付き単和項）を単積項（単和項）と呼ぶことにする。同様にまた定数付き最小項（定数付き最大項）、定数付き相補最小項（定数付き相補最大項）も最小項（最大項）、相補最小項（相補最大項）とそれぞれ呼ぶことにする。

Fuzzy/C 論理関数では、吸収律、分配律、べき等律、ドモルガン律が成立しているので、任意の Fuzzy/C 論理関数を表現する論理式は、以下の定義 41 による積項、和項の包含関係を考慮すると、2 値論理関数同様、定義 42 のように加法標準形または乗法標準形で表現できる。

[定義 41] α_1, α_2 を積項 (β_1, β_2 を和項) とする。 $\forall A \in V^n$ に対して $\alpha_1(A) \geq \alpha_2(A)$ ($\beta_1(A) \leq \beta_2(A)$) となるとき、 α_1 (β_1) は α_2 (β_2) を包含する (に包含される) といい、 $\alpha_1 \supseteq \alpha_2$ ($\beta_1 \subseteq \beta_2$) と記す。

□

このとき、 $\alpha_1 \vee \alpha_2 = \alpha_1$ ($\beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_1$) が成立するので、加法形式 $\alpha_1 \vee \alpha_2$ (乗法形式 $\beta_1 \cdot \beta_2$) において α_2 (β_2) は省略される。

[定義 42] Fuzzy/C 論理関数 f が積項の和 (\vee) (和項の積 (\cdot)) で、包含される積項 (包含する和項) が省略されて表現されているとき、 f は加法標準形 (乗法標準形) で表現されているという。加法標準形に現れるタイプ P2 またはタイプ P3 の積項 (乗法標準形に現れるタイプ C2 またはタイプ C3 の和項) がすべて最小項または相補最小項 (最大項または相補最大項) であるとき、 f は主加法標準形 (主乗法標準形) で表現されているという。 \square

[例 16] 例 15 の結果から、2 変数の Fuzzy/C 論理関数 f の加法標準形 $f = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.3 \cdot \sim x_2 \vee x_2 \cdot \sim x_2$ を主加法標準形で表現すると $f = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.3 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$ となる。また 2 変数の Fuzzy/C 論理関数 g の乗法標準形 $g = (x_1 \vee x_2) \cdot (0.7 \vee x_2) \cdot (x_2 \vee \sim x_2)$ を主乗法標準形で表現すると $g = (x_1 \vee x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee x_2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2)$ となる。 \square

3.2 節で議論したように、Fuzzy/C 論理関数は $|R_0(f)|$ 値の多値クリーネ論理関数と対応づけられるので、その論理式表現においても以下の定理が成立する。

[定理 23] 任意の Fuzzy/C 論理関数は主加 (乗) 法標準形で積 (和) 項の順番を無視すると一意に表現できる。 (証明略)

3.4 標準形と定義域の関係

3.2 節の定理 22 (Fuzzy/C 論理関数が等しいための必要十分条件) により、定義域を $\{0, 0.5, 1\}^n$ に制限しても良いことが示された。本節では、 $\{0, 0.5, 1\}^n$ の部分集合において Fuzzy/C 論理関数がどのような値を取り得るかについて、3.3 節で示した主加法標準形、主乗法標準形をもとに考察する。以降記号として $V = [0, 1]$, $V_3 = \{0, 0.5, 1\}$, $V_2 = \{0, 1\}$ を断りなく用いる。

[定義 43] タイプ P1 (C1), タイプ P2 (C2), タイプ P3 (C3) の積項 (和項) と V_3^n の元との間に以下のように対応づけをする。

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in V_3^n$ とタイプ P1 (C1) の単積項 $\alpha = c \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ (単和項 $\beta = c \vee x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2} \vee \cdots \vee x_n^{a_n}$) を次のように対応づける。ただし、 c は定数である。

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) & \text{for } a_i = 1 \\ 1 & (0) & \text{for } a_i = 0.5 \\ \sim x_i & (x_i) & \text{for } a_i = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in V_2^n$ とタイプ P2 (C2) の最小項 $\alpha = c \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ (最大項 $\beta = c \vee x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2} \vee \cdots \vee x_n^{a_n}$) を次のように対応づける。ただし、 c は定数である。

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) & \text{for } a_i = 1 \\ \sim x_i & (x_i) & \text{for } a_i = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in V_3^n - V_2^n$ とタイプ P3 (C3) の相補最小項 (相補最大項 $\beta = c \vee x_1^{a_1} \vee \dots \vee x_n^{a_n}$) を次のように対応づける.

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) & \text{for } a_i = 1 \\ x_i \cdot \sim x_i & (x_i \vee \sim x_i) & \text{for } a_i = 0.5 \\ \sim x_i & (x_i) & \text{for } a_i = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

□

半順序集合 $\langle V_3^n, \preceq \rangle$ は最大元 $(0.5, 0.5, \dots, 0.5)$ と 2^n 個の V_2^n の元を極小元に持つ上半束であり, V_3^n の任意の二つの元に対して, それらの下限が存在するとは限らない. 以降, $A, B \in \langle V_3^n, \preceq \rangle$ とするとき, これらの下限の集合を $A \Delta B$ で表し, もし下限が存在しない場合は $A \Delta B = \phi$ と記すことにする. また, 特に断らない限り, 積項を $\alpha = c \cdot \alpha^0$, 和項を $\beta = c \vee \beta^0$ (ただし, c は定数, α^0 は文字の積, β^0 は文字の和.) で表す.

[補題 11] $\alpha = c \cdot \alpha^0$ をタイプ P1 の単積項 ($\beta = c \vee \beta^0$ をタイプ C1 の単和項) とし, $A \in V_3^n$ を $\alpha (\beta)$ に対応する元とすると,

- (1) $\forall B \in \{X | X \preceq A\}$ に対して $\alpha(B) = c$ ($\beta(B) = c$).
- (2) $\forall B \in \{X | A \Delta X \neq \phi, X \not\preceq A\}$ に対して $\alpha(B) = 0.5$ ($\beta(B) = 0.5$).
- (3) $\forall B \in \{X | A \Delta X = \phi\}$ に対して $\alpha(B) = 0$ ($\beta(B) = 1$). (証明略)

[補題 12] $\alpha = c \cdot \alpha^0$ をタイプ P2 の最小項 ($\beta = c \vee \beta^0$ をタイプ C2 の最大項) とし, $A \in V_2^n$ を $\alpha (\beta)$ に対応する元とすると,

- (1) $\forall B \in \{X | X \succeq A\}$ に対して $\alpha(B) = c$ ($\beta(B) = c$).
- (2) $\forall B \in \{X | A \Delta X = \phi\}$ に対して $\alpha(B) = 0$ ($\beta(B) = 1$). (証明略)

[補題 13] $\alpha = c \cdot \alpha^0$ をタイプ P3 の相補最小項 ($\beta = c \vee \beta^0$ をタイプ C3 の相補最大項) とし, $A \in V_3^n - V_2^n$ を $\alpha (\beta)$ に対応する元とすると,

- (1) $\forall B \in \{X | X \succeq A\}$ に対して $\alpha(B) = c$ ($\beta(B) = c$).
- (2) $\forall B \in \{X | X \not\preceq A\}$ に対して $\alpha(B) = 0$ ($\beta(B) = 1$). (証明略)

補題 11により, タイプ P1 (タイプ C1) の単積項 (単和項) においては, その積項 (和項) が持つ定数と同じ値をとる V_3^n の部分集合は, その積項 (和項) に定義 43(3.1) 式によって対応づけられる元を最大元として特徴づけられることがわかる. また補題 12により, タイプ P2 (タイプ C2) の最小項 (最大項) においては, その積項 (和項) が持つ定数と同じ値をとる V_3^n の部分集合は, その積項 (和項) に定義 43(3.2) 式によって対応づけられる V_2^n の元 (最小元) により特徴づけられることがわかる. 同様にして, 補題 13により, タイプ P3 (タイプ C3) の相補最小項 (相

補最大項)においては, その積項(和項)が持つ定数と同じ値をとる V_3^n の部分集合は, その積項(和項)に定義 43(3.3) 式によって対応づけられる $V_3^n - V_2^n$ の最小元により特徴づけられることがわかる.

[補題 14] $\alpha_1 = c_1 \cdot \alpha_1^0$, $\alpha_2 = c_2 \cdot \alpha_2^0$ を積項とし, A_1, A_2 を α_1, α_2 対応する V_3^n の元とする. このとき $\alpha_1 \supseteq \alpha_2$ となる条件は以下のとおりである.

- (1) α_1, α_2 ともにタイプ P1 の単積項であるとき, $c_1 \geq c_2$ かつ $A_1 \supseteq A_2$.
- (2) α_1 がタイプ P1 の単積項, α_2 がタイプ P3 の相補最小項であるとき, $A_1 \Delta A_2 \neq \phi$.
- (3) α_1, α_2 ともにタイプ P2 の最小項であるとき, $c_1 \geq c_2$ かつ $A_1 = A_2$.
- (4) α_1 がタイプ P2 の最小項, α_2 がタイプ P3 の相補最小項であるとき, $c_1 \geq c_2$ かつ $A_1 \preceq A_2$.
- (5) α_1, α_2 ともにタイプ P3 の相補最小項であるとき, $c_1 \geq c_2$ かつ $A_1 \preceq A_2$.

(証明) 補題 11, 補題 12 および 補題 13 より $\forall A \in V_3^n$ に対して $\alpha_1(A) \geq \alpha_2(A)$ となる条件による. □

[補題 15] $\beta_1 = c_1 \vee \beta_1^0$, $\beta_2 = c_2 \vee \beta_2^0$ を和項とし, A_1, A_2 を β_1, β_2 に対応する V_3^n の元とする. このとき $\beta_1 \subseteq \beta_2$ となる条件は以下のとおりである.

- (1) β_1, β_2 がともにタイプ C1 の単和項であるとき, $c_1 \leq c_2$ かつ $A_1 \supseteq A_2$.
- (2) β_1 はタイプ C1 の単和項, β_2 がタイプ C2 の最大項のとき, $A_1 \supseteq A_2$.
- (3) β_1 はタイプ C1 の単和項, β_2 がタイプ C3 の相補最大項のとき, $A_1 \Delta A_2 \neq \phi$.
- (4) β_1, β_2 がともにタイプ C2 の最大項であるとき, $c_1 \leq c_2$ かつ $A_1 = A_2$.
- (5) β_1 はタイプ C2 の最大項, β_2 がタイプ C3 の相補最大項のとき, $c_1 \leq c_2$ かつ $A_1 \preceq A_2$.
- (6) β_1, β_2 がともにタイプ C3 の相補最大項であるとき, $c_1 \leq c_2$ かつ $A_1 \preceq A_2$.

(証明) 補題 11, 補題 12 および 補題 13 より $\forall A \in V_3^n$ に対して $\beta_1(A) \leq \beta_2(A)$ となる条件による. □

補題 14, 補題 15 により積項, 和項の包含関係が, 定数の \leq による大小関係と V_3^n の元の \preceq による大小関係に帰着されたことになる.

[補題 16] $f = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_p$ ($f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_q$) を主加法標準形(主乗法標準形)で表された Fuzzy/C 論理関数とする. ただし α_i は積項 (β_j は和項)で, c_i (c_j) を α_i (β_j) が持つ定数とする. このとき A_i (A_j) を α_i (β_j) に対応する V_3^n の元とすると $f(A_i) = \alpha_i(A_i) = c_i$ ($f(A_j) = \beta_j(A_j) = c_j$) である.

(証明) 最初に主加法標準形について考える. α_i がタイプ P1 の単積項であり $f(A_i) = c$, $c > c_i$ と仮定する. 明らかに $c > 0.5$ であり, このときの f の値 c はタイプ P1 の単積項によ

り特徴づけられる値であるから、その積項を α とすると $\alpha(A_i) > \alpha_i(A_i)$ となり、積項 α_i は α により包含されてしまい主加法標準形に現れないことになる。これは f が主加法標準形であることに反する。 $f(A_i) = d$, $d < c_i$ を仮定した場合にも同様に主加法標準形であることに反することが導かれる。またタイプ P2, タイプ P3 および主乘法標準形についても同様に証明することができる。□

【補題 17】 f を Fuzzy/C 論理関数とする。

- (1) $A \in V_3^n$ で $f(A) = 1$ であれば, $\forall B \in \{X | X \preceq A, X \in V_3^n\}$ に対して $f(B) = 1$.
- (2) $A \in V_3^n$ で $f(A) = 0$ であれば, $\forall B \in \{X | X \preceq A, X \in V_3^n\}$ に対して $f(B) = 0$.
- (3) $A \in V_3^n$ で $f(A) = 0.5$ であれば, $\forall B \in \{X | A \preceq X, X \in V_3^n\}$ に対して $f(B) = 0.5$.

(証明) 1, 0, 0.5 はあいまいさの半順序関係において極値なので, 定理 19 より明らかに成立する。□

【補題 18】 f を Fuzzy/C 論理関数とする。

- (1) $A \in V_3^n$ で $f(A) = c (> 0.5)$ であれば, f の主加法標準形に定数 c を持つタイプ P1 の単積項が存在し, 主乘法標準形に定数 c を持つタイプ C2 の最大項またはタイプ C3 の相補最大項が存在する。
- (2) $A \in V_3^n$ で $f(A) = c (\leq 0.5)$ であれば, f の主加法標準形に定数 c を持つタイプ P2 の最小項またはタイプ P3 の相補最小項が存在し, 主乘法標準形に定数 c を持つタイプ C1 の単和項が存在する。

(証明) (1) 最初に前半について証明する。 $f(A) = c$ となるとき, 主加法標準形は積項の和であるから, 少なくとも一つ $\alpha_1(A) = c$ である積項が存在する。 $c > 0.5$ であるから, それはタイプ P1 の単積項である。このとき, α_1 は定数 c を持つことを示せば良い。 $\alpha_1 = c_1 \cdot \alpha_1^0$ とし, $c_1 > c$ を仮定して矛盾することを導き出す。 α_1 に対応する V_3^n の元を A_1 とする。補題 16 より $f(A_1) = c_1$ である。このとき補題 14(1) より $A_2 \preceq A_1$ なるような元 A_2 に対応し, $c_2 < c_1$ なる定数 c_2 を持つタイプ P1 の単積項は α_1 に包含されるので主加法標準形では省略されてしまい現れない。したがって, $A \preceq A_1$ ではない。このとき補題 11(2), (3) より $\alpha_1(A) = 0.5$ または $\alpha_1(A) = 0$ である。これは $\alpha_1(A) = c$ 矛盾する。 $c_1 < c$ ということはありません。よって $c_1 = c$ である。同様にして後半について証明する。主乘法標準形は, 和項の積であるから, 少なくとも一つ $\beta_1(A) = c$ となる和項が存在する。 $c > 0.5$ であるから, それらはタイプ C2 の最大項またはタイプ C3 の相補最大項である。このとき β_1 が定数 c を持つことを示せば良い。 $\beta_1 = c_1 \vee \beta_1^0$ とし, $c_1 < c$ を仮定すると矛盾することを導き出す。 β_1 に対応する V_3^n の元を B_1 とする。補題 16 より $f(B_1) = c_1$ である。補題 15 (4), (5), (6) により, $B_1 \preceq B_2$ なるような B_2 に対応し, $c_1 < c_2$ なる定数 c_2 を持つタイプ C2 の最大項お

よびタイプ C3 の相補最大項は β_1 を包含してしまうので、主乗法標準形では省略されてしまい現れない。したがって、 $B_1 \preceq A$ のとき補題 12 (2) および補題 13 (2) より $\beta_1(A) = 1$ である。これは $\beta_1(A) = c$ に矛盾する。 $c_1 > c$ であることはあり得ない。 よって $c_1 = c$ である。

(2) (1) と同様に証明できる。

□

[補題 19] γ をタイプ P1 またはタイプ P2 の積項とし、 α をタイプ P2 またはタイプ P3 の積項とする。 また $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t$ は α を最小項または相補最小項の和に展開したものとする。 このとき $\alpha \subseteq \gamma$ であるのは、 $\forall i (\alpha_i \subseteq \gamma)$ であるときである。 (証明略)

Fuzzy/C 論理関数 f の基底集合が $R_0(f) = \{c_0, \cdots, c_K, c_{K+1}, 1 - c_K, \cdots, 1 - c_0\}$ (ただし $c_0 = 0, c_{K+1} = 0.5, c_i < c_{i+1}$) であると、 f の主加法標準形を以下のように表す。

$$\begin{aligned} f &= (\alpha_1^{c_0} \vee \cdots \vee \alpha_a^{c_0}) \vee \cdots \vee (\alpha_1^{c_K} \vee \cdots \vee \alpha_b^{c_K}) \\ &\vee (a_1^{c_{K+1}} \vee \cdots \vee a_d^{c_{K+1}}) \vee (\alpha_1^{1-c_K} \vee \cdots \vee \alpha_e^{1-c_K}) \\ &\vee \cdots \vee (a_1^{1-c_0} \vee \cdots \vee \alpha_h^{1-c_0}) \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha_j^{1-c_i} (i = 0, 1, \cdots, K)$ は定数 $1 - c_i$ を持つ単積項を表し、 $\alpha_j^{c_i} (i = 0, 1, \cdots, K + 1)$ は定数 c_i を持つ最小項、または相補最小項を表している。 同様に f の主乗法標準形を以下のように表す。

$$\begin{aligned} f &= (\beta_1^{c_0} \cdots \beta_r^{c_0}) \cdots (\beta_1^{c_K} \cdots \beta_s^{c_K}) \\ &\cdot (\beta_1^{c_{K+1}} \cdots \beta_t^{c_{K+1}}) \cdot (\beta_1^{1-c_K} \cdots \beta_u^{1-c_K}) \\ &\cdot \cdots (\beta_1^{1-c_0} \cdots \beta_v^{1-c_0}) \end{aligned}$$

ここで、 $\beta_j^{c_i} (i = 0, 1, \cdots, K)$ は定数 c_i を持つ単和項を表し、 $\beta_j^{1-c_K}, \beta_j^{1-c_i} (i = 0, 1, \cdots, K)$ はそれぞれ定数 $1 - c_K, 1 - c_i$ を持つ最大項または相補最大項を表している。 また $y \in R_0(f)$ とし、 $f(A) = y$ となる V_3^n の部分集合を $f^{-1}(y)$ とする。 そして定義 43 にしたがって積項 (和項) から V_3^n の元を対応させる関数を T とする。 このとき以下の定理 24 が成立する。

[定理 24]

(1) 1 に対して,

$$f^{-1}(1) = \bigcup_j \{A \in V_3^n | A \preceq T(\alpha_j^{1-c_0})\}$$

(2) 0 に対して,

$$f^{-1}(0) = \bigcup_j \{A \in V_3^n | A \preceq T(\beta_j^{c_0})\}$$

(3) c_i ($i = 1, 2, \dots, K$) に対して,

$$\begin{aligned} f^{-1}(c_i) &= \left(\bigcup_j \{A \in V_3^n | A \succeq T(\alpha_j^{c_i})\} \right) \\ &\cap \left(\bigcup_j \{A \in V_3^n | A \preceq T(\beta_j^{c_i})\} \right) \end{aligned}$$

(4) $1 - c_i$ ($i = 1, 2, \dots, K$) に対して,

$$\begin{aligned} f^{-1}(1 - c_i) &= \left(\bigcup_j \{A \in V_3^n | A \preceq T(\alpha_j^{1-c_i})\} \right) \\ &\cap \left(\bigcup_j \{A \in V_3^n | A \succeq T(\beta_j^{1-c_i})\} \right) \end{aligned}$$

(5) 0.5 に対して,

$$\begin{aligned} f^{-1}(0.5) &= \left(\bigcup_j \{A \in V_3^n | A \succeq T(\alpha_j^{c_{K+1}})\} \right) \\ &\cup \left(\bigcup_j \{A \in V_3^n | A \preceq T(\beta_j^{c_{K+1}})\} \right) \\ &\cup \left(\{A \in V_3^n | \forall B \in \bigcup_{i=0}^K f^{-1}(c_i), B \preceq A\} \cap \right. \\ &\quad \left. \{A \in V_3^n | \forall B \in \bigcup_{i=0}^K f^{-1}(1 - c_i), B \preceq A\} \right) \end{aligned}$$

(証明) (1) 主加法標準形において, 定数 1 を持つのはタイプ P1 の単積項のみである. また主乗法標準形には, 定数 1 を持つ和項は存在しない. 補題 17 (1) により f が 1 となる定義域の部分集合は, その極大元により決定される. また補題 11 によりタイプ P1 の単積項は, その極大元に対応していることにより成立する.

(2) 本定理 (1) と同様に補題 17 (2) により f が 0 となる定義域の部分集合は、その極大元により決定される。また補題 11 によりタイプ C1 の単和項は、その極大元に対応していることにより成立する。

(3) 補題 18 (2) により、定数 c_i を持つタイプ P2 の最小項またはタイプ P3 の相補最小項が f の主加法標準形に存在し、それらは補題 12, 補題 13 により、それらに対応する極小元により特徴づけられている。同様に定数 c_i を持つタイプ C1 の単和項が主乗法標準形に存在し、それらは補題 11 により極大元により特徴づけられる。したがって、得られた極小元の上界で、かつ、得られた極大元の下界が $f^{-1}(c_i)$ となる。

(4) 補題 18 (1) により、定数 $1 - c_i$ を持つタイプ P1 の単積項が主加法標準形に存在し、それらは補題 11 より、それらに対応する極大元により特徴づけられる。同様に定数 $1 - c_i$ を持つタイプ C2 の最大項またはタイプ C3 の相補最大項が主乗法標準形に存在し、それらは補題 12, 補題 13 により、対応する極小元により特徴づけられる。したがって、得られた極小元の上界で、かつ、得られた極大元の下界が $f^{-1}(1 - c_i)$ となる。

(5) 右辺第一の集合と第二の集合については、補題 17 (3) より f が 0.5 となる定義域の部分集合は、その極小元により決定される。主加法標準形において定数 0.5 を持つのはタイプ P2 の最小項またはタイプ P3 の相補最小項のみである。同様に主乗法標準形において定数 0.5 を持つのはタイプ C2 の最大項またはタイプ C3 の相補最大項のみである。これらの積項、和項は補題 12, 補題 13 により極小元で特徴づけられる。右辺第三の集合については、補題 19 より、タイプ P2 またはタイプ P3 の定数 0.5 を持つ最小項で他のタイプ P1 またはタイプ P2 の積項に包含されるものは省略されるが、補題 11 (2), 補題 12 (1) より包含するタイプ P1 またはタイプ P2 の積項は $f^{-1}(0.5)$ において 0.5 となることによる。以上により成立する。 \square

定理 24 で述べていることは図 3.2 のようになる。 $\langle V_3^n, \leq \rangle$ において $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$ は極大元とその下界によりその領域が定まり、 $f^{-1}(0.5)$ 極小元とその上界により領域が定まる。また $f^{-1}(1 - c_i)$ および $f^{-1}(c_j)$ は、それぞれ極大元と極小元ではさまれた領域となる。

[例 17] 2 変数の Fuzzy/C 論理関数 f が以下のように表現されているとする：主加法標準形 $f = x_1 \vee 0.3 \cdot \sim x_1 \cdot x_2$, 主乗法標準形 $f = (x_1 \vee x_2) \cdot (0.3 \vee x_1)$ 。このとき、 $f^{-1}(1)$ は積項 x_1 から極大元を求めることにより $f^{-1}(1) = \{(1, 0.5), (1, 0), (1, 1)\}$ となり、 $f^{-1}(0)$ は和項 $x_1 \vee x_2$ から極大元を求めることにより $f^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$ となる。 $f^{-1}(0.3)$ に関しては、極大元は和項 $0.3 \vee x_1$ から、また極小元は積項 $0.3 \cdot \sim x_1 \cdot x_2$ から求められ $f^{-1}(0.3) = \{(0, 0.5), (0, 1)\}$ となる。 $f^{-1}(0.5)$ については、主加法標準形にも主乗法標準形にも定数 0.5 を持つ積項、和項はない。したがって、定理 24 (5) の右辺の第三番目の集合を求めることにより $f^{-1}(0.5) = \{(0.5, 0.5), (0.5, 0), (0.5, 1)\}$ となる。(図 3.3) \square

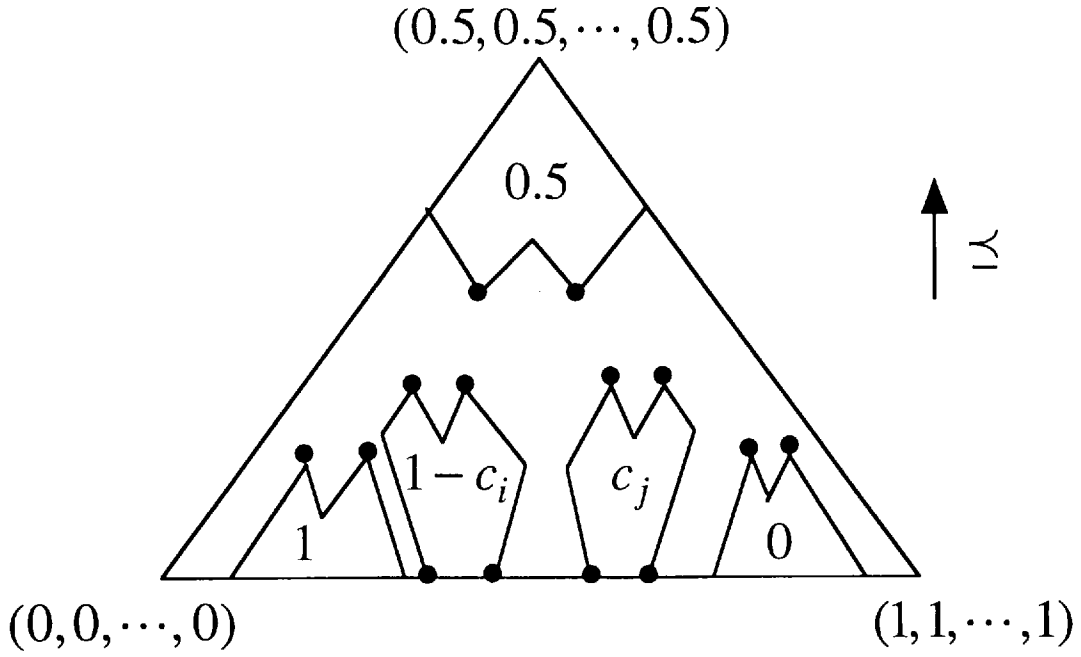


図 3.2: 関数値による定義域の分割

[例 18] 2 変数の Fuzzy/C 論理関数 f が以下のように表現されているとする：主加法標準形 $f = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.7 \cdot \sim x_1 \vee 0.5 \cdot x_1 \cdot \sim x_2$ ，主乗法標準形 $f = (\sim x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.7 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.5 \vee \sim x_1 \vee x_2)$ 。このとき， $f^{-1}(1) = \{(0, 0)\}$ ， $f^{-1}(0) = \{(1, 1)\}$ ， $f^{-1}(0.7) = \{(0, 0.5), (0, 1)\}$ ， $f^{-1}(0.5) = \{(0.5, 0.5), (0.5, 0), (0.5, 1), (1, 0.5), (1, 0)\}$ となる。（図 3.4） □

定理 24 は，主加法標準形，主乗法標準形から出発して $f^{-1}(1)$ ， $f^{-1}(0)$ ， $f^{-1}(0.5)$ ， $f^{-1}(c_i)$ および $f^{-1}(1 - c_i)$ を導出しているが，逆に $f^{-1}(1)$ ， $f^{-1}(0)$ の上限， $f^{-1}(0.5)$ の下限， $f^{-1}(c_i)$ ， $f^{-1}(1 - c_i)$ の上限および下限が与えられれば，そこから主加法標準形，主乗法標準形の両方を導くことができることも示している。また，定理 24 から，2 章 2.5 節の定理 17（表現定理）を導くことも容易である。

定理 24 により V_3^n の入力に対する f の値により， V_3^n が複数の部分集合に分割され，その部分集合は f の主加法標準形および主乗法標準形に現れる積項，和項により決定できることが示された。ここで得られた部分集合は明らかに V_3^n を直和分割しており， $f^{-1}(1) \cup f^{-1}(0) \cup f^{-1}(0.5) \cup \left(\bigcup_i f^{-1}(c_i)\right) \cup \left(\bigcup_i f^{-1}(1 - c_i)\right) = V_3^n$ である。このことから，次の定理 25 が導かれる。

[定理 25] 変数の数が有限個（ n 個）である Fuzzy/C 論理関数において，論理式に現れる定数は 3^n 個を越えない有限個である。即ち， $R_0(f)$ は有限個の元からなる集合である。

（証明）定数 c_i は実閉区間 $[0, 0.5)$ の任意の値であるから，無限個の値を取り得る。したがって，集合 $f^{-1}(c_i)$ および $f^{-1}(1 - c_i)$ は無限に存在する。しかしながら，それらの和集合 $f^{-1}(1) \cup f^{-1}(0) \cup f^{-1}(0.5) \cup \left(\bigcup_i f^{-1}(c_i)\right) \cup \left(\bigcup_i f^{-1}(1 - c_i)\right)$ が有限個（ 3^n 個）の元からなる。

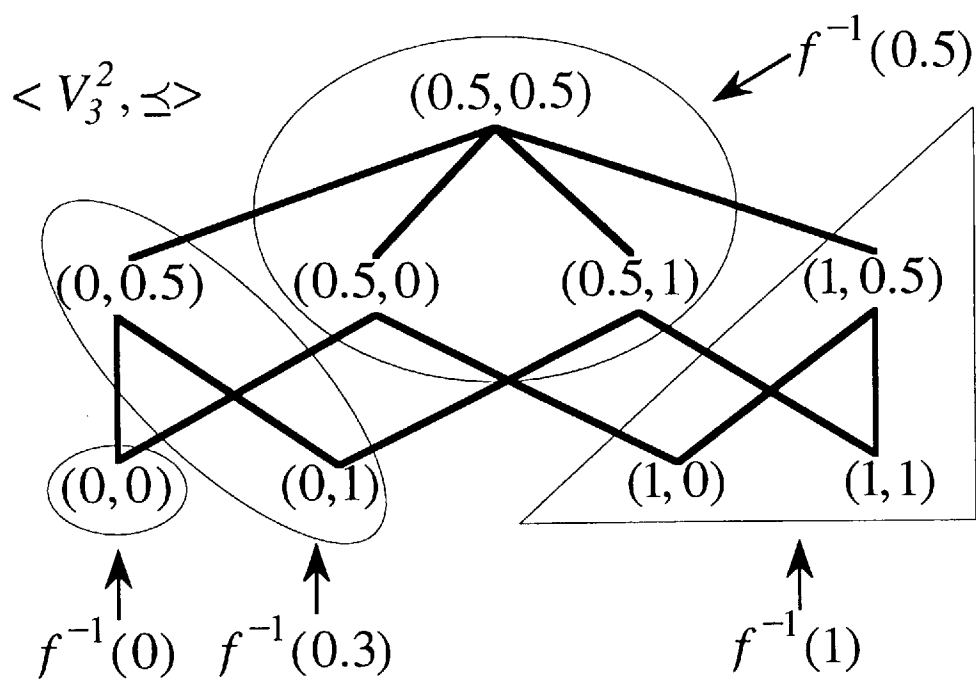


图 3.3: 例 17

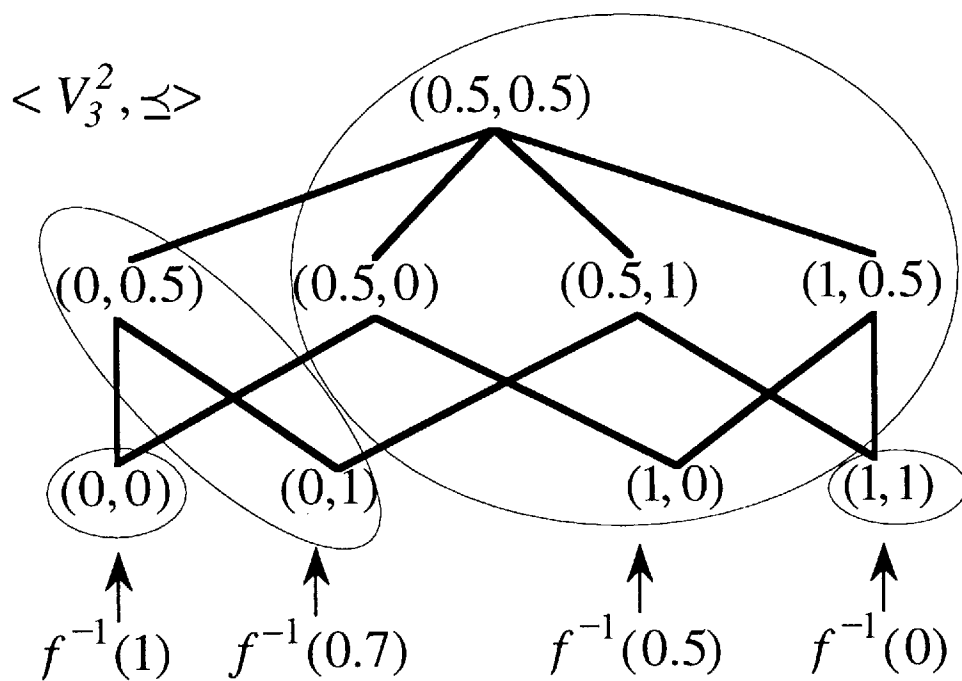


图 3.4: 例 18

る V_3^n に一致する．このことから， $f^{-1}(c_i)$ および $f^{-1}(1 - c_i)$ は無限に存在するが，空集合でないものは有限個である． \square

以上の議論は f の取り得る値が，定義域すべてに対して与えられた場合（完全指定）に相当し，そのときの f を完全指定 Fuzzy/C 論理関数という．これに対して， $f^{-1}(1) \cup f^{-1}(0) \cup f^{-1}(0.5) \cup \left(\bigcup_i f^{-1}(c_i) \right) \cup \left(\bigcup_i f^{-1}(1 - c_i) \right) = A$ かつ $A \subset V_3^n$ である場合は， f の取り得る値が，定義域の部分集合に対して与えられた場合（不完全指定）に相当し，そのときの f を不完全指定 Fuzzy/C 論理関数という．明らかに $|A| < |V_3^n|$ であることから，不完全指定 Fuzzy/C 論理関数においても，定理 25 は成立する．

定理 25 は Fuzzy/C 論理関数の表現能力の明らかな上界を与える．Fuzzy/C 論理関数は $f : V^n \rightarrow V$ なる写像であり， $R_0(f)$ は $V = [0, 1]$ の部分集合であることから，その数は無限個である．しかしながら， $R_0(f)$ が定まってしまえば，その表現能力は有限となる．なぜならば定理 21 から，基底集合が $R_0(f)$ である Fuzzy/C 論理関数は，表現能力が有限である $|R_0(f)|$ 値の多値クリーネ論理関数と代数的観点から見ると等しいからである．したがって $|R_0(f)| \leq 3^n$ であることから， 3^n 値の多値クリーネ論理関数の数が， $R_0(f)$ の定まった n 変数 Fuzzy/C 論理関数の数の上界となるのは明らかである．多値クリーネ論理関数の数についての考察は文献 [25] でなされている．そこでは， n 変数 p 値の多値クリーネ論理関数について $p \rightarrow \infty$ にした場合の考察がなされている．しかしながら，多値クリーネ論理関数についても，本章の定理 25 は，同様に成立することは明らかである．したがって $p > 3^n$ の場合には，論理式を構成する際，必ずしも必要でない真理値および定数が存在する．論理式を構成する，即ち，関数を構成するのに十分な真理値および定数の数は 3^n であるから，その選び方は $\binom{\lceil p/2 \rceil}{\lceil 3^n/2 \rceil}$ 通り存在する（ただし $\lceil x \rceil$ は x を越えない最大の整数を表す）．これらの事実から Fuzzy/C 論理関数および多値クリーネ論理関数の表現能力の考察が可能であるが，その具体的な数については割愛する．

3.5 むすび

本章では，定数係数をもったファジィ論理関数について，代数的性質，標準形，表現能力について考察を行った．

表現能力に関して，少し補足説明をする．完全指定された Fuzzy/C 論理関数については，以下の定理が成立することが，文献 [52] において著者らにより証明されている．

【定理 26】 完全指定された Fuzzy/C 論理関数 f は以下のような論理式で一意に表現可能である．

$$f = F_{P1} \vee 0.5 \cdot F_{C1} \quad \text{または} \quad f = F_{C1} \cdot (F_{P1} \vee 0.5)$$

ただし， F_{P1} は， f の主加法標準形に現れるすべての単積項の論理和であり， F_{C1} は f の主乗法標準形に現れるすべての単和項の論理積である．（証明略）

基底集合が任意に与えられる場合の Fuzzy/C 論理関数の数は、前述したように無限であるが、 n 変数 Fuzzy/C 論理関数の基底集合 $R_0(f)$ の要素が確定されている際、定理 26 を基にした数の限界式が、巽らにより以下のように得られている [20].

上界: 2^α ただし $\alpha = 3^{2^n} \cdot \left\{ \left(\frac{2}{9} \right) \log_2 3 + \frac{3}{4\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{c}{n} \right) \log_2 \frac{n}{\sqrt{3}} \right\}$ であり c は定数.

下界: 2^β ただし $\beta = 3^n \left\{ \frac{3}{2\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{c}{n} \right) \log_2 (p+1) \right\}$ であり c は定数, $p \leq (3^n - 1)/2$

論理関数の数え上げ問題は、計算量的に極めて困難な問題であることが知られており、上述の二つの限界式は、Fuzzy/C 論理関数の能力を判定する上で、現在のところ、もっとも良い数の限界を与えている.

今後の課題として、基底集合 $R_0(f)$ の決定問題がある. 完全指定 Fuzzy/C 論理関数では、 $R_0(f)$ の決定は、ある程度可能であるが、不完全指定 Fuzzy/C 論理関数では決定が困難である. しかしながら、不完全な知識を論理式で表現する場合等には避けられない問題である. 定理 25 により $|R_0(f)|$ は 3^n を越えない有限濃度であることが保証されるので、与えられた問題に対して適切な $R_0(f)$ を求める手法が望まれる.

4 章

ファジィ論理における Nelson の定理

4.1 まえがき

2 値論理関数の多値論理への拡張として、B-3 値論理関数、正則 3 値論理関数、多値クリーネ論理関数、ファジィ論理関数、定数係数を持ったファジィ論理関数等が研究されてきている。これらはファジィ論理の公理系のモデルをなす関数であり、あいまいさを扱える論理関数として注目されており、文献 [9, 10, 15, 50, 45] 等で報告されている。また、これらの研究については、2 章、3 章で述べてきた。

これらの論理関数の研究の中で主項展開を求める問題、簡単化の問題は最も古くから興味を持たれた重要な問題の一つである。また、これらの論理関数の代数的構造を明らかにするためにも主項展開、最簡形式は重要な役割を果たしてきている。

一般に論理関数 f の最簡形式を求める手順は以下の二つのステップを通して行われる。

- (1) f のすべての主項の集合を求める。
- (2) f を被覆する最少数の主項の組み合わせを見いだす。

本章では、第一に (1) の f のすべての主項を見いだすための基本的な定理について述べる。本章では、ファジィ論理の公理系のモデルとなる一般的な論理関数として、3 章で考察した定数係数を持ったファジィ論理関数 (Fuzzy/C 論理関数) [55, 57, 50, 45] を取り上げ、2 値論理における Nelson の定理 [33] が、ある条件のもとでファジィ論理でも成立すること — ファジィ論理における Nelson の定理 — を証明する。

ファジィ論理における Nelson の定理では乗法標準形を加法標準形に展開する必要があるが、一般に多くの手数を要する。そこで第二に、この展開を効率良く行うためのアルゴリズム — 定数付きファジィ節展開法 — を提案する。

第三に、(2) の最簡形を求めるため基本的な手法として、(1) の主項の生成の段階で不必要項となる主項を見いだす基本的な定理とアルゴリズムについて示す。

最後に、Nelson の定理に似た方法が文献 [36, 38, 41] においてファジィ論理関数に関して研究されている。ファジィ論理における Nelson の定理は、文献 [36, 38, 41] における手法に比べ、最も簡略で基本的なものであり、それらの手法は本定理の系として導き出されることを示す。

4.2 コンセンサス，主項展開，P－乗法標準形

本節では、主乗法標準形を構成する各和項の表現する関数の主項展開を求めて、主乗法標準形から P－乗法標準形を求める手法について議論する。

[定義 44] n 変数の Fuzzy/C 論理関数 f において積項 $\alpha (= d \cdot \alpha^0)$ (ただし d は定数, α^0 は文字の積) が内項であるとは, $\forall A \in V^n = [0, 1]^n$ に対して $\alpha(A) \leq f(A)$ なることをいう。また α が主項であるとは, α^0 から文字を取り除くか, 定数 d を $d < \bar{d}$ なる定数 \bar{d} に置き換えるともはや f の内項でなくなるときをいう。□

[定義 45] Fuzzy/C 論理関数 f のすべての主項の和を主項展開という。□

定義 45 から明らかなように、任意の与えられた Fuzzy/C 論理関数に対して主項展開は一意に定まる。

[例 19] 二つの変数 x_1, x_2 上の Fuzzy/C 論理関数 $f = x_1 \vee \sim x_1$ に関して, $x_i \cdot \sim x_i \leq 0.5 \leq x_j \vee \sim x_j$ が任意の i, j について成立することから明らかに $x_1 \cdot \sim x_1, x_2 \cdot \sim x_2, x_1, \sim x_1, 0.5 \cdot x_1, 0.5 \cdot \sim x_1, 0.5 \cdot x_2, 0.5 \cdot \sim x_2, 0.5$ などは f の内項である。これらの中で f の主項となるのは $x_1, \sim x_1, 0.5$ だけであり, f の主項展開は $f = 0.5 \vee x_1 \vee \sim x_1$ である。□

[定義 46] Fuzzy/C 論理関数におけるコンセンサスなる概念を定義する。積項 α_1 と α_2 から生成されるコンセンサスの集合を $C(\alpha_1, \alpha_2)$ と記すことにする。コンセンサスとは、以下のように定義されるタイプ P2 またはタイプ P3 の積項の集合である。ある変数 x_i に関して, $\alpha_1 = x_i \cdot \alpha'_1$ ($\alpha'_1 \not\subset \sim x_i$), $\alpha_2 = \sim x_i \cdot \alpha'_2$ ($\alpha'_2 \not\subset x_i$) または $\alpha_1 = \sim x_i \cdot \alpha'_1$ ($\alpha'_1 \not\subset x_i$), $\alpha_2 = x_i \cdot \alpha'_2$ ($\alpha'_2 \not\subset \sim x_i$) のとき,

- (1) $\alpha'_1 \cdot \alpha'_2$ がタイプ P2 またはタイプ P3 の積項のとき $\alpha'_1 \cdot \alpha'_2 \in C(\alpha_1, \alpha_2)$.
- (2) $\alpha'_1 \cdot \alpha'_2$ がタイプ P1 の積項のとき $0.5 \cdot \alpha'_1 \cdot \alpha'_2 \in C(\alpha_1, \alpha_2)$.
- (3) $C(\alpha_1, \alpha_2)$ は以上で定義されるもののみである。□

[例 20] α_1, α_2 を 2 変数の積項とする。

- (1) $\alpha_1 = x_1 \cdot \sim x_2, \alpha_2 = \sim x_1 \cdot x_2$ のとき, $C(\alpha_1, \alpha_2) = \{x_1 \cdot \sim x_1, x_2 \cdot \sim x_2\}$.
- (2) $\alpha_1 = 0.8 \cdot x_1 \cdot x_2, \alpha_2 = x_1 \cdot \sim x_2$ のとき, $C(\alpha_1, \alpha_2) = \{0.5 \cdot x_1\}$.
- (3) $\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = \sim x_1$ のとき, $C(\alpha_1, \alpha_2) = \{0.5\}$ □

[定理 27] Fuzzy/C 論理関数 $f = \alpha_1 \vee \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_m$ が f の主項展開であるとき、およびそのときに限り、(1) 他の積項に包含されるような積項は存在しない、(2) 任意の二つの積項のコンセンサスは存在しないか、他の積項に α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) に包含される。

(証明) 本定理は、ファジィ論理関数に関して証明されている文献 [9] の定理 4 に対応し、タイプ P1、タイプ P2 およびタイプ P3 の積項に対して同様の手法により証明できる。□

定理 27 に基づき、コンセンサスの概念を用いて、任意の加法標準形で表現された Fuzzy/C 論理関数の主項展開を求めるためのアルゴリズムが得られる。

[アルゴリズム 3]

(Step1) f を加法標準形に展開する。

(Step2) 他の積項に包含される積項を省略する。

(Step3) 任意の二つの積項を選び出し、コンセンサスを求める。もし、コンセンサスが存在しないか、または、得られたコンセンサスに含まれる積項すべてが、 f の他の積項に包含される場合は Step4 へ。それ以外の場合は、 f に得られたコンセンサスに含まれる全ての積項を加えて Step2 へ。

(Step4) 得られた式は f の主項展開である。

(アルゴリズム終)

[例 21] 2 変数の Fuzzy/C 論理関数 $f = x_1 \cdot \sim x_2 \vee \sim x_1 \cdot x_2$ の主項展開を求める。例 20 (1) より $C(x_1 \cdot \sim x_2, \sim x_1 \cdot x_2) = \{x_1 \cdot \sim x_1, x_2 \cdot \sim x_2\}$ であることから、主項展開は $f = x_1 \cdot \sim x_2 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \vee x_2 \cdot \sim x_2$ となる。□

[例 22] 1 変数の Fuzzy/C 論理関数 $f = x_1 \vee \sim x_1$ の主項展開を求める。 f に現れる積項は x_1 および $\sim x_1$ のみであり、 $C(x_1, \sim x_1) = \{0.5\}$ である。0.5 は x_1 、 $\sim x_1$ に包含されることはない。よって求める主項展開は $f = 0.5 \vee x_1 \vee \sim x_1$ である。□

Fuzzy/C 論理関数 f において、主乗法標準形を構成している各和項は、それ自体を一つの Fuzzy/C 論理関数と見なすと、一つの定数と、一文字からなる複数の積項の和として表現されていると見なすことができる。

[定義 47] 主乗法標準形で表現されている Fuzzy/C 論理関数 $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_l$ (ただし β_i はタイプ C1 の定数付き単和項、タイプ C2 の定数付き最大項またはタイプ C3 の定数付き相補最大項) の各 β_i を一つの Fuzzy/C 論理関数と見なし、アルゴリズム 3 により主項展開を求めたものを β'_i とする。このとき $f = \beta'_1 \cdot \beta'_2 \cdots \beta'_l$ を Fuzzy/C 論理関数の新しい標準形 — P-乗法標準形 — として定義する。P-乗法標準形に含まれる和項を P-和項と呼ぶ。[†] □

[†] P-は prime を意味する。

主乗法標準形が、定理 23により一意に表現できる Fuzzy/C 論理関数の標準形であることから、P-乗法標準形も、与えられた Fuzzy/C 論理関数に対して一意に定まる標準形である。

[例 23] 2 変数の場合,

- (1) $0.8 \cdot x_1 \cdot \sim x_2$ はタイプ P1 の定数付き単積項である。
(2) $0.3 \cdot \sim x_1$ は、タイプ P2 の定数付き単積項であり、 $0.3 < 0.5 \leq x_i \vee \sim x_i$ が成立することから二つの定数付き最小項の和に展開できる。

$$\begin{aligned} 0.3 \cdot \sim x_1 &= 0.3 \cdot \sim x_1 \cdot (x_2 \vee \sim x_2) \\ &= 0.3 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \vee 0.3 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \end{aligned}$$

- (3) $x_2 \cdot \sim x_2$ はタイプ P3 の定数付き相補項であり、 $x_i \cdot \sim x_i \leq 0.5 \leq x_j \vee \sim x_j$ が成立することから、二つの定数付き相補最小項の和に展開できる。

$$\begin{aligned} x_2 \cdot \sim x_2 &= (x_1 \vee \sim x_1) \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \end{aligned}$$

- (4) $0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2$ はタイプ C1 の定数付き単和項である。
(5) $0.7 \vee \sim x_1$ はタイプ C2 の定数付き単和項であり、 $x_i \cdot \sim x_i \leq 0.5 < 0.7$ が成立することから、二つの定数付き最大項の積に展開できる。

$$\begin{aligned} 0.7 \vee \sim x_1 &= 0.7 \vee \sim x_1 \vee (x_2 \cdot \sim x_2) \\ &= (0.7 \vee \sim x_1 \vee x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee \sim x_2) \end{aligned}$$

- (6) $x_2 \vee \sim x_2$ はタイプ C3 の定数付き相補和項であり、 $x_i \cdot \sim x_i \leq 0.5 \leq x_j \vee \sim x_j$ が成立することから二つの定数付き相補最大項の積に展開できる。

$$\begin{aligned} x_2 \vee \sim x_2 &= (x_1 \cdot \sim x_1) \vee x_2 \vee \sim x_2 \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2) \end{aligned}$$

□

[例 24] 2 変数の Fuzzy/C 論理関数 $f = 0.8 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.3 \cdot \sim x_1 \vee x_2 \cdot \sim x_2$ は加法標準形であり、例 23 (2) (3) により、この関数の主加法標準形は、 $f = 0.8 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.3 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \vee 0.3 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$ となる。同様に 2 変数の Fuzzy/C 論理関数 $g = (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1) \cdot (x_2 \vee \sim x_2)$ は乗法標準形であり、例 23 (5) (6) により、この関数の主乗法標準形は $g = (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee \sim x_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2)$ となる。

□

[例 25] 例 24 の $g = (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee \sim x_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2) \cdot (\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2)$ は 2 変数の主乗法標準形で表現された Fuzzy/C 論理関数である．この関数の P-乗法標準形は $g = (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.5 \vee x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2) \cdot (0.5 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2)$ である． \square

例 25 から明らかなように，主乗法標準形に現れるタイプ C1，タイプ C2 の和項は，それ自体既に主項展開になっている．またタイプ C3 の和項に関しては，主乗法標準形に現れたタイプ C3 の和項に定数 0.5 を加えたものとなっている．これらのことから P-乗法標準形を求める以下のアルゴリズムが得られる．

[アルゴリズム 4]

(Step1) f の主乗法標準形を求める．

(Step2) 主乗法標準形に現れるすべてのタイプ C3 の定数付き最大項和項に 0.5 を加える．

(Step3) 得られた式は f の P-乗法標準形である．

(アルゴリズム終)

4.3 ファジィ論理における Nelson の定理

本節では，2 値論理における Nelson の定理をファジィ論理，特に Fuzzy/C 論理関数に適用できるように拡張する．

[補題 20] 主項展開で表現されている二つの Fuzzy/C 論理関数 $f_1 = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$ ， $f_2 = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$ (ただし α_i ， β_j はそれぞれ f_1 ， f_2 の主項) とし， $f_0 = f_1 \cdot f_2 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m) \cdot (\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n)$ を加法標準形に展開して $f_0 = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ ($\gamma_i \not\subseteq \gamma_j$ ， $i \neq j$) を得たとする．このとき， $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f_0 の主項展開である．
(証明) f_0 の主項 ζ が $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ に含まれないと仮定する．このとき，以下の条件が成立していなければならない．

(Cond L20.1) $\zeta \neq \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$)

(Cond L20.2) $\zeta \leq f_0$ かつ $\zeta < \phi \leq f_0$ となるような積項 ϕ は存在しない．

一方， $\zeta \leq f_0 = f_1 \cdot f_2$ であることから， $\zeta \leq f_1$ かつ $\zeta \leq f_2$ である． $f_1 = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$ は f_1 の主項展開であることから，ある i が存在して $\zeta \leq \alpha_i$ ．同様に $f_2 = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$ は主項展開であるから，ある j が存在して $\zeta \leq \beta_j$ ．したがって， $\zeta \leq \alpha_i \cdot \beta_j$ である．

(Cond L20.3) $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は $f_1 \cdot f_2$ を展開することによって得られた加法標準形である．

このことから、ある k が存在して、以下の二つの条件の一方が成立する。

$$(\text{Cond L20.4}) \quad \zeta \leq \alpha_i \cdot \beta_j = \gamma_k$$

$$(\text{Cond L20.5}) \quad \zeta \leq \alpha_i \cdot \beta_j < \gamma_k$$

しかしながら $\gamma_k \leq f_0$ であることから (Cond L1.5) の場合、(Cond L20.2) に矛盾する。即ち、 ζ が主項であることに矛盾する。したがって、(Cond L20.3) と (Cond L20.4) から $\zeta = \gamma_k$ である。しかしながら、これは (Cond L20.1) に矛盾する。以上により、 f_0 のすべての主項は $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ に含まれる。

逆に、 $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ に f_0 の主項でない積項が含まれていると仮定する。 $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ には、 f_0 のすべての主項が含まれているので、 $\xi \leq \gamma_i$ となるような、ある i が存在する。また ξ は主項ではないから $\xi < \gamma_i$ である。したがって ξ は必ず γ_i に包含され省略されてしまい、加法標準形 $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ に含まれることはない。したがって $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ に f_0 の主項でない積項は含まれない。 \square

[定理 28] (ファジィ論理における Nelson の定理)

$f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ を P-乗法標準形で表現された Fuzzy/C 論理関数とする (ただし β_i は f の P-和項である)。 f を加法標準形に展開して $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ ($\gamma_i \not\subseteq \gamma_j, i \neq j$) を得たとする。このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f の主項展開である。

(証明) $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ に含まれる各和項 β_i を一つの Fuzzy/C 論理関数と見なすと、それは主項展開になっている。補題 20 より $\beta_1 \cdot \beta_2$ を加法標準形に展開したものは主項展開である。その結果と β_3 の積を加法標準形に展開したのも主項展開である。これを順次 β_t まで繰り返すことにより得られた $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f の主項展開である。 \square

[例 26] 例 25 の関数 g の主項展開は、 $g = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.7 \cdot \sim x_2 \vee 0.7 \cdot x_1 \cdot x_2 \vee 0.5 \cdot x_1 \vee 0.2$ である。 \square

定理 28 により、Nelson の定理の本質的な部分の証明が与えられた。しかしながら Fuzzy/C 論理関数 f の P-乗法標準形は、 f の乗法標準形の中で最も和項数が多く加法標準形に展開する際、多くの手順を要する。これをできる限り回避するため、以下ではより和項数が少ない乗法標準形から、定理 28 と同様な f の主項展開を求めるための手法について考察する。

[補題 21] f, g を Fuzzy/C 論理関数とし、 $g = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t$ を g の主項展開とする (ただし α_i は g の主項)。また β をタイプ C2 の和項とする。 $f = g \cdot \beta$ なる関係があるとき、 f を加法標準形に展開して $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ を得たとする。このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f の主項展開である。

(証明) β がタイプ C2 の定数付き最大項である場合は補題 20 により、本補題は成立する。 β が定数付き最大項でない場合を考える。問題を小さくするために、 β は一つの変数 x_k のみ

を含まないとして証明する． β はタイプ C2 の和項であることから $\beta = p \vee \beta^0$ と表せる（ただし， p は $p > 0.5$ なる定数であり， β^0 は互いに相補的でない文字の和である）．このとき， $\beta = \beta \vee x_k \cdot \sim x_k = (p \vee \beta^0 \vee x_k) \cdot (p \vee \beta^0 \vee \sim x_k)$ のように β は定数付き最大項の積に展開できる．このとき，

$$\dot{f} = g \cdot (p \vee \beta^0 \vee x_k) \cdot (p \vee \beta^0 \vee \sim x_k) \quad (4.1)$$

を加法標準形に展開したものは，補題 20より f の主項展開となる．ファジィ論理では結合律が成立することから展開の順序には依存しない．よって (4.1) 式の後ろの二つの和項から展開する． $(p \vee \beta^0 \vee x_k) \cdot (p \vee \beta^0 \vee \sim x_k) = p \vee \beta^0 \vee x_k \cdot \sim x_k$ なので

$$\begin{aligned} \dot{f} &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot (p \vee \beta^0 \vee x_k \cdot \sim x_k) \\ &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot p \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta^0 \\ &\quad \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2) 式において $f_1 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot p$ ， $f_2 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta^0$ ， $f_3 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k$ とする． f_1 を加法標準形に展開すると $f_1 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot p = \bigvee_{i=1}^t (p \cdot \alpha_i)$ となり， $f_3 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k = \bigvee_{i=1}^t (\alpha_i \cdot x_k \cdot \sim x_k)$ となる．ここで， $p > 0.5 \geq x_k \cdot \sim x_k$ なる関係があることから，すべての i に対して $p \cdot \alpha_i > \alpha_i \cdot x_k \cdot \sim x_k$ が成立する．したがって f の主項展開を求めるための式 \dot{f} を加法標準形に展開したとき， f_3 を展開したときに得られる積項は，すべて f_1 の積項に包含され，すべて省略される．したがって，

$$\begin{aligned} \dot{f} &= f_1 \vee f_2 \\ &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot p \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta^0 \\ &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot (p \vee \beta^0) = g \cdot \beta = f \end{aligned} \quad (4.3)$$

となり， f を加法標準形に展開したものは f の主項展開となる． β に x_k 以外の変数が含まれない場合も同様に証明できる．□

[補題 22] f, g を Fuzzy/C 論理関数とし， $g = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t$ を g の主項展開とする（ただし α_i は g の主項）．また β をタイプ C3 の和項とする． $f = g \cdot \beta$ なる関係があるとき， $g \cdot (0.5 \vee \beta)$ を加法標準形に展開して $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ を得たとする．このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f の主項展開である．

(証明) β がタイプ C3 の定数付き相補最大項である場合， $0.5 \vee \beta$ は P-和項となり，補題 20により，本補題は成立する． β が定数付き相補最大項でない場合を考える．問題を小さくするために， β は一つの変数 x_k のみを含まないとして証明する． β はタイプ C3 の和項であることから $\beta = (0.5 \vee \beta \vee x_k) \cdot (0.5 \vee \beta \vee \sim x_k)$ と P-和項の積に展開できる．このとき，

$$\dot{f} = g \cdot (0.5 \vee \beta \vee x_k) \cdot (0.5 \vee \beta \vee \sim x_k) \quad (4.4)$$

を加法標準形に展開したものは、補題 20 より f の主項展開となる。(4.4) 式の後ろの二つの和項を展開すると $(0.5 \vee \beta \vee x_k) \cdot (0.5 \vee \beta \vee x_k) = 0.5 \vee \beta \vee x_k \cdot \sim x_k$ なので

$$\begin{aligned}\dot{f} &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot (0.5 \vee \beta \vee x_k \cdot \sim x_k) \\ &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot 0.5 \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta \\ &\quad \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k\end{aligned}\tag{4.5}$$

(4.5) 式において $f_1 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot 0.5$, $f_2 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta$, $f_3 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k$ とする. f_1, f_3 を加法標準形に展開すると $f_1 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot 0.5 = \bigvee_{i=1}^t (0.5 \cdot \alpha_i)$, $f_3 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot x_k \cdot \sim x_k = \bigvee_{i=1}^t (\alpha_i \cdot x_k \cdot \sim x_k)$ となる. ここで, $0.5 \geq x_k \cdot \sim x_k$ なる関係があることから, すべての i に対して $0.5 \cdot \alpha_i \geq \alpha_i \cdot x_k \cdot \sim x_k$ が成立する. したがって f の主項展開を求めるための式 \dot{f} を加法標準形に展開したとき, f_3 を展開したときに得られる積項は, すべて f_1 の積項に包含され, 省略される. したがって,

$$\begin{aligned}\dot{f} &= f_1 \vee f_2 \\ &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot 0.5 \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta \\ &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot (0.5 \vee \beta) = g \cdot \beta = f\end{aligned}\tag{4.6}$$

となり, f を加法標準形に展開したものは, f の主項展開となる. β に x_k 以外の変数が含まれない場合も同様に証明できる. \square

[定理 29] Fuzzy/C 論理関数 f の任意の乗法標準形 $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ (ただし β_i は和項) が与えられたとき, もし, β_i がタイプ C1 またはタイプ C2 のときは $\beta_i^+ = \beta_i$, β_i がタイプ C3 であるときは $\beta_i^+ = 0.5 \vee \beta_i$ とおく. このとき $\beta_1^+ \cdot \beta_2^+ \cdots \beta_t^+$ を加法標準形に展開したものは f の主項展開である.

(証明) タイプ C1 の和項は, f の P-和項であり, それ自体主項展開である. タイプ C2 の和項に関しては, 補題 21 により主項展開を求める際には定数付き最大項の積に展開する必要はない. 同様にタイプ C3 の和項に関しても定数付き相補最大項の積に展開する必要はないが, 補題 22 より定数 0.5 を加える必要がある. 以上のことから定理 28 と同様に $\beta_1^+ \cdot \beta_2^+ \cdots \beta_t^+$ を加法標準形に展開したものは f の主項展開である. \square

[例 27] 例 24 の乗法標準形で表現された 2 変数の Fuzzy/C 論理関数 $g = (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1) \cdot (x_2 \vee \sim x_2)$ に定理 29 を適用する. この関数においてタイプ C2 の和項は $0.7 \vee \sim x_1$, タイプ C3 の和項は $x_2 \vee \sim x_2$ である. したがって主項展開を求めるためには和項数 3 である $g = (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.7 \vee \sim x_1) \cdot (0.5 \vee x_2 \vee \sim x_2)$ を加法標準形に展開すれば良い. 加法標準形に展開した結果は $g = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.7 \cdot \sim x_2 \vee 0.7 \cdot x_1 \cdot x_2 \vee 0.5 \cdot x_1 \vee 0.2$ となり, 例 26 の和項数 5 の関数を展開した結果と一致する. \square

以上の議論から、より少ない和項数の乗法標準形から主項展開を求めるためのアルゴリズムが得られる。

[アルゴリズム 5]

(Step1) 与えられた Fuzzy/C 論理関数 f を乗法標準形 $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ で表現する。

(Step2) β_ℓ と β_m がタイプ C2 の同じ定数を持つ和項であり、 $\beta_\ell = x_i \vee \beta_\ell^0$, $\beta_m = \sim x_i \vee \beta_m^0$ (ただし β_ℓ^0, β_m^0 は文字と定数の和であり、 β_ℓ^0, β_m^0 は同じ定数を持つ) であるとき、 $(\beta_\ell^0 \vee \beta_m^0)$ を f の新たな和項として加え、 f から β_ℓ^0, β_m^0 を取り除く。

(Step3) β_ℓ^0 と β_m^0 がタイプ C3 の同じ定数を持つ和項であり、 $\beta_\ell = x_i \vee \beta_\ell^0$ ($\beta_\ell^0 \not\subset \sim x_i$), $\beta_m = \sim x_i \vee \beta_m^0$ ($\beta_m^0 \not\subset x_i$) (ただし β_ℓ^0, β_m^0 は文字と定数の和であり、 β_ℓ^0, β_m^0 は同じ定数を持つ) であるとき、 $(0.5 \vee \beta_\ell^0 \vee \beta_m^0)$ を f の新しい和項として加え、 f から β_ℓ^0, β_m^0 を取り除く。

(Step4) 以上で求められた乗法標準形を加法標準形に展開する。求められた加法標準形が主項展開である。

(アルゴリズム終)

[例 28] 乗法標準形で与えられた 4 変数で和項数 6 の Fuzzy/C 論理関数

$$\begin{aligned} f = & (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.2 \vee \sim x_1) \\ & \cdot (0.7 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (0.7 \vee x_2 \vee \sim x_3 \vee x_4) \\ & \cdot (x_1 \vee x_3 \vee \sim x_3) \cdot (\sim x_1 \vee x_3 \vee \sim x_3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

はアルゴリズム 5 の Step2~Step3 により和項数 4 の乗法標準形

$$\begin{aligned} f = & (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.2 \vee \sim x_1) \\ & \cdot (0.7 \vee x_2 \vee x_4) \cdot (0.5 \vee x_3 \vee \sim x_3) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。(4.8) 式を加法標準形に展開することにより主項展開が得られる。□

4.4 定数付きファジィ節展開法

定理 28 の $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ および定理 29 の $\beta_1^+ \cdot \beta_2^+ \cdots \beta_t^+$ において、ファジィ論理では結合律が成立するため、いかなる順序で展開してもすべての主項が得られる。これは 2 値論において J. R. Slagle らが用いた手法 [39] や、上林らが用いた節展開法 [40] と同様、展開の順序を考慮することにより、高速な展開アルゴリズムに改良することができる。また、山口により、上林らの節展開法は、ファジィ論理関数対して、最簡形式を求めるための中間のステップとして拡張され、ファジィ節展開法 [41] が考察されている。本節では、ファジィ節展開法のアイデアをもとに、節展開

法を Fuzzy/C 論理関数の主項展開のために拡張する．これは 4.3 節アルゴリズム 5 の Step4 を効率良く行うことを目的としている．以降，ここでの提案手法のことを定数付きファジィ節展開法と呼ぶことにする．

[補題 23] α をタイプ P2 またはタイプ P3 の積項， β をタイプ C2 またはタイプ C3 の和項とする．このとき $\alpha \cdot \beta = \alpha$ である． (証明略)

補題 23 は，節展開を行う際，展開を行う節点に至る道に 0.5 以下の定数または，相補的な文字 x_i および $\sim x_i$ が既に現れている場合は，展開を行う節点においてタイプ C2 およびタイプ C3 の和項は消去しても良いことを示している．このこととアルゴリズム 5 から，定数付きファジィ節展開法のアルゴリズムが得られる．

[アルゴリズム 6] (定数付きファジィ節展開法)

(Step1) ～ (Step3) アルゴリズム 5 と同じ．

(Step4.1) Step3 で得られた関数の各和項を構成する文字の集合を集めたものを節点とする．この節点は木の根になり，非終端節点である．

(Step4.2) 木の非終端節点を S とする．

(S1 選択) もし S に至る直前の枝の文字が定数 (≤ 0.5) であった場合， S からタイプ C2 以外で，かつタイプ C3 以外の和項で文字数最小，頻度和最大の和項を選び，それを β_0 とする．

(S2 選択) もし S にそれ以前の枝の変数の文字の否定 (x_i か $\sim x_i$) を持つ和項が存在し，更にこの和項以外にタイプ C2 またはタイプ C3 の和項があれば，この x_i か $\sim x_i$ を持つ和項を β_0 とする．このような和項が複数ある場合には，それらの内で文字数最小，頻度和最大の和項を選ぶ．

(S3 選択) S1, S2 選択に該当しない場合は， S から文字数最小，頻度和最大の和項を選び，それを β_0 とする．

以上で選ばれた β_0 に含まれる文字を，頻度順に並べたものを O_S とする．ここで $O_S = \langle L_1, L_2, \dots, L_i, \dots \rangle$ と記す．ただし，各 L_i はラベルである．

(Step4.3) S から枝出しを以下のように行う．

(a) S より O_S の順位の高い文字から枝出しを行い，その枝には L_i とラベルを付ける．新しい節点 $S_k(L_i)$ は， L_i を持つ和項を消去し，更に S1, S2 選択のときには， $S_k(L_i)$ の中のすべてのタイプ C2 またはタイプ C3 の和項も消去する (補題 23 による)． $S_k(L_i)$ が空ならば有効節点とする．

(b) $S_k(L_i)$ より， L_1, L_2, \dots, L_{i-1} を取り除く．この結果，空となる和項があれば無効節点とする．

(c) 操作 (a), (b) の結果, 有効節点でも無効節点でもなければ, その節点是非終端節点である.

(Step4.4) 枝出しされていない非終端節点が無くなるまで, Step4.2, Step4.3 を繰り返す.

(Step4.5) 得られた木について, 根から有効節点へ至る道に付けられた枝のラベルとなっている各文字の積を, すべての有効節点について求める. これらはすべて f の内項であり, 他の項に包含されるものをすべて取り除けば, 残ったものが f のすべての主項である.

(アルゴリズム終)

[例 29] 例 28 の (4.7) 式の 4 変数の Fuzzy/C 論理関数 f の主項展開を求める. アルゴリズム Step1 ~ Step3 の結果は, 既に (4.8) 式で求められている. この式の加法標準形への展開をアルゴリズム 4 の Step 4.1 ~ Step 4.5 にしたがって求めたのが図 4.1 である. 生成された内項の数は 9 であり, このうち主項の数は 8 である. 主項展開は, $f = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4 \vee \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee 0.7 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \vee 0.7 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \vee 0.5 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \vee 0.2 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1$ となる. \square

本章では, 論理関数のキューブ表現を基に主項展開を考察している. グラフ表現 (例えば BDD [43, 44], TDD [42], MDD のような表現) に基づく主項展開の考察も考えられるが, ここでは割愛する.

4.5 最簡形式

前節までは, 乗法標準形で表現された Fuzzy/C 論理関数から主項展開を求める手法について考察してきたが, 本節では, 任意の Fuzzy/C 論理関数 f の主項の集合から, f を表現する最小の主項の組み合わせ — 最簡形式 — を求めるための議論をする.

[定義 48] Fuzzy/C 論理関数 f の加法標準形の中で, (1) 積項数最少, (2) 文字数最少という優先順位で条件を満たす f の加法標準形を最簡形式という. \square

最簡形式は一般に一意に表現されず, 複数の表現がある場合がある.

[定理 30] Fuzzy/C 論理関数の最簡形式は主項の和で表現される. (証明略)

[定義 49] Fuzzy/C 論理関数 f のいかなる最簡形式にも含まれる主項を必須項といい, f のいかなる最簡形式にも含まれない主項を不必要項という. \square

[定理 31] Fuzzy/C 論理関数 f の任意の加法標準形に含まれるタイプ P1 の積項は, すべて必須項である.

(証明) 文献 [10] の定理 16 と同様に証明できる. \square

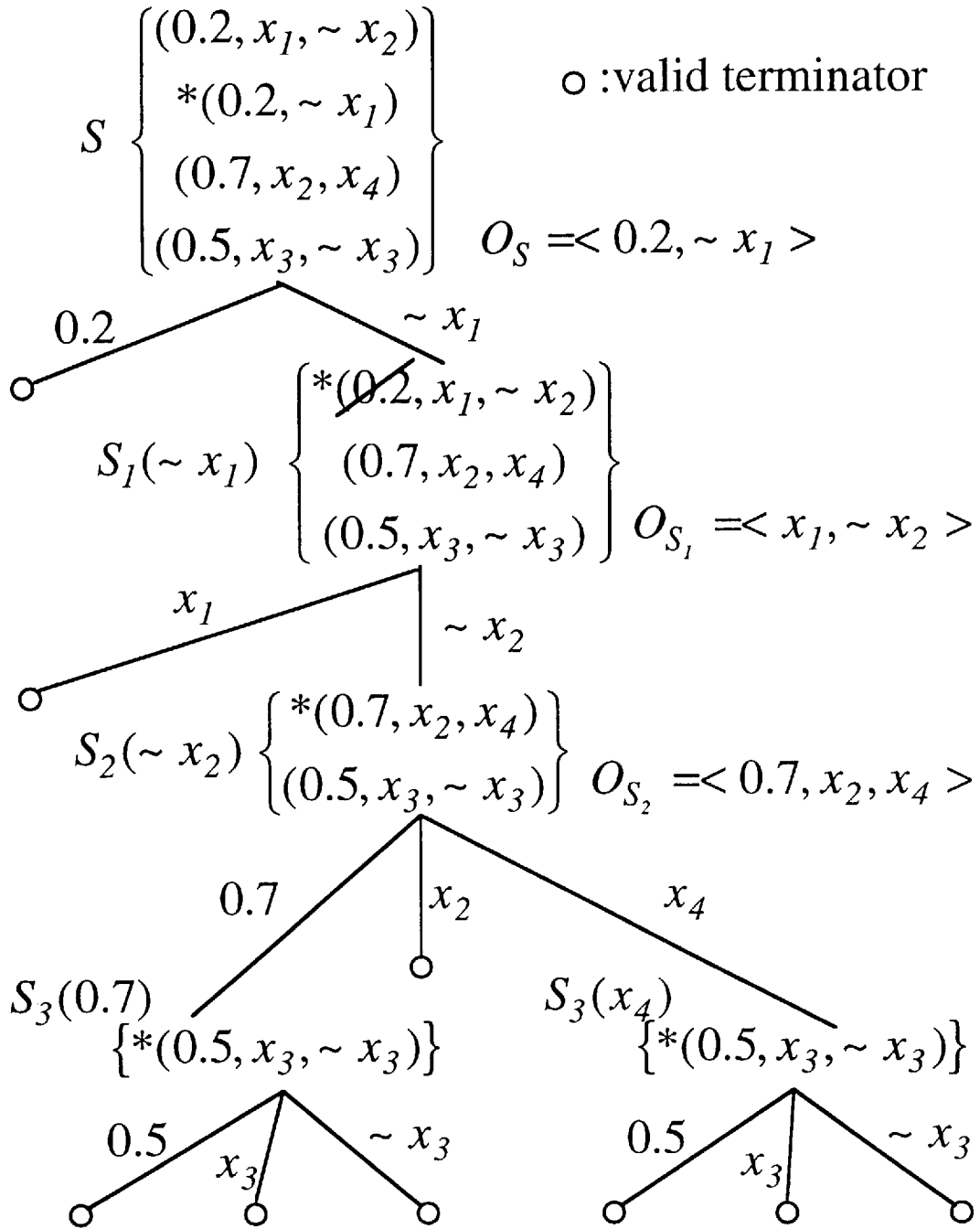


図 4.1: 定数付きファジィ節展開法

一般に、論理関数 f の最簡形式は、以下の二つのステップを通して求められる。

- (1) f のすべての主項の集合を求める。
- (2) f を被覆する最少数の主項の組み合わせを見いだす。

しかしながら、(1) のステップにおいて、不必要項となる主項は、最簡形式を求める際には不要である。したがって、(1) のステップを以下のように置き換えても良いことになる。

- (1') f のすべての主項のうち、不必要項をなるべく含まない f の主項の集合を求める。

本章の 4.4 節までは、乗法標準形で与えられた任意の Fuzzy/C 論理関数の主項展開、即ち、すべての主項の集合を求める手法について議論してきたが、本節では、最簡形式を求めるのを前提して、(1') のステップを中心に議論する。

[補題 24] f, g を Fuzzy/C 論理関数とし、 $g = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t$ を g の主項展開とする（ただし α_i は g の主項）。また β をタイプ C3 の和項とする。 $f = g \cdot \beta$ なる関係があるとき、 f を加法標準形に展開して $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ を得たとする。このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f の主項の和である。もし f の主項 γ_0 が $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ に含まれていない場合、 γ_0 は f の不必要項である。

(証明) β がタイプ C3 の P-和項の場合は、補題 20 により $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f の主項展開となるので本補題は成立する。 β が P-和項でない場合は、以下の二つ条件の少なくとも一方が成立する。

(Cond L24.1) β に変数 x_k が存在しない。

(Cond L24.2) β は定数 0.5 を持っていない。

(Cond L24.1) のみが成立する場合は、補題 22 で証明された事実に相当するので、本補題では (Cond L24.2) が成立する場合を証明すれば十分である。 β はタイプ C3 の和項であることから、少なくとも一組の相補的な変数の和 $x_j \vee \sim x_j$ を持つ。したがって $\beta = \beta^0 \vee x_j \vee \sim x_j$ とおける（ただし β^0 は β から $x_j \vee \sim x_j$ を取り除いた和項である）。このとき、加法標準形に展開したときに f の主項展開を与える論理式 $\dot{f} = g \cdot (0.5 \vee \beta)$ を考えると、この式は (4.9) 式のように展開される。

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= g \cdot (0.5 \vee \beta) \\
 &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot (0.5 \vee \beta^0 \vee x_j \vee \sim x_j) \\
 &= (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot 0.5 \\
 &\quad \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta^0 \\
 &\quad \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot (x_j \vee \sim x_j)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) 式の最終式を三つの部分に分け f_1, f_2, f_3 とすると $f_1 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot 0.5 = \bigvee_{i=1}^t (0.5 \cdot \alpha_i)$, $f_2 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta^0 = \bigvee_{i=1}^t (\beta^0 \cdot \alpha_i)$, $f_3 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot (x_j \vee \sim x_j) = \bigvee_{i=1}^t ((x_j \vee \sim x_j) \cdot \alpha_i)$ となる. $x_j \vee \sim x_j \geq 0.5$ が常に成立するので, $(x_j \vee \sim x_j) \cdot \alpha_i \geq 0.5 \cdot \alpha_i$ である. したがって f_1 を構成する論理式は, すべて f_3 を構成する積項にカバーされることになる. したがって f_1 を展開したときに f の主項が生成されたとしても, それは不必要項となる. 以上より $f_2 \vee f_3 = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot \beta^0 \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_t) \cdot (x_j \vee \sim x_j) = g \cdot \beta = f$ であることから, 本補題は成立する. \square

[定理 32] $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ を乗法標準形で表現された Fuzzy/C 論理関数とする (ただし β_i は和項である). f を加法標準形に展開して $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ ($\gamma_i \not\subseteq \gamma_j, i \neq j$) を得たとする. このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f の主項の和である. もし f の主項 γ_0 が $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ に含まれていない場合, γ_0 は f の不必要項である.

(証明) β_i がタイプ C1 であるとき, β_i は P-和項である. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ のからタイプ C1 の和項を選び出し, それらを加法標準形に展開したものは主項展開である. 次に $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ からタイプ C2 の和項を選び出し, それらを先に求めた主項展開と順次積をとり, 加法標準形に展開したものは, 補題 21 により主項展開となる. 更に $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ からタイプ C3 の和項を選び出し, それらを先に求められた主項展開と順次積をとり, 加法標準形に展開していくと, 最終的に求められた加法標準形は, 補題 24 により主項の和となる. もし f の主項で, 得られた加法標準形に含まれないものがあれば, それは不必要項である. \square

定理 32 にもとづき, 以下のような Fuzzy/C 論理関数の最簡形式を求めるアルゴリズムが得られる. このアルゴリズムの Step7 は最小被覆を求めるものであるが, 定理 31 から, タイプ P1 の定数付き単積項は必須主項であることから, タイプ P2 およびタイプ P3 の積項のみに対してのみ最小被覆を求めている.

[アルゴリズム 7]

(Step1) 与えられた Fuzzy/C 論理関数 f を乗法標準形 $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ で表現する.

(Step2) β_ℓ と β_m がタイプ C2 の同じ定数を持つ和項であり, $\beta_\ell = x_i \vee \beta_\ell^0$, $\beta_m = \sim x_i \vee \beta_m^0$ (ただし β_ℓ^0, β_m^0 は文字と定数の和であり, 同じ定数を持つ) であるとき, $(\beta_\ell^0 \vee \beta_m^0)$ を f の新たな和項として加え, f から β_ℓ, β_m を取り除く.

(Step3) β_ℓ と β_m がタイプ C3 の同じ定数を持つ和項であり, $\beta_\ell = x_i \vee \beta_\ell^0$ ($\beta_\ell^0 \not\subseteq \sim x_i$), $\beta_m = \sim x_i \vee \beta_m^0$ ($\beta_m^0 \not\subseteq x_i$) (ただし β_ℓ^0, β_m^0 は文字と定数の和であり, 同じ定数を持つ) であるとき, $(\beta_\ell^0 \vee \beta_m^0)$ を f の新しい和項として加え, f から β_ℓ, β_m を取り除く.

(Step4) アルゴリズム 6 の Step4.1~Step4.5 により f を加法標準形に展開し, $f = \eta_1 \vee \eta_1 \vee \cdots \vee \eta_a \vee \xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_b$ を得る. ただし, η_i はタイプ P1 の積項, ξ_j はタイプ P2 またはタイプ P3 の積項である.

(Step5) f を主加法標準形で表現する．ここで得られた論理式を $f = \eta_1 \vee \eta_1 \vee \cdots \vee \eta_a \vee \zeta_1 \vee \zeta_2 \vee \cdots \vee \zeta_c$ とする．

(Step6) $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_c$ をすべて包含するような最も簡単な組み合わせを $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_b$ から選び出す (最小被覆問題)．ここで選び出された積項を $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$ とする．

(Step7) $f = \eta_1 \vee \eta_1 \vee \cdots \vee \eta_a \vee \psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_d$ が求める最簡形式である． (アルゴリズム終)

[例 30] 例 28 (4.7) 式の 4 変数の Fuzzy/C 論理関数 f の最簡形式を求める．Step1～Step3 により

$$\begin{aligned} f &= (0.2 \vee x_1 \vee \sim x_2) \cdot (0.2 \vee \sim x_1) \\ &\quad \cdot (0.7 \vee x_2 \vee x_4) \cdot (x_3 \vee \sim x_3) \end{aligned} \quad (4.10)$$

を得る．Step4 において (4.10) 式を定数付きファジィ節展開法により展開したのが、図 4.2 となる．これによって得られる f の主項の和は

$$\begin{aligned} f &= \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4 \vee \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &\quad \vee 0.7 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \vee 0.7 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \\ &\quad \vee 0.2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる．Step5 において (4.11) 式を主加法標準形で表現すると (4.12) 式を得る．

$$\begin{aligned} f &= \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4 \vee \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &\quad \vee 0.7 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \vee 0.7 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \\ &\quad \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \sim x_4 \\ &\quad \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4 \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot \sim x_4 \\ &\quad \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \cdot \sim x_4 \\ &\quad \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4 \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \cdot \sim x_4 \\ &\quad \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \sim x_4 \\ &\quad \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4 \vee 0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot \sim x_4 \\ &\quad \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \sim x_4 \\ &\quad \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4 \\ &\quad \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot \sim x_4 \end{aligned} \quad (4.12)$$

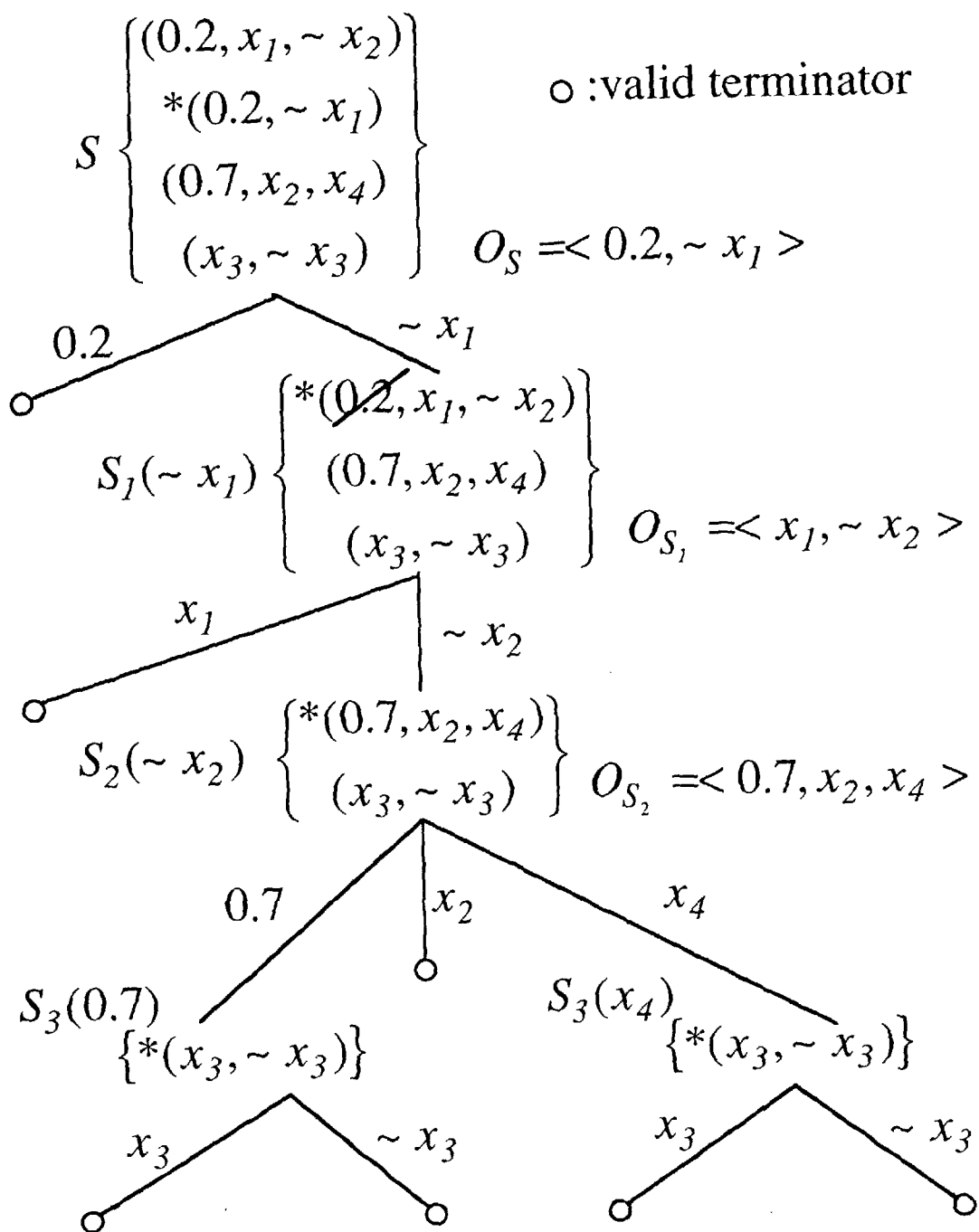


図 4.2: Step4 : 定数付きファジィ節展開法

表 4.1: 最小被覆

	0.2	$x_1 \cdot \sim x_1$	$\sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_2$
$0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \sim x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot \sim x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \cdot \sim x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \cdot \sim x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \sim x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4$	✓		
$0.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot \sim x_4$	✓		
$x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$		✓	
$x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \sim x_4$		✓	
$x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4$		✓	
$x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3 \cdot \sim x_4$		✓	

Step6 の最小被覆問題は、表 4.1 のようになる。以上のことから f の最簡形式として (4.13) 式を得る。

$$\begin{aligned}
 f &= \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \cdot x_4 \vee \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
 &\vee 0.7 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot \sim x_3 \\
 &\vee 0.7 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \vee 0.2
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

□

4.6 ファジィ論理関数への適用

4.3節において2値論理において成立する Nelson の定理を、ファジィ論理、特に Fuzzy/C 論理関数に対して拡張を行った。定理 28 は、Fuzzy/C 論理関数の集合に対して成り立つものであるから、その部分集合であるファジィ論理関数に対しても成立する。ファジィ論理関数に対して Nelson の定理に類似した手法で主項展開を求めるための考察が文献 [38] において X. H. Liu によって、

また文献 [36] において T. P. Neff and A. Kandel によってなされている．乗法形式で表現された 2 値論理関数 f を加法形式に展開することにより， f のすべての主項が求められるという Nelson の定理の意味することのファジィ論理への拡張は，定理 28 が本質的であり，文献 [38] および文献 [36] における手法は，定理 28 をファジィ論理関数の場合に適用した定理 33（後述）から容易に証明でき，文献 [36]，文献 [38] の定理は定理 33 の系として容易に証明できる（系 1，系 2）．本節では，これらの事実について示す．また，最後に最簡形式についても言及する．

ファジィ論理関数の定義は，2 章 2.4 節の定義 19 で既に以下のように示されている．

真理値の集合を $V = [0, 1]$ とする．以下のような論理式で表現される V^n から V への写像を n 変数のファジィ論理関数という．

- (1) 定数 0, 1, 変数 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は論理式である．
- (2) F, G が論理式であるとき， $\sim F, F \cdot G, F \vee G$ も論理式である．
- (3) 以上で定まるもののみが論理式である．

ここで論理演算は， $x, y \in V$ のとき $\sim x = 1 - x$, $x \cdot y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$ と解釈する．

[例 31] $f = x_1 \cdot \sim x_2 \vee x_3 \cdot \sim x_3$ は 3 変数のファジィ論理関数である． □

ファジィ論理関数は，2 値論理関数と同様，定数として 0, 1 以外のものは持たない．また積項（和項）は定義 39 におけるタイプ P1 とタイプ P3（タイプ C1 とタイプ C3）のみである．ファジィ論理関数におけるタイプ P1 の積項を単積項（タイプ C1 の和項を単和項），タイプ P3 の積項を相補項（タイプ C3 の和項を相補和項）という．また，相補項（相補和項）ですべての変数を持つものを相補最小項（相補最大項）という．任意の相補項（相補和項）は相補最小項の和（相補最大項の積）に展開できる．

ファジィ論理関数においても，P-乗法標準形，主項，主項展開は，Fuzzy/C 論理関数と同様の定義である．また，ファジィ主加法標準形，ファジィ主乗法標準形のことを，以下では，それぞれ主加法標準形，主乗法標準形と，誤りの恐れのない限り略記する．

[補題 25] 任意のファジィ論理関数において，その主乗法標準形は P-乗法標準形と一致する．

（証明）ファジィ論理関数を表現する論理式には定義 19（1）からわかるように定数として 0.5 を含むことはない．したがって定義 46 のコンセンサス定義（2）は，

$$(2') \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 \text{ が単積項のとき, } x_j \cdot \sim x_j \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \in C(\alpha_1, \alpha_2) \text{ (ただし } i \neq j \text{)}$$

と置き換えられる [10]．このように定義されたコンセンサスを用いて，ファジィ論理関数を表現する主乗法標準形の各和項を，それぞれ独立したファジィ論理関数と見なして，主項展開を求めると，単和項，相補最大項は，すべて主項展開を表しており P-和項である．したがってファジィ論理関数においては，主乗法標準形と P-乗法標準形は一致する． □

[定理 33] (ファジィ論理における Nelson の定理：ファジィ論理関数の場合) $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ を主乗法標準形で表現されたファジィ論理関数とする (ただし β_i は単和項または相補最大項). f を加法標準形に展開して $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ ($\gamma_i \not\subset \gamma_j, i \neq j$) を得たとする. このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ はファジィ論理関数 f の主項展開である.

(証明) 補題 25 により, f の P-乗法標準形は, f の主乗法標準形と一致することから, Fuzzy/C 論理関数における定理 28 がそのまま成立して, $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ はファジィ論理関数 f の主項展開となる. \square

[定義 50] [38] $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_m$ を変数 x_1, x_2, \dots, x_n よりなる乗法形式とする. このとき β_i が単積項であれば, $\beta_i^* = \beta_i$. β_i が相補和項であり, 変数 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j} \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が β_i に現われなければ $\beta_i^* = \beta_i \vee x_{i_1} \cdot \sim x_{i_1} \vee x_{i_2} \cdot \sim x_{i_2} \vee \cdots \vee x_{i_j} \cdot \sim x_{i_j}$ とする. このとき $f = \beta_1^* \cdot \beta_2^* \cdots \beta_m^*$ をプライム乗法形式 (prime conjunctive normal form) という. \square

[系 1] [38] $f = \beta_1^* \cdot \beta_2^* \cdots \beta_m^*$ をファジィ論理関数 f のプライム乗法形式とする. f を加法標準形に展開し $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ ($\gamma_i \not\subset \gamma_j, i \neq j$) を得たとする. このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ は f の主項展開である.

(証明) β_i を相補和項とし, β_i は変数 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_u} \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を含まないとする. これを相補最大項の積に展開すると $\beta_i = \beta_{i_1} \cdot \beta_{i_2} \cdots \beta_{i_j}$ (ただし β_{i_h} ($h = 1, 2, \dots, j$) は相補最大項であり $j = 2^u$ である) を得る. $\beta_{i_1} \cdot \beta_{i_2} \cdots \beta_{i_j}$ を加法標準形に展開すると, $\beta_{i_1} \cdot \beta_{i_2} \cdots \beta_{i_j} = \beta_i \vee x_{i_1} \cdot \sim x_{i_1} \vee x_{i_2} \cdot \sim x_{i_2} \vee \cdots \vee x_{i_u} \cdot \sim x_{i_u} = \beta_i^*$ となる. よって $f = \beta_1^* \cdot \beta_2^* \cdots \beta_m^*$ を加法標準形に展開したものは, f の主乗法標準形を加法標準形に展開したものと同一であるから, 定理 33 より本系は成立する. \square

[系 2] [36] ファジィ論理関数 f のある乗法標準形を $f = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_s \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ とする (ただし α_i は単和項, β_j は相補和項とする). このとき,

$$f = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_s \cdot (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t \vee (\bigvee_{i=1}^n x_i \cdot \sim x_i))$$

を加法標準形に展開し, $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_u$ ($\gamma_i \not\subset \gamma_j, i \neq j$) を得たとする. $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_u$ は f の主項展開である.

(証明) $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ を相補最大項の積に展開した式を $\beta'_1 \cdot \beta'_2 \cdots \beta'_v$ とする. これを展開すると系 1 同様プライム乗法形式 $\beta_1^* \cdot \beta_2^* \cdots \beta_v^*$ を得る. β_1^* に $x_{i_k} \cdot \sim x_{i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, w$) が含まれているとすると $\beta_2^* \cdots \beta_v^*$ には $x_{i_k}, \sim x_{i_k}$ または $x_{i_k} \cdot \sim x_{i_k}$ のいずれかが含まれているはずであるから $\beta_1^* \cdot \beta_2^* \cdots \beta_v^* = \beta_1 \cdot \beta_2^* \cdots \beta_v^* \vee (\bigvee_{k=1}^w x_{i_k} \cdot \sim x_{i_k})$ を得る. 同様にして順次 $\beta_1^* \cdot \beta_2^* \cdots \beta_v^*$ に含まれるすべての変数の組 $x_i \cdot \sim x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を取り出すことができるから $\beta_1^* \cdot \beta_2^* \cdots \beta_v^* = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_v \vee (\bigvee_{i=1}^n x_i \cdot \sim x_i)$ を得る. したがって $f = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_s \cdot (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t \vee (\bigvee_{i=1}^n x_i \cdot \sim x_i))$ を加法標準形に展開したものは, 系 1

の場合と同様、 f の主乗法標準形を加法標準形に展開したものと同一になり、定理 33から本系は成立する。□

定理 33にもとづき、ファジイ論理関数 f の主項展開を求めることができる。一方、ファジイ論理関数の最簡形式を求める場合には、すべての主項を求める必要はなく、いかなる最簡形式にも現れない主項 — 不必要項 — を生成する必要はない。この場合には、Fuzzy/C 論理関数における定理 30と同様にして以下の定理が成立する。

[定理 34] $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_t$ を乗法標準形で表現されたファジイ論理関数とする（ただし β_i は単和項または相補項）。 f を加法標準形に展開して $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ ($\gamma_i \not\supset \gamma_j, i \neq j$) を得たとする。このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ はファジイ論理関数 f の主項の和である。もし f の主項 γ_0 が $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_s$ に含まれない場合には、 γ_0 は不必要項である。
(証明) 定理 30と同様にして証明できる。□

文献 [34, 41] では、定理 34のような条件のもとでファジイ論理関数 f を加法標準形に展開すると主項展開が求められるとされているが、それは必ずしも成立しない。定理 34で示されるように、得られる加法標準形は必ずしも主項展開ではないからである。この意味で本章では、基本的事実を明らかにし、十分な条件を与えている。しかしながら定理 34および文献 [34, 41] の手法是最簡形式を求める際に有効な事実となる。この事実とアルゴリズム 6の Step4.1～Step4.5 をファジイ論理関数に適用すると、文献 [41] で既に示されているファジイ節展開法となる。

4.7 むすび

本章では、ファジイ論理の公理系を満たす一般的なモデルである Fuzzy/C 論理関数をもとにして議論を行った。そして定理 28により、従来より 2 値論理において主項展開を求めるための基本的な定理であった Nelson の定理がファジイ論理においても成立することが明らかにされた。また、定理 29により、より少ない和項数の乗法標準形からファジイ論理における Nelson の定理を保ちつつ主項展開を求めるための基本的な事実が明らかにされた。またアルゴリズム 6において主項展開を高速に求めるための手法である定数付きファジイ節展開法を示し、定理 30およびアルゴリズム 7により、最簡形式を高速に求めるための手法を明らかにした。本章で得られた事実や手法は、5章、6章での議論の正当性を保証するために重要な意味を持っている。

今後の課題としては、本章で明らかにされた事実をもとに、論理関数を BDD, TDD, MDD のようなグラフ表現を使って、より高速に主項展開、最簡形式を求める手法を開発することである。

5 章

不完全指定ファジィ論理関数の簡単化

5.1 まえがき

ファジィ論理関数の研究の中で簡単化の問題は、その中で最も古くから研究されてきたものの一つである。しかしながら、不完全指定ファジィ論理関数の定式化の試みもなされてきたが、いずれも定式化が不完全であり、明確な定式化は長い間なされていなかった。また、その簡単化の手法も不完全であった [34, 35, 37]。これらの研究の中から、不完全指定ファジィ論理関数がファジィ論理関数の論理式で表現されるための条件について、菊地、向殿 [27] により研究がなされ、不完全に指定された入出力関係からファジィ論理関数の論理式を構成する際、論理式が存在するための条件（実現可能性）と一意に論理式で表現されるための条件（一意性）が明らかにされた。また、不完全に指定された入出力関係から、それらの表す知識を論理式で表現することの利点に関して、ニューラルネットワークによる方法、ファジィ推論による方法との比較検討がなされた [27]。

一般にファジィ論理関数の工学的な応用（例えば、ファジィ論理回路の設計、ファジィ論理関数による知識獲得 [28]、データ・マイニング等）を考えた場合、論理式に現れる積項（和項）数、文字数ができる限り少ない方が、実装を考えると都合が良い場合が多い。また、これらの応用で扱われるファジィ論理関数は、完全指定の場合は稀で、ほとんどの場合が不完全指定である。

本章は、菊池、向殿によって与えられた条件として、実現可能性のみを仮定した場合に、最も簡単なファジィ論理関数の論理式を得るための手法についての定式化を行い、簡単化アルゴリズムと、そのアルゴリズムの正当性を保証する定理を与える。また、不完全指定ファジィ論理関数の代数的構造も明らかにする。

5.2 不完全指定ファジィ論理関数

以降、真理値の集合を表す記号として $V = [0, 1]$, $V_3 = \{0, 0.5, 1\}$, $V_2 = \{0, 1\}$ を用いる。ファジィ論理関数とは、2章の定義 19 で示したように、以下のような論理式で定義される写像である。

(1) 定数 0 および 1, 変数 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は論理式である.

(2) F, G が論理式であるとき $\sim F, F \cdot G, F \vee G$ は論理式である.

(3) 上で定まるもののみが論理式である.

ただし, \sim, \cdot, \vee はそれぞれ否定, 論理積, 論理和を意味しており, その演算は $\sim x = 1 - x$, $x \cdot y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$ で定義され, この順に強いものとする. また定数 0, 1 は 0 変数の演算と解釈する.

以降, 論理積 (\cdot) は省略されることがある.

[例 32] $f = x_1 \sim x_2 \vee x_2 x_3 \sim x_3$ および $g = (\sim x_1 \vee x_2) \cdot (\sim x_2 \vee x_3 \vee \sim x_3)$ は 3 変数のファジイ論理関数である. □

以降, 半順序関係 \preceq は, 1 の定義 36 で定義されたあいまいさに関する半順序関係を表すものとする.

[性質 1] [9] f をファジイ論理関数とする. そのとき $\forall A, B \in V^n$, $A \preceq B$ ならば $f(A) \preceq f(B)$ □

性質 1 で示される性質は, あいまいさに関する単調性とよばれるものであり, 正則性 (regularity) を表す性質である.

[性質 2] [9] f をファジイ論理関数とする. そのとき, $A \in V_2^n$ ならば $f(A) \in V_2$ □

性質 2 を正規性 (normality) という. この性質の意味することは, ファジイ論理関数では, 入力 が 2 値に限られるとき, 出力は必ず 2 値になるということである.

[性質 3] [9] (ファジイ論理関数が等しいための必要十分条件) f_1 および f_2 をファジイ論理関数とする. $\forall A \in V^n$ に対して $f_1(A) = f_2(A)$ であることと $\forall B \in V_3^n$ に対して $f_1(B) = f_2(B)$ であることは同値である. □

性質 3 により, ファジイ論理関数は本質的に 3 値論理関数であることがわかる. また, ファジイ論理関数の特徴づけは, V_3^n 上での関数の値によってなされることがわかる.

以降, 本章においては, ファジイ論理関数の定義域を V_3^n と見なし議論を行う.

[性質 4] [9] 完全指定ファジイ論理関数の主加法標準形, 主乗法標準形は一意に定まる. □

[性質 5] [9] $A \in V_3^n$ とし, f をファジイ論理関数とすると, 以下が成立する.

(1) $f(A) = 1$ ならば $\forall \acute{A} \preceq A (f(\acute{A}) = 1)$.

(2) $f(A) = 0$ ならば $\forall \acute{A} \preceq A (f(\acute{A}) = 0)$.

(3) $f(A) = 0.5$ ならば $\forall A \succeq A(f(A) = 0.5)$.

□

完全指定ファジィ論理関数では、定義域 V_3^n の元に対して f は、0, 0.5, 1 のいずれかの値を取るから、定義域 V_3^n は、 f によって以下のように三つの領域に直和分割が可能である.

$$S_1^* = \{A | f(A) = 1, A \in V_3^n\}$$

$$S_0^* = \{A | f(A) = 0, A \in V_3^n\}$$

$$S_{0.5}^* = \{A | f(A) = 0.5, A \in V_3^n\}$$

ここで $S_1^* \cup S_0^* \cup S_{0.5}^* = V_3^n$ かつ $S_i^* \cap S_j^* = \emptyset$ ($i, j \in \{0, 0.5, 1\}, i \neq j$) である.

[定義 51] $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in V_3^n$ と単積項 $\alpha = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$ (単和項 $\beta = x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2} \vee \dots \vee x_n^{a_n}$) を次のように一対一に対応づける.

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) & \text{for } a_i = 1 \\ 1 & (0) & \text{for } a_i = 0.5 \\ \sim x_i & (x_i) & \text{for } a_i = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

また $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in V_3^n - V_2^n$ と相補最小項 $\alpha = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}$ (相補最大項 $\beta = x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2} \vee \dots \vee x_n^{a_n}$) を次のように対応づける.

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) & \text{for } a_i = 1 \\ x_i \cdot \sim x_i & (x_i \vee \sim x_i) & \text{for } a_i = 0.5 \\ \sim x_i & (x_i) & \text{for } a_i = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

□

f を完全指定ファジィ論理関数とする. f の主加法標準形を

$$f_{CD} = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_s \vee \alpha'_1 \vee \dots \vee \alpha'_t$$

主乗法標準形を

$$f_{CC} = \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_u \cdot \beta'_1 \cdot \dots \cdot \beta'_v$$

とする. ただし, α_i は単積項, α'_j は相補最小項, β_k は単和項, β'_ℓ は相補最大項とする. このとき, 以下の性質 6 は, 3章 3.4 節の定理 24 をファジィ論理関数の場合に当てはめたものであり, 完全指定されたファジィ論理関数の S_1^* , S_0^* , $S_{0.5}^*$ と主加法標準形, 主乗法標準形の関係を表わしている.

[性質 6] T を定義 51 によって主加法標準形の積項, 主乗法標準形の和項と V_3^n の元を対応させる関数とする. このとき以下が成立する.

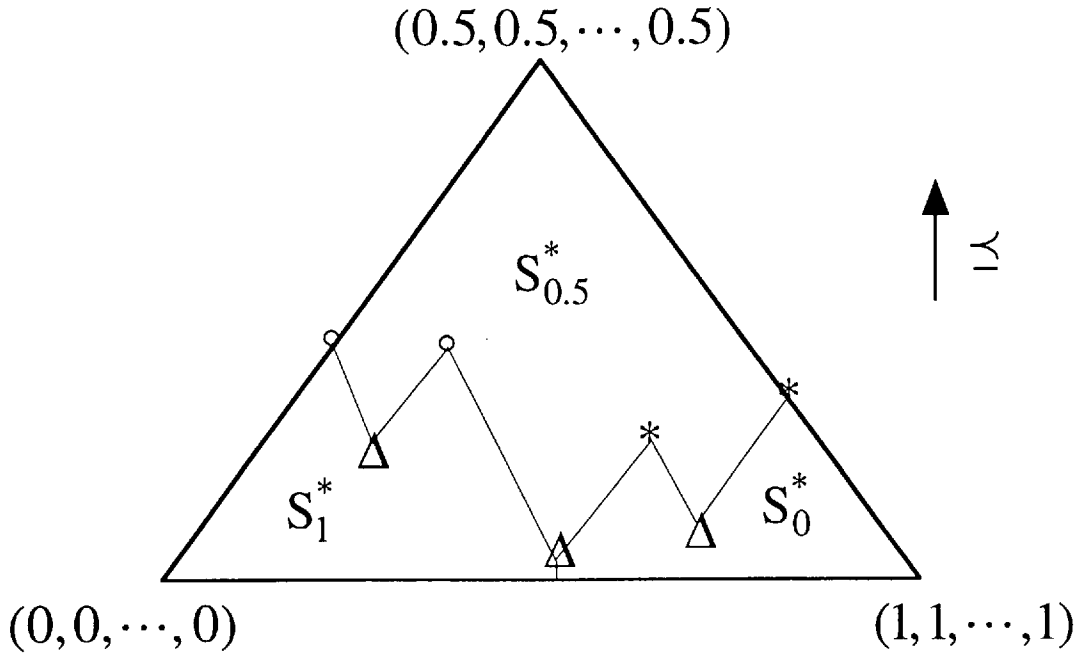


図 5.1: 完全指定ファジィ論理関数

- (1) S_1^* に対して, $S_1^* = \bigcup_i \{A \in V_3^n | A \preceq T(\alpha_i)\}$
- (2) S_0^* に対して, $S_0^* = \bigcup_i \{A \in V_3^n | A \preceq T(\beta_i)\}$
- (3) $S_{0.5}^*$ に対して,

$$\begin{aligned}
 S_{0.5}^* = & \left(\bigcup_j \{A \in V_3^n | A \succeq T(\alpha_j)\} \right) \\
 & \cup \left(\bigcup_j \{A \in V_3^n | A \succeq T(\beta_j)\} \right) \\
 & \cup \{A \in V_3^n | \exists B_0 \in S_0^*, \exists B_1 \in S_1^*, B_0 \preceq A, B_1 \preceq A\}
 \end{aligned}$$

□

S_1^* , S_0^* および $S_{0.5}^*$ の関連を図 5.1 に示す. 図 5.1 において \circ は S_1^* の極大元を, $*$ は S_0^* の極大元を, Δ は $S_{0.5}^*$ の極小元を表している. 性質 1 によりファジィ論理関数は正規性を必ず満たすので, $S_{0.5}^*$ の極小元は必ず $V_3^n - V_2^n$ に属している.

以上で述べた性質を基に不完全指定ファジィ論理関数は以下のように定義できる.

[定義 52] 不完全指定ファジィ論理関数は, $S_1^* \cup S_0^* \cup S_{0.5}^* \subseteq V_3^n$ かつ $S_1^* \cup S_0^* \cup S_{0.5}^* \neq V_3^n$ なる関数であり, 2章の定義 19 で与えられる完全指定ファジィ論理関数の論理式により実現 (表現) される論理関数である. □

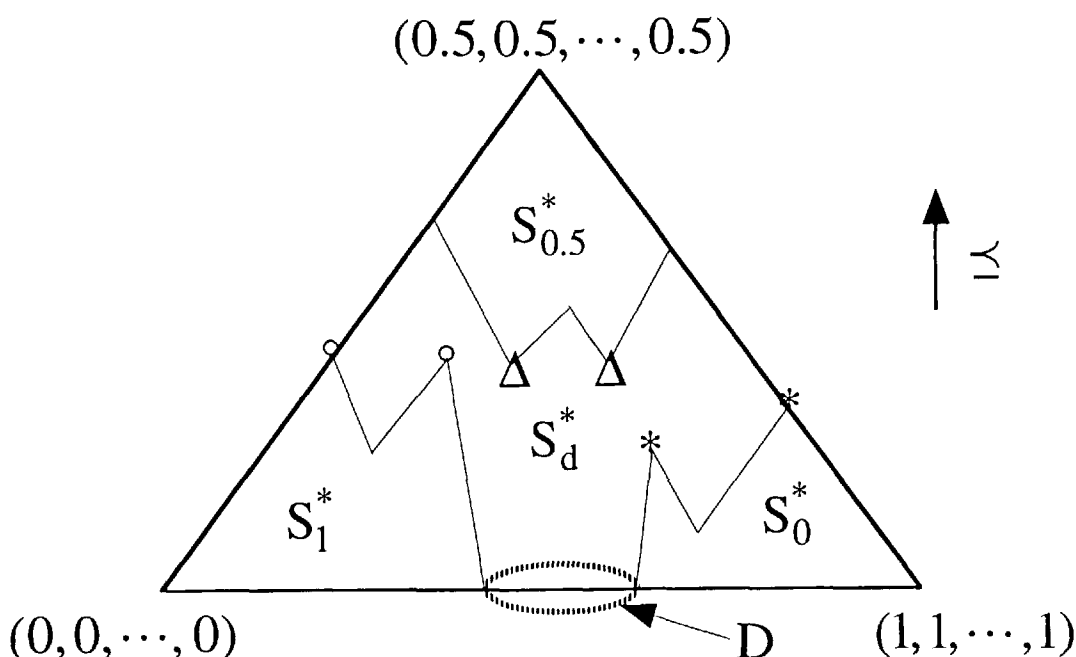


図 5.2: 不完全指定ファジィ論理関数

以降、不完全指定ファジィ論理関数の定義域において $V_3^n - (S_1^* \cup S_0^* \cup S_{0.5}^*)$ を S_d^* と記すことにする。図 5.2 は不完全指定ファジィ論理関数における S_1^* , S_0^* , $S_{0.5}^*$, S_d^* の関連を示している。

以降, S_1^* , S_0^* の極大元の集合をそれぞれ S_1 , S_0 と記し, $S_{0.5}^*$ の極小元の集合を $S_{0.5}$ と記す. 更に完全指定, 不完全指定の場合, 双方の場合において主加法標準形を表す記号として f_{CD} を, 主乗法標準形を表す記号として f_{CC} を用いることにする.

性質 6 の系として以下の系 3, 系 4 が導き出される. 尚, 両系とも性質 6 の証明の逆をたどることによって証明できる.

【系 3】 S_1 の各元に定義 51 の (5.1) 式によって単積項を、また $S_{0.5}$ の各元に (5.2) 式によって相補最小項を対応させ、これらの積項の和を作り、他の積項に包含される積項を省略したものは、そのファジィ論理関数の主加法標準形 (f_{CD}) である。 (証明略)

[系 4] S_0 の各元に定義 51 の (5.1) 式によって単和項を, また $S_{0.5}$ の各元に (5.2) 式によって相補最大項を対応させ, これらの和項の積を作り, 他の和項を包含する和項を省略したものは, そのファジィ論理関数の主乗法標準形 (f_{CC}) である. (証明略)

【定理 35】 完全指定ファジィ論理関数 f の f_{CD} , f_{CC} に関して $\forall A \in V_3^n (f_{CD}(A) = f_{CC}(A))$ が成立する.

(証明) 性質 4 から明らかである.

☐

¹d は don't care の意味である.

[補題 26] α を単積項 (β を単和項) とし, $A \in V_3^n$ を (5.1) 式により対応する元とする. このとき以下が成立する.

- (1) $\forall B \in \{X | X \preceq A\}$ に対して $\alpha(B) = 1$ ($\beta(B) = 0$).
- (2) $\forall B \in \{X | \exists Y \preceq A, Y \preceq X, X \not\preceq A\}$ に対して $\alpha(B) = 0.5$ ($\beta(B) = 0.5$).
- (3) $\forall B \in \{X | X \Delta A = \phi\}$ に対して $\alpha(B) = 0$ ($\beta(B) = 1$). (ただし $X \Delta A$ は, 半順序 \preceq に関する X と A の下界の集合を表す.) (証明略)

[補題 27] α を相補最小項 (β を相補最大項) とし, $A \in V_3^n - V_2^n$ を (5.2) 式により対応する元とする. このとき以下が成立する.

- (1) $\forall B \in \{X | X \succeq A\}$ に対して $\alpha(B) = 0.5$ ($\beta(B) = 0.5$).
- (2) $\forall B \in \{X | \exists Y \succeq A, Y \succeq X, X \not\succeq A\}$ に対して $\alpha(B) = 0$ ($\beta(B) = 1$). (証明略)

[定理 36] 不完全指定ファジィ論理関数 f の f_{CD} , f_{CC} に関して $\forall A \in V_3^n (f_{CD}(A) \leq f_{CC}(A))$ が成立する. また通常の順序 \preceq に関して f_{CD} は f と同じ S_1^* , S_0^* , $S_{0.5}^*$ を持つ関数の集合の最小元であり, f_{CC} は最大元である.

(証明) $A \in S_1^* \cup S_0^* \cup S_{0.5}^*$ なるときは, 必ず等号が成立することは明らかである. $A \notin S_1^* \cup S_0^* \cup S_{0.5}^*$ なる場合に関して証明する. S_1^* の上界 S_1^{Upper} , S_0^* の上界 S_0^{Upper} を次のように定義する.

$$S_1^{Upper} = \{A \in V_3^n | \exists B \in S_1^*, B \preceq A, A \notin S_1^*\}$$

$$S_0^{Upper} = \{A \in V_3^n | \exists B \in S_0^*, B \preceq A, A \notin S_0^*\}$$

このとき, f_{CD} (f_{CC}) の表現している関数は, 図 5.3 (図 5.4) のように, S_d^* において以下のような値をとる.

- (1) 補題 26 により, $S_d^* \cap S_1^{Upper}$ ($S_d^* \cap S_0^{Upper}$) において 0.5.
- (2) 補題 27 により, $S_d^* - S_1^{Upper}$ ($S_d^* - S_0^{Upper}$) において 0 (1).

したがって $\forall A \in V_3^n (f_{CD}(A) \leq f_{CC}(A))$ が成立する.

次に不完全指定ファジィ関数 f と同じ S_1^* , S_0^* , $S_{0.5}^*$ を持つ関数の集合を F とする. このとき F_{CD} は $\langle F, \leq \rangle$ の最小元, F_{CC} は最大元であることを示す. F_{CD} は $S_d^* \cap S_1^{Upper}$ において 0.5 となるが, $S_d^* - S_1^{Upper}$ では 0 である. ここで $\hat{f} < f_{CD}$ なる関数 \hat{f} が存在すると仮定すると, $\exists X \in S_d^* \cap S_1^{Upper} (\hat{f}(X) = 0)$ が成立しなければならない. このとき, 性質 5(2) により $\forall Y \preceq X$ に対して $\hat{f}(Y) = 0$. これは S_1^* で $\hat{f} = 1$ となることに矛盾するので $\hat{f} < f_{CD}$ なる \hat{f} は存在しない. したがって f_{CD} は $\langle F, \leq \rangle$ の最小元である. f_{CC} が最大元であることも, 同様に証明できる. □

定理 35 の事実から、完全指定ファジィ論理関数の簡単化の問題は、同一の関数を表現する数多くある論理式表現の中から、最も簡単な表現を求める問題である。これに対して、定理 36 の事実は、 S_d^* の元に対しての関数値 0, 0.5, 1 の割り当てが数多く存在することを示している。このことから、不完全指定ファジィ論理関数の簡単化の問題は、 S_d^* への値の割り当て方により、数多くの関数とそれを表す数多くの論理式表現が存在するので、それらの中から最も簡単な論理式表現を求める問題となることがわかる。

5.3 量子化と実現可能性

前節までの議論では、ファジィ論理関数の定義域を V_3^n として議論を行ってきた。しかしながら、現実の不完全指定ファジィ論理関数 f は、 $A \in V^n$ するとき、 $f: A \rightarrow V$ なる写像であり、 A は V_3^n の元からなる集合とは限らない。また、写像 $f: A \rightarrow V$ は、不完全指定ファジィ関数であるが、それが不完全指定ファジィ論理関数となる（即ち、ファジィ論理関数の論理式で表現される）とは限らない。本節では、任意の $A \in V^n$ の元から、ファジィ論理関数を特徴づける集合 V_3^n への対応づけを行う量子化について述べた後、写像 $f: A \rightarrow V$ がファジィ論理関数の論理式で表現できるための条件 – 実現可能性 – について述べる。

[定義 53] [27] $\lambda, x \in V$ とする。 x の λ に関する量子化 \bar{x}^λ は、以下の式で定まる V_3^n の元である。

$$\bar{x}^\lambda = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \min(\lambda, 1 - \lambda), x \neq 0.5) \\ 1 & (\max(\lambda, 1 - \lambda) \leq x \leq 1, x \neq 0.5) \\ 0.5 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.3)$$

また、 n 次元の場合には $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V^n$ のとき $\bar{X}^\lambda = (\bar{x}_1^\lambda, \bar{x}_2^\lambda, \dots, \bar{x}_n^\lambda) \in V_3^n$ と定義される。 \square

[定義 54] $S = S_1 \cup S_0 \cup S_{0.5}$ とする。このとき、 S のことを量子化集合という。また、 $S_U^* = S_{0.5} \cup \{X \in V_3^n | Y \in S_1, Z \in S_0, Y \preceq X, Z \preceq X\}$ かつ、 $S^* = S_1^* \cup S_0^* \cup S_U^*$ であるとき、 S^* を量子化集合の拡大という。 \square

[定理 37] [27] $A = \{A_i | A_i \in V^n\}$ を V^n の部分集合、 f を写像 $f: A \rightarrow V$ とする。 f の量子化集合 S は、以下の式で求められる V_3^n の部分集合となる。

$$\begin{aligned} S_1 &= \nabla \{\bar{X}^\lambda | \overline{f(X)}^\lambda = 1, X \in A, \exists \lambda \in V\} \\ S_0 &= \nabla \{\bar{X}^\lambda | \overline{f(X)}^\lambda = 0, X \in A, \exists \lambda \in V\} \\ S_{0.5} &= \Delta \{\bar{X}^\lambda | \overline{f(X)}^\lambda = 0.5, X \in A, \exists \lambda \in V\} \\ S &= S_1 \cup S_0 \cup S_{0.5} \end{aligned}$$

ここで演算 ∇, Δ は、それぞれ \preceq の順序に関する極大元、極小元の集合を求める演算である。[†] また、 f の量子化集合 S が与えられたとき、量子化集合の拡大 S^* は以下のように求め

[†] 文献 [27] の定義では Δ, ∇ は用いられていないが、本質的な意味は変わらないので、本章では後の議論を簡便にするために用いる。

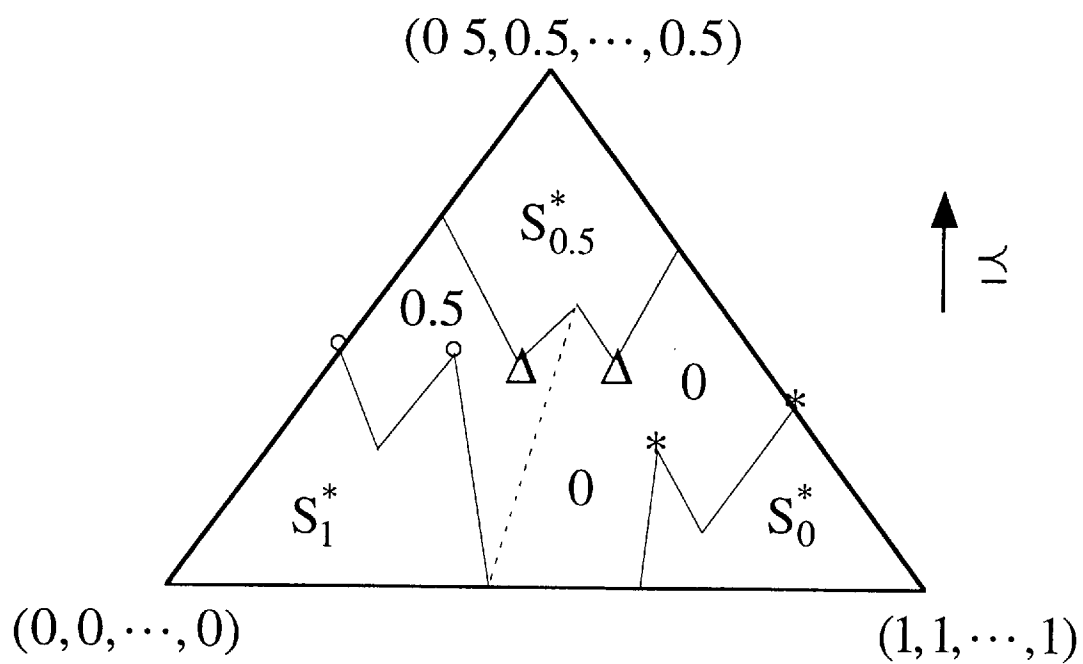


图 5.3: 主加法标准形 (f_{CD})

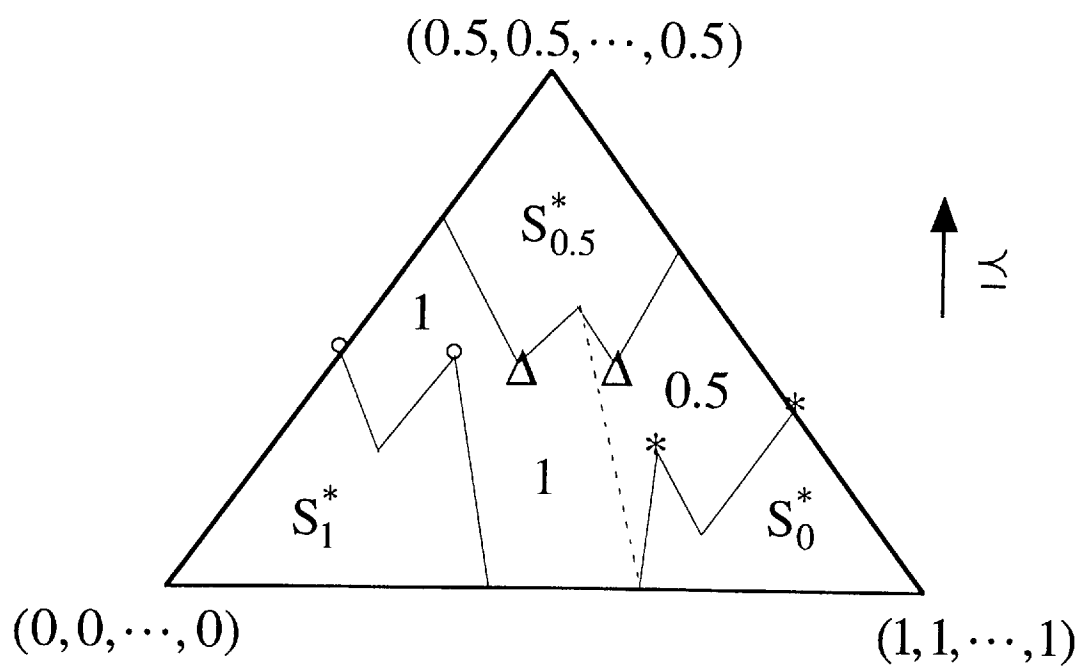


图 5.4: 主乘法标准形 (f_{CC})

られる.

$$\begin{aligned}
S_1^* &= S_1 \cup \{X \in V_3^n | Y \in S_1, X \preceq Y\} \\
S_0^* &= S_0 \cup \{X \in V_3^n | Y \in S_0, X \preceq Y\} \\
S_U^* &= S_{0.5} \cup \{X \in V_3^n | Y \in S_1, Z \in S_0, \\
&\quad Y \preceq X, Z \preceq X\} \\
S^* &= S_1^* \cup S_0^* \cup S_U^*
\end{aligned}$$

(証明略)

また文献 [27] の系 3.1 によると, 量子化集合および量子化集合の拡大を求める際には, $\lambda \in [0, 1]$ なるすべての λ について調べる必要はなく, 以下で定義される $B(f)$ に含まれる λ についてのみ調べれば十分である.

【定義 55】 [27] $f : A \rightarrow V$, $A = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$, $A_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)$ (ただし, $a_j^i (j = 1, \dots, n)$ は A_i の j 番目の要素であり, $a_j^i \in V$.) であるとき,

$$B(f) = \bigcup_{\forall i} \{a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i\} \cup \bigcup_{\forall i} \{f(A_i)\} \cup \{1\}$$

□

【定理 38】 [27] (実現可能性: 不完全指定ファジィ論理関数が存在するための必要十分条件) f を $A \subset V^n$ について定義された写像 $f : A \rightarrow V$, $S = S_1 \cup S_0 \cup S_{0.5}$ を f の量子化集合, $S^* = S_1^* \cup S_0^* \cup S_U^*$ をその拡大とする. f が以下の二つの条件を満たすとき, かつそのときに限り, $A \subset V^n$ における写像 $f : A \rightarrow V$ を表現する不完全指定ファジィ論理関数が存在する.

$$\begin{aligned}
&(\text{拡大の直交性}) \quad S_i^* \cap S_j^* = \phi, \\
&\quad (\forall i, j \in \{1, 0, U\}, i \neq j) \\
&(\text{正規性}) \quad S_{0.5} \cap V_2^n = \phi
\end{aligned}$$

(証明略)

【例 33】 写像 $f : A \rightarrow V$ が 13 個の 3 変数の入力 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{13}\}$ とそれに対する出力 $f(A_i)$ の組みとして, 表 5.1 の 2 列目, 3 列目のように与えられたとする. このとき, $B(f) = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1\}$ であり, 定理 37 から量子化を求めたものが表 5.1 の 4 列目, 5 列目である. 従って, 量子化集合は以下になる.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(0, 0, 0)\} \\
S_0 &= \{(0, 0, 1)\} \\
S_{0.5} &= \{(0.5, 0, 0), (0.5, 1, 0), (0.5, 0, 1), \\
&\quad (0.5, 1, 1), (0, 0.5, 0), (0, 0.5, 1), \\
&\quad (1, 0.5, 0), (1, 0.5, 1), (0, 0, 0.5), \\
&\quad (1, 0, 0.5), (1, 1, 0.5)\} \\
S &= S_1 \cup S_0 \cup S_{0.5}
\end{aligned}$$

表 5.1: 与えられた入出力とその量子化

i	A_i	$f(A_i)$	$\overline{A_i}^\lambda$	$\overline{f(A_i)}^\lambda$
1	(0.1, 0.1, 0.1)	0.9	(0, 0, 0)	1
2	(0.1, 0.1, 0.9)	0.1	(0, 0, 1)	0
3	(0.5, 0.3, 0.3)	0.5	(0.5, 0.5, 0.5) (0.5, 0, 0)	0.5 0.5
4	(0.5, 0.7, 0.1)	0.5	(0.5, 0.5, 0) (0.5, 1, 0)	0.5 0.5
5	(0.5, 0.1, 0.9)	0.5	(0.5, 0, 1)	0.5
6	(0.5, 0.9, 0.9)	0.5	(0.5, 1, 1)	0.5
7	(0.1, 0.5, 0.1)	0.5	(0, 0.5, 0)	0.5
8	(0.1, 0.5, 0.9)	0.5	(0, 0.5, 1)	0.5
9	(0.9, 0.5, 0)	0.5	(1, 0.5, 0)	0.5
10	(1, 0.5, 0.9)	0.5	(1, 0.5, 1)	0.5
11	(0.1, 0.1, 0.5)	0.5	(0, 0, 0.5)	0.5
12	(0.9, 0.1, 0.5)	0.5	(1, 0, 0.5)	0.5
13	(1, 0.9, 0.5)	0.5	(1, 1, 0.5)	0.5

また、量子化集合の拡大を求めると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 S_1^* &= \{(0, 0, 0)\} \\
 S_0^* &= \{(0, 0, 1)\} \\
 S_U^* &= \{(0.5, 0, 0), (0.5, 1, 0), (0.5, 0, 1), \\
 &\quad (0.5, 1, 1), (0, 0.5, 0), (0, 0.5, 1), \\
 &\quad (1, 0.5, 0), (1, 0.5, 1), (0, 0, 0.5), \\
 &\quad (1, 0, 0.5), (1, 1, 0.5), (0.5, 0.5, 0), \\
 &\quad (0.5, 0.5, 1), (0.5, 0, 0.5), (0.5, 1, 0.5), \\
 &\quad (0, 0.5, 0.5), (1, 0.5, 0.5), \\
 &\quad (0.5, 0.5, 0.5)\} \\
 S^* &= S_1^* \cup S_0^* \cup S_U^*
 \end{aligned}$$

以上により、 $S_1^* \cap S_0^* = \phi$, $S_0^* \cap S_U^* = \phi$, $S_U^* \cap S_1^* = \phi$ が成立し（拡大の直交性）、かつ $S_{0.5} \cap V_2^3 = \phi$ （正規性）が成立していることから、 f はファジィ論理関数の論理式で実現可能であることがわかる。 \square

5.4 不完全指定ファジィ論理関数の簡単化

本節では、5.2節と5.3節の事実をもとに、加法標準形で表現された不完全指定ファジィ論理関数に対して実現可能性が仮定された際、最も簡単な論理式表現を求めるためのアルゴリズムを提案し、そのアルゴリズムが正しいことを保証する定理を与える。

5.4.1 提案アルゴリズム

[定義 56] 積項 α が完全指定ファジィ論理関数 f の内項であるとは、 $\forall A \in V_3^n (\alpha(A) \leq f(A))$ なることである。もし α から一文字でも取り去ると、もはや f の内項でなくなるとき α を主項という。□

[定義 57] ファジィ論理関数の加法標準形で、積項数が最少であり、積項数が同じなら文字数が最少であるものを最簡加法形式という。□

最簡加法形式を求めるアルゴリズムを述べる前に、 $S_{0.5}$ を次のような三つの集合に分割する。

$$\begin{aligned} S_{0.5}^1 &= \{A \in S_{0.5} \mid \exists B (B \in S_1^*, B \preceq A)\} \\ S_{0.5}^0 &= \{A \in S_{0.5} \mid \exists B (B \in S_0^*, B \preceq A)\} \\ S_{0.5}^d &= (S_{0.5} - S_{0.5}^1) - S_{0.5}^0 \end{aligned}$$

また、 S_d^* の元であり、かつ V_2^n である元の集合を次のように定義する（図 5.2 参照）。

$$D = (V_2^n - S_1^*) - S_0^*$$

一般的に、完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式は、すべての主項を求め、その中から与えられたファジィ論理関数を表現する最少数の主項の組み合わせを求めることによって得られる。これに対して、不完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式を求める問題は、 V_3^n の集合の部分集合に、簡単化の各段階で都合の良い完全指定ファジィ論理関数を考えることにより、複数の完全指定ファジィ論理関数の主項を求める手順と最小被覆問題に帰着することができる。以下がその手順である。

- (1) 与えられた写像 $f: A \subset V^n \rightarrow V$ に対して、 $A = \{A_i \mid A_i \in V^n\}$ の各 A_i に対して量子化集合 S_1, S_0 および $S_{0.5}$ を求める。
- (2) S_0^* と $S_{0.5}^*$ のみにより特徴づけられる、 D における関数値を 1 とみなした完全指定ファジィ論理関数の単積項の主項を求める。
- (3) D における関数値を 0 と見なし、 $S_0^* \cup D$ により特徴づけられる完全指定ファジィ論理関数の相補項の主項を求める。
- (4) 与えられた不完全指定ファジィ論理関数の主加法標準形の積項をすべて包含する、最も簡単な主項の組み合わせを (2), (3) で求められた主項の中から選び出す（最小被覆問題）。

以下のアルゴリズム 8は、(1)~(4) の手順を具体化するものである。

[アルゴリズム 8]

(STEP 1) $A = \{A_i | A_i \in V^n\}$ に対する量子化集合 S_1 , S_0 および $S_{0.5}$ を求める。

(STEP 2) 定義 51(5.1) により S_0 の元 B_1, B_2, \dots, B_b に対応する単和項を $\beta_1^{B_1}, \beta_2^{B_2}, \dots, \beta_b^{B_b}$,
 定義 51(5.2) により $S_{0.5}^1 \cup S_{0.5}^d$ の元 C_1, C_2, \dots, C_c に対応する相補最大項を $\beta_1^{C_1}, \beta_2^{C_2}, \dots, \beta_c^{C_c}$
 とするとき $\beta_1^{B_1} \cdot \beta_2^{B_2} \cdot \dots \cdot \beta_b^{B_b} \cdot \beta_1^{C_1} \cdot \beta_2^{C_2} \cdot \dots \cdot \beta_c^{C_c}$ は、与えられた不完全指定ファジィ
 論理関数の主乗法標準形である。これを加法標準形に展開し、

$$\alpha_1^P \vee \alpha_2^P \vee \dots \vee \alpha_s^P \vee \alpha'_1 \vee \alpha'_2 \vee \dots \vee \alpha'_t$$

を得る。ここで α_i^P ($i = 1, \dots, s$) は単積項であり、 α'_j ($j = 1, \dots, t$) は相補項である。

(STEP 3) 定義 51(5.1) により S_0 の元 B_1, B_2, \dots, B_b に対応する単和項を $\beta_1^{B_1}, \beta_2^{B_2}, \dots, \beta_b^{B_b}$,
 定義 51(5.1) により D の元 D_1, D_2, \dots, D_d に対応する単和項を $\beta_1^{D_1}, \beta_2^{D_2}, \dots, \beta_d^{D_d}$ とす
 るとき、 $\beta_1^{B_1} \cdot \beta_2^{B_2} \cdot \dots \cdot \beta_b^{B_b} \cdot \beta_1^{D_1} \cdot \beta_2^{D_2} \cdot \dots \cdot \beta_d^{D_d}$ を加法標準形に展開して、

$$\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_u \vee \gamma_1^P \vee \gamma_2^P \vee \dots \vee \gamma_v^P$$

を得る。但し、 γ_i ($i = 1, \dots, u$) は単積項であり、 γ_j^P ($j = 1, \dots, v$) は相補項である。

(STEP 4) 定義 51(5.1) により S_1 の元 A_1, A_2, \dots, A_a に対応する単積項が $\alpha_1^{A_1}, \alpha_2^{A_2}, \dots, \alpha_a^{A_a}$
 であり、定義 51(5.2) により $S_{0.5}^0 \cup S_{0.5}^d$ の元 E_1, E_2, \dots, E_e の元に対応する相補最小項
 を $\alpha_1^{E_1}, \alpha_2^{E_2}, \dots, \alpha_e^{E_e}$ とする。このとき、これらをすべて被覆する組み合わせを STEP 2
 で得られた $\alpha_1^P, \alpha_2^P, \dots, \alpha_s^P$ と STEP 3 で得られた $\gamma_1^P, \gamma_2^P, \dots, \gamma_v^P$ から選び出す。ただし、
 $\gamma_1^P, \gamma_2^P, \dots, \gamma_v^P$ の積項が $\alpha_1^{A_1}, \alpha_2^{A_2}, \dots, \alpha_a^{A_a}$ の積項を被覆することはない。選ばれた積項
 が $\xi_1^P, \xi_2^P, \dots, \xi_x^P$ であるとき、 $\xi_1^P \vee \xi_2^P \vee \dots \vee \xi_x^P$ が求める最簡加法形式である。

(アルゴリズム終)

5.4.2 アルゴリズムが正しいことの証明

ここではアルゴリズム 8が正しいことを保証する定理を与える。

[補題 28] [10] 完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式は主項の和で表現される。 (証明略)

[補題 29] [46] (ファジィ論理における Nelson の定理:4章の定理 33に相当) $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_\ell$
 (ただし β_i は単和項または相補最大項) が完全指定ファジィ論理関数 f の主乗法標準形であ
 るとする。このとき f を加法標準形に展開して $f = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_m$ (ただし α_j は単積項
 または相補項) を得たとする。このとき得られた加法標準形 $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_m$ は f のすべ
 ての主項の和である。

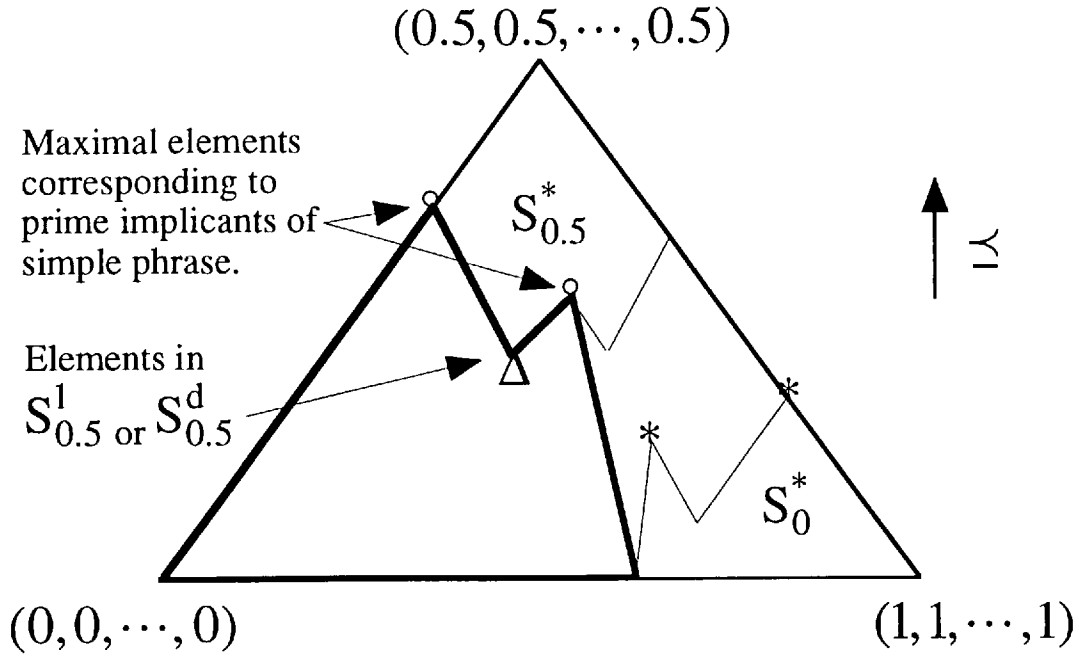


図 5.5: 単積項の主項

(証明略)

[定理 39] アルゴリズム 8により得られた加法標準形 $\xi_1^P \vee \xi_2^P \vee \cdots \vee \xi_x^P$ は, 与えられた写像 $f : A \subset V^n \rightarrow V$ を表現する不完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式である.

(証明) STEP 1で得られる量子化集合 $S_1, S_0, S_{0.5}$ と定義 51の対応関係から, $S_1, S_0, S_{0.5}$ に対応する積項, 和項を求めることができる.

STEP 2では, 最簡加法形式に現れる単積項の候補を求める. この際, 主乘法標準形について考える. $S_{0.5}^0$ の元に対応する相補最大項は, 補題 26, 補題 27により S_0 の元に対応する単和項を包含するので, 主乘法標準形では, 省略されてしまい現れない. したがって, S_0 の各元に対応する単和項, $S_{0.5}^1, S_{0.5}^d$ の各元に対応する相補最大項のすべての積により主乘法標準形は構成される. ここで得られた主乘法標準形を完全指定ファジィ論理関数と見なし, 加法標準形に展開すると, 補題 29により, 得られた積項はすべて主項であり, 補題 28より最簡加法形式の積項の候補なり得る. しかしながら, ここで得られた単積項の主項は, 与えられた不完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式に現れる単積項の候補になり得るが, 相補項は, 必ずしもすべての候補が得られたわけではない. その理由は, ここで考えた主乘法標準形は, D の元すべてに対して関数値を 1 としたものであるからである. 即ち, D の上界にある元に対応する相補最小項を包含する相補項は, 補題 26および補題 27により, 単積項に包含されてしまい, 必ずしも現れないからである. 以上のことから STEP 2では, 得られた単積項の主項のみが, 与えられた不完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式の積項の候補である.

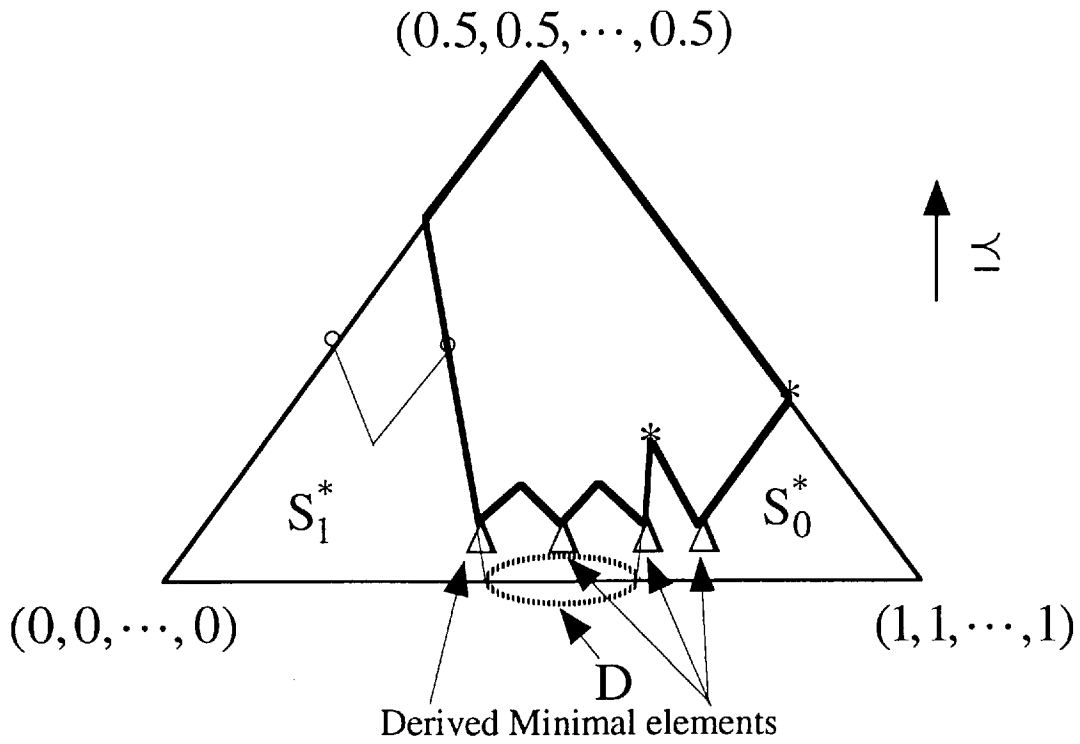


図 5.6: 相補項の主項のための極小元

STEP 3では、 D の各元に関数値 0 を割り当てる．この際、 S_0 および D の各元に単和項を対応させる． S_0 、 D の上界では、補題 26(1)により関数値は 0.5 となるので $S_{0.5}$ の元を考慮する必要はない．そして S_0 および D の各元に対応する単和項の積を完全指定ファジィ論理関数と見なして、加法標準形に展開すると、補題 29により、そのすべての主項が求められる．これらの主項のうち、相補項の主項は、 S_0 、 D の上界にある元に対応するすべての相補最小項を包含する主項である．また S_1^* に含まれる、または S_1^* の上界の元に対応する相補項は、補題 26により STEP 2で得られた単積項の主項により包含されており、与えられた不完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式には現れない．以上のことから STEP 3では、得られた相補項の主項が、与えられた不完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式の積項の候補となる．

最後に、STEP 4では、与えられた不完全指定ファジィ論理関数の主加法標準形に現れる積項と STEP 2、STEP 3で得られた主項の間で最小被覆問題を解いている．ここで選ばれた主項の和は、以上の事実から明らかに与えられた不完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式である． \square

5.5 例題

例 33で与えられた 3 変数の不完全指定ファジィ論理関数 f の最簡加法形式を求める．

STEP 1 では量子化集合を求める．例 33 より，それらは以下ようになる．

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(0, 0, 0)\} \\
S_0 &= \{(0, 0, 1)\} \\
S_{0.5} &= S_{0.5}^1 \cup S_{0.5}^0 \cup S_{0.5}^d \\
S_{0.5}^1 &= \{(0.5, 0, 0), (0, 0.5, 0), (0, 0, 0.5)\} \\
S_{0.5}^0 &= \{(0.5, 0, 1), (0, 0.5, 1), (0, 0, 0.5)\} \\
S_{0.5}^d &= \{(0.5, 1, 0), (0.5, 1, 1), (1, 0.5, 0), \\
&\quad (1, 0.5, 1), (1, 0, 0.5), (1, 1, 0.5)\}
\end{aligned}$$

また，このとき

$$\begin{aligned}
D &= \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), \\
&\quad (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}
\end{aligned}$$

である．

STEP 2 では， S_0 に対応する単和項， $S_{0.5}^1 \cup S_{0.5}^d$ に対応する相補最大項の積 $(x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3)(x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \sim x_3)(x_1 \vee \sim x_1 \vee \sim x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)(\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee x_3)(\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)(\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \sim x_3)(\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee x_3 \vee \sim x_3)$ を加法標準形に展開する．これにより得られる単積項の主項 (α_i^P) は六つあり， $\sim x_1 x_2$ ， $x_1 x_2 x_3$ ， $x_1 x_2 \sim x_3$ ， $x_1 \sim x_2 x_3$ ， $x_1 \sim x_2 \sim x_3$ ， $\sim x_1 \sim x_2 \sim x_3$ である．

STEP 3 では， S_0 と D に対応する単和項の積 $(x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3)(x_1 \vee \sim x_2 \vee x_3)(\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)(\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3)(\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)$ を加法標準形に展開することにより得られる相補項の主項 (γ_j^P) は三つあり， $x_1 \sim x_1$ ， $x_2 \sim x_2$ ， $x_3 \sim x_3$ である．

STEP 4 の最小被覆問題を解く．与えられた f の主加法標準形は，

$$\begin{aligned}
f_{CD} &= \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_1 \sim x_2 x_3 \\
&\quad \vee x_1 x_2 \sim x_2 x_3 \vee \sim x_1 \sim x_2 x_3 \sim x_3 \\
&\quad \vee x_1 \sim x_1 x_2 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_1 x_2 x_3 \\
&\quad \vee x_1 x_2 \sim x_2 \sim x_3 \vee x_1 x_2 \sim x_2 x_3 \\
&\quad \vee x_1 \sim x_2 x_3 \sim x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \sim x_3
\end{aligned}$$

であり，積項数 10，文字数 39 である．STEP 2，STEP 3 で得られた主項と，主加法標準形の積項との間で最小被覆問題を解くことにより，以下の積項数 5，文字数 12 の最簡加法形式を得る．

$$\begin{aligned}
f &= \sim x_1 x_2 \vee \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_2 x_3 \\
&\quad \vee x_2 \sim x_2 \vee x_3 \sim x_3
\end{aligned}$$

5.6 不完全指定ファジィ論理関数の代数的構造

本節では，不完全指定ファジィ論理関数の代数的構造を明らかにし，その中での最簡加法形式，最簡乗法形式の位置付けを明らかにする．

[定義 58] f_1, f_2 がある与えられた不完全指定ファジィ論理関数 f と同じ $S_1^*, S_0^*, S_{0.5}^*$ をもつ不完全指定ファジィ論理関数であるとする. このとき f_1 と f_2 は互いに **T-equivalent**[†]であるという. また, f と T-equivalent な関数の集合を $T - eq(f)$ と記す. \square

[定義 59] ファジィ論理関数の乗法標準形で, 和項数が最少であり, 和項数が同じなら文字数が最少であるものを**最簡乗法形式**という. \square

f をある不完全指定ファジィ論理関数とする. $T - eq(f)$ に含まれるいくつかの特徴的な関数を以下のように記す.

- $f_{CD} = F_{SP} \vee F_{CP}$ 主加法標準形 (ただし F_{SP} は単積項の和であり, F_{CP} は相補最小項の和)
- $f_{CC} = F_{SC} \cdot F_{CC}$ 主乗法標準形 (ただし F_{SC} は単和項の積であり, F_{CC} は相補最大項の積)
- $f_{C0} = F_{SP} \vee (x_1 \cdot \sim x_1 \vee \cdots \vee x_n \cdot \sim x_n) \cdot F_{SC}$
- $f_{C1} = F_{SP} \vee (x_1 \vee \sim x_1) \cdots (x_n \vee \sim x_n) \cdot F_{SC}$
- f_{M0} 最簡乗法形式
- f_{M1} 最簡加法形式

[定理 40] $T - eq(f)$ は \leq の順序に関して, 図 5.7 に示す構造を成す.

(証明) f_{CD}, f_{CC} が \leq の順序に関して, 最小元, 最大元にあることは, 定理 36 により既に証明されている.

f_{C1} は, $S_d^* - D$ の元に関数値 0.5 を, D の元に関数値 1 を割り当てたものである. また f_{C0} は, $S_d^* - D$ の元に関数値 0.5 を, D の元に関数値 0 を割り当てた関数である. このことから $f_{C0} \leq f_{C1}$ であることは明らかである.

f_{M1} は, 性質 1, 性質 2 の制約を満たす範囲で, $S_d^* - D$ に最も多く関数値 1 と 0.5 を割り当てたものであり, D の元には関数値 1 を割り当てたものである. また, f_{M0} は, 性質 1, 性質 2 の制約を満たす範囲で, $S_d^* - D$ に最も多く関数値 0 と 0.5 を割り当てたものであり, D の元には関数値 0 を割り当てたものである. よって $f_{M0} \leq f_{M1}$ である.

f_{C1} と f_{M1} に関しては, \leq の順序に関して, 一般に比較不能である. 表 5.2 に示すように, $S_d^* - D$ においては, $f_{C1} \leq f_{M1}$ であるが, D においては, $f_{M1} \leq f_{C1}$ が成立するからである. したがって, これらの不等式の等号が成立する場合を除いて, 一般にこの二つの関数は比較不能である. f_{C0}, f_{M0} に関しても同様である. \square

定理 40 により $T - eq(f)$ の代数的構造が明らかされ, その構造の中で最簡加法形式 (f_{M1}) および最簡乗法形式 (f_{M0}) の位置付けが明らかにされた. また, 定理 40 の証明の過程から, D へ

[†]T-は ternary を意味する.

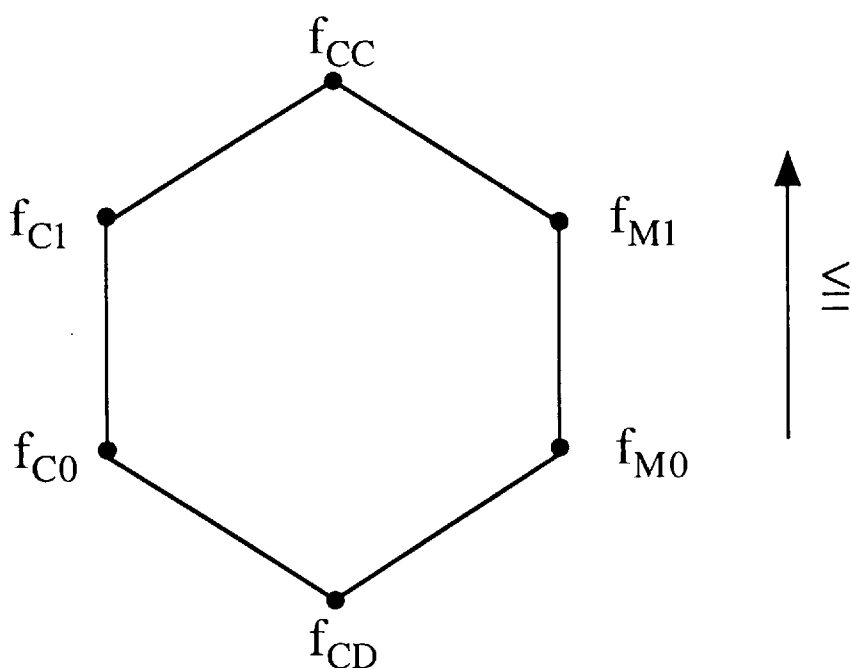


図 5.7: $T - eq(f)$ の代数的構造

表 5.2: f_{C1} と f_{M1} の関数値

	f_{C1}	f_{M1}
$S_d^* - D$	0.5	1 または 0.5
D	1	1 または 0

の関数値の割り当て方により, f_{C0} および f_{C1} , f_{M0} および f_{M1} の間に密接な関連があることもわかる. この事実から以下の定理が導きだされる.

[定理 41] $D = \phi$ であるとき, およびそのときに限り, $f_{C0} = f_{C1}$ かつ $f_{M0} = f_{M1}$ である.

(証明) 定理 40 の証明より明らかである. □

5.7 むすび

本章では, 実現可能性を仮定した際に, 不完全指定ファジィ論理関数の最簡加法形式を得る手法を定式化し, 簡単化アルゴリズムを提案した. また, 不完全指定ファジィ論理関数の代数的構造も明らかにした. これらは, 今後, ファジィ論理回路の設計, ファジィ論理関数による知識獲得, データ・マイニング等の工学的応用において有効な手段となり得ると考えられる.

6 章

不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化と ファジィ論理関数の簡単化への応用

6.1 はじめに

正則 3 値論理関数 [8] は、2章 2.3節で述べたように、クリーネの正則性の概念 [1] を 3 値論理関数に拡張した論理関数であり、工学的には、フェールセーフ論理回路の設計や解析に既に応用されており、数学的、特にアルゴリズム論において、有用な役割を果たす論理関数と考えられている。

これまでの正則 3 値論理関数研究を概観してみると、完全指定された正則 3 値論理関数に関するものがほとんどであり [8, 19, 17]、不完全指定正則 3 値論理関数に関するものは、簡単化の問題も含めて、筆者の知る限りでは報告されていない。

本章の第 1 の目的は、不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化の問題を解決することである。そして、第 2 の目的は、不完全指定されたファジィ論理関数に、これまでの研究とは別の観点から新しい定義を与え、本章で提案する不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化アルゴリズムにより不完全指定ファジィ論理関数の簡単化を行うことである。そして最後に、不完全指定ファジィ論理関数の新しい定義と簡単化アルゴリズムを、最も基本的なファジィ論理回路であるファジィPLA (Programable Logic Array) [26] の設計に適用し、その効果を確認する。

正則 3 値論理関数もファジィ論理関数も定数、変数と論理結合子である論理積 (\cdot)、論理和 (\vee)、否定 (\sim) で構成される論理式で表現される論理関数である。そして両関数ともに正則性 (regularity) と呼ばれる、あいまいさに関する単調性と同値な性質を持っている。しかしながら、ファジィ論理関数に関しては、更に強い性質として正規性 (normality) [7, 9] と呼ばれる性質を持っている。この性質は、入力値に対して、関数の出力値が指定されている場合と指定されていない場合の双方の場合に対して、入力が V_2^n の元である場合には、関数の出力値は、必ず V_2 の元、すなわち、0 または 1 の何れかの値を取ることを要請する。この性質は、「不完全指定」という観点から考える場合、強すぎる性質と考えられる。この点に着目し、本章では、不完全指定ファ

ジイ論理関数の新しい定義として、関数の入出力関係が指定されている入力値に対してのみ正規性を満たし、指定されていない入力値に対しては満たす必要はないという定義を採用している。この定義を採用することにより、写像としての不完全指定されたファジイ論理関数は、定数として $0, 1/2, 1$ を持つ定数係数をもったファジイ論理関数となり、その論理式表現は、正則 3 値論理関数と同一となる。このことは、代数的な観点からも、ファジイ論理関数は本質的に 3 値であることから [9, 11, 31]、新しい定義は自然な定義であると考えられる。結果的に、本章で新しく定義された不完全指定ファジイ論理関数の簡単化の問題は、正則 3 値論理関数の簡単化の問題に帰着される。

6.2 諸準備

本節では、2 章で述べた正則 3 値論理関数とファジイ論理関数の定義、性質と重複する部分もあるが、本章全体を通して用いられる概念や用語を統一するために述べる。

以降、真理値の集合として $V_3 = \{0, 1/2, 1\}$, $V_2 = \{0, 1\}$, $V = [0, 1]$ を用いる。

[定義 60] n 変数の正則 3 値論理関数は V_3^n から V_3 への写像であり、以下で定義される論理式で表現される。

- (1) 定数 $0, 1/2, 1$, 変数 $x_i (i = 1, \dots, n)$ は論理式である。
- (2) F と G が論理式であれば、 $F \cdot G, F \vee G, \sim F$ も論理式である。
- (3) 論理式は (1), (2) で定義されるもののみである。

ここで論理結合子は $x \cdot y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, and $\sim x = 1 - x$ と解釈するものとする。また、定数 $0, 1/2, 1$ は 0 変数の関数と解釈するものとする。□

[定義 61] n 変数のファジイ論理関数は、 V^n から V への写像であり、以下で定義される論理式で表現される。

- (1) 定数 $0, 1$, 変数 $x_i (i = 1, \dots, n)$ は論理式である。
- (2) F と G が論理式であれば、 $F \cdot G, F \vee G, \sim F$ も論理式である。
- (3) 論理式は (1), (2) で定義されるもののみである。

ここで論理結合子は $x \cdot y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, and $\sim x = 1 - x$ と解釈するものとする。また、定数 $0, 1$ は 0 変数の関数と解釈するものとする。□

以降、論理積の記号 (\cdot) は省略されることがある。

[定義 62] 1 と 0 は、それぞれ「真」と「偽」を表す真理値である。このとき $1/2$ は、 $V_3 = \{0, 1/2, 1\}$ と $V = [0, 1]$ の双方において、最も中間の値である。それゆえ、 $1/2$ は、もっともあいまい

な状態であると考えることができる。この事実から、あいまいさに関する半順序関係 \preceq を以下のように定義する。

$x(z)$ と $y(w)$ を $V_3(V)$ の元とする。このとき、 $x \preceq y (z \preceq w)$ であるとは、 $0 \leq x \leq y \leq 1/2$ ($0 \leq z \leq w \leq 1/2$) または $1 \geq x \geq y \geq 1/2$ ($1 \geq z \geq w \geq 1/2$) が成立するとき、およびそのときに限る。

さらにこの半順序関係 \preceq を以下のように n 次元の場合に拡張する。 $X = (x_1, \dots, x_n)$ ($Z = (z_1, \dots, z_n)$) と $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ($W = (w_1, \dots, w_n)$) を、それぞれ $V_3^n(V^n)$ の元とする。このとき、 $X \preceq Y (Z \preceq W)$ は、 $x_i \preceq y_i (z_i \preceq w_i)$ が任意の i について成立することをいう。

□

[性質 7] (正則性) f を正則 3 値論理関数とし、 g をファジィ論理関数とする。このとき、 $\forall X, Y \in V_3^n$ に対して $X \preceq Y$ ならば、 $f(X) \preceq f(Y)$ が成立する。同様に $\forall Z, W \in V^n$ に対して $Z \preceq W$ ならば、 $g(Z) \preceq g(W)$ が成立する。

□

[性質 8] (正規性) f をファジィ論理関数とする。 $X \in V_2^n$ であれば $f(X) \in V_2$ である。

□

[性質 9] f_1 と f_2 をファジィ論理関数とする。このとき、 $\forall X \in V^n (f_1(X) = f_2(X))$ と $\forall Y \in V_3^n (f_1(Y) = f_2(Y))$ は同値である。

□

性質 9 より、ファジィ論理関数は、本質的に 3 値論理関数であることがわかる。このところから以降、ファジィ論理関数の定義域を V_3^n と見なすことにする。

[定義 63] 変数 x_i と、その否定 $\sim x_i$ を文字という。文字と定数の論理積を積項といい、論理和を和項という。

□

[定義 64] 正則 3 値論理関数とファジィ論理関数の積項（和項）は以下の 3 種類に分類される。

タイプ P1(C1) いかなる i に対しても $x_i \cdot \sim x_i (x_i \vee \sim x_i)$ のような変数の組を持たず、定数として $1/2$ を持たない積項（和項）。

タイプ P2(C2) いかなる i に対しても $x_i \cdot \sim x_i (x_i \vee \sim x_i)$ のような変数の組を持たず、定数として $1/2$ を持つ積項（和項）。

タイプ P3(C3) 少なくとも 1 組の $x_i \cdot \sim x_i (x_i \vee \sim x_i)$ のような変数の組を持つもの。

□

ここで、もし f が正則 3 値論理関数であれば、 f には定義 64 すべてのタイプの積項（和項）が現れることがあるが、もし f がファジィ論理関数であれば、タイプ P1(C1) とタイプ P3(C3) の積項（和項）のみが現れる。

[定義 65] タイプ P1(C1) の積項 (和項) は単積項 (単和項) と呼ばれる. タイプ P2(C2) の積項 (和項) は $1/2$ 単積項 ($1/2$ 単和項) と呼ばれる. $1/2$ 単積項 ($1/2$ 単和項) で, すべての変数を持つものは $1/2$ 最小項 ($1/2$ 最大項) と呼ばれる. タイプ P3(C3) の積項 (和項) は相補項 (相補和項) と呼ばれる. 相補項 (相補和項) で, すべての変数を持つものは相補最小項 (相補最大項) と呼ばれる. \square

正則 3 値論理関数, ファジィ論理関数に対して, $x_i \cdot \sim x_i \leq 1/2 \leq x_j \vee \sim x_j$ が必ず成立することから, $1/2$ 単積項 ($1/2$ 単和項), 相補項 (相補和項) は, $1/2$ 最小項 ($1/2$ 最大項) の論理和 (論理積) に展開可能である.

[定義 66] 正則 3 値論理関数 f が単積項 (単和項), $1/2$ 最小項 ($1/2$ 最大項), 相補最小項 (相補最大項) の論理和 (論理積) で表現されているとき (ただし, 他の積項 (和項) に包含される (包含する) ものは省略する), f は主加法標準形 (主乗法標準形) で表現されているという. また, 同様にファジィ論理関数 g が単積項 (単和項), 相補最小項 (相補最大項) の論理和 (論理積) で表現されているとき (ただし, 他の積項 (和項) に包含される (包含する) ものは省略する), g は主加法標準形 (主乗法標準形) で表現されているという.

[性質 10] 任意の正則 3 値論理関数およびファジィ論理関数は, 主加法標準形 (主乗法標準形) で, 積項 (和項) の順番を無視して一意に表現可能である. \square

[性質 11] f を正則 3 値論理関数とする.

- (1) もし $\exists X \in V_3^n (f(X) = 1)$ ならば, $\forall Y \preceq X (f(Y) = 1)$.
- (2) もし $\exists X \in V_3^n (f(X) = 0)$ ならば, $\forall Y \preceq X (f(Y) = 0)$.
- (3) もし $\exists X \in V_3^n (f(X) = 1/2)$ ならば $\forall Y \succeq X (f(Y) = 1/2)$.

以上の性質は, ファジィ論理関数にも成立する. \square

f を正則 3 値論理関数 (ファジィ論理関数) とする. f は V_3^n の元に対して三つの値 (0, $1/2$, 1) のうち一つの値を取る. それ故, f の定義域の V_3^n は, f の値により, 以下のように三つの部分集合に分割可能である.

- $S_1^* = \{A \in V_3^n | f(A) = 1\}$
- $S_0^* = \{A \in V_3^n | f(A) = 0\}$
- $S_{1/2}^* = \{A \in V_3^n | f(A) = 1/2\}$.

[定義 67] 元 $(a_1, \dots, a_n) \in V_3^n$ と単積項 $\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ (単和項 $\beta = x_1^{a_1} \vee \cdots \vee x_n^{a_n}$) の間の対応を以下のように定義する.

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) & \text{for } a_i = 1 \\ 1 & (0) & \text{for } a_i = 1/2 \\ \sim x_i & (x_i) & \text{for } a_i = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

同様に元 $(a_1, \dots, a_n) \in V_2^n$ と $1/2$ 最小項 $\alpha = 1/2 \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ ($1/2$ 最大項 $\beta = 1/2 \vee x_1^{a_1} \vee \cdots \vee x_n^{a_n}$) の間の対応を以下のように定義する.

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) \text{ for } a_i = 1 \\ \sim x_i & (x_i) \text{ for } a_i = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

同様に $(a_1, \dots, a_n) \in V_3^n - V_2^n$ と相補最小項 $\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ (相補最大項 $\beta = x_1^{a_1} \vee \cdots \vee x_n^{a_n}$) の間の対応を以下のように定義する.

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i & (\sim x_i) \text{ for } a_i = 1 \\ x_i \cdot \sim x_i & (x_i \vee \sim x_i) \text{ for } a_i = 1/2 \\ \sim x_i & (x_i) \text{ for } a_i = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

□

f を正則 3 値論理関数とし, f の主加法標準形と主乗法標準形が以下のように表されているとする.

- 主加法標準形: $f = \alpha_1^1 \vee \cdots \vee \alpha_s^1 \vee \alpha_1^{1/2} \vee \cdots \vee \alpha_t^{1/2}$ (ただし α_i^1 は単積項, $\alpha_i^{1/2}$ は $1/2$ 最小項または相補最小項).
- 主乗法標準形: $f = \beta_1^0 \cdots \beta_u^0 \cdot \beta_1^{1/2} \cdots \beta_v^{1/2}$ (ただし β_i^0 は単和項, $\beta_j^{1/2}$ は $1/2$ 最大項または相補最大項).

このとき, 以下の性質が成り立つ.

〔性質 12〕 (1) $S_1^* = \bigcup_{\forall i} \{X \in V_3^n | X \preceq T(\alpha_i^1)\}$

(2) $S_0^* = \bigcup_{\forall i} \{X \in V_3^n | X \preceq T(\beta_i^0)\}$

(3) $S_{1/2}^* = \left(\bigcup_{\forall j} \{X \in V_3^n | X \succeq T(\alpha_j^{1/2})\} \right) \cup \left(\bigcup_{\forall j} \{X \in V_3^n | X \succeq T(\beta_j^{1/2})\} \right)$

$\cup \{X \in V_3^n | \exists Y_1 \in S_1^*, \exists Y_0 \in S_0^*, Y_1 \preceq X, Y_0 \preceq X\}.$

ここで T は, 定義 67 により積項または和項から対応する V_3^n の元への写像である.

以上の性質は, ファジィ論理関数に対しても同様に成立する.

□

図 6.1 は, 正則 3 値論理関数の S_1^* , S_0^* , and $S_{1/2}^*$ の間の関係を示しており, 図 6.2 は, ファジィ論理関数の S_1^* , S_0^* , and $S_{1/2}^*$ の間の関係を示している. ただし, \circ と $*$ はそれぞれ, S_1^* と S_0^* の極大元を表しており, Δ は $S_{1/2}^*$ の極小元を表している. 正則 3 値論理関数の $S_{1/2}^*$ の元は, 図 6.1 のように V_2^n に含まれることがある. しかしながら, ファジィ論理関数の $S_{1/2}^*$ の元は, V_2^n に含まれることはなく, 正規性 (性質 8) により, 図 6.2 のように必ず $V_3^n - V_2^n$ に含まれている.

以降, S_1^* の極大元の集合を S_1 , S_0^* の極大元の集合を S_0 , $S_{1/2}^*$ の極小元の集合を $S_{1/2}$ で表す.

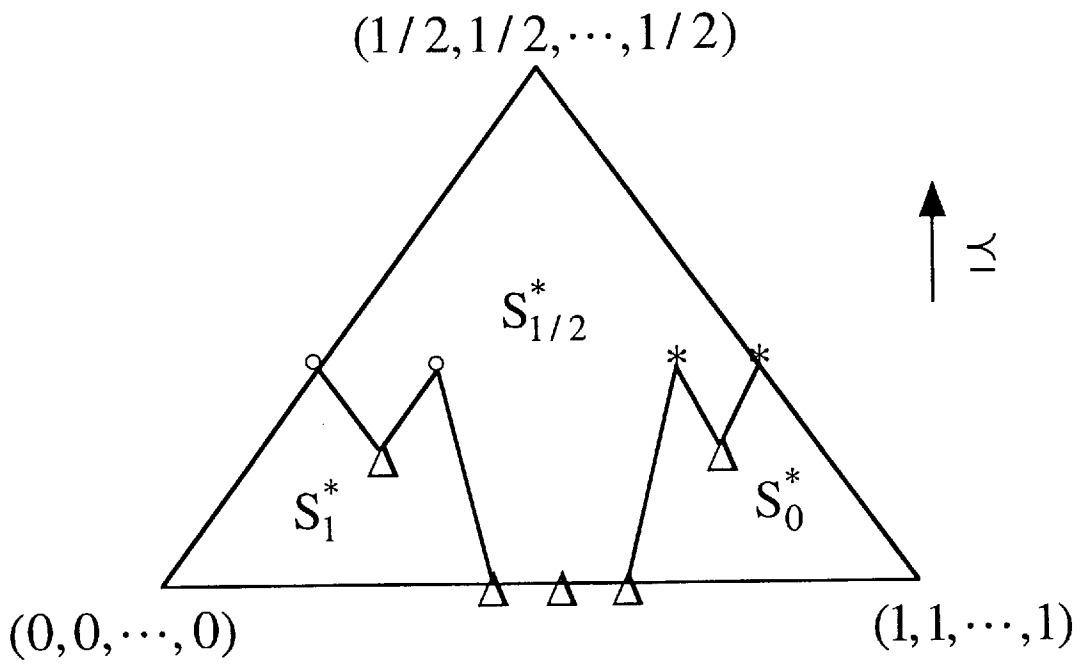


図 6.1: 正則 3 値論理関数

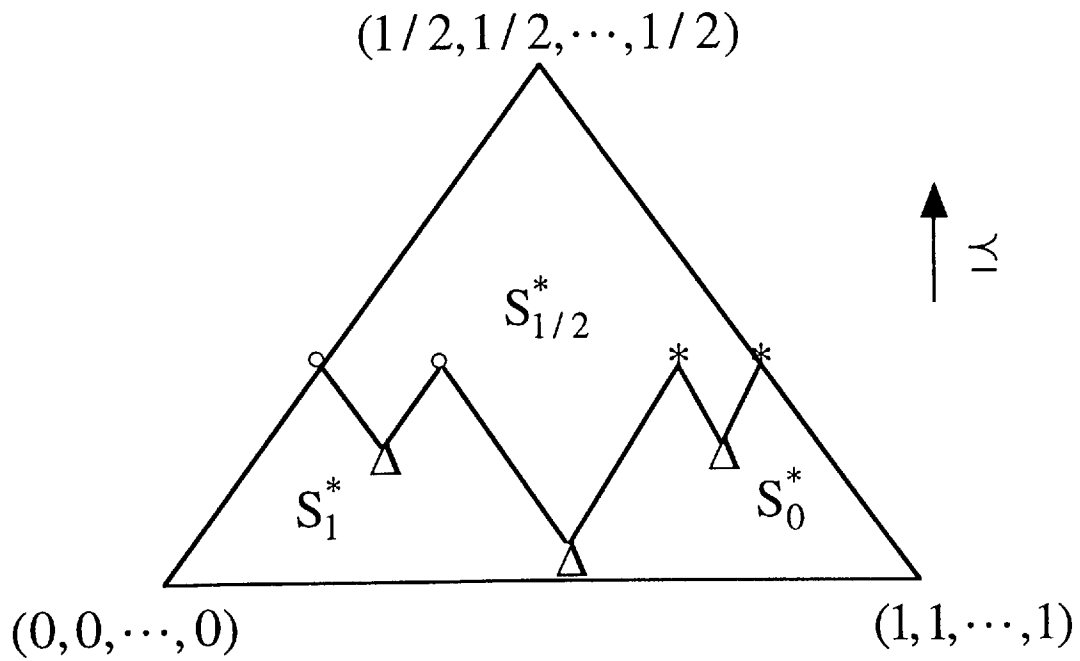


図 6.2: ファジィ論理関数

性質 11により, S_1^* は, S_1 が与えられれば一意に決定できる. 同様にしって S_0^* , $S_{1/2}^*$ もそれぞれ S_0 , $S_{1/2}$ が与えられれば一意に決定できる. このことと性質 12により, 以下の定理が直ちに導かれる.

[定理 42] f を正則 3 値論理関数とし, S_1 (S_0) の元を定義 67(1) により単積項 (単和項) にさせる. そして $S_{1/2}$ の元を定義 67(2)(3) により $1/2$ 最小項または相補最小項 ($1/2$ 最大項または相補最大項) に対応させる. このとき, S_1 (S_0), $S_{1/2}$ に対応する積項 (和項) を作ることで, f の主加法標準形 (主乗法標準形) を得ることができる. ただし, 他の積項 (和項) に包含される (包含する) ものは省略するものとする.

同様の関係がファジィ論理関数にも成立する.

(証明) 文献 [45] の定理 6 の逆により証明できる. □

6.3 不完全指定正則 3 値論理関数と不完全指定ファジィ論理関数

いかなる正則 3 値論理関数, ファジィ論理関数に対しても, 主加法標準形, 主乗法標準形は一意に決定できる. それに加えて, 性質 12により S_1^* , S_0^* , $S_{1/2}^*$ は, V_3^n を直和分割する. 即ち, $S_1^* \cup S_0^* \cup S_{1/2}^* = V_3^n$ and $S_i^* \cap S_j^* = \emptyset (i, j \in \{0, 1/2, 1\}, i \neq j)$ が成立する. それゆえ, 不完全指定正則 3 値論理関数, 不完全指定ファジィ論理関数に対して, 以下のような関係が成立する.

$$S_1^* \cup S_0^* \cup S_{1/2}^* \subset V_3^n, \quad S_1^* \cup S_0^* \cup S_{1/2}^* \neq V_3^n, \quad S_i^* \cap S_j^* = \emptyset \quad (i, j \in \{0, 1/2, 1\}, i \neq j)$$

この場合, $V_3^n - (S_1^* \cup S_0^* \cup S_{1/2}^*)$ 上の関数値は指定されていない. 即ち, don't care である. 以降 $V_3^n - (S_1^* \cup S_0^* \cup S_{1/2}^*)$ を S_d^* で表す.

以上で述べたように, 不完全指定正則 3 値論理関数と不完全指定ファジィ論理関数の S_1^* , S_0^* , $S_{1/2}^*$ の間の関係は, 図 6.3 のようになる.

以上では, 正則 3 値論理関数とファジィ論理関数の両方のついて述べてきたが, 以下では不完全指定ファジィ論理関数のことのみについて述べる.

不完全指定ファジィ論理関数の S_d^* 上の関数値は, 本質的には don't care であるはずである. しかしながら, ファジィ論理関数の従来の定義によると, 完全指定の場合も不完全指定の場合も, V_2^n 上では, 正規性 (性質 8) が必ず満たされなくてはならない. それゆえ, 不完全指定ファジィ論理関数に対して, $D = S_d^* \cap V_2^n$ (図 6.3 参照) 上の関数値は, 0 または 1 に固定されてしまう (この条件は, 5 章におけるファジィ論理関数の定義および簡単化アルゴリズムでは満たされていた.). しかしながら, この制約は, 不完全指定ファジィ論理関数を扱う際には, 強すぎると考えられる. それ故, 以下では, D 上での関数値を, 従来とは異なった観点から解釈する. D 上では, 必ずしも正規性が成立せず, $1/2$ を関数値として取ることを許し, D 上での関数値は本来の意味の don't care であると考えことにする. ファジィ論理関数は, 本質的には 3 値論理関数であることから, この解釈は自然な解釈であると考えられる.

以上のことから, 不完全指定ファジィ論理関数の新しい定義が可能となる.

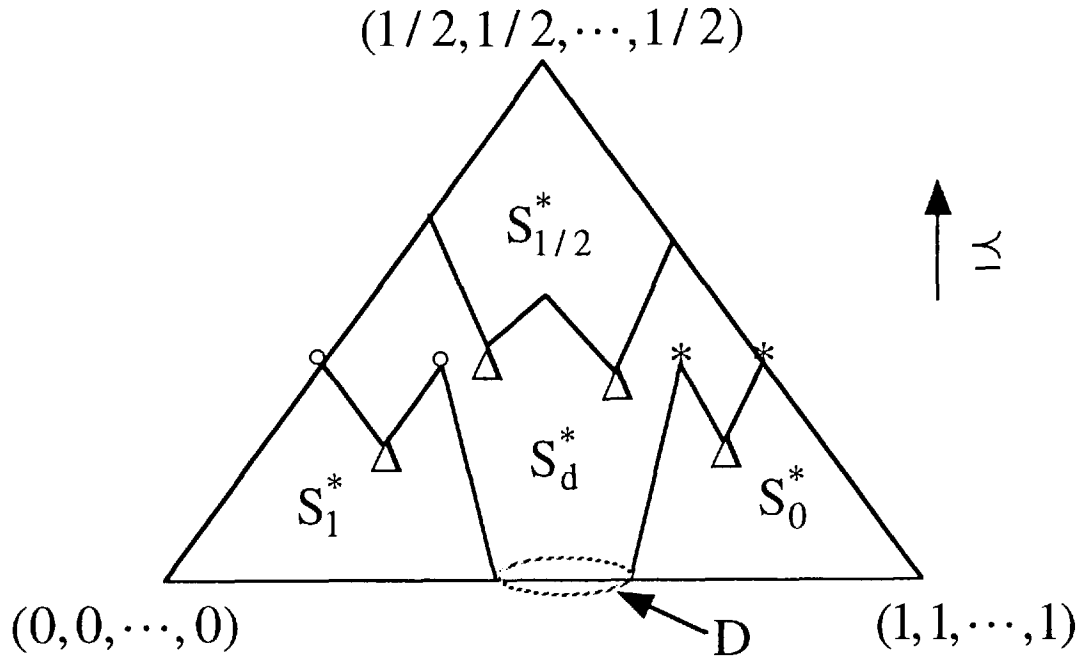


図 6.3: 不完全指定正則 3 値論理関数と不完全指定ファジィ論理関数

[定義 68] 不完全指定ファジィ論理関数は、以下のような条件を満たす関数である。

- (1) 正則 3 値論理関数と同じ論理式で表現できる論理関数である。
- (2) 正規性は $S_1^* \cup S_0^*$ でのみ満たされる。

□

この定義により、不完全指定ファジィ論理関数は、定義 68(2) の条件の元で不完全指定正則 3 値論理関数と同じと見なして単純化アルゴリズムを考察することができる。

6.4 実現可能性と量子化

6.3節では、 $f: A \subset V_3^n \rightarrow V_3^n$ なる写像が、正則 3 値論理関数の論理式で表現可能であることを仮定して議論してきた。しかしながら、 $f: A \subset V_3^n \rightarrow V_3^n$ なる写像は、必ず論理式で表現可能であるとは限らない。

最初に定理 43 で正則 3 値論理関数が論理式で表現可能であるための条件 – 実現可能性 – を示す。

[定義 69] S_U^* は以下のように定義される。

$$S_U^* = S_{1/2} \cup \{X \in V_3^n \mid \exists Y \in S_1, \exists Z \in S_0 (Y \preceq X, Z \preceq X)\}$$

□

[定理 43] ${}^{\dagger} S_i^* \cap S_j^* = \phi \ (\forall i, j \in \{1, 0, U\}, i \neq j)$ とき、およびこのときに限り、少なくとも一つの不完全指定正則 3 値論理関数が存在する。

(証明) 文献 [27] の定理 3.5 と同様に証明できる。 \square

次に、現実の不完全指定ファジィ論理関数については、 $A \subset V^n \rightarrow V$ なる写像であり、3 値論理関数ではない。しかしながら、不完全ファジィ論理関数の $S_1(\subseteq V_3^n)$, $S_0(\subseteq V_3^n)$, $S_{1/2}(\subseteq V_3^n)$ を求めるための手法は、5章 5.3節で既に与えられている。

6.5 簡単化アルゴリズム

本節は、不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化アルゴリズムを提案する。更に、提案アルゴリズムの正当性を保証する定理を与える。

不完全指定ファジィ論理関数の簡単化の問題は、不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化アルゴリズムに帰着できることが、前節までに示されているので、このでの議論は同時に、不完全指定ファジィ論理関数の簡単化アルゴリズムでもある。

6.5.1 アルゴリズム

[定義 70] f を正則 3 値論理関数とする。もし積項 α が $\forall X \in V_3^n (\alpha(X) \leq f(X))$ を満たすならば、 α は f の内項と言われる。そして α から少なくとも一つ以上の文字または定数を取り除くと、もはや f の内項になりえない場合、 α は主項と言われる。 \square

[定義 71] f を正則 3 値論理関数とする。このとき f が最簡形式であるとは、以下の三つの条件を満たすときのことをいう。

- (1) f は加法形式で表現されている。
- (2) 積項数が最小である。
- (3) 文字数が最小である。

\square

一般的に、正則 3 値論理関数の最簡形は一意には定まらないことがある。すなわち、一つの正則 3 値論理関数に対して複数の最簡形がある場合がある。

最簡形を求めるアルゴリズムについて述べる前に、 $S_{1/2}$ を以下のような三つの部分集合に分割しておく。

- $S_{1/2}^0 = \{X \in S_{1/2} \mid \exists Y (Y \in S_0^*, Y \preceq X)\}$
- $S_{1/2}^1 = \{X \in S_{1/2} \mid \exists Y (Y \in S_1^*, Y \preceq X)\}$

[†]例は 6.6節で示される。

- $S_{1/2}^d = (S_{1/2} - S_{1/2}^0) - S_{1/2}^1.$

そして集合 D を以下のように定義する.

$$D = S_d^* \cap V_2^n.$$

一般的に, 完全指定された正則 3 値論理関数 f の最簡形は, f のすべての主項を求め, その中から定義 71 に適合する最も簡単な組み合わせを求めることにより得られる. しかしながら, 不完全指定正則 3 値論理関数の場合は, 同様の手順では一般には最簡形は求められない. 不完全指定正則 3 値論理関数の最簡形は, 簡単化の手順の各段階で, 都合の良い完全指定された正則 3 値論理関数を考え, それらの関数の主項の組み合わせの中から, 最も簡単な組み合わせを求める手順により得られる.

[簡単化アルゴリズムの概要]

- (1) 与えられた入力値 $A_i \in A$ と出力値 $f(A_i)$ から, 写像 $f: A \subset V_3^n \rightarrow V_3$ が, 正則 3 値論理関数として実現できるかを確認する.
- (2) D 上の f の関数値を 1 に割り当てる. そうすることにより, S_0 と $S_{1/2}$ によって特徴づけられる正則 3 値論理関数を完全指定された正則 3 値論理関数と見なし, そのすべての主項を求める.
- (3) D 上の f の関数値を $1/2$ に割り当てる. そして S_0 にのみにより特徴づけられる正則 3 値論理関数を, 完全指定された正則 3 値論理関数と見なし, その $1/2$ 単積項と相補項の主項を求める.
- (4) (2) と (3) で得られた主項の中から, 定義 71 に適合する最も簡単な組み合わせの主項の組み合わせを選び出す.

[アルゴリズム 9]

STEP 1 与えられた f から $S_1, S_0, S_{1/2}$ を得る. S_1^*, S_0^*, S_U^* を求め, $S_i^* \cap S_j^* = \phi (\forall i, j \in \{1, 0, U\})$ が成立することを確認する.

STEP 2 $\beta_1^{B_1}, \beta_2^{B_2}, \dots, \beta_s^{B_s}$ を定義 67(1) により $B_1, B_2, \dots, B_s \in S_0$ に対応する単和項とする. そして $\beta_1^{C_1}, \beta_2^{C_2}, \dots, \beta_t^{C_t}$ を定義 67(2)(3) により C_1, C_2, \dots, C_t in $S_{1/2}^1 \cup S_{1/2}^d$ の元に対応する和項とする. ただし $\beta_i^{C_i}$ は, $C_i \in V_2^n$ の場合には $1/2$ 最大項を, $C_i \in V_3^n - V_2^n$ の場合には, 相補最大項に対応させる. このとき, $\beta_1^{B_1} \cdot \beta_2^{B_2} \dots \beta_s^{B_s} \cdot \beta_1^{C_1} \cdot \beta_2^{C_2} \dots \beta_t^{C_t}$ を加法形式に展開し, $1/2$ 単積項と相補項を取り除くことにより $\alpha_1^P \vee \alpha_2^P \vee \dots \vee \alpha_u^P$ を得る.

STEP 3 $\beta_1^{B_1}, \beta_2^{B_2}, \dots, \beta_s^{B_s}$ を定義 67(1) により $B_1, B_2, \dots, B_s \in S_0$ に対応する単和項とする。このとき, $(1/2) \cdot \beta_1^{B_1} \cdot \beta_2^{B_2} \dots \beta_s^{B_s}$ を加法形式に展開し, STEP 2 で得られた $\alpha_1^P, \alpha_2^P, \dots, \alpha_u^P$ に包含される積項を取り除くことにより, $\gamma_1^P \vee \gamma_2^P \vee \dots \vee \gamma_v^P$ を得る。

STEP 4 $\alpha_1^{X_1}, \alpha_2^{X_2}, \dots, \alpha_a^{X_a}$ を定義 67(1) により $X_1, X_2, \dots, X_a \in S_1$ に対応する単積項とする。そして, $\alpha_1^{Y_1}, \alpha_2^{Y_2}, \dots, \alpha_b^{Y_b}$ を定義 67(2)(3) により $Y_1, Y_2, \dots, Y_b \in S_{1/2}^0 \cup S_{1/2}^d$ の元に対応する $1/2$ 最小項または相補最小項とする。ただし, $\alpha_i^{Y_i}$ は $Y_i \in V_2^n$ ときは $1/2$ 最小項であり, $Y_i \in V_3^n - V_2^n$ のときは, 相補最小項とする。次に, STEP 2 で得られた $\alpha_1^P, \alpha_2^P, \dots, \alpha_w^P$ と, STEP 3 で得られた $\gamma_1^P, \gamma_2^P, \dots, \gamma_v^P$ から, 最も簡単な組み合わせを, $\alpha_1^{X_1}, \alpha_2^{X_2}, \dots, \alpha_a^{X_a}$ と $\alpha_1^{Y_1}, \alpha_2^{Y_2}, \dots, \alpha_b^{Y_b}$ を包含するように選び出す。ただし, $\gamma_1^P, \gamma_2^P, \dots, \gamma_v^P$ が $\alpha_1^{X_1}, \alpha_2^{X_2}, \dots, \alpha_a^{X_a}$ を包含することはない。選び出された積項の組み合わせが $\xi_1^P, \xi_2^P, \dots, \xi_w^P$ であるとき $\xi_1^P \vee \xi_2^P \vee \dots \vee \xi_w^P$ が求める最簡形である。

(アルゴリズム終)

6.5.2 アルゴリズムが正しい事の証明

本項では, 前項で与えられたアルゴリズムが正しいことを保証する定理を与える。

[定理 44] いかなる完全指定された正則 3 値論理関数の最簡形も, 主項の論理和で表現される。

(証明略)

[定義 72] 正則 3 値論理関数 f のいかなる最簡形にも現れない主項を不必要項という。 □

[定理 45] 正則 3 値論理関数 f の単積項の主項は, 不必要項ではない。 (証明略)

[定理 46] (4章 4.5 節の定理 32 に相当) $f = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_t$ を乗法標準形で表現された正則 3 値論理関数とする (ただし β_i は和項である)。 f を加法標準形に展開して $f = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_s$ ($\gamma_i \not\subseteq \gamma_j, i \neq j$) を得たとする。このとき $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_s$ は f の主項の和である。もし f の主項 γ_0 が $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_s$ に含まれていない場合, γ_0 は f の不必要項である。 (証明略)

[補題 30] α を単積項 (β を単和項) とし, $X \in V_3^n$ を定義 67(1) により α (β) に対応する元とする。このとき,

- (1) $\alpha(Z) = 1$ ($\beta(Z) = 0$) for $\forall Z \in \{Y | Y \preceq X\}$.
- (2) $\alpha(Z) = 1/2$ ($\beta(Z) = 1/2$) for $\forall Z \in \{Y | X \Delta Y \neq \phi, Y \not\preceq X\}$.
- (3) $\alpha(Z) = 0$ ($\beta(Z) = 1$) for $\forall Z \in \{Y | X \Delta Y = \phi\}$.

ただし $X \Delta Y$ は半順序集合 $\langle V_3^n, \preceq \rangle$ における X と Y の下限の集合を意味する。 (証明略)

[補題 31] α を $1/2$ 最小項 (β を $1/2$ 最大項) とし, $X \in V_3^n$ を定義 67(2) により α (β) に対応する元とする. このとき,

- (1) $\alpha(Z) = 1/2$ ($\beta(Z) = 1/2$) for $\forall Z \in \{Y | Y \succeq X\}$.
- (2) $\alpha(Z) = 0$ ($\beta(Z) = 1$) for $\forall Z \in \{Y | X \Delta Y = \phi\}$.

ただし $X \Delta Y$ の定義は, 補題 30 と同様である. (証明略)

[補題 32] α を相補最小項 (β を相補最大項) とし, $X \in V_3^n - V_2^n$ を定義 67(3) により α (β) に対応する元とする. このとき,

- (1) $\alpha(Z) = 1/2$ ($\beta(Z) = 1/2$) for $\forall Z \in \{Y | Y \succeq A\}$.
- (2) $\alpha(Z) = 0$ ($\beta(Z) = 1$) for $\forall Z \in \{Y | X \Delta Y = \phi\}$.

ただし $X \Delta Y$ の定義は, 補題 30 と同様である. (証明略)

[定理 47] 提案アルゴリズムで得られた $\xi_1^P \vee \xi_2^P \vee \dots \vee \xi_w^P$ は, 与えられた不完全指定正則 3 値論理関数 f の最簡形である.

(証明) STEP 1 において, 実現可能性が確認されれば, 与えられた $S_1, S_0, S_{1/2}$ により特徴づけられる不完全指定正則 3 値論理関数が, 少なくとも一つ存在する.

STEP 2 において, 最簡形に現れる単積項の主項を導き出している. このとき, $S_0, S_{1/2}^1 \cup S_{1/2}^d$ により特徴づけられる主乗法標準形を考える. $S_{1/2}^0$ の元に対応する相補最大項は, 主乗法標準形には決してあらわれない. なぜなら補題 30, 補題 32 により, それらは S_0 の元に対応する単和項を包含しているので, 省略されてしまうからである. それゆえ, 定理 42 により, ここで考える主乗法標準形は, S_0 の元に対応する単和項と $S_{1/2}^1 \cup S_{1/2}^d$ の元に対応する $1/2$ 最大項または相補最大項により構成される. ここで考えた主乗法標準形を完全指定された正則 3 値論理関数と考え, これを加法形式に展開する. そして定理 46 により, ここで考えた関数の主項の論理和が得られる. しかしながら, ここで得られた主項のみでは, 与えられた不完全指定正則 3 値論理関数の最簡形に現れる積項の, すべての候補が得られたわけではない. なぜならば, STEP 2 では, D 上の関数値が 1 であるとしているからである. すなわち, D の元に対応する $1/2$ 最小項をカバーする $1/2$ 単積項や相補項は, ここでは生成されていない. しかしながら, 候補となる積項のうちの単積項であるものは, すべて得られている.

STEP 3 では, 最簡形に現れる $1/2$ 単積項と相補項を求めている. このとき, D における関数値は $1/2$ としている. ここで考えている乗法形式を完全指定された正則 3 値論理関数の主乗法標準形と見なして, 加法形式に展開すると, 定理 32 によりこの関数の不必要項以外のすべての主項が求められる. ここで得られた主項のうち, $1/2$ 単積項と相補項で, STEP 1 において得られた単積項に包含されないものは, 最初に与えられた不完全指定正則 3 値論

理関数の積項の候補となり得る．なぜならば， D 上での関数値を $1/2$ としており，STEP 1 では得られなかった $1/2$ 単積項と相補項も，すべて生成されているからである．

STEP 4 では，最小被覆問題を解くことにより，与えられた不完全指定正則 3 値論理関数の主加法標準形（定理 42 による）に現れる積項をすべて包含する，最も簡単な積項の組み合わせを求めている． □

6.6 例題

不完全指定正則 3 値論理関数 f の S_1 , S_0 , $S_{1/2}$ が以下のように与えられたとする．

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(0, 0, 0)\} \\ S_0 &= \{(0, 0, 1)\} \\ S_{1/2} &= S_{1/2}^1 \cup S_{1/2}^0 \cup S_{1/2}^d \\ S_{1/2}^1 &= \{(1/2, 0, 0), (0, 1/2, 0), (0, 0, 1/2)\} \\ S_{1/2}^0 &= \{(1/2, 0, 1), (0, 1/2, 1), (0, 0, 1/2)\} \\ S_{1/2}^d &= \{(1/2, 1, 0), (1/2, 1, 1), (1, 1/2, 0), \\ &\quad (1, 1/2, 1), (1, 0, 1/2), (1, 1, 1/2)\} \end{aligned}$$

この関数の最簡形を，提案アルゴリズムで求める．

STEP 1 において，実現可能性の確認を行う． S_1^* , S_0^* , S_U^* は以下ようになる．

$$\begin{aligned} S_1^* &= \{(0, 0, 0)\} \\ S_0^* &= \{(0, 0, 1)\} \\ S_U^* &= \{(1/2, 0, 0), (1/2, 1, 0), (1/2, 0, 1), \\ &\quad (1/2, 1, 1), (0, 1/2, 0), (0, 1/2, 1), \\ &\quad (1, 1/2, 0), (1, 1/2, 1), (0, 0, 1/2), \\ &\quad (1, 0, 1/2), (1, 1, 1/2), (1/2, 1/2, 0), \\ &\quad (1/2, 1/2, 1), (1/2, 0, 1/2), (1/2, 1, 1/2), \\ &\quad (0, 1/2, 1/2), (1, 1/2, 1/2), \\ &\quad (1/2, 1/2, 1/2)\} \end{aligned}$$

この場合， $S_i^* \cap S_j^* = \emptyset$ ($\forall i, j \in \{1, 0, U\}, i \neq j$) が成立しているので，実現可能性が保証れた．

STEP 2 において，最簡形に現れる単積項の候補を求める． S_0 と $S_{1/2}^1 \cup S_{1/2}^d$ の元に対応する和項の論理積，すなわち $(x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3)(x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \sim x_3)(x_1 \vee \sim x_1 \vee \sim x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3)(\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee x_3)(\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)(\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \sim x_3)(\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee x_3 \vee \sim x_3)$ を加法形式に展開する．これにより以下の六つの単積項の主項 (α_i^P) が求められる．

$$\begin{aligned} &\sim x_1 x_2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 \sim x_3, \\ &x_1 \sim x_2 x_3, \quad x_1 \sim x_2 \sim x_3, \quad \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3. \end{aligned}$$

STEP 3 では, $1/2$ と S_0 の元に対応する単和項の論理積 $(1/2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3)$ を加法形式に展開することにより, $1/2$ 単積項と相補項の主項 (γ_j^P) を求める. 求められた主項は以下の三つである.

$$1/2x_1, \quad 1/2x_2, \quad 1/2\sim x_3.$$

STEP 4 では, STEP 3 までで求められた主項と, 与えられた不完全指定正則 3 値論理関数 f の積項の間で最小被覆問題を解く. まず f の主加法標準形を求めると以下のようにになる.

$$\begin{aligned} & \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_1 \sim x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \sim x_2 x_3 \\ & \vee \sim x_1 \sim x_2 x_3 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_1 x_2 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_1 x_2 x_3 \\ & \vee x_1 x_2 \sim x_2 \sim x_3 \vee x_1 x_2 \sim x_2 x_3 \vee x_1 \sim x_2 x_3 \sim x_3 \\ & \vee x_1 x_2 x_3 \sim x_3. \end{aligned}$$

この論理式は, 積項数 10, 文字数 39 である. STEP 3 までで求められた主項 (α_i^P, γ_j^P) と, 主加法標準形に現れる積項との間で最小被覆問題を解くことにより, 以下のように f の二つの最簡形が求められる.

$$f = \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \vee \left\{ \begin{array}{l} 1/2x_1 \\ 1/2x_2 \end{array} \right\} \vee 1/2x_3.$$

最簡形に現れる積項数は 3 個で, 文字数は 5 である.

6.7 不完全指定ファジィ論理関数およびファジィ論理回路への応用

不完全指定ファジィ論理関数の新しい定義 (定義 68) も基づき, 不完全指定ファジィ論理関数の簡単化の問題は, 不完全指定正則 3 値論理関数の簡単化の問題となる.

本節では最初に, 5 章で述べた従来の不完全指定ファジィ論理関数の簡単化アルゴリズムと, 本章で提案した簡単化アルゴリズムを比較し, その有効性を確認する.

3 変数の不完全指定ファジィ論理関数 f が, 表 6.1 で与えられたとする[†]. 表 6.1 の左半分は 13 対の入力値と出力値であり, 右半分は, それらの量子化である. これらの量子化を見ればわかるように, この不完全指定ファジィ論理関数の $S_1, S_0, S_{1/2}$ は, 6.6 節の例題で取り扱った不完全指定正則 3 値論理関数と同じである. したがって, 本章で提案したアルゴリズム (アルゴリズム 8) により簡単化を行うと以下の最簡形が得られる.

$$f = \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \vee \left\{ \begin{array}{l} 1/2x_1 \\ 1/2x_2 \end{array} \right\} \vee 1/2x_3$$

この最簡形は, 積項数 3, 文字数 5 である.

一方, 5 章で述べた従来の不完全指定ファジィ論理関数の定義に基づく簡単化アルゴリズムで, この f の最簡形を求めると以下のようにになる.

$$f = \sim x_1 x_2 \vee \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_2 x_3 \vee x_2 \sim x_2 \vee x_3 \sim x_3$$

[†]この不完全指定ファジィ論理関数は, 5 章で例題として取り扱ったものである.

表 6.1: ある不完全指定ファジィ論理関数 f

i	A_i	$f(A_i)$	$\overline{A_i}^\lambda$	$\overline{f(A_i)}^\lambda$
1	(0.1, 0.1, 0.1)	0.9	(0, 0, 0)	1
2	(0.1, 0.1, 0.9)	0.1	(0, 0, 1)	0
3	(0.5, 0.3, 0.3)	0.5	(1/2, 1/2, 1/2) (1/2, 0, 0)	1/2 1/2
4	(0.5, 0.7, 0.1)	0.5	(1/2, 1/2, 0) (1/2, 1, 0)	1/2 1/2
5	(0.5, 0.1, 0.9)	0.5	(1/2, 0, 1)	1/2
6	(0.5, 0.9, 0.9)	0.5	(1/2, 1, 1)	1/2
7	(0.1, 0.5, 0.1)	0.5	(0, 1/2, 0)	1/2
8	(0.1, 0.5, 0.9)	0.5	(0, 1/2, 1)	1/2
9	(0.9, 0.5, 0)	0.5	(1, 1/2, 0)	1/2
10	(1, 0.5, 0.9)	0.5	(1, 1/2, 1)	1/2
11	(0.1, 0.1, 0.5)	0.5	(0, 0, 1/2)	1/2
12	(0.9, 0.1, 0.5)	0.5	(1, 0, 1/2)	1/2
13	(1, 0.9, 0.5)	0.5	(1, 1, 1/2)	1/2

この最簡形は、積項数 5、文字数 20 である。

以上の例からもわかるように、本章で提案した新しい不完全指定ファジィ論理関数の定義を用いると、その最簡形の積項数、文字数は等しいか、または少なくなる。

〔定理 48〕 f を不完全指定ファジィ論理関数とする。このとき、 $P1(f)$ は本章で提案した簡単化アルゴリズム（アルゴリズム 9）により f を簡単化した際の積項数、 $P2(f)$ は 5 章で述べた従来のファジィ論理関数の簡単化アルゴリズム（アルゴリズム 8）による f の最簡形の積項数とする。同様に $L1(f)$ は、本章のアルゴリズムによる文字数、 $L2(f)$ を 5 章で述べたアルゴリズムによる文字数とする。このとき、以下の不等式が成立する。

$$P1(f) \leq P2(f)$$

$$L1(f) \leq L2(f).$$

（証明）ファジィ論理関数を表現する論理式の集合は、正則 3 値論理関数を表現する論理式の集合の部分集合である。この事実から本定理は成立する。 \square

一般に、定理 48 の等号が成立しない場合、即ち、本章で提案した簡単化アルゴリズムによる場合の方が積項数、文字数が少なくなるのは、最簡形に $1/2$ 単積項が現れる場合である。 $1/2$ 単積項は、 $1/2$ 最小項の論理和に展開可能な積項であることから、 $1/2$ 単積項の出現は V_2^n の元への関数値の割り当てに関連している。 $S_1^* \cap V_2^n$ 、 $S_0^* \cap V_2^n$ では、必ず正規性が成立しており、 $1/2$ 単積項

の存在に影響を与えない。したがって、 $1/2$ 単積項の存在は、 $D = S_d^* \cap V_2^n$ の元により特徴付けられる。この結果、 D の元の数が増えるほど、本章で提案した単純化アルゴリズムが有効になり、積項数、文字数がより少なくなることが期待されるが、残念ながら、それは成立しない。

以上の結果を基に、以下ではファジィ論理回路の設計への応用を考えることにする。特にここでは、ファジィ論理回路の中でも最も基本的な素子である AND-OR 型のファジィPLA (Programable Logic Array) を例に考察する。通常、PLA などを実現する論理回路では、入力すべてに対して、その出力値が指定されている (完全指定) 場合は希であり、ほとんどの場合が不完全指定である。

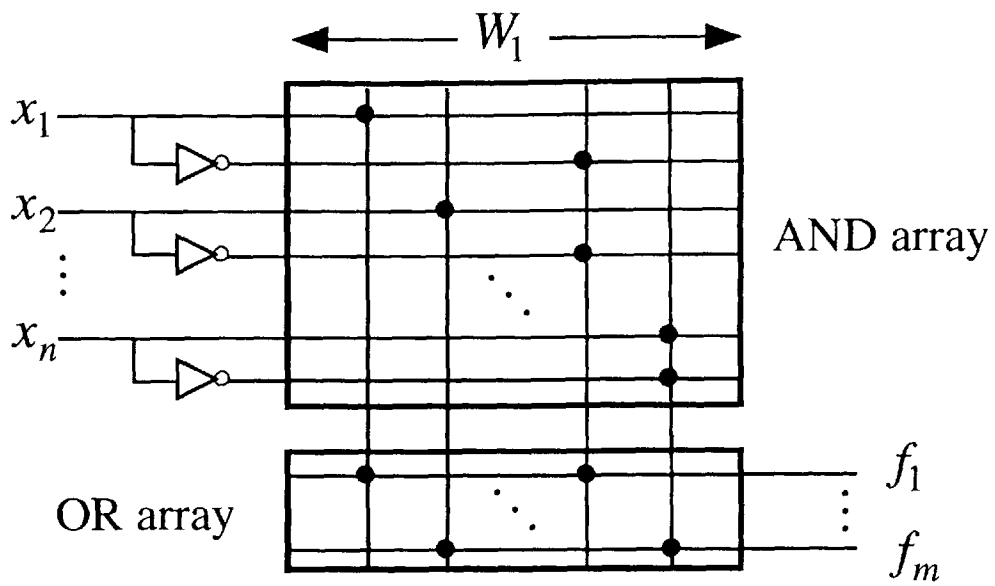
図 6.4(a) は、ファジィ論理関数型ファジィPLA であり、図 6.4(b) は正則 3 値論理関数型ファジィPLA である。議論を簡単にするため、ここでは、AND 平面のみに着目する。ファジィPLA のサイズを評価する際、重要な指標となるのが PLA の列数である。AND-OR 型の PLA では、列数は、実現したい論理関数の積項数に対応する。図 6.4 のようなファジィPLA で本節の最初で取り扱った不完全指定ファジィ論理関数 (表 6.1) を実現した場合、ファジィ論理関数型 (図 6.4(a)) では、 $W_1 = 5$ である。一方、正則 3 値論理関数型 (図 6.4(b)) では、 $W_2 = 3$ となり、ファジィ論理関数型と比較すると、約 60% 程度にまで小さくすることが可能と考えられる。

6.8 むすび

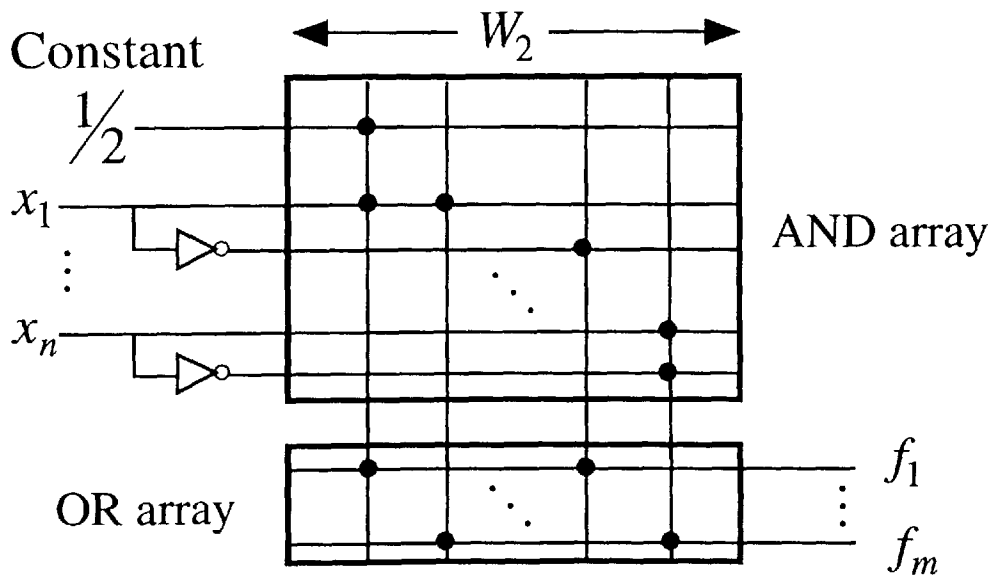
本章では、不完全指定正則 3 値論理関数の単純化のための基本的性質と、単純化アルゴリズムを提案した。更に、不完全指定ファジィ論理関数について、写像としての性質と正規性の適範囲を考察することにより、不完全指定ファジィ論理関数の新しい定義を与え、不完全指定ファジィ論理関数の単純化の問題は、不完全指定正則 3 値論理関数の単純化に帰着できることを示し、その有効性を、5章で述べられた従来からの定義のまま不完全指定ファジィ論理関数を単純化する場合と比較して、その有効性を示した。

本章に関連する以下のような問題が今後の課題として残される。

- (1) 不完全指定ファジィ論理関数の単純化において、従来の単純化手法と、本章での提案手法との間で、その有効性はどれくらいの比率であるかを検証すること。
- (2) 本章で提案した単純化アルゴリズムは、不完全指定正則 3 値論理関数に対して有効なアルゴリズムである。6.1節で述べたように、正則 3 値論理関数は、定数として 0, $1/2 (= 0.5)$, 1 を定数として持つ、不完全指定された定数係数をもったファジィ論理関数 (不完全指定 Fuzzy/C 論理関数) と代数的には同型なものである。したがって、本章での提案アルゴリズムは、一般の任意定数をもった不完全指定 Fuzzy/C 論理関数へ拡張可能であると考えられる。そのためのアルゴリズムを考えること。文献 [59] において、一部そのための手法が著者らにより報告されているが、未だその手法は不完全である。
- (3) (2) で述べた拡張を行うことにより、ファジィ測度、特にファジィ測度上での菅野積分に対して様々な応用が考えられる (1章 1.3節参照)。一般に測度空間内のすべての部分集合に対



(a) Fuzzy switching function type



(b) Regular ternary logic function type

図 6.4: AND-OR 型ファジィPLA

して、その測度が明確に定まっていることは、現実の問題においては、希で、測度は部分的にしか定まってない場合が多い。文献 [32] 等において、定数係数をもったファジィ論理関数が菅野積分で表現されるための条件等が考察されているが、不完全に指定された測度上での議論としては未だ不完全である。(2) が解決されれば、この点についても解決され、現実世界での様々な応用が可能となると思われる。

7 章

本研究のまとめと応用例について

本研究では、最初に、これまでクリーネ代数のモデルとして研究されてきた様々な関数を、その特殊な部分集合として含む定数係数をもったファジィ論理関数を定義し、その基本的性質、論理式表現、表現能力に関する考察を行った。そして第2に、定数係数をもったファジィ論理関数と、その部分集合となる関数族に適用可能な簡単化の原理として、ファジィ論理における Nelson の定理を示した。そして第3番目に、入出力関係が不完全に指定されている論理関数の簡単化の問題を取り扱った。その一つが不完全指定ファジィ論理関数であり、もう一つが不完全指定正則3値論理関数である。後者の正則3値論理関数については、その簡単化手法の応用として、本研究で新しく定義された不完全指定ファジィ論理関数があり、前者の不完全指定ファジィ論理関数の簡単化と比較して、ファジィ論理回路などの設計においては、後者の方が有利であることも示された。

1章1.3節でも述べたが、本研究における結果は、単に数学的な側面や理論的な側面のみならず、以下のような分野に応用があると考えられる。

- (1) ファジィ論理回路の設計法
- (2) 分散システムの設計法 [51, 60]
- (3) データ・マイニング
- (4) 不完全に指定されたファジィ測度上での積分や可能性理論。

最後に、これらの応用分野のうち(3)について具体的な応用例を示す。

工学部の4年生13名にコーヒーの味付けや温度に関してアンケートを行った（この例は、文献[27]にヒントを得て行った）。アンケートを行う上での属性としては、以下の三つを選んだ。

- x_1 : 砂糖の量（量が多いほど大きな数値）
- x_2 : ミルクの量（量が多いほど大きな数値）

- x_3 : 温度 (温度が高いほど大きな数値)

この三つの属性から, そのコーヒーに対する好みを 0 から 1 までの数値で採点してもらうこととした. このとき, 学生のコーヒーに対する味覚は, 以下のような関数で得られる.

$$f(\text{砂糖}, \text{味覚}, \text{温度}) = \text{好み}$$

アンケート結果として表 7.1 のようなデータが得られた. このデータから得られる知識 f を求める

表 7.1: コーヒーの好みに関するアンケート結果

学生番号	x_1	x_2	x_3	好み
1	0.1	0.1	0.1	0.9
2	0.1	0.1	0.9	0.1
3	0.5	0.3	0.3	0.5
4	0.5	0.7	0.1	0.5
5	0.5	0.1	0.9	0.5
6	0.5	0.9	0.9	0.5
7	0.1	0.5	0.1	0.5
8	0.1	0.5	0.9	0.5
9	0.9	0.5	0.0	0.5
10	1.0	0.5	0.9	0.5
11	0.1	0.1	0.5	0.5
12	0.9	0.1	0.5	0.5
13	1.0	0.9	0.5	0.5

ことが, データ・マイニングの問題となる. 本章まで, 具体的には述べなかったが, このアンケートで得られた結果は 5 章, 6 章の例題で用いた不完全指定ファジィ論理関数となっている (表 5.1, 表 6.1). したがって, 知識 f を 6 章で述べた簡単化の手法で簡単化して論理式で表現すると, 以下の論理式表現が得られる.

$$f = \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \vee \left\{ \begin{array}{l} 1/2x_1 \\ 1/2x_2 \end{array} \right\} \vee 1/2x_3$$

この知識 f に言語的な解釈を与えると以下のような二つの解釈が得られる.

言語的解釈 1

重み 1 で（砂糖が少なく，ミルクが少なく，温かくない）コーヒーを好む.

または,

重み $1/2$ で（砂糖の入った）コーヒーを好む.

または,

重み $1/2$ で, (温かい) コーヒーを好む.

言語的解釈 2

重み 1 で（砂糖が少なく，ミルクが少なく，温かくない）コーヒーを好む.

または,

重み $1/2$ で（ミルクの入った）コーヒーを好む.

または,

重み $1/2$ で, (温かい) コーヒーを好む.

以上のように 13 対のデータから知識を抽出し，その知識を論理式表現として取り出し，その論理式表現に関して言語的解釈を与えることが可能となった．また得られる論理式も言語的解釈も簡便な表現となっている．この例からわかるように，より大規模なデータの集合を扱った場合には，より大きな効果が期待される．

謝辞

まず最初に、本研究を行うにあたり研究の基本から深い理論まで、終始親切にご指導頂き、また、公私ともに私の生活全般にわたりご配慮いただきました恩師である明治大学教授向殿政男先生に心より感謝致します。教授のご指導無しでは、この研究を行うことは不可能でした。

また、この論文の審査をして頂きました明治大学教授正田輝雄先生、林陽一先生に感謝致します。両教授のコメントにより本論文は、より充実した物になりました。

私が神奈川工科大学情報工学科に勤務してから、公私にわたり研究をご支援頂きました巽久行先生に感謝致します。更に研究設備、研究環境も含め、助手である私を暖かい目で見守りながらご支援頂きました元神奈川工科大学教授大前義次先生、現教授山本富士男先生に感謝致します。

学会において貴重なご意見、コメントを頂きました多値論理研究会の皆様、そしてファジィ学会の皆様に感謝致します。

最後に、終始暖かく私を勇気づけて頂きました明治大学井口幸洋先生、神奈川工科大学の皆様
に感謝致します。

参考文献

- [1] S.C.Kleene, Introduction to metamathematics, North-Holand(1952).
- [2] L.Bolc and P.Borowik, Many-valued logics, Springer-Verlag(1992).
- [3] 駒宮安男, 命題値が連続的濃度を有する命題論理学とその応用について, 電試研報, 498(1949).
- [4] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8, pp. 338-353(1965).
- [5] 向殿政男, C形 Fail Safe 論理の数学的構造について, 信学論 (C), 52-C, 12, pp. 812-819(1969).
- [6] 向殿政男, 組み合わせ論理回路におけるハザードのB-3値論理を用いた考察, 信学論 (D), J61-D, 9, pp. 673-679(1978).
- [7] 向殿政男, B-三値論理関数について — あいまいさを考慮した三値論理関数 —, 信学論 (D), 55-D, 6, pp. 355-362(1972).
- [8] Mukaidono, M., Regular ternary logic function — Ternary logic function suitable for treating ambiguity —, IEEE Trans. Comput., C-35, 2, pp. 179-183(1986).
- [9] 向殿政男, Fuzzy 論理における二, 三の性質について, 信学論 (D), 58-D, 12, pp. 748-755(1975).
- [10] 向殿政男, Fuzzy 論理関数の代数的構造とその最簡形式および既約形式, 信学論 (D), 58-D, 12, pp. 748-755(1975).
- [11] Mukaidono M., A necessary and sufficient condition for fuzzy logic functions, Proc. 9th Int. Symp.on Multiple-Valued Logic,, pp. 159-166(1979).
- [12] Mukaidono M., A set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra), Proc. 11th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp. 27-34(1981).
- [13] Mukaidono M., New canonical forms and their application to enumerating fuzzy switching functions, Proc. 12th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, pp. 275-279(1982).

- [14] Mukaidono, M., An improved method for minimizing fuzzy switching functions, Proc. 14th ISMVL, pp. 196-201(1984).
- [15] 向殿政男, 講座ファジィ第4巻 ファジィ論理, 日刊工業新聞社(1993).
- [16] 向殿政男, 不完全指定 Fuzzy 論理関数の簡単化, 第2回ファジィシステムシンポジウム予稿集, pp. 137-142(1986).
- [17] Yamamoto Y. and Mukaidono M., Meaningful special classes of ternary logic functions – Regular ternary logic functions and ternary majority functions –, IEEE Trans. Comput. 37, 7, pp. 799-806(1988).
- [18] 山本喜則, 藤田志郎, ファジー多数決論理関数, 信学論 (D-I), J73-D-I, 8, pp. 673-681(1990).
- [19] 巽久行, 向殿政男, 正則3値論理関数の数え上げ問題, 信学論 (D), J68-D, 5, pp.1027-1037(1985).
- [20] Tatsumi, H., Araki, T., Mukaidono, M. and Tokumasu, S., Upper and Lower Bounds on the Number of Fuzzy/C Switching Functions, Proc. The Twenty-eighth International Symposium on Multiple-valued Logic, ISMVL'98, IEEE, pp.297-303(1998).
- [21] 高木昇, 向殿政男, 多値クリーネ論理関数の基本的性質, 信学論 (D-I), J74-D-I, 12, pp. 797-804(1991).
- [22] 高木昇, 向殿政男, 多値クリーネ論理関数の論理式表現, 信学論 (D-I), J75-D-I, 2, pp. 69-75(1992).
- [23] N. Takagi, H. Kikuchi, K. Nakashima and M. Mukaidono, Identification of incompletely specified multiple-valued Kleenean functions, IEEE Trans. Systems, man, and cybernetics –part A: systems and human, VOL. 28, No. 5, pp. 637-647 (1998).
- [24] 畑豊, 三好義昭, 中嶋恭一, 大和一晴, 多値クリーネ論理関数の判定と論理式決定, 信学論 (D-I), J73-D-I, 2, pp. 183-192(1990).
- [25] 畑豊, 湯原理晴, 宮脇富士夫, 大和一晴, 多値クリーネ論理関数の数とそれに関する基本的性質, 信学論 (D-I), J75-D-I, 1, pp. 1-9(1990).
- [26] 畑豊, 滝口孝司, 上浦尚武, 大和一晴, ファジィPLAによるファジィ論理回路の設計について, 日本ファジィ学会誌, Vol.5, No.6, pp.1312-1322(1993).
- [27] 菊池浩明, 向殿政男, ファジィ論理関数の同定問題 — 部分関数がファジィ論理関数で表されるものの必要十分条件 —, 信学論 (D-I), J77-D-I, 7, pp.465-476(1994).

- [28] 菊池浩明, 向殿政男, ファジー論理関数の当てはめ問題 — 論理式による知識獲得 —, 信学論 (D-I), J77-D-I, No. 9, pp. 595-604(1994).
- [29] 千谷慧子, 講座ファジィ第1巻 ファジィの数学的基礎, 日刊工業新聞社 (1993).
- [30] 近藤通朗, クリーネ代数における量子化定理について, 日本ファジィ学会誌, Vol. 6, 1, pp. 124-129(1994).
- [31] 近藤通朗, ファジィ論理関数は本質的に3値である, 日本ファジィ学会誌, Vol. 6, 3, pp. 542-548(1994).
- [32] Takahagi, E. and Araki, T., On Fuzzy Integral Representation in Fuzzy Switching Functions with Constants, Proc. Vietnam-Japan Bilateral Symposium on Fuzzy Systems and Applications, VJFUZZY'98, pp. 240-245(1998).
- [33] Nelson R. J., Simplest normal truth functions, J. of Symbolic Logic, Vol. 20, No. 2, pp. 105-108(1954).
- [34] Kandel, A., On minimization of fuzzy functions, IEEE Trans. Commun., C-22, pp. 286(1973).
- [35] A. Kandel, On the minimization of incompletely specified fuzzy functions, Information and Control, 26, pp. 141-153(1974).
- [36] Neff, T. P. and Kandel, A., Simplification of fuzzy switching functions, Int. J. of Comp. and Info. Sci., Vol. 6, No. 1, pp. 55-70(1977).
- [37] Ph. W. Besslich, Incompletely specified fuzzy switching function minimization, Proc. 11th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, IEEE, pp. 35-40(1982).
- [38] Liu, X. H., Minimization of fuzzy logic formula, Proc. 15th ISMVL, pp. 182-189(1985).
- [39] Slagle, J. R., Chang, C. L. and Lee, R. C., A new algorithm for generating prime implicants, IEEE Trans. Comput., C-19, pp. 304(1970).
- [40] 上林弥彦, 岡田康治, 矢島修三, 節展開法を用いた論理関数の主項の生成, 信学論 (D), J62-D, 2, pp. 89-96(1979).
- [41] 山口健治, ファジー節展開法を用いたファジー論理関数の主項生成アルゴリズム, 信学論 (D-I), J73-D-I, 8, pp. 657-664(1990).
- [42] Iguchi, Y., Sasao, T. and Matsuura, M., On properties of Kleene TDDs, Asia and South Pacific Design Automation Conference, Proc. ASP-DAC'97, pp. 473-476(1997).

- [43] 笹尾勤, 論理設計スイッチング回路理論, 近代科学社 (1995).
- [44] Sasao, T. and Fujita, M. (eds), Representations of Discrete Functions, Kluwer Academic Publishers (1996).
- [45] 荒木智行, 向殿政男, 定数係数をもったファジー論理関数について, 電子情報通信学会, 論文誌, D-I, 情報・システム I-コンピュータ, vol. J81-D-I, no. 9, pp. 1037-1047 (1998).
- [46] 荒木智行, 向殿政男, ファジー論理における Nelson の定理, 電子情報通信学会, 論文誌, D-I, 情報・システム I-コンピュータ, vol. J81-D-I, no. 9, pp. 1048-1060 (1998).
- [47] 荒木智行, 向殿政男, 不完全指定ファジー論理関数の簡単化, 電子情報通信学会, 論文誌, D-I, 情報・システム I-コンピュータ, Vol. J82-D-I, No. 6, pp. 669-678 (1999).
- [48] Araki, T. and Mukaidono, M., Incompletely Specified Fuzzy Switching Functions, Systems and Computers in Japan, John Wiley & Sons, Inc., in press.
- [49] Araki, T. and Mukaidono, M., Incompletely Specified Regular Ternary Logic Functions and their Minimization, IEICE Transactions on Information and Systems, Vol. E82-D, No. 5, pp. 910-918 (1999).
- [50] Araki T., Tatsumi H., Mukaidono M. and Ohmae Y., On the fuzzy switching function with arbitrary constants and generalization of Nelson theorem for fuzzy logic, Proc. 1st Asian Fuzzy Systems Symposium, pp. 158-165 (1993).
- [51] Araki, T. and Yamamoto F., Autonomous decentralized office applications cooperating softly with each other, Proc. The Fourth Int. Conf. on Applications of Computer Systems, pp. 16-23 (1997-11).
- [52] Araki, T., Tatsumi, H., Mukaidono, M. and Yamamoto, F., New Canonical Forms for Enumerating Fuzzy/C Switching Functions, Proc. The Third Asian Fuzzy Systems Symposium, AFSS'98, pp. 537-542 (1998).
- [53] Araki, T., Tatsumi, H., Mukaidono, M. and Yamamoto, F., Minimization of regular ternary logic functions and its application to fuzzy switching functions, Proc. 28th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, ISMVL'98, IEEE, pp. 289-296 (1998).
- [54] 荒木智行, 定数係数を持った Fuzzy 論理関数の研究, 明治大学修士論文 (1987).
- [55] 荒木智行, 巽久行, 向殿政男, 大前義次, 定数係数を持ったファジー論理関数について, 第 9 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, pp. 437-476 (1993).

- [56] 荒木智行, 巽久行, 向殿政男, Fuzzy/C 論理関数の数え上げのための新しい標準形, 多値論理研究ノート, 第 20 巻, 第 15 号, pp. 15.1-15.10(1997).
- [57] 荒木智行, 巽久行, 向殿政男, Nelson の定理の拡張について, 多値論理研究ノート, 第 15 巻, pp. 12.1-12.10(1992).
- [58] 荒木智行, 巽久行, 向殿政男, クリーネ論理関数族の表現と最簡形, 電子情報通信学会, 多値技法, Vol. MVL-94, No. 1, pp.87-96(1994).
- [59] 荒木智行, 巽久行, 向殿政男, 不完全指定された Fuzzy/C 論理関数の簡単化, 多値論理研究ノート, 第 20 巻, 第 17 号, pp. 17.1-17.10(1997).
- [60] 荒木智行, 小宮貴志, 山本富士男, 契約ネットプロトコルに基づく自律分散オフィスアプリケーションの試作, 信学'97 秋大, D-9-9(1997-9).

本研究に関連する主要文献

3章

- (1) 荒木智行, 向殿政男, 定数係数をもったファジー論理関数について, 電子情報通信学会, 論文誌, D-I, 情報・システム I-コンピュータ, vol. J81-D-I, no. 9, pp. 1037-1047(1998).
- (2) Araki T., Tatsumi H., Mukaidono M. and Ohmae Y., On the fuzzy switching function with arbitrary constants and generalization of Nelson theorem for fuzzy logic, Proc. 1st Asian Fuzzy Systems Symposium, pp. 158-165(1993).
- (3) Araki, T.,Tatsumi,H., Mukaidono,M. and Yamamoto,F., New Canonical Forms for Enumerating Fuzzy/C Switching Functions,Proc. The Third Asian Fuzzy Systems Symposium, AFSS'98, pp.537-542(1998).
- (4) Araki, T. and Yamamoto F., Autonomous decentralized office applications cooperating softly with each other, Proc. The Fourth Int. Conf. on Applications of Computer Systems, pp. 16-23(1997-11).

4章

- (1) 荒木智行, 向殿政男, ファジー論理における Nelson の定理, 電子情報通信学会, 論文誌, D-I, 情報・システム I-コンピュータ, vol. J81-D-I, no. 9, pp. 1048-1060(1998).
- (2) Araki T., Tatsumi H., Mukaidono M. and Ohmae Y., On the fuzzy switching function with arbitrary constants and generalization of Nelson theorem for fuzzy logic, Proc. 1st Asian Fuzzy Systems Symposium, pp. 158-165(1993).

5章

- (1) 荒木智行, 向殿政男, 不完全指定ファジー論理関数の簡単化, 電子情報通信学会, 論文誌, D-I, 情報・システム I-コンピュータ, Vol.J82-D-I, No.6, pp.669-678
- (2) Araki, T. and Mukaidono,M., Incompletely Specified Fuzzy Switching Functions, Systems and Computers in Japan, John Wiley & Sons, Inc., in press.

6章

- (1) Araki,T. and Mukaidono,M.,Incompletely Specified Regular Ternary Logic Functions and their Minimization,IEICE Transactions on Information and Systems,Vol.E82-D, No.5, pp.910-918(1999).
- (2) Araki,T. Tastumi,H., Mukaidono,M. and Yamamoto,F., Minimization of regular ternary logic functions and its application to fuzzy switching functions, Proc. 28th Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, ISMVL'98, IEEE, pp. 289-296(1998).