Article

« Économétrie des modèles à changement de régimes : un essai de synthèse »

Remzi Uctum

L'Actualité économique, vol. 83, n° 4, 2007, p. 447-482.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 83, nº 4, décembre 2007

ÉCONOMÉTRIE DES MODÈLES À CHANGEMENT DE RÉGIMES : UN ESSAI DE SYNTHÈSE

Remzi UCTUM
EconomiX, UMR 7166 CNRS
Université de Paris Ouest – Nanterre La Défense

Résumé – Ce travail a pour objectif de dresser un bilan de la littérature sur la modélisation et l'estimation du changement structurel en économie. La présentation des approches suit l'ordre décroissant d'information à la disposition du modélisateur quant à la cause du changement de régimes. Une première catégorie de modèles suppose connue la règle qui gouverne la sélection du régime à chaque instant, cette règle pouvant être déterministe comme dans les modèles à seuils (TAR, STAR) ou stochastique comme dans les modèles à changements endogènes. Dans une classe alternative de modèles, la règle de sélection non observable est remplacée par des probabilités constantes inconnues associées aux régimes, lesquelles sont non conditionnelles à l'information passée dans le cas des modèles à mélange de distributions et conditionnelles au régime précédent dans les modèles à changements markoviens. La discussion comparative des différentes approches est complétée par un survol des études empiriques.

Abstract – This paper aims to survey the literature on modeling and estimating the structural change in economy. The alternative approaches are presented following the decreasing order of information available to the investigator about the cause of the regime change. One class of models specifies the rule governing the regime selection whether the latter is deterministic as in threshold autoregressive regression models and smooth transition autoregressive models or stochastic as in endogenous change models. Another class includes models where the unobservable selection rule is replaced by a set of unknown constant probabilities associated with the regimes: these probabilities are unconditional on past information in the case of mixture normal distributions models and conditional on past regime in Markov-switching models. The comparative presentation is completed by an overview of the empirical studies.

Introduction

Les économistes s'accordent largement sur l'idée que de nombreuses relations économiques sont non-linéaires. Un aspect trivial de la non-linéarité réside dans l'abandon de l'hypothèse de la stabilité du modèle linéaire. Ceci peut en effet survenir lorsque, pour des raisons structurelles, les valeurs de certains paramètres se modifient au cours du temps de manière continue ou discrète. Le modèle linéaire standard devient ainsi clairement inadapté. Le vrai modèle peut alors contenir des facteurs exogènes dont l'influence change d'une période à l'autre, suggérant la mise en oeuvre de méthodes de type filtre de Kalman ou la modélisation ARCH selon que l'instabilité concerne les coefficients structurels ou la variance résiduelle. Le plus souvent, ces paramètres sont supposés changer un *nombre fini* de fois sous l'influence de crises économiques ou financières subies par les pays ou suite à des réformes structurelles engagées par ces derniers. Bien que, comme le remarquent Maddala et Kim (2000), une définition précise du changement structurel n'ait pas été proposée dans la littérature, le phénomène statistique qui lui est communément associé est une modification des valeurs prises par tout ou partie des paramètres du modèle linéaire. Au-delà, des changements structurels plus marqués sont produits lorsque l'économie bascule d'un régime à un autre un nombre fini de fois, chaque régime étant représenté par un modèle spécifique, à l'image d'un clivage offre-demande ou expansion-dépression. Un modèle à changement de régimes décrit donc l'ensemble des « états du monde » formellement distincts les uns des autres mais candidats à chaque instant pour expliquer le phénomène économique étudié. Soulignons que dans ce cadre, la non-linéarité du modèle provient du fait que les dates de rupture sont supposées inconnues et estimées de façon endogène. De plus, elle peut être d'autant plus marquée que le nombre de régimes considérés est élevé : si k régimes ($k \geq 2$) caractérisent simultanément m marchés, secteurs ou pays ($m \geq 1$), le modèle traduit k^m régimes au total : de deux marchés (biens, travail) en excès d'offre ou de demande résultent quatre configurations de déséquilibre (Artus, Laroque et Michel, 1984), et la prise en considération de trois pays à deux situations conjoncturelles possibles dans chacun (conjonctures haute et basse) mène à identifier huit configurations économiques pour le groupe (Ang et Bekaert, 1998). Par ailleurs, les modèles à changement de régimes se révèlent particulièrement adaptés pour étudier les dynamiques asymétriques exhibées par de multiples variables macroéconomiques (Rothman, 1991; Neftçi, 1993; Peel et Speight, 1996). La littérature empirique précise les formes de ces asymétries : Sichel (1993) montre que l'asymétrie des cycles d'affaire peut prendre la forme d'une asymétrie d'amplitude (*deepness*) lorsque les creux du cycle réel sont plus marqués que les pics et celle d'une asymétrie de pente (*steepness*) lorsque les contractions du cycle réel (dépression, chômage) sont plus rapides et abruptes que les expansions[1]. Un troisième type d'asymétrie mis en évidence par McQueen et Thorley (1993) concerne les différences de courbure entre les pics et les creux (*sharpness*). À l'évidence, le modèle linéaire est inapte à décrire ces asymétries, qu'un modèle markovien avec probabilités de transition asymétriques (Neftçi, 1984; Rothman, 1991; Andreano et Savio, 2002) ou un modèle à seuils de type

1. L'auteur montre que la production industrielle américaine incorpore une asymétrie d'amplitude tandis que le chômage exhibe à la fois une asymétrie d'amplitude et de pente.

STAR (Luukkonen et Terasvirta, 1991) ou SETAR (Peel et Speight,1998) sont plus à même de rendre compte.

L'analyse de plus en plus fréquente des phénomènes économiques caractérisés par des ruptures structurelles a été à la base de l'important essor qu'a connu l'économétrie des modèles à changements de régime depuis le début des années soixante-dix. Bien que la littérature propose de remarquables états de l'art sur certaines classes particulières de modèles (voir par exemple Goldfeld et Quandt, 1973b; Potter, 1999; Franses et van Dijk, 2000), une vue d'ensemble de ces approches dans une perspective comparative lui fait défaut. Une approche plus globalisante permettrait, à notre sens, de mieux appréhender l'adéquation de chaque type de modèle aux types de problématiques économiques étudiées, ainsi que l'articulation des modèles entre eux au-delà de leurs spécificités relatives. Telle fut la motivation du présent travail, que par ailleurs nous confinons à l'étude des modèles à changements discrets. En ce sens, ne seront pas évoqués les modèles de prix d'actifs à changements stochastiques de régimes en temps continu[2] (Flood et Garber,1983; Krugman, 1991; Froot et Obstfeld, 1991a et b). Notre objet étant la *modélisation* du changement structurel, nous nous limitons par ailleurs aux modèles incorporant un mécanisme de changement explicite ou implicite. Nous passerons donc sous silence les méthodes récentes d'estimation des modèles avec ruptures endogènes (Bai, 1997; Bai et Perron, 1998) ainsi que les études portant sur la théorie des tests d'hypothèses avec ruptures inconnues (tests de racine unitaire de Perron, 1989; Zivot et Andrews, 1992; Banerjee, Lumsdaine et Stock, 1992 ou tests d'instabilité des paramètres d'Andrews, 1993; Andrews et Ploberger, 1994).

L'élément distinctif fondamental qui permet de dresser une typologie des modèles à changement de régimes est de toute évidence l'ensemble des hypothèses faites sur le mécanisme qui gouverne le changement. Un critère de catégorisation qui nous semble intéressant à adopter, et tel sera le fil conducteur du bilan proposé, est l'ordre décroissant d'information *a priori* à la disposition du modélisateur pour décrire ce mécanisme de changement. On considèrera d'abord dans une première section la situation de référence où l'appartenance des observations à tel ou tel régime est connue, avant d'évoquer dans les sections suivantes toutes les autres classes de modèles pour lesquels la distribution des observations par rapport aux régimes n'est pas connue. La deuxième section présente les modèles dans lesquels un mécanisme explicitement spécifié décrit le processus du changement. Dans les modèles TAR et STAR le choix du régime résulte du positionnement d'une variable économique par rapport à un ou plusieurs seuil(s), tandis que dans les modèles à changements endogènes une fonction stochastique des variables latentes assure le rôle de critère de sélection. Lorsque la connaissance d'un

2. Ces modèles rendent compte du changement stochastique futur de la fonction de réaction des autorités (sous la forme d'intervention ou de non-intervention) quand le prix de l'actif, fonction de sa variation anticipée, sort d'une certaine bande de fluctuation.

schéma de sélection de régime fait défaut à l'économètre, les différents états du monde sont spécifiés dans le cadre d'un modèle probabiliste (section 3). Entrent dans cette classe les modèles à mélanges de distributions où chaque régime apparaît suivant une probabilité structurelle inconnue et les modèles markoviens où les régimes changent suivant des probabilités de transition elles-mêmes inconnues. La dernière section développe quelques remarques conclusives.

1. Information complète sur la réalisation des régimes : modèle de référence

Il s'agit ici du cas le plus simple (modèle de référence) où les sous-périodes de réalisation des différents régimes sont connus. Le modélisateur dispose donc d'une information complète :

$$y_t = \beta_i' x_{it} + \varepsilon_{it} \quad \text{si } t \in I_i, \quad i = 1, \ldots, k \tag{1}$$

où y_t représente la variable endogène, x_{it} un vecteur de p_i variables exogènes propres au régime i, β_i un vecteur de p_i coefficients et ε_{it} une perturbation aléatoire supposée gaussienne, centrée, homoscédastique et non autocorrélée, et telles que $\text{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0$ pour $i \neq j$ puisque à un instant donné il y a un « bon » modèle et un seul. Les I_i sont des sous-ensembles disjoints de n_i observations tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = T$ (taille de l'échantillon). Notons que les observations à l'intérieur des sous-ensembles d'observations I_i peuvent ou non être consécutives. Si elles le sont, aux k régimes distincts correspondent alors $k - 1$ ruptures (ou changements de régimes). Dans le cas contraire, on peut observer jusqu'à $T - 1$ ruptures. Dans tous les cas, les paramètres du modèle caractéristique de chaque régime i peuvent être estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires sous réserve que la période I_i contienne un nombre suffisant d'observations n_i. De manière équivalente, l'estimateur du maximum de vraisemblance se construit à partir de la densité de y_t conditionnelle à l'information $t \in I_i$ connue par le modélisateur. Cette densité s'écrit, à chaque instant t :

$$f\left(y_t \middle| t \in I_i; x_t, \beta_i, \sigma_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_t - \beta_i' x_{it}}{\sigma_i}\right)^2\right\} = \frac{1}{\sigma_i}\varphi\left(\frac{y_t - \beta_i' x_{it}}{\sigma_i}\right)$$

où φ est la densité de la loi normale centrée et réduite. La fonction de log-vraisemblance s'en déduit immédiatement :

$$\ln L\left(y_t\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{t \in I_i} \ln f\left(y_t \middle| t \in I_i\right).$$

Citons comme exemple le modèle de détermination des salaires avec (1er régime) ou sans (2e régime) négociations salariales de Hamermesh (1970), où la variation des salaires dépend de celle de l'indice des prix à la consommation dans les deux régimes mais avec des paramètres qui diffèrent selon que la variation observable de l'indice des prix est supérieur ou inférieur à 2 %. Ce critère déterministe permettant d'associer directement chaque observation à l'un des deux régimes, le modèle de Hamermesh s'apparente au modèle (1).

On peut toutefois objecter au modèle (1) l'hypothèse sous-jacente que toutes les dates de rupture sont connues. De nombreux auteurs ont souligné dans les années quatre-vingt-dix les limites de cette hypothèse : un saut interprété comme une rupture peut en fait résulter d'une réalisation de la queue de distribution des erreurs dans le processus générateur des données (Zivot et Andrews, 1992). Si la littérature économétrique a, depuis, privilégié les méthodes de détection endogène des ruptures, un problème étudié par Goldfeld et Quandt (1976) consistait déjà à supposer l'existence d'une rupture dans une relation économique sans en connaître la date. De cette intuition pionnière le modèle suivant a vu le jour :

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta'_1 x_{1t} + \varepsilon_{1t}, && \text{si} \quad t = 1, \ldots, t_s - 1 \\
y_t &= \beta'_2 x_{2t} + \varepsilon_{2t} && \text{si} \quad t = t_s, \ldots, T
\end{aligned}
\tag{2}
$$

où t_s est la date de rupture inconnue à estimer. La log-vraisemblance s'écrit dans ce cas :

$$
\begin{aligned}
\ln L(y_t) &= \sum_{t=1}^{t_s-1} \ln f\left(y_t \middle| \pi_t = 1\right) + \sum_{t=t_s}^{T} \ln f\left(y_t \middle| \pi_t = 2\right), \\
&= -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - (t_s - 1)\ln(\sigma_1) - (T - t_s + 1)\ln(\sigma_2) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\sum_{t=1}^{t_s-1}\left(\left(y_t - \beta'_1 x_{1t}\right)/\sigma_1\right)^2 + \sum_{t=t_s}^{T}\left(\left(y_t - \beta'_2 x_{2t}\right)/\sigma_2\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

où t_s est estimée par balayage. On évalue (3) pour chaque valeur plausible de t_s et la date optimale est alors celle pour laquelle la log-vraisemblance est maximale. Mankiw, Miron et Weil (1987) proposent une application sur le comportement des taux d'intérêt nominaux américains.

2. Information incomplète sur la réalisation des régimes

La connaissance de la date de rupture et la connaissance du mécanisme qui gouverne le changement de régimes sont deux problèmes différents, bien qu'ils deviennent équivalents dans certains cas comme celui de Hamermesh (1970) cité ci-dessus. Dans le modèle (1), si le processus générateur des données de la variable endogène est connu à chaque instant, rien n'est dit sur un tel mécanisme. En effet, dans le modèle (2), que s'est-il passé en t_s pour qu'à partir de cette date le régime 1 cède la place au régime 2? Les modèles incorporant une règle (ou schéma) de sélection répondent à cette question. Cette règle peut être de nature déterministe ou stochastique.

2.1 *Règle de sélection déterministe : modèles à seuils*

Deux types de modèles à seuils sont considérés : les modèles autorégressifs à transition brutale (TAR) et à transition souple (STAR). La variable de seuil (dans le modèle TAR) ou de transition (dans le modèle STAR), notée s_t, est une variable exogène appartenant ou non à l'ensemble des variables exogènes x_t du modèle et dont la valeur prise à chaque instant détermine, par rapport à un échelle de seuils α_i à estimer, le régime en action à cet instant.

2.1.1 *Un modèle précurseur*

L'idée d'un modèle à seuils inconnus remonte à Goldfeld et Quandt (1972, 1973b). Globalement, un tel modèle s'obtient en substituant au critère de sélection de (1) un critère à seuils, de sorte que :

$$y_t = \beta_i' x_{it} + \varepsilon_{it} \quad \text{si } \alpha_{i-1} < s_t \leq \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, k \tag{4}$$

où s_t est une variable de seuil et les α_i sont des seuils inconnus tels que $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k$ (on pose par convention $\alpha_0 = -\infty$ et $\alpha_k = \infty$). Dans le cas le plus simple s_t est une variable identifiable exogène, mais elle peut aussi prendre la forme d'une somme pondérée de variables exogènes où les pondérations sont des paramètres inconnus à estimer (Goldfeld et Quandt, 1973b). Pour estimer ce modèle, les auteurs proposent de conditionner chaque régime i à un positionnement spécifique de s_t par rapport à l'ensemble des seuils ordonnés α_j ($j = 1, \ldots, k-1$). À chacun des seuils est alors associée une fonction binaire $d_j(s_t)$ prenant la valeur zéro si $s_t \leq \alpha_j$ et 1 sinon. Chacune de ces fonctions étant à valeurs discrètes, elle doit être approximée par une fonction continue, comme par exemple la fonction cumulative normale[3] :

$$d_j(s_t) \equiv F(s_t; \alpha_j, \gamma_j) = 2\pi^{-1/2}\gamma_j^{-1} \int_{-\infty}^{s_t} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\tau - \alpha_j\right)/\gamma_j\right]^2\right\} d\tau$$

où γ_j, paramètre à estimer, est inversement proportionnel à la qualité de l'approximation. Le modèle à seuils peut alors être écrit sous la forme compacte suivante :

$$y_t = \sum_{i=1}^{k} \delta_i(s_t)\beta_i' x_{it} + \varepsilon_t,$$

$$\delta_i(s_t) = \Pi_{j=0}^{i-1} d_j(s_t) \Pi_{j=i}^{k}\left(1 - d_j(s_t)\right)$$

où $d_0(s_t) = 1$ et $d_k(s_t) = 0$ par convention et $\varepsilon_t = \sum_{i=1}^{k} \delta_i(s_t)\varepsilon_{it}$ a pour variance

3. Les auteurs suggèrent alternativement l'intégrale de Cauchy ou la fonction logistique. Voir aussi les fonctions polynomiales à seuils proposées par Ginsburgh, Tishler et Zang (1979) pour approcher la fonction binaire $d_j(s_t)$.

$\sum_{i=1}^{k} \delta_i \left(s_t\right)^2 \sigma_i^2$. Les auteurs proposent alors d'estimer les paramètres de ce modèle par la méthode du maximum de vraisemblance. Goldfeld et Quandt (1972) montrent comment est modifiée cette vraisemblance lorsque les erreurs sont autocorrélées.

À titre illustratif, le modèle à seuils le plus simple est obtenu pour $k = 2$:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta'_1 x_{1t} + \varepsilon_{1t}, && \text{si } s_t \leq \alpha \\ y_t &= \beta'_2 x_{2t} + \varepsilon_{2t} && \text{si } s_t > \alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Ce modèle peut se mettre sous la forme équivalente : $y_t = \beta'_1 x_{1t} + \varepsilon_{1t}$ si $d(s_t) = 0$ et $y_t = \beta'_2 x_{2t} + \varepsilon_{2t}$ si $d(s_t) = 1$, ou encore :

$$y_t = \left(1 - d\left(s_t\right)\right)\beta_1' x_{1t} + d\left(s_t\right)\beta_2' x_{2t} + \left(1 - d\left(s_t\right)\right)\varepsilon_{1t} + d\left(s_t\right)\varepsilon_{2t} \tag{6}$$

et la log-vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} \ln L\left(y_t\right) = &-\frac{T}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left[\left(1 - d\left(s_t\right)\right)^2 \sigma_1^2 + d\left(s_t\right)^2 \sigma_2^2\right] \\ &- \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\left[y_t - \left(1 - d\left(s_t\right)\right)\beta_1' x_{1t} - d\left(s_t\right)\beta_1' x_{2t}\right]^2}{\left[\left(1 - d\left(s_t\right)\right)^2 \sigma_1^2 + d\left(s_t\right)^2 \sigma_2^2\right]}\right]. \end{aligned}$$

Goldfeld et Quandt (1972) estiment par cette méthode le modèle à deux régimes de Fair et Jaffee (1972) décrivant le marché de la construction immobilière. Dans ce modèle, le nombre de mises en chantier (variable y_t) est déterminé en t par l'offre ou la demande de construction immobilière selon que la variation observée en t du taux du marché hypothécaire (variable s_t) est positive ou négative ($\alpha = 0$) : en effet la hausse (baisse) du taux entre $t - 1$ et t provient d'un excès de demande (offre) immobilière en t, et les mises en chantier sont alors déterminées par l'offre (la demande) selon le principe de l'échange volontaire (voir aussi les modèles de déséquilibre, section 2.2).

2.1.2 *Modèles TAR ou à transition brutale*

Dans l'approche de Goldfeld et Quandt, la variable de seuil s_t (ou ses déterminants) est supposée connue. Considérons maintenant le cas où cette variable est inconnue *a priori* mais appartient à un ensemble fini de variables explicatives. En limitant les variables x_{it} dans (4) aux valeurs passées de y_t, on obtient un modèle autorégressif à seuils ou un modèle TAR (*Threshold AutoRegressive*). Certains auteurs (Tong, 1990; Ben Salem et Perraudin, 2000) élargissent le modèle TAR en introduisant également dans les x_{it} des facteurs exogènes. Dans ce cas, la variable de seuil peut être une valeur passée de la variable endogène mais aussi une variable exogène et les procédures d'estimation décrites ci-après restent applicables.

Une représentation TAR où la variable de seuil appartient à l'ensemble des valeurs passées de la variable endogène, soit $s_t = y_{t-d}$, est le modèle SETAR (*Self-Exciting Threshold AutoRegressive*). L'expression générale d'un modèle SETAR(k; p_1, p_2, …, p_k, d) proposé par Tong (1978, 1983) et Tong et Lim (1980) est :

$$y_t = \beta_{i0} + \sum_{j=1}^{p_i} \beta_{ij} y_{t-j} + \varepsilon_{it} \text{ si } \alpha_{i-1} < y_{t-d} \leq \alpha_i \quad i = 1, \ldots, k \tag{7}$$

où $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k$ (avec $\alpha_0 = -\infty$ et $\alpha_k = \infty$), p_i est l'ordre du polynôme de retards dans le processus autorégressif définissant le régime i (i = 1,…k), et d, le paramètre de retard, est un entier naturel inconnu tel que $1 \leq d \leq \max(p_i)$. La structure autorégressive des modèles TAR rend ces derniers particulièrement adaptés à l'analyse des séries exhibant des cycles périodiques. Or on sait que de tels cycles présentent le plus souvent un comportement asymétrique (Sichel, 1993; Ramsey et Rothman, 1996). Dans leur travail pionnier, Tong et Lim (1980) montrent que le modèle SETAR permet de rendre compte de différentes formes d'asymétrie, comme une asymétrie de durée entre les phases ascendantes et les phases descendantes ou une asymétrie de fréquence entre oscillations d'amplitudes hautes et basses. Il est en outre montré qu'une telle modélisation permet de générer des cycles-limites, qui sont les solutions périodiques asymptotiques indépendantes des conditions initiales. Tong et Lim illustrent ces non-linéarités au moyen de diverses séries temporelles. Entre autres applications, en exploitant les données de la population de lynx canadiens, ils montrent qu'un modèle SETAR(2;8,3,2) permet de décrire les fluctuations asymétriques (amplitudes des creux supérieures à celles des pics) de cette population autour d'un seuil critique de population. Ce mouvement cyclique de la population du lynx prédateur suppose cependant une dynamique contracyclique de la population de la proie, implicite et non modélisée dans ce modèle. Considérant par ailleurs des données de populations de visons (proies) et de rats musqués (prédateurs), les auteurs étendent le modèle (7) à un système de deux modèles SETAR interdépendants[4] et montrent que cette approche originale permet de reproduire conjointement les évolutions contracycliques engendrées par la relation prédateur-proie.

L'estimation des paramètres d'un modèle SETAR est complexe du fait notamment de la difficulté inhérente à l'identification de la variable de seuil et de l'absence d'une méthode d'estimation globale simple. En effet, si la fonction de vraisemblance du modèle (7) peut être construite sans difficulté, cette fonction n'est pas dérivable en d. Les différentes approches, fondées sur l'idée fondamentale que le modèle est linéaire à l'intérieur de chaque régime, préconisent des méthodes séquentielles d'estimations conditionnelles aux valeurs de d et de α. Dans cette optique, Tong et Lim (1980) proposent d'estimer les paramètres du

4. L'interdépendance tient ici au fait que la variable dépendante d'un modèle figure dans l'autre modèle comme variable de seuil de même que ses valeurs retardées y figurent parmi les variables indépendantes.

modèle SETAR à deux régimes suivant une procédure basée sur le critère AIC adapté à chaque paramètre. Outre sa mise en oeuvre peu commode, un inconvénient de la méthode de Tong et Lim est que les valeurs optimales ne sont pas détectées selon un critère unique et global pour tous les paramètres[5]. Hansen (1997) pallie ce problème en envisageant un modèle non-linéaire à une équation où à la représentation de chaque régime est associée une variable indicatrice de ce régime, et en proposant également une procédure de double balayage sur α et d avec comme critère (unique) d'optimalité la minimisation de la variance de l'erreur résiduelle du modèle. Pour $k = 2$, un tel modèle prend la forme suivante :

$$y_t = \left(\beta_{10} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{1j} y_{t-j}\right) 1_{y_{t-d} \leq \alpha} + \left(\beta_{20} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{2j} y_{t-j}\right) 1_{y_{t-d} > \alpha} + \varepsilon_t \tag{8}$$

où $1_{y_{t-d} \leq \alpha}$ ($1_{y_{t-d} > \alpha}$) est une fonction indicatrice qui vaut 1 si la variable de transition est inférieure ou égale (resp. supérieure) au seuil et 0 sinon[6]. On suppose que l'erreur ε_t est une martingale par rapport aux valeurs passées de y_t et est homoscédastique[7]. Pour un couple (d, α) donné, les paramètres des deux représentations AR linéaires sont estimés par les moindres carrés selon que, à chaque instant t, y_{t-d} dépasse ou non le seuil α. On procède alors à un balayage sur α pour d donné en réitérant l'opération pour toutes les valeurs de d et on calcule la variance résiduelle associée à chaque couple (d, α). Le couple optimal (d^*, α^*) ainsi que les autres paramètres estimés correspondant à ce couple sont alors choisis de manière à rendre minimale la variance résiduelle du modèle, c'est-à-dire comme solutions de la fonction arg min $\hat{\sigma}_\varepsilon^2(d, \alpha)$. On remarquera que, sous l'hypothèse nulle de linéarité (existence d'un seul régime), les paramètres d et α ne sont pas identifiables et la procédure de test n'est pas standard. Il s'agit du problème connu lié au test de l'hypothèse nulle lorsque certains paramètres, dits paramètres de nuisance, sont présents uniquement sous l'hypothèse alternative de non-linéarité. Pour tester l'hypothèse nulle et afin de déceler la puissance du test, Hansen propose, à la suite de Davies (1977) et Andrews et Ploberger (1994), une série de statistiques de test basées sur les statistiques de Wald et du multiplicateur de Lagrange.

Toutefois, ces méthodes d'estimation basées sur la technique du balayage sont très coûteuses en temps et atteignent rapidement leurs limites lorsque le nombre de régimes dépasse deux. L'idée originale de Tsay (1989) consiste à estimer les paramètres d'un modèle AR unique dont les observations sont disposées suivant les valeurs ordonnées de la variable de seuil et à tester par la statistique F la non-linéarité à seuils : le modèle est linéaire (il n'existe qu'un régime) si les résidus

---

5. Notons par ailleurs que Clements et Krolzig (1998) mettent en doute la pertinence du critère AIC pour sélectionner l'ordre des retards dans les modèles non-linéaires.

6. La spécification (8) de Hansen (1997) est fortement similaire à celle (6) de Goldfeld et Quandt (1972), à la différence près que la procédure de double balayage sur les paramètres de la variable indicatrice permet d'éviter d'approximer cette dernière par une fonction continue.

7. Voir néanmoins l'extension de Hansen (1997) au cas d'hétéroscédasticité.

prédictifs sont orthogonaux aux régresseurs. Si la non-linéarité est décelée, on retient comme paramètre de retard celui qui correspond à la plus forte non-linéarité et on détermine par une procédure graphique le nombre et les valeurs des seuils. Un ajustement plus fin à l'intérieur de chaque régime complète la procédure. Perraudin et Ben Salem (2001) montrent à l'issue d'une étude comparative entre les approches de Tsay et de Hansen qu'il est difficile de conclure à la supériorité de l'une par rapport à l'autre au regard des performances des deux tests en termes de taille et de puissance.

Sur le plan empirique, une importante littérature souligne les performances du modèle SETAR tant sur le plan explicatif que prédictif. Reprenant notamment les données de Tong (1983), Tsay montre l'adéquation de sa méthode pour l'estimation de modèles SETAR à deux et à trois régimes. Sur la base de plusieurs séries du taux de change, Krager et Kugler (1993) montrent qu'un modèle SETAR permet de reproduire les variations plus ou moins fortes des taux de change durant la période de flottement contrôlé des années quatre-vingt. Balke et Wohar (1998) décrivent au moyen d'un modèle SETAR la dynamique asymétrique des écarts à la parité couverte du taux d'intérêt selon qu'ils sont inférieurs ou supérieurs aux coûts de transaction. Qu'elles soient stationnaires en différence ou en tendance, Peel et Speight (1998) trouvent que les données de la production allemande, japonaise et américaine peuvent être représentées adéquatement par un modèle SETAR. Peel et Speight (2000) décrivent avec succès les taux de chômage en Allemagne, aux États-Unis, au Royaume-Uni et au Japon au moyen de modèles SETAR, et montrent que ces modèles restent performants lorsqu'ils sont utilisés dans une perspective prédictive à une période. En revanche, Clements et Krolzig (1998) trouvent que les performances prédictives du modèle TAR ne sont pas meilleures que celles du modèle linéaire AR pour la prévision du PIB américain. Concernant la prévision à plusieurs périodes, Clements et Smith (1999) montrent qu'une telle prévision issue d'un modèle SETAR peut battre celle d'un modèle linéaire si cette prévision est faite conditionnellement au régime en cours au moment où elle est formée.

Enfin, l'exposé des modèles TAR serait incomplet sans la mention d'une extension importante proposée par Astatkie, Watts et Watt (1997). Il s'agit des modèles TAR imbriqués (*Nested TAR* ou *NeTAR models*) où l'état du monde est déterminé non pas par une, mais par plusieurs sources de non-linéarité représentées par autant de variables de seuils agissant suivant un schéma d'imbrication donné. Dans le cas de deux sources de non-linéarité, la valeur retardée y_{t-d} de la variable endogène et la valeur actuelle ou retardée d'une variable x_t appartenant au vecteur de variables exogènes z_t du modèle sont des variables de seuils petinentes. Si y_{t-d} agit au premier niveau et prend ses valeurs dans une partition de k_1 intervalles (donc de part et d'autre de $k_1 - 1$ seuils) et si, pour un intervalle $i \in [1,k_1]$, x_{t-e_i} (où $e_i \geq 0$ est inconnu) prend ses valeurs dans une partition de k_{2i} intervalles (donc de part et d'autre de $k_{2i} - 1$ seuils), alors le modèle obtenu est un modèle NeTAR à $k = \sum_{i=1}^{k_1} k_{2i}$ régimes. Pour $k_1 = 2$ et $k_{2i} = 2$, $\forall i = 1,2$, ce modèle peut se mettre sous la forme :

$$y_t = \begin{cases} \sum_{j=1} \beta_{1j} y_{t-j} + \sum_{i=0} \gamma'_{1i} z_{t-i} + \varepsilon_{1t} & si \quad x_{t-e_1} \leq \alpha_2 \quad et \quad y_{t-d} \leq \alpha_1 \\ \sum_{j=1} \beta_{2j} y_{t-j} + \sum_{i=0} \gamma'_{2i} z_{t-i} + \varepsilon_{2t} & si \quad x_{t-e_1} > \alpha_2 \quad et \quad y_{t-d} \leq \alpha_1 \\ \sum_{j=1} \beta_{3j} y_{t-j} + \sum_{i=0} \gamma'_{3i} z_{t-i} + \varepsilon_{3t} & si \quad x_{t-e_2} \leq \alpha_3 \quad et \quad y_{t-d} > \alpha_1 \\ \sum_{j=1} \beta_{4j} y_{t-j} + \sum_{i=0} \gamma'_{4i} z_{t-i} + \varepsilon_{4t} & si \quad x_{t-e_2} > \alpha_3 \quad et \quad y_{t-d} > \alpha_1 \end{cases} \tag{9}$$

Les auteurs proposent d'estimer ce modèle NeTAR par une procédure séquentielle où les paramètres de retard sont évalués par un lissage non paramétrique et les seuils de l'estimateur des moindres carrés non linéaires. En exploitant les données hydrologiques islandaises de Tong (1990), ils montrent que le débit journalier (ici représenté par y_t) de la rivière *Jökulsa eystri* est expliqué par des facteurs fluviaux et météorologiques selon que la capacité courante du bassin, indiquée par y_{t-2}, est forte ou faible ($k_1 = 2$) et, dans le cas où elle est faible, selon que la température moyenne sur les trois derniers jours x_t est faible, moyenne ou élevée ($k_{21} = 0$, $k_{22} = 3$).

2.1.3 *Modèles STAR ou à transition souple*

Les méthodes préconisées ci-dessus dans le cadre des modèles TAR ont toutes une particularité commune : les changements décrits par le modèle à seuils se font de manière brutale. Les modèles STAR (*Smooth Transition AutoRegressive*), proposés par Chan et Tong (1986), Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta (1988), et Teräsvirta (1994), introduisent une progressivité dans le processus du changement (transition lisse, ou souple). Une interprétation intéressante de la transition lisse est suggérée par Granger et Teräsvirta (1997), selon lesquels le changement au niveau agrégé sera plus adéquatement représenté par un modèle STAR si l'économie est constituée d'un grand nombre d'individus ou de firmes dont chacun(e) change de régime de façon brutale mais à des dates différentes. Cette situation de non-simultanéité des comportements individuels peut en effet être justifiée par le fait que certains agents individuels ou institutionnels peuvent tirer profit à anticiper l'action du gouvernement et à entamer leur transition avant le changement de politique économique, tandis que des coûts d'information ou d'ajustement peuvent conduire d'autres agents à réagir avec retard à l'action des autorités. Remarquons toutefois que l'interprétation de Granger et Teräsvirta peut être étendue à des situations où les réactions individuelles peuvent elles-mêmes être graduelles à des degrés divers, traduisant des inerties comportementales dues à des coûts de transaction, aux habitudes ou à l'incertitude. Cette dernière vision est partagée par Maddala (1991), pour qui le caractère lissé de la transition peut résulter du fait que, ne croyant pas en la permanence de la nouvelle politique économique, les agents économiques ne s'ajustent pas immédiatement au nouveau régime mais y convergent graduellement par apprentissage.

Un modèle STAR à deux régimes s'écrit :

$$y_t = \left(\beta_{10} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{1j} y_{t-j}\right)\left[1 - F\left(s_t;\alpha,\gamma\right)\right] + \left(\beta_{20} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{2j} y_{t-j}\right) F\left(s_t;\alpha,\gamma\right) + \varepsilon_t, \quad \gamma > 0 \tag{10}$$

où $F(s_t;\alpha, \gamma)$, est une fonction de transition continûment dérivable sur l'intervalle [0,1][8]. À chacune des valeurs extrêmes de cette intervalle correspond un régime donné et au continuum des valeurs intermédiaires, la transition (ou, selon une alternative proposée par les auteurs, une infinité de régimes intermédiaires). La variable de transition s_t peut être une valeur retardée de y_t comme dans les modèles SETAR mais aussi une variable exogène ou une fonction de variables exogènes (van Dijk, Franses et Teräsvirta, 2000). Le paramètre γ mesure la vitesse de transition : plus il est élevé (faible), plus la transition est rapide (lente). ε_t est une erreur aléatoire supposée *iid* de moyenne nulle et de variance constante. Granger et Teräsvirta (1997) généralisent le modèle (10) à un modèle STR (*Smooth Transition Regression*) en remplaçant tout ou partie de ses régresseurs par des variables exogènes. Les fonctions de transition usuellement utilisées dans les modèles STAR sont la fonction logistique d'ordre 1 :

$$F\left(s_t;\alpha,\gamma\right) = \left(1 + \exp\left\{-\gamma\left(s_t - \alpha\right)\right\}\right)^{-1}, \quad \gamma > 0 \tag{11}$$

auquel cas on parle d'un modèle STAR logistique ou LSTAR, ou la fonction exponentielle d'ordre 1 :

$$F\left(s_t;\alpha,\gamma\right) = 1 - \exp\left\{-\gamma\left(s_t - \alpha\right)^2\right\}, \quad \gamma > 0 \tag{12}$$

qui conduit à considérer un modèle STAR exponentiel ou ESTAR. Soit $\omega_t = s_t - \alpha$ l'écart au seuil à un instant donné. La fonction logistique définit une correspondance univoque entre le signe d'un (important) écart au seuil, ω_t, et un régime donné[9]. Un modèle à deux régimes avec fonction de transition logistique est donc approprié pour décrire des dynamiques asymétriques comme celles d'un régime d'expansion et d'un régime de récession. Lorsque $\gamma \to \infty$, la fonction de transition traduit des changements brutaux et si de plus $s_t = y_{t-d}$, le modèle LSTAR se confond avec le modèle SETAR (8), tandis que lorsque $\gamma = 0$, il s'identifie à un modèle linéaire puisque la fonction de transition est égale à 0,5[10]. La fonction

8. Rappelons que, bien qu'elles présentent des similitudes formelles, les fonctions $F(s_t;\alpha,\gamma)$ et $d(s_t)$ inhérents aux modèles (10) et (6) sont de natures fondamentalement différentes. En effet si la première s'appuie sur des hypothèses comportementales au niveau des agents économiques, la dernière relève d'une approximation technique et ne véhicule aucune signification économique.

9. En effet, la fonction (11) implique que lorsque ω_t tend vers $-\infty$ et $+\infty$, $F(s_t;\alpha,\gamma)$ tend respectivement vers 0 et 1. Ainsi, si s_t est petit (grand) devant α, le modèle (10) se réduit au premier (deuxième) régime.

10. Pour que ce modèle linéaire corresponde exactement à l'un des régimes décrits par le modèle, il suffit de soustraire ½ de la fonction de transition logistique (Teräsvirta, 1994).

exponentielle, quant à elle, définit une correspondance entre les valeurs de la variable de transition proches du seuil (ω_t faible) et l'un des régimes, et les valeurs de la variable de transition éloignées du seuil par valeurs inférieures ou supérieures ($|\omega_t|$ élevé) et l'autre régime[11]. Ce cas correspond donc à un modèle à trois régimes où les régimes extrêmes sont symétriques, à l'image d'un modèle d'intervention de la banque centrale sur le marché des changes où l'intervention a lieu (régimes extrêmes) lorsque le taux de change s'écarte substantiellement par valeurs positives ou négatives de sa valeur d'équilibre. L'intervention n'a pas lieu (régime intermédiaire) dans le cas contraire. Lorsque $\gamma \to 0$ ou $\gamma \to \infty$ le modèle ESTAR devient un modèle linéaire traduisant respectivement le régime intermédiaire ou le régime extrême.

La procédure d'estimation séquentielle proposée par Teräsvirta (1994) consiste à spécifier un modèle en déterminant successivement l'ordre du retard, la variable de transition et la fonction de transition avant d'en estimer les paramètres. Précisons les étapes intermédiaires, qui constituent le coeur de la démarche. À partir d'une approximation du modèle (10)[12], le choix de la variable de transition se fait en testant, par une statistique de test de type *LM* et pour chaque variable de transition candidate, l'hypothèse nulle de linéarité contre l'hypothèse alternative d'un modèle STAR (Luukkonen, Saikkonen et Teräsvirta, 1988). En l'absence de prérequis théoriques permettant de choisir entre une fonction de transition logistique ou exponentielle, Teräsvirta (1994) montre que le choix entre un modèle LSTAR et un modèle ESTAR peut faire l'objet d'une séquence de tests d'hypothèses nulles emboîtées.

Comme illustré ci-dessus, un modèle ESTAR est particulièrement approprié pour décrire les déviations d'un prix d'actif par rapport à sa valeur d'équilibre. Partant, une importante littérature empirique teste l'hypotèse de la parité des pouvoirs d'achat (PPA) à long terme en s'inspirant des modèles d'équilibre de détermination du taux de change réel proposé par Dumas (1992) et Sercu, Uppal et van Hulle (1995). Selon ces modèles, lorsque l'écart à la PPA est inférieur aux coûts de transaction, c'est-à-dire se maintient à l'intérieur d'une bande de transaction bornée par les coûts, aucun arbitrage n'a lieu et le taux de change évolue au voisinage de la PPA même s'il diverge par rapport à celle-ci. À l'extérieur de la bande de transaction, l'arbitrage international déclenche un processus de retour à la moyenne. Dans ce cadre, Michael, Nobay et Peel (1997) montrent qu'une modélisation non-linéaire de type ESTAR est particulièrement adaptée pour décrire la dynamique des écarts à la PPA. De même, Michael, Peel et Taylor (1997) réexaminent la validité du modèle monétariste comme une relation d'équilibre de long

11. La fonction (12) implique en effet que $F(s_t; \alpha, \gamma)$ tend vers 0 lorsque ω_t tend vers 0 et vers 1 lorsque ω_t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Si donc s_t est proche (éloigné) de α le modèle (10) se réduit au premier (deuxième) régime.

12. Il s'agit de l'approximation en séries de Taylor autour du point $\gamma = 0$, dite équation auxiliaire. L'avantage de cette équation est de fournir une spécification du modèle STAR sans préciser la nature de la fonction de transition.

terme et montrent que le taux de change nominal (dollar par rapport à la livre sterling) s'ajuste de façon graduelle et non-linéaire vers la PPA, vérifiant ainsi le modèle monétariste à long terme. Exploitant les données des USA et de plusieurs de ses partenaires, Baum, Barkoulas et Caglayan (2001) et Taylor, Peel et Sarno (2001) étudient la dynamique d'un ajustement vers la PPA de long terme et trouvent qu'un processus de retour à la moyenne a lieu pour des écarts à la PPA importants. Chen et Wu (2000) testent l'hypothèse d'un ajustement non-linéaire de type ESTAR vers la PPA contre celle d'un ajustement linéaire et montrent que le processus non-linéaire est validé.

Quant aux études basées sur la modélisation LSTAR, citons entre autres les travaux de Teräsvirta et Anderson (1992) qui montrent que la production industrielle dans nombre de pays de l'OCDE exhibe une dynamique non-linéaire – due essentiellement à d'importants chocs exogènes – que des modèles de type LSTAR permettent valablement de reproduire. Teräsvirta, Tjostheim et Granger (1994) valident également le modèle LSTAR sur la base des données de la production industrielle autrichienne. Dans le cadre d'une modélisation des taux de change effectifs réels des pays du G10, Sarantis (1999) montre que le modèle STAR bat le modèle markovien (voir section 3.2) dans une prespective prédictive.

Une extension devenue populaire des modèles LSTAR est proposée par van Dijk et Franses (1999), permettant de généraliser le modèle LSTAR à plus de deux régimes : le modèle MRSTAR (*Multi-Regime STAR*). Ce modèle non-linéaire à plusieurs régimes est approprié pour rendre compte de deux types de mécanismes complexes régissant le changement : le choix du régime se fait suivant (i) deux ou plusieurs variables de transition s_{it} ($i = 1, 2, 3,\ldots$) dont chacune est comparée à un seuil qui lui est spécifique α_i, ou (ii) une seule variable de transition comparée à plusieurs seuils. Le premier cas avec deux variables de transition imbriquées obéit à la logique suivante : selon que $s_{2t} \leq \alpha_2$ ou $s_{2t} > \alpha_2$, la variable dépendante y_t est expliquée soit par un modèle LSTAR soit par un autre modèle LSTAR dont chacun décrit deux régimes selon les valeurs de s_{1t} par rapport à α_1. Le modèle MRSTAR contient alors quatre régimes correspondant aux régions ($s_{1t} \leq \alpha_1$, $s_{2t} \leq \alpha_2$), ($s_{1t} > \alpha_1$, $s_{2t} \leq \alpha_2$), ($s_{1t} \leq \alpha_1$, $s_{2t} > \alpha_2$) et ($s_{1t} > \alpha_1$, $s_{2t} > \alpha_2$)[13]. En appelant $F_{1t} = F(s_{1t}; \alpha_1, \gamma_1)$ et $F_{2t} = F(s_{2t};\alpha_2, \gamma_2)$ les fonctions logistiques associées à s_{1t} et à s_{2t}, le modèle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} y_t = & \left[\left(\beta_{10} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{1j} y_{t-j}\right)(1 - F_{1t}) + \left(\beta_{20} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{2j} y_{t-j}\right) F_{1t}\right](1 - F_{2t}) \\ & + \left[\left(\beta_{30} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{3j} y_{t-j}\right)(1 - F_{1t}) + \left(\beta_{40} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{4j} y_{t-j}\right) F_{1t}\right] F_{2t} + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{13}$$

13. Plus généralement, un modèle MRSTAR comportant m variables de transition décrit 2^m régimes.

et se réduit au 1^{er}, 2^e, 3^e ou 4^e régime selon que les fonctions de transition (F_{1t}, F_{2t}) prennent respectivement comme valeurs limites (0,0), (1,0), (0,1) et (1,1). Le cas $F_{1t} = F_{2t} = 0{,}5$ (ou de manière équivalente $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) correspond à une absence totale de transition et le modèle MRSTAR se réduit à un modèle linéaire AR(p) simple, tandis que lorsque l'une seulement des deux fonctions de transition est égale à 0,5, on obtient le modèle STAR à deux régimes (10). Si les deux vitesses sont infinies, les transitions sont instantanées et le modèle MRSTAR devient équivalent au modèle NeTAR particulier (9) où $e_1 = e_2 = e$. Concernant la procédure d'identification et d'estimation d'un modèle MRSTAR, van Dijk et Franses proposent d'abord d'identifier les variables de transition candidates suivant la procédure décrite par Luukkonen *et alii* (1988) et de tester par les moindres carrés non-linéaires un modèle LSTAR en partant de la variable de transition la plus représentative. Pour détecter l'éventuelle persistance d'une non-linéarité non expliquée, ils développent une statistique de type *LM* permettant de tester l'hypothèse nulle d'un modèle STAR à deux régimes contre l'hypothèse alternative d'un modèle MRSTAR à quatre régimes. Le rejet de l'hypothèse nulle les conduit alors à étendre le modèle LSTAR estimé à un modèle MRSTAR. Les auteurs montrent ainsi que les données américaines du PIB réel peuvent être représentées par un modèle MRSTAR avec, comme variables de transition, un indicateur de tendance et un indicateur conjoncturel de la structure expansionniste ou récessionniste du PIB réel. Exploitant également les données américaines, Dufrénot, Mignon et Péguin-Feissolle (2004) montrent que le modèle MRSTAR est approprié pour rendre compte notamment des effets asymétriques des chocs monétaires sur le PIB.

Un cas particulièrement intéressant du modèle MRSTAR est obtenu lorsque s_{2t} représente le temps ($s_{2t} = t$). Le modèle se réduit alors à un modèle STAR à deux régimes dont les paramètres $\{\beta_{1j}, \beta_{2j}\}$ changent en $\{\beta_{3j}, \beta_{4j}\}$ au-delà d'une date α_2 estimée ($\alpha_2 = t^*$). C'est le modèle STAR à paramètres variables ou *Time-varying STAR* (TV-STAR) développé par Lundbergh, Teräsvirta et van Dijk (2003).

La deuxième situation citée ci-haut donnant lieu à un modèle MRSTAR est celui où plusieurs régimes sont caractérisés par une seule variable de transition mais plusieurs seuils. Dans le cadre du modèle (13), considérons le cas particulier où $s_{1t} = s_{2t} = s_t$ et posons par convention $\alpha_1 < \alpha_2$. On définit ainsi trois régions pour la variable de transition dont les valeurs inférieures à α_1 appartiennent au régime 1, celles comprises entre α_1 et α_2 au régime 2 et celles supérieures à α_2 au régime 4. Ici, le régime 3 défini par les conditions $s_t \leq \alpha_1$ et $s_t > \alpha_2$ correspond à une région d'impossibilité. On vérifie en effet que le produit $(1 - F_{1t})\, F_{2t}$ dans la relation (13) est négligeable sinon nul quelle que soit la valeur de s_t[14]. Ceci implique que F_{2t} est une bonne approximation de $F_{1t}F_{2t}$. En développant l'équation (13) et compte tenu de cette approximation, on peut écrire le modèle MRSTAR à trois régimes sous la forme suivante :

---

14. Pour γ suffisamment grand, $1 - F_{1t}$ et F_{2t} prennent approximativement les valeurs (1,0) si $s_t < \alpha_1$, (0,0) si $\alpha_1 < s_t < \alpha_2$ et (0,1) si $s_t > \alpha_2$. Il en résulte que $(1 - F_{1t})F_{2t} \approx 0$ pour toute valeur de s_t.

$$y_t = \beta_{10} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{1j} y_{t-j} + \left(\beta_0^{'} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j^{'} y_{t-j} \right) F_{1t} + \left(\beta_0^{''} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j^{''} y_{t-j} \right) F_{2t} + \varepsilon_t \qquad (14)$$

avec $\beta'_j = \beta_{2j} - \beta_{1j}$ et $\beta''_j = \beta_{4j} - \beta_{2j}$, $j = 0, \ldots, p$.

Enfin, un autre modèle à trois régimes, très différent de (14), est celui proposé par Jansen et Teräsvirta (1996) qui considèrent le modèle STAR (10) avec une fonction logistique quadratique (QLSTAR) :

$$F\left(s_t; \alpha_1, \alpha_2, \gamma\right) = \left(1 + \exp\left\{-\gamma\left(s_t - \alpha_1\right)\left(s_t - \alpha_2\right)\right\}\right)^{-1}. \qquad (15)$$

Ainsi, pour des valeurs suffisamment grandes de γ et pour $\alpha_1 < \alpha_2$, on a $F(s_t; \alpha_1, \alpha_2, \gamma) = 1$ si $s_t < \alpha_1$ ou $s_t > \alpha_2$, tandis que $F(s_t; \alpha_1, \alpha_2, \gamma) = 0$ si $\alpha_1 < s_t < \alpha_2$. On est donc en présence d'un modèle à trois régimes dont les deux régimes extrêmes sont formellement identiques, tout comme le modèle ESTAR. La différence entre les deux approches tient au fait que le modèle QLSTAR permet de rendre asymétriques les seuils séparant les régimes extrêmes et le régime intermédiaire contrairement au modèle ESTAR qui, par construction, ne le permet pas. Van Dijk et Franses (2000) analysent l'asymétrie des ajustements du taux d'intérêt hollandais à 1 mois vers sa valeur d'équilibre (taux à 12 mois) en estimant un modèle à correction d'erreurs à transition lisse (STECM). Par rapport à un modèle à correction d'erreur standard traduisant un ajustement linéaire vers l'équilibre de long terme, un modèle STECM présente l'avantage de rendre compte du caractère possiblement asymétrique de l'ajustement selon que l'écart à l'équilibre est fort ou faible, ou encore positif ou négatif. Les auteurs montrent que le premier type d'ajustement asymétrique peut être modélisé par une fonction de transition exponentielle de type (12) ou logistique quadratique de type (15), tandis que le deuxième peut l'être par une fonction de transition logistique de type (11).

2.2 *Règle de sélection stochastique : modèles à changements endogènes*

Rappelons que les modèles à seuils reposent sur l'hypothèse d'une variable de transition déterministe. Une version stochastique du modèle (5) est proposée par Maddala (1986b, 1991) qui substitue à la variable de transition déterministe une variable de transition aléatoire. Le modèle proposé par l'auteur est de la forme :

$$\begin{aligned} & y_{it} = \beta'_i x_{it} + \varepsilon_{it}, && i = 1,2 \\ & y_t = y_{1t}, && \text{si } s_t = \mu' z_t + \eta_t < 0 \\ & y_t = y_{2t}, && \text{si } s_t = \mu' z_t + \eta_t \geq 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

où y_{it} sont des variables endogènes latentes non observables (tandis que y_t est observable), z_t un vecteur de variables exogènes pouvant contenir y_{1t} et / ou y_{2t} et / ou tout ou partie des exogènes x_{it}, avant ε_{1t}, ε_{2t} η_t des erreurs aléatoires telles que $[\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \eta_t]' \rightsquigarrow Niid\ (0, \Omega)$,

$$\text{avec } \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{1\eta} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{2\eta} \\ \sigma_{1\eta} & \sigma_{2\eta} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}.$$

Pour nous permettre de nous y référer ultérieurement, écrivons la densité non conditionnelle de y_t définie comme la somme des densités conditionnelles aux régimes pondérées par les probabilités des régimes :

$$h(y_t) = f\left(y_t \middle| \eta_t < -\mu' z_t\right) P\left(\eta_t < -\mu' z_t\right) + f\left(y_t \middle| \eta_t \geq -\mu' z_t\right) P\left(\eta_t \geq -\mu' z_t\right).$$

Ici, il nous faut expliciter les densités conditionnelles $f(y_t|\eta_t < -\mu' z_t)$ et $f(y_t|\eta_t \geq -\mu' z_t)$ que l'on peut déduire de $f(\varepsilon_{1t}|\eta_t < -\mu' z_t)$ et de $f(\varepsilon_{2t}|\eta_t \geq -\mu' z_t)$ connaissant les distributions des deux erreurs. En appelant respectivement φ et Φ les fonctions de densité et de distribution de la loi normale centrée et réduite $\left(\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \text{ et } \Phi(w) = \int_{-\infty}^{w} \varphi(x)\,dx\right)$, il vient[15] :

$$h(y_t) = \sigma_1^{-1} \varphi\left(\frac{y_t - \beta_1' x_{1t}}{\sigma_1}\right) \Phi\left(\frac{-\mu' z_t - \sigma_{1\eta}\left(y_t - \beta_1' x_{1t}\right)/\sigma_1^2}{\left(\sigma_\eta^2 - \sigma_{1\eta}^2/\sigma_1^2\right)^{1/2}}\right)$$
$$+ \sigma_2^{-1} \varphi\left(\frac{y_t - \beta_2' x_{2t}}{\sigma_2}\right) \left\{1 - \Phi\left(\frac{-\mu' z_t - \sigma_{2\eta}\left(y_t - \beta_2' x_{2t}\right)/\sigma_2^2}{\left(\sigma_\eta^2 - \sigma_{2\eta}^2/\sigma_2^2\right)^{1/2}}\right)\right\}. \quad (17)$$

La fonction de vraisemblance peut alors être construite comme le produit sur tous les points de la période de la fonction $h(y_t)$. On remarquera que le paramètre σ_η n'est pas identifiable. Pour cette raison on le norme habituellement à 1[16]. Une deuxième remarque tient au fait que σ_{12}, la covariance de ε_{1t} et de ε_{2t}, ne peut être estimée puisqu'elle n'apparaît pas dans l'expression précédente.

Selon la terminologie de Maddala, les changements sont dits endogènes lorsque, dans le modèle (16), on a $\text{cov}(\eta_t, \varepsilon_{1t}) = \sigma_{1\eta} \neq 0$ et / ou $\text{cov}(\eta_t, \varepsilon_{2t}) = \sigma_{2\eta} \neq 0$, tandis que ε_{1t} et ε_{2t} peuvent ou non être indépendantes entre elles. La covariance non nulle entre η_t et ε_{it} peut résulter par construction du fait que la variable non observable y_{it} apparaît parmi les déterminants de la variable de transition s_t. Le

15. Le lecteur intéressé par les étapes du calcul peut les obtenir auprès de l'auteur.

16. Pour ce faire, il suffit de spécifier la variable de transition dans (16) comme $(\delta' z_t + \nu_t)/\sigma_\nu \lesseqgtr 0$ où $\nu_t \rightsquigarrow N(0, \sigma_\nu^2)$ et poser $\mu = \delta/\sigma_\nu$ et $\eta_t = \nu_t/\sigma_\nu$, auquel cas η_t représente bien une erreur centrée et réduite. Le fait de normer σ_η à 1 permet d'autre part d'écrire la fonction Φ dans (17) plus simplement comme $\Phi\left(\left(-\mu' z_t - \rho_{i\eta}\varepsilon_{it}/\sigma_i\right)\Big/\sqrt{1-\rho_{i\eta}^2}\right)$, où $\rho_{i\eta}$ est le coefficient de corrélation entre ε_{it} et η_t $(i = 1,2)$.

changement est alors endogène dans le sens où le mécanisme qui régit le changement se base sur des grandeurs qui sont simultanément expliquées dans le cadre du modèle, conférant ainsi à celui-ci une structure d'auto-sélection (*self-selection*). Ainsi, Osielwalski et Welfe (1998) testent, sur données polonaises, l'hypothèse selon laquelle prix et salaire sont représentés de manière interdépendante en situation de forte inflation (variable s_t), tandis que le salaire n'est pas affecté par la pression inflationniste en situation de faible inflation. Jensen (1990) valide sur données malaisiennes l'hypothèse selon laquelle la décision des couples à diminuer ou accroître leur rythme de reproduction est liée à leur sentiment d'avoir sécurisé ou non leur période de vieillesse (variable s_t) compte tenu du nombre d'enfants auxquels ils ont déjà donné naissance.

Une autre application du changement endogène concerne les modèles à choix multiples où le régime sélectionné est celui qui attribue à la variable dépendante sa valeur maximale ou minimale. Considérons l'exemple éclairant d'un individu qui choisit parmi diverses options celle qui lui procurera un avantage relatif. Avant de procéder à son choix, l'individu doit comparer les résultats de toutes les options, c'est-à-dire les valeurs des variables latentes calculées dans le cadre des différents régimes. Une telle comparaison suppose que les variables endogènes latentes, donc les régimes, coexistent et sont observables par l'individu à chaque instant, l'économètre n'observant que le régime sélectionné à l'issue de la comparaison. Cette propriété de coexistence des régimes constitue une spécificité des modèles à changements endogènes. Plus formellement, elle implique que les deux termes d'erreur ε_{1t} et ε_{2t} du modèle (16) sont toutes deux distribuées sur l'ensemble de la période, contrairement aux termes d'erreur du modèle (5) ou (7) dont chacun était défini sur le sous-ensemble des dates de réalisation du régime correspondant.

Le modèle général à k regimes où la règle de décision est donnée, par exemple, par la fonction max s'écrit :

$$\begin{aligned} & y_{it} = \beta'_i x_{it} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \ldots, k \\ & \text{et } y_t = y_{it} \quad \text{si } y_{it} = \max\,(y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{kt}). \end{aligned} \tag{18}$$

Le modèle de choix d'éducation de Willis et Rosen (1979) s'inscrit dans cet esprit puisqu'il décrit l'orientation des préférences d'un individu y_t pour le niveau d'études i selon que la valeur actualisée y_{it} de ce niveau d'études, mesurée sur la base du salaire attendu après la formation et des caractéristiques spécifiques à l'individu, est maximale. Dans le même ordre d'idée, King et Leape (1998) décrivent le processus de composition optimale de portefeuille en supposant qu'à chaque combinaison y_{it} d'actifs correspond un niveau d'utilité $v_{it} = v(x_{it})$ et le choix de la combinaison optimale y_t est déterminé par le maximum de ces niveaux d'utilité. Si $k > 2$, le modèle (18) est dit à choix polychotomiques. Son estimation, basée sur une méthode différente de celle à deux régimes présentée ci-dessus, requiert une transformation adéquate de la règle de sélection et une procédure d'estimation en deux étapes (voir Amemiya, 1983 ou Maddala, 1987 pour les détails méthodologiques). Un modèle connu à changements endogènes de type (18) à deux régimes et avec fonction min est le modèle de déséquilibre à prix fixe (Barro et Grossman, 1971; Bénassy, 1984 pour une approche théorique, et Quandt, 1988; Laroque et Salanié, 1995 pour une présentation économétrique). En effet, ce dernier décrit sous sa forme standard une offre y_{St} et une demande y_{Dt} non observables, définissant des variables endogènes latentes qui coexistent nécessairement à chaque instant. La quantité échangée observable y_t est à chaque instant égale à l'offre s'il y a excès de demande ou à la demande s'il y a excès d'offre suivant le principe de l'échange volontaire (ou la règle du minimum)[17]. Le modèle de déséquilibre sur un marché à prix fixe s'écrit :

$$\begin{aligned} y_{St} &= \beta'_s x_{St} + \varepsilon_{St}, \\ y_{Dt} &= \beta'_D x_{Dt} + \varepsilon_{Dt}, \\ y_t &= \min\left(y_{St}, y_{Dt}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

où l'on suppose que $\varepsilon_{St} \rightsquigarrow Nid(0, \sigma^2_S)$, $\varepsilon_{Dt} \rightsquigarrow Nid(0, \sigma^2_D)$ et $\text{cov}(\varepsilon_{St}, \varepsilon_{Dt}) = 0$. En reformulant la condition min de la façon équivalente suivante :

$$\begin{aligned} &y_t = y_{St}, && \text{si} \quad y_{St} < y_{Dt} \\ \text{et } &y_t = y_{Dt}, && \text{si} \quad y_{St} \geq y_{Dt} \end{aligned}$$

on peut mettre le modèle (19) sous la forme du modèle (16), où les indices 1 et 2 sont renommés S et D et où $\mu = (\beta'_s, -\beta'_D)'$, $z_t = (x_{St}, x_{Dt})'$ et $\eta_t = \varepsilon_{St} - \varepsilon_{Dt}$. Ici les conditions de Maddala relatives à l'endogénéité du changement, à savoir $\text{cov}(\eta_t, \varepsilon_{St}) = \sigma^2_s \neq 0$ et $\text{cov}(\eta_t, \varepsilon_{Dt}) = -\sigma^2_D \neq 0$, sont remplies par définition de η_t. Soit φ la densité et Φ la fonction cumulative de la loi normale. Compte tenu de la propriété $\Phi(-w) = 1 - \Phi(w)$ et puisque $\sigma^2_\eta = \sigma^2_s + \sigma^2_D$, la densité non conditionnelle (17) dans le cas du modèle (19) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} h(y_t) = {} & \sigma_S^{-1}\varphi\left(\left(y_t - \beta'_S x_{St}\right)/\sigma_S\right)\left\{1 - \Phi\left[\left(y_t - \beta'_D x_{Dt}\right)/\sigma_D\right]\right\} \\ & + \sigma_D^{-1}\varphi\left(\left(y_t - \beta'_D x_{Dt}\right)/\sigma_D\right)\left\{1 - \Phi\left[\left(y_t - \beta'_S x_{St}\right)/\sigma_S\right]\right\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Remarquons que cette densité peut être obtenue de façon immédiate par une transformation adéquate du modèle (19). En effet, si l'économie est caractérisée par un excès de demande (régime d'offre), le modèle peut s'écrire :

$$\begin{cases} y_t = \beta'_S x_{St} + \varepsilon_{St} \\ y_t < \beta'_D x_{Dt} + \varepsilon_{Dt} \end{cases}, \quad \text{ou encore} \begin{cases} \varepsilon_{St} = y_t - \beta'_S x_{St} \\ \varepsilon_{Dt} > y_t - \beta'_D x_{Dt} \end{cases},$$

tandis qu'en cas d'excès d'offre (régime de demande), on aura :

17. Ce principe stipule que les agents économiques situés sur le côté « court » du marché ne peuvent être contraints à échanger plus que la quantité qu'ils souhaitent échanger.

$$\begin{cases} y_t = \beta'_D x_{Dt} + \varepsilon_{Dt} \\ y_t < \beta'_S x_{St} + \varepsilon_{St} \end{cases}, \text{ ou encore } \begin{cases} \varepsilon_{Dt} = y_t - \beta'_D x_{Dt} \\ \varepsilon_{St} > y_t - \beta'_S x_{St} \end{cases},$$

Les hypothèses faites sur les erreurs conduisent immédiatement à (20).

Une fois le modèle estimé, on peut déterminer *ex post* le régime qui a le plus vraisemblablement prévalu *à chaque période*. La probabilité d'occurrence en t – ou la probabilité *a posteriori* – d'un régime i est la probabilité qu'à l'instant t, la réalisation y_t est générée dans le cadre de ce régime i. Soit $\pi_t = 1,2,\ldots k$ une variable aléatoire inobservable indicatrice des régimes. Par application de la règle de Bayes[18], on calcule cette probabilité comme la contribution du régime i à la densité non conditionnelle de y_t :

$$P\left(\pi_t = i \middle| y_t\right) = f\left(y_t \middle| \pi_t = i\right) P\left(\pi_t = i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{k} f\left(y_t \middle| \pi_t = i\right) P\left(\pi_t = i\right) \tag{21}$$

dont on vérifie bien que $\sum_{i=1}^{k} P\left(\pi_t = i \middle| y_t\right) = 1, \forall t = 1,\ldots,T.$ Ainsi, par exemple, la probabilité d'occurrence à l'instant t du régime d'excès d'offre suivant le modèle (19) s'écrit :

$$P\left(y_t \le y_{St} \middle| y_t\right) = \sigma_D^{-1} \varphi\left(\left(y_t - \beta'_D x_{Dt}\right)/\sigma_D\right) \left\{1 - \Phi\left(\left(y_t - \beta'_S x_{St}\right)/\sigma_S\right)\right\} \Big/ h\left(y_t\right).$$

Le modèle de déséquilibre à un marché a connu deux types d'extensions : les modèles de déséquilibre multimarchés (Goldfeld et Quandt, 1992a) et les modèles dynamiques de déséquilibre (Qin et Lu, 1998). Un aspect important de cette dernière approche est de décrire le processus de résorption des déséquilibres comme un ajustement simultané des prix et des quantités et non uniquement des quantités comme le supposaient les modèles standards de déséquilibre à prix fixes. De même, une originalité majeure des modèles multimarchés est de décrire l'effet de report, sur un marché en déséquilibre, d'un rationnement subi sur un autre marché en déséquilibre. De telles interactions sont usuellement supposées caractériser les marchés des biens et du travail, sources de déséquilibres avec rationnements quantitatifs (Artus, Laroque et Michel, 1984; Artus, Avouyi-Dovi et Laffargue, 1993). Dans le cadre d'un modèle Mundell-Fleming étendu, Uctum (1995) étudie la propagation sur le marché de la monnaie et la balance des paiements, tous deux en équilibre, des déséquilibres à prix fixe survenus sur les marchés du secteur réel.

Compte tenu des critères statistiques définissant un changement endogène, il résulte que le changement est exogène lorsque $\mathrm{cov}(\eta_t, \varepsilon_{1t}) = \mathrm{cov}(\eta_t, \varepsilon_{2t}) = 0$

18. D'après les théorèmes des probabilités conditionnelles, la densité jointe de y_t et du régime i est $g\ (y_t, \{\pi_t = i\}) = f(y_t|\pi_t = i)\ P(\pi_t = \mathrm{i}) = P(\pi_t = i|y_t)\ h(y_t)$, où $h(y_t)$ est la densité non conditionnelle telle que $h\left(y_t\right) = \sum_{i=1}^{k} f\left(y_t \middle| \pi_t = i\right) P\left(\pi_t = i\right).$ On obtient alors immédiatement (21).

(Maddala, Maddala et Nelson, *op.cit.*). Dans ce cas, la densité non conditionnelle (17) de y_t se simplifie et devient :

$$h(y_t)=\sigma_1^{-1}\varphi\left(\left(y_t-\beta_1^{'}x_{1t}\right)/\sigma_1\right)\Phi\left(-\mu^{'}z_t/\sigma_\eta\right)$$
$$+\sigma_2^{-1}\varphi\left(\left(y_t-\beta_2^{'}x_{2t}\right)/\sigma_2\right)\left\{1-\Phi\left(-\mu^{'}z_t/\sigma_\eta\right)\right\}.$$

La condition d'indépendance des erreurs η_t et ε_{it} est remplie *de facto* dans deux cas. Le premier cas est celui où s_t n'admet pas de composante aléatoire : en ce sens, les modèles à variable indicatrice observable (1) et à seuils (4) et (7) correspondent à des modèles à changements exogènes. Le deuxième cas est celui où les déterminants de s_t ne sont pas connus et le mécanisme de sélection implicite est représenté par une distribution de probabilités : cette hypothèse caractérise les modèles probabilistes (voir section 3) et fait de ces derniers également des modèles à changements exogènes (Maddala, 2000).

3. Absence d'information sur la réalisation des régimes : modèles probabilistes

Une classe alternative de modèles est celle qui relâche l'hypothèse selon laquelle un mécanisme de sélection explicite gouverne le changement de régimes. Ici, non seulement l'économètre ne connaît pas le régime en cours mais ne sait pas non plus ce qui impulse le changement d'un régime à un autre. Une façon de modéliser le phénomène décrit est de supposer que la nature choisit parmi les k régimes suivant une distribution de probabilités inconnue et à estimer (modèles à mélanges de distributions) ou évolue d'un régime à un autre suivant des probabilités de transition également inconnus (modèles à changements markoviens).

3.1 *Modèles à mélange de distributions*

La modélisation des changements de régimes consistant à affecter des probabilités non conditionnelles aux différents régimes a été proposé par Quandt (1972) et Goldfeld et Quandt (1973a) sous l'appellation « modèle-λ », la lettre grecque évoquant lesdites probabilités structurelles. L'approche peut être définie en termes de « mélange de distributions normales »[19] puisque la distribution non conditionnelle de la variable endogène est obtenue comme la moyenne pondérée des distributions conditionnelles de cette variable, les coefficients de pondération étant les probabilités non conditionnelles. Ce type de modélisation a alimenté une abondante littérature dans nombre de disciplines (voir par exemple Everitt et Hand, 1981; Titterington, Smith et Makov, 1987). Cependant, l'interprétation que l'on peut attribuer à un modèle à mélange de distributions, en tant que modèles à changements de régimes, nous semble devoir être précisée. Le fait que la

19. Certains auteurs, comme Pole et Smith (1985), privilégient l'appellation « modèles à choix stochastiques de régimes ».

réalisation de chaque régime soit assujettie à une probabilité structurelle et non à une règle de sélection ne signifie pas qu'aucun mécanisme de décision n'est sous-jacent au choix du modèle et que le passage d'un modèle à l'autre est aléatoire. Un tel mécanisme de décision existe, il est connu par les agents économiques et préside bien au choix d'un régime à chaque instant. Cependant, il est externe au modèle et ignoré par l'économètre qui le remplace par des probabilités constantes et inconnues associées aux différents régimes. En ce sens, ces probabilités *a priori* peuvent être interprétées comme les probabilités associées à des règles de sélection implicites. Par exemple, si l'économètre ne connaît pas la règle de décision inhérente au modèle (5) selon laquelle le régime 1 prévaut si $s_t \leq \alpha$ et le régime 2 sinon, il affecte aux deux régimes les probabilités structurelles p et $1 - p$ qui désignent respectivement les probabilités associées aux événements $s_t \leq \alpha$ et $s_t > \alpha$ caractéristiques des régimes. Plus généralement, représentons par π_t cette variable inobservable indicatrice du régime $i = 1, \ldots, k$; la probabilité non conditionnelle (*a priori*) qui lui est associée est :

$$P\left(\pi_t = i;\theta\right) = p_i \text{ avec } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \qquad (22)$$

où θ est le vecteur des paramètres du modèle, qui sera omis par la suite par souci de simplification. À l'instant t, y_t est générée par un processus i selon la distribution de probabilité suivante :

$$y_t = \beta_i' x_{it} + \varepsilon_{it} \quad \text{avec la probabilité } p_i, \quad i = 1, \ldots, k. \qquad (23)$$

En supposant que ε_{it} est $N(0, \sigma_i^2)$, la densité de y_t conditionnelle au régime i s'écrit :

$$f\left(y_t \middle| \pi_t = i\right) = \frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{y_t - \beta_i' x_{it}}{\sigma_i}\right) \qquad (24)$$

où φ représente la densité de loi normale centrée et réduite, tandis que la densité non conditionnelle de y_t est donnée par :

$$h\left(y_t\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i f\left(y_t \middle| \pi_t = i\right)$$

dont on en déduit la fonction de log-vraisemblance telle que $\log L = \sum_{t=1}^{T} \log h\left(y_t\right)$.

La connaissance des valeurs des paramètres estimés permet de calculer les probabilités des régimes conditionnellement aux réalisations de y_t, ou encore les probabilités *a posteriori* des régimes à chaque instant (voir équation (21)). Il vient, dans le cas du modèle (23) :

$$P\left(\pi_t = i \middle| y_t\right) = p_i h\left(y_t \middle| \pi_t = i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{k} p_i h\left(y_t \middle| \pi_t = i\right).$$

Hamilton (1994) a montré analytiquement qu'au point du vecteur des paramètres qui maximise la vraisemblance non contrainte, la probabilité *a priori* (structurelle) d'un régime est égale à la moyenne longitudinale des probabilités *a posteriori* (instantanées) de ce régime :

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} P\left(\pi_t = i \middle| y_t\right) = p_i \qquad \forall_i = 1,\dots k.$$

En utilisant des données d'enquête, Prat et Uctum (2007) testent si les processus anticipatifs utilisés par un panel d'experts pour générer leurs anticipations de change sur six monnaies changent ou non au cours du temps. Ici les régimes sont les processus anticipatifs extrapolatif, régressif et adaptatif ainsi que toute combinaison linéaire de ceux-ci. Les auteurs montrent que le comportement anticipatif est caractérisé par une mixité des processus simples qui elle-même se modifie de par sa structure au cours du temps.

Pour représenter le changement structurel, les modèles à mélange de distributions n'ont pas connu la popularité des modèles à changements markoviens sans doute parce que dans un monde représenté par un faible nombre de régimes ces derniers ont une portée plus générale que ces premiers. En effet, en plus des probabilités *a priori* et *a posteriori*, les modèles markoviens permettent aussi d'estimer des probabilités de transition d'un régime à l'autre. Toutefois, lorsqu'un grand nombre de régimes est considéré, ils deviennent peu adaptés en raison du nombre croissant de probabilités de transition à estimer, tandis que les modèles à mélange de distributions sont capables de rendre compte d'une pluralité d'états de la nature.

3.2 *Modèles à changements markoviens*

Le modèle (23) associe à la réalisation d'un régime donné une probabilité *a priori*, non conditionnelle aux valeurs passées des variables dépendante et indépendantes. Les modèles à changements markoviens se fondent au contraire sur le principe selon lequel la probabilité de réalisation d'un régime est conditionnelle aux réalisations passées des variables d'intérêt (Engel et Hamilton, 1990). En outre, du fait de la structure dynamique des probabilités de transition, les modèles markoviens permettent de calculer des probabilités associées aux réalisations futures d'un régime et de prévoir la valeur future de la variable endogène, et ce quelle que soit la longueur de l'horizon de la prévision. Il est clair que les modèles à mélange de distributions ne sont pas adaptés à cette tâche. Si l'approche a connu ses premiers développements avec les travaux de Goldfeld et Quandt (1973a), elle a été notamment généralisée et approfondie par Hamilton (1989, 1990, 1994).

Le modèle à changements markoviens à k états prend la forme générale suivante :

$$y_t = \beta'_{\pi_t} z_t + \varepsilon_t, \qquad \pi_t = 1, \dots, k \tag{25}$$

où $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $z_t = (y_{t-1}\ y_{t-2}\ \dots\ x'_t\ x'_{t-1}\dots)'$, x_t est un vecteur de variables exogènes, π_t une variable aléatoire inobservable indicatrice du régime en t et supposée indépendante de $\varepsilon_{t-\upsilon}$ $\forall \upsilon = 0,1, \ldots,$ et β_{π_t} un vecteur de paramètres caractérisant le régime π_t ($\beta_{\pi_t} = \beta_j$ lorsque le régime j prévaut). L'estimation de ce modèle se fait de manière itérative en alternant à chaque instant entre une étape d'inférence (probabilité que $\pi_t = \mathrm{j}$ conditionnelle à toute l'information en t) et une étape de prévision (probabilité que $\pi_t = j$ conditionnelle à l'information en $t - 1$) décrites ci-après.

On calcule l'inférence de la même façon que les probabilités conditionnelles (21) : elle décrit la probabilité de $\pi_t = j$ conditionnelle à toute l'information disponible en t, à savoir les valeurs présentes et passées de y_t et x_t :

$$P\left(\pi_t = j \middle| y_t, z_t\right) = \frac{P\left(\pi_t = j \middle| z_t\right) f\left(y_t \middle| \pi_t = j, z_t\right)}{f\left(y_t \middle| z_t\right)}. \tag{26}$$

La quantité $P(\pi_t = j|z_t)$ exprimant la prévision du régime conditionnelle à l'information passée fait l'objet de l'étape suivante. La quantité $f(y_t|\pi_t = j, z_t)$ est la densité de y_t conditionnelle au régime $\pi_t = j$ que l'on construit à partir de la loi de distribution (connue) des erreurs ε_t. Sous l'hypothèse de normalité et d'indépendance, elle est de la forme (24). Enfin, l'expression du dénominateur désigne la densité de y_t non conditionnelle aux régimes et est donnée par la somme pondérée des densités conditionnelles aux régimes, à savoir :

$$f\left(y_t \middle| z_t\right) = \sum_{j=1}^{k} P\left(\pi_t = j \middle| z_t\right) f\left(y_t \middle| \pi_t = j, z_t\right). \tag{27}$$

L'expression (26) (avec (27)) est identique aux probabilités conditionnelles (21) à la différence que celles-ci résultent d'un calcul *ex post* à l'estimation du modèle tandis que les probabilités (26) sont évaluées au cours du processus d'estimation. La prévision $P(\pi_t = j|z_t)$ qui y figure est déterminée comme suit. On suppose que π_t évolue suivant une chaîne de Markov à k états, indépendante des valeurs présentes et passées de x_t et des valeurs passées de y_t :

$$P\left(\pi_t = j \middle| \pi_{t-1} = i, \pi_{t-2} = i', \ldots, z_t\right) = P\left(\pi_t = j \middle| \pi_{t-1} = i\right) = p_{ij} \tag{28}$$

où p_{ij}, probabilité de transition du régime i vers le régime j, est telle que $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$.

La probabilité conditionnelle (28) signifie que les variables z_t et les régimes antérieurs au dernier observé ne véhiculent aucune information concernant la valeur de π_t qui ne soit déjà contenue dans la connaissance du régime passé. Ainsi, si par exemple la probabilité p_{ii} est élevée, alors y_t appartient en probabilité au même régime que celui qui avait généré y_{t-1} sans qu'une autre influence exogène affecte le régime courant[20]. La prévision du régime en $t + 1$ conditionnelle à toutes

20. La persistance anticipée du régime i en moyenne se calcule comme $1/(1 - p_{ii})$ périodes.

les valeurs présentes et passées de y et de x s'écrit, par une application de la règle de Bayes (voir note 18) :

$$\begin{aligned} P\left(\pi_{t+1}=j \middle| y_t, z_t\right) &= \sum_{i=1}^{k} P\left(\pi_{t+1}=j, \pi_t = i \middle| y_t, z_t\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P\left(\pi_{t+1}=j \middle| \pi_t = i, y_t, z_t\right) P\left(\pi_t = i \middle| y_t, z_t\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Cette relation se fonde sur une intuition claire : le régime dans lequel le système entrera vraisemblablement à la période suivante dépend du régime vraisemblablement en vigueur actuellement et de la probabilité associée au passage de ce dernier vers ce premier. Or la probabilité du régime en cours, conditionnelle au régime passé, ne dépendant pas de z_t d'après (28), elle ne dépend pas non plus de la sous-partie $\{y_{t-1}, z_{t-1}\}$ de z_t. On a alors dans le membre de droite de (29) $P\left(\pi_{t+1}=j \middle| \pi_t = i, y_t, z_t\right) = P\left(\pi_{t+1}=j \middle| \pi_t = i\right) = p_{ij}$. Par ailleurs, l'hypothèse sous-jacente à (28) selon laquelle les variables exogènes x_t seules ne véhiculent aucune information concernant π_t qui ne soit déjà contenue dans x_{t-1} et y_{t-1} se traduit comme :

$$P\left(\pi_t = j \middle| y_{t-1}, z_{t-1}\right) = P\left(\pi_t = j \middle| y_{t-1}, z_{t-1}, x_t\right) = P\left(\pi_t = j \middle| z_t\right). \tag{30}$$

Les relations (30) et (29) conduisent à l'expression de la prévision conditionnelle à z_t :

$$P\left(\pi_t = j \middle| z_t\right) = \sum_{i=1}^{k} p_{ij} P\left(\pi_{t-1} = i \middle| y_{t-1}, z_{t-1}\right). \tag{31}$$

Les relations (31) et (26) impliquent que la probabilité associée à un régime dépend des valeurs passées de y_t. Par cette propriété, le modèle à changements markoviens se distingue du modèle à mélange de distributions où la probabilité d'un régime n'est pas conditionnelle aux réalisations passées des variables, conformément à (22). L'identification du régime dans lequel l'observation y_t est généré à l'instant t peut se faire en calculant *ex post* les probabilités lissées de $\pi_t = j$ conditionnelles à toutes les observations de y_t et de x_t, $t = 1, \ldots, T$ (*smoothed probabilities*). Ces probabilités, dont les expressions sont développées par Hamilton (1994 : 701), s'écrivent :

$$P\left(\pi_t = j \middle| y_T, z_T\right) = P\left(\pi_t = j \middle| y_t, z_t\right) \sum_{i=1}^{k} p_{ji} P\left(\pi_{t+1} = i \middle| y_T, z_T\right) \Big/ P\left(\pi_{t+1} = i \middle| y_t, z_t\right) \tag{32}$$

et peuvent être évaluées récursivement en partant de $t = T - 1$ et en utilisant les relations (31) et (26) à chaque séquence (Kim, 1993). Outre le fait que ces probabilités lissées participent à l'estimation des paramètres (voir ci-dessous), elles contribuent aussi à la datation des points de retournement des cycles économiques (Goodwin, 1993).

L'estimation d'un modèle à changements markoviens se fait le plus souvent par une application de l'algorithme EM (*Expectation-Maximization*) développé par Dempster, Laird et Rubin (1977) pour résoudre les problèmes liés à l'estimation du maximum de vraisemblance. Il est particulièrement reconnu pour sa robustesse à des valeurs initiales mal choisies ou à une vraisemblance dont la surface est partiellement convexe[21]. En partant d'un vecteur de paramètres $\hat{\theta} = \{\hat{\beta}_j, \hat{\sigma}_j, \hat{p}_{ij}, i, j = 1, \ldots, k\}$ de θ, l'étape E de l'algorithme EM consiste à calculer les prévisions associées aux régimes et à accroître la vraisemblance : en itérant (31) et (26) et en reportant dans (27) à chaque point de la période, on évalue la vraisemblance $L(\hat{\theta}) = \sum_{t=1}^{T} \log \sum_{j=1}^{k} f\left(y_t \middle| z_t ; \hat{\theta}\right)$ au point $\hat{\theta}$. On calcule également, pour servir dans l'étape M, les probabilités lissées (32). L'étape M a pour but d'obtenir un nouveau vecteur de paramètres $\hat{\theta}'$ où les coefficients et écarts-types propres à chaque régime sont obtenus en estimant (25) par la méthode des moindres carrés ordinaires pondérés, avec les pondérations données par les probabilités lissées (32) traduisant ainsi l'idée que chaque observation est pondérée par la probabilité qu'elle émane du régime j. Sur la base des mêmes probabilités lissées, Hamilton (1990) montre comment sont actualisées les probabilités de transition. Les séquences $\hat{\theta}, \hat{\theta}', \ldots$ obtenues en itérant entre les étapes E et M convergent vers le maximum de vraisemblance (Hamilton, 1994).

Les modèles à changements markoviens (*Markov-switching* ou *MS*) ont connu des applications extrêmement variées. On peut identifier un ensemble de travaux centrés sur la modélisation des cycles réels et en particulier sur la question de savoir si ces cycles sont asymétriques. Les modèles MS permettent de répondre à cette question par l'estimation des probabilités de transition entre les régimes. Ainsi, Kohler (2000) montre que les passages entre les périodes de haute et de basse fécondité dans les pays développés sont asymétriques, les faibles taux de naissance étant plus persistants que les taux de naissance élevés. En construisant un modèle factoriel dynamique multivarié de changements markoviens, Chen et Lin (2000) mettent en évidence l'importance des comouvements de plusieurs variables macroéconomiques dans l'apparition des cycles réels et la nature asymétrique de ces cycles. Analysant les effets d'une politique monétaire, Kakes (2000) montre que l'impact d'un choc monétaire sur la production industrielle allemande est asymétrique selon les phases, l'effet étant plus important en phase récessionniste qu'en phase expansionniste. En confrontant les niveaux d'emplois aux États-Unis et dans les États individuels ainsi que les niveaux d'emplois dans la zone UME (Union monétaire européenne) et dans les pays européens, Guha et Banerji (1998) trouvent que les expansions et contractions dans les cycles réels ne sont pas simultanées selon les niveaux d'agrégation des séries. D'autres auteurs

21. Citons, entre autres problèmes classiques, celui du faux maximum lorsqu'un écart-type estimé est proche de zéro ou encore celui d'un maximum local et non global. Voir par exemple la présentation exhaustive de Quandt (1983) sur les difficultés liées à l'analyse numérique et les solutions proposées.

développent les modèles MS en considérant que les probabilités de transition ne sont pas constantes mais varient au cours du temps selon une fonction logistique des fondamentaux (Diebold, Lee et Weinbach, 1994). Dès lors, la durée anticipée conditionnelle d'une phase n'est plus constante et l'information contenue dans les indicateurs avancées est utilisée pour prévoir les probabilités de transition (Filardo et Gordon, 1998). Il ressort que les indicateurs avancés sont non seulement des déterminants significatifs des probabilités de transition variables mais permettent également de prévoir les points de retournement des cycles économiques (Filardo, 1994; Layton, 1998). Cependant, Franses et Paap (1999) montrent que la datation des points de retournement des cycles réels par un modèle markovien est sensible à la correction des variations saisonnières. Par ailleurs, Kim (1996) teste l'hypothèse selon laquelle la probabilité de sortie d'une phase économique dépend de la durée de cette phase et montre, sur données coréennes, que la probabilité de transition dans une récession croît à mesure que l'expansion perdure, la réciproque s'avérant toutefois moins vraie. Bodman (1998) trouve le phénomène inverse pour la croissance du PIB australien : plus la récession est longue et plus la probabilité de transition vers la phase d'expansion croît, tandis que les cycles de l'emploi ne dépendent pas de la durée des phases. La structure non-linéaire de la dynamique des taux de change a aussi incité de nombreux auteurs à retenir une modélisation en termes de changement de régimes. Selon Engel et Kim (1999), le taux de change réel a une composante permanente (traduisant des niveaux relatifs de revenus) et une composante transitoire (traduisant des phénomènes monétaires temporaires) dont la variance suit un processus markovien. Engel et Hakkio (1996) représentent par un modèle MS l'alternance des périodes de stabilité et de forte volatilité des taux de changes du système monétaire européen (SME). Une originalité de l'article est de faire dépendre les probabilités de transition de la position du taux de change à l'intérieur des bandes du SME : la probabilité de transition est d'autant plus grande que le taux de change est proche des bandes du SME. Vigfusson (1997) étend le modèle d'anticipation mixte chartiste-fondamentaliste du taux de change proposé par Frankel et Froot (1988) en considérant un modèle markovien qui décrit l'évolution au cours du temps de l'importance relative des deux groupes de prévisionnistes. Sur le plan prédictif, de nombreuses études signalent les pauvres performances du modèle MS comparées aux diverses approches alternatives. Ainsi, les prévisions issues d'un modèle markovien ne sont pas meilleures (Clements et Krolzig, 1998) ou sont à peine meilleures (Goodwin, 1993) que celles générées par un modèle AR linéaire, les études portant respectivement sur le PIB américain et sur les cycles réels de huit pays industrialisés. Phillips (1991) indique que le modèle MS conduit à des variances d'erreurs de prévision plus grandes que les modèles ARMA et VAR, rejoignant ainsi les conclusions de Sarantis (1999) en faveur du modèle STAR par rapport au modèle MS. Sur la base de 18 taux de change trimestriels, Engel (1994) conclut que si le modèle MS ne prévoit pas la valeur future du taux de change mieux que la marche aléatoire ou le taux à terme, il prévoit néanmoins mieux le sens de la variation du taux de change. Par contre, Kim (1993) teste l'hypothèse de Balassa-Samuelson appliquée au taux de change réel dollar / livre sterling – selon laquelle le différentiel des productivités entre les deux pays détermine les mouvements de long terme du taux de change réel – et montre que le modèle MS combiné au filtre de Kalman bat le modèle de marche aléatoire en termes de prévision de moyen et long termes. Enfin, le modèle MS constitue, selon Dewachter (2001), une alternative pertinente au modèle de martingale pour représenter les prévisions du taux de change des chartistes. Signalons aussi que les modèles à changements markoviens s'avèrent particulièrement utiles pour les études fondées sur l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Un article de référence est celui d'Engel et Hamilton (1990) qui supposent que les agents rationnels connaissent le modèle et les paramètres de chaque régime de change mais aussi le régime courant en t. L'anticipation rationnelle de la variation du change conditionnelle à cette information est alors déterminée en pondérant les états possibles futurs par les probabilités de transition de l'état courant vers ces états possibles, autorisant ainsi à interpréter les prévisions biaisées en termes de « problème du peso ». Par une approche similaire mais en élargissant l'information utilisée par les investisseurs aux annonces de la Fed, Kaminsky (1993) valide l'hypothèse du « problème du peso » en montrant que les investisseurs peuvent être rationnels et pourtant faire des erreurs systématiques si le modèle du taux de change évolue au cours du temps. D'autres études portant sur la modélisation MS sous l'hypothèse d'anticipations rationnelles incluent Hamilton (1988) et Evans et Wachtel (1993).

Conclusion

Ce travail avait pour objectif de dresser un bilan de la littérature sur la modélisation et l'estimation du changement structurel en économie. Deux principales catégories de modèles sont distinguées : celle décrivant explicitement une règle désignant le régime qui prévaut à chaque instant (modèles à seuils et modèles à changements endogènes) et celle dans laquelle les régimes sont caractérisés par des distributions de probabilités (modèles à mélanges de distribution et modèles à changements markoviens). Choisir un modèle de la première catégorie revient à choisir une règle de sélection de régime. Retenir un modèle de la seconde catégorie revient à considérer que les probabilités associées aux régimes sont structurelles ou dépendent des observations passées des variables. Pour autant, ces approches apparemment exclusives ne sont pas sans présenter des convergences sur le plan interprétatif. Ainsi, dans le cadre des modèles de la seconde catégorie, on peut interpréter les probabilités structurelles associées aux divers régimes comme des probabilités associées aux différentes issues d'une règle de sélection implicite inconnue par l'économètre mais qui gouverne réellement le choix de régimes. De façon symétrique, la spécification explicite d'un tel schéma n'enlève en rien l'intérêt d'une approche inductive consistant à évaluer la probabilité d'un régime à partir de sa fréquence d'apparition empirique selon ledit schéma de sélection (Quandt et Ramsey, 1978). Outre la mise en perspective qu'il proposait, ce survol a volontairement laissé sous silence plusieurs approfondissements qui font l'objet d'autant de voies de recherche prometteuses : tests de diagnostic et tests d'hypothèses sur les propriétés statistiques des résidus, modélisation paramétrique de la corrélation sérielle ou de l'hétéroscédasticité, modélisation des données de panel avec changement de régimes ou modélisation vectorielle du changement structurel.

BIBLIOGRAPHIE

AMEMIYA, T. (1983), « Non-Linear Regression Models », *in* GRILICHES Z. and M.D. INTRILIGATOR (éds), *Handbook of Econometrics*, vol. 1, North Holland Publishing Company, chap 6 : 333-389.

ANDREANO, M. S. et G. SAVIO (2002), « Further Evidence on Business Cycle Asymmetries in G7 Countries », *Applied Economics*, 34 : 895-904.

ANDREWS, D. W. K. (1993), « Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point », *Econometrica*, 61(4) : 821-856.

ANDREWS, D. W. K. et W. PLOBERGER (1994), « Optimal Tests when a Nuisance Parameter Is Present only under the Alternative », *Econometrica*, 62 : 1383-1414.

ANG, A. et G. BEKAERT (2002), « Regime Switches in Interest Rates », *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(2) ; 163-182.

ARTUS, P., S. AVOUYI-DOVI et J. P. LAFFARGUE (1993), « A Disequilibrium Econometric Model of the French Economy with Two Sectors and Endogenous Prices and Investment », *Economic Modelling*, 10(1).

ARTUS, P., G. LAROQUE et P. MICHEL (1984), « Estimating a Quarterly Macro-economic Model with Quantity Rationing », *Econometrica*, 52 : 1387-1414.

ASTATKIE, T., D. G. WATTS et W. E. WATT (1997), « Nested Threshold Autoregressive (NeTAR) Models », *International Journal of Forecasting*, 13 : 105-116.

BAI, J.(1997), « Estimating Multiple Breaks One at a Time », *Econometric Theory*, 13 : 315-352.

BAI, J.et P. PERRON (1998), « Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes », *Econometrica*, 66(1) : 47-78.

BALKE, N. S. et M. E. WOHAR (1998), « Nonlinear Dynamics and Covered Interest Rate Parity », *Empirical Economics*, 23(4) : 535-559.

BANERJEE, A., R. L. LUMSDAINE et J. H. STOCK (1992), « Recursive and Sequential Tests of the Unit-Root and Trend-Break Hypotheses : Theory and International Evidence », *Journal of Business & Economic Statistics* , 10(3) : 271-287.

BARRO, R. J. et H. I. GROSSMAN (1971), « A General Disequilibrium Model of Income and Employment », *American Economic Review*, 61(1) : 82-93.

BAUM, C. F., J. T. BARKOULAS et M. CAGLAYAN (2001), « Nonlinear Adjustment to Purchasing Power Parity in the Post-Bretton Woods Era », *Journal of International Money and Finance*, 20(3) : 379-399.

BÉNASSY, J. P. (1984), *Macroéconomie et théorie du déséquilibre*, Dunod.

BEN SALEM, M. et C. PERRAUDIN (2001), « Tests de linéarité, spécification et estimation de modèles à seuil : une analyse comparée des méthodes de Tsay et de Hansen », *Économie et Prévision*, 148(2) : 157-176.

BODMAN, P. M. (1998), « Asymmetry and Duration Dependence in Australian GDP and Unemployment », *Economic Record*, 74(227) : 399-411.

CHAN, K. S. et H. TONG (1986), « On Estimating Thresholds in Autoregressive Models », *Journal of Time Series Analysis*, 7 : 179-190.

CHEN, S. W. et J. L. LIN (2000), « Identifying Turning Points and Business Cycles in Taiwan : A Multivariate Dynamic Markov-Switching Factor Model Approach », *Academia Economic Papers*, 28(3) : 289-320.

CHEN, S. L. et J. L. WU (2000), « A Re-Examination of Purchasing Power Parity in Japan and Taiwan », *Journal of Macroeconomics*, 22(2) : 271-284.

CLEMENTS, M. P. et H. M. KROLZIG (1998), « A Comparison of the Forecast Performance of Markov-Switching and Threshold Autoregressive Models of US GNP », *The Econometrics Journal*, 1(1) : C47-C75.

CLEMENTS, M. P. et J. SMITH (1999), « A Monte Carlo Study of the Forecasting Performance of Empirical SETAR Models », *Journal of Applied Econometrics*, 14(2) : 123-141.

DAVIES, R. B. (1977), « Hypothesis Testing when a Nuisance Parameter Is Present only Under the Alternative », *Biometrika*, 64 : 247-254.

DEMPSTER, A. P., N. M. LAIRD et D. B. RUBIN (1977), « Maximum Likelihood Estimation from Incomplete Data via the EM Algorithm », *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, 39 : 1-38.

DEWACHTER, H. (2001), « Can Markov Switching Models Replicate Chartist Profits in the Foreign Exchange Market? », *Journal of International Money and Finance*, 20(1) : 25-41.

DIEBOLD, F. X., J. H. LEE et G. C. WEINBACH (1994), « Regime Switching with Time-Varying Transition Probabilities », *in* C. W. J. GRANGER et G. E. MIZON (éds), *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration : Advanced Texts in Econometrics*, C.P. Hargreaves, Oxford University Press, p. 283-302.

DUFRÉNOT, G., V. MIGNON et A. PÉGUIN-FEISSOLLE (2004), « Business Cycles Asymmetry and Monetary Policy : A Further Investigation Using MRSTAR Models », *Economic Modelling*, 21(1) : 37-71.

DUMAS, B. (1992), « Dynamic Equilibrium and the Real Exchange Rate in Spatially Separated World », *Review of Financial Studies*, 5 : 153-180.

ENGEL, C. (1994), « Can the Markov Switching Model Forecast Exchange Rates? », *Journal of International Economics*, 36(1-2) : 151-165.

ENGEL, C. et C. S. HAKKIO (1996), « The Distribution of Exchange Rates in the EMS », *International Journal of Finance and Economics*, 1(1), janvier, 55-67.

ENGEL, C. et J. D. HAMILTON (1990), « Long Swings in the Dollar : Are They in the Data and Do Markets Know It? », *American Economic Review*, 80(4) : 689-713.

ENGEL, C. et C. J. KIM (1999), « The Long-Run U.S./U.K. Real Exchange Rate », *Journal of Money, Credit and Banking*, 31(3) : 335-356.

EVANS, M. et P. WACHTEL (1993), « Inflation Regimes and the Sources of Inflation Uncertainty », *Journal of Money, Credit, and Banking*, 25(3) : 475-511.

EVERITT, B. S. et D. J. HAND (1981), *Finite Mixture Distributions*, Chapman and Hall, London New-York.

FAIR, R. C. et D. M. JAFFEE (1972), « Methods of Estimation for Markets in Disequilibrium », *Econometrica*, 40(3) : 497-514.

FILARDO, A. J.(1994), « Business Cycle Phases and their Transitional Dynamics », *Journal of Business and Economic Statistics*, 12(3) : 299-308.

FILARDO, A. J. et S. F. GORDON (1998), « Business Cycle Durations », *Journal of Econometrics*, 85(1) : 99-123.

FLOOD, R. P. et P. M. GARBER (1983), « A Model of Stochastic Process Switching », *Econometrica*, 51(3) : 537-551.

FRANSES, P. H. et R. PAAP (1999), « Does Seasonality Influence the Dating of Business Cycle Turning Points? », *Journal of Macroeconomics*, 21(1) : 79-92.

FRANSES, P. H. et D. VAN DIJK (1999), *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance,* Cambridge; New York and Melbourne : Cambridge University Press.

FRANKEL, J. A. et K. A. FROOT (1986), « Understanding the US Dollar in the Eighties : The Expectations of Chartists and Fundamentalists », *Economic Record*, 62(special issue) : 24-38.

FROOT, K. A. et M. OBSTFELD (1991a), « Stochastic Process Switching : Some Simple Solutions », *Econometrica*, 59(1) : 241-250.

FROOT, K. A.et M. OBSTFELD (1991b), « Exchange-rate Dynamics Under Stochastic Regime Shifts », *Journal of International Economics*, 31 : 203-229.

GINSBURGH, V., A. TISHLER et I. ZANG (1979), « Alternative Estimation Methods for Two-Regime Models : A Mathematical Programming Approach », *European Economic Review*, 13 : 207-228.

GOLDFELD, S. M. et R. E. QUANDT (1972), *Nonlinear Methods in Econometrics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London.

GOLDFELD, S. M. et R. E. QUANDT (1973a), « A Markov Model for Switching Regressions », *Journal of Econometrics*, 1 : 3-16.

GOLDFELD, S. M. et R. E. QUANDT (1973b), « The Estimation of Structural Shifts by Switching Regressions », *Annals of Economic and Social Measurement*, 2/4 : 475-485.

GOLDFELD, S. M et R. E. QUANDT (1992), « Estimation in Multimarket Disequilibrium Models », *in The Collected Essays of Richard E. Quandt,* volume 2 : 82-88, *Economists of the Twentieth Century Series*, Aldershot, U.K.; Elgar, U.S.; Ashgate, Brookfield.

GOODWIN, T. H. (1993), « Business-Cycle Analysis with a Markov-Switching Model », *Journal of Business and Economic Statistics*, 11(3) : 331-339.

GRANGER, C. W. J. et T. TERÄSVIRTA (1997), *Modelling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press, Oxford.

GUHA, D. et A. BANERJI (1998), « Testing for Regional Cycles : A Markov-switching Approach », *Journal of Economic and Social Measurement*, 25(3-4) : 163-182.

HAMERMESH, D. S . (1970), « Wage Bargains, Threshold Effects, and the Phillips Curve », *Quarterly Journal of Economics*, 84(3) : 501-517.

HAMILTON, J. D. (1988), « Rational-Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime : An Investigation of the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2/3) : 385-423.

HAMILTON, J. D. (1989), « A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle », *Econometrica*, 57(2) : 357-384.

HAMILTON, J. D. (1990), « Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime », *Journal of Econometrics*, 45(1-2) : 39-70.

HAMILTON, J. D. (1993), « Estimation, Inference and Forecasting of Time Series Subject to Changes in Regime », *in* G. S. MADDALA, C. R. RAO et H. D. VINOD (éds), *Handbook of Statistics*, vol.11, ch. 9, Elsevier Science Publisher B.V., p. 231-260.

HAMILTON, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

HANSEN, B. E. (1997), « Inference in TAR Models », *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 2(1) : 1-14.

JANSEN, E. S. et T. TERÄSVIRTA (1996), « Testing Parameter Constancy and Super Exogeneity in Econometric Equations », *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58(4) : 735-763.

JENSEN, E. R. (1990), « An Econometric Analysis of the Old-Age Security Motive for Childbearing », *International Economic Review*, 31(4) : 953-968.

KAKES, J. (2000), « Monetary Policy and Business Cycle Asymmetry in Germany », *Kredit und Kapital*, 33(2) : 182-197.

KAMINSKY, G. (1993), « Is There a Peso Problem? Evidence from the Dollar/Pound Exchange Rate, 1976-1987 », *American Economic Review*, 83(3) : 450-472.

KIM, C. H. (1993), « Balassa-Samuelson Theory and Predictability of the US-UK Real Exchange Rate », *International Economic Journal*, 14(3) : 101-121.

KIM, M. J. (1996), « Duration Dependence in Korean Business Cycles : Evidence and its Implication Based on Gibbs Sampling Approach to Regime-Switching Model », *Seoul Journal of Economics*, 9(2) : 123-144.

KING, M. A. et J. I. Leape (1998), « Wealth and Portfolio Composition : Theory and Evidence », *Journal of Public Economics*, 69 : 155-193.

KOHLER, H. P. (2000), « Social Interactions and Fluctuations in Birth Rates », *Population Studies*, 54(2) : 223-237.

Kräger, H. et P. Kugler (1993), « Nonlinearities in Foreign Exchange Markets : A Different Perspective », *Journal of International Money and Finance*, 12 : 195-208.

Krugman, P. R. (1991), « Target Zones and Exchange Rate Dynamics », *Quarterly Journal of Economics*, 106 : 669-682.

Laffont, J. J. et R. Garcia (1977), « Disequilibrium Econometrics for Business Loans », *Econometrica*, 45(5) : 1187-1204.

Laroque, G. et B. Salanié (1995), « Macroeconometric Disequilibrium Models », *Handbook of Applied Econometrics*, 1 : 391-414, Oxford and Malden, Mass. : Blackwell.

Layton, A. P. (1998), « A Further Test of the Influence of Leading Indicators on the Probability of the US Business Cycle Phase Shifts », *International Journal of Forecasting*, 14(1) : 63-70.

Lundbergh, S., T. Teräsvirta et D. van Dijk (2003), « Time-Varying Smooth Transition Autoregressive Models », *Journal of Business and Economic Statistics*, 21(1) : 104-121.

Luukkonen, R. et T. Teräsvirta (1991), « Testing Linearity of Economic Time Series against Cyclical Asymmetry », *Annales d'Économie et de Statistiques*, 20-21 : 125-142.

Luukkonen, R., P. Saikkonen et T. Teräsvirta (1988), « Testing Linearity against Smooth Transition Autoregressive Models », *Biometrika*, 75 : 491-499.

Mankiw, N. G., J. A. Miron et D. N. Weil (1987), « The Adjustment of Expectations to a Change in Regime : A Study of the Founding of the Federal Reserve », *American Economic Association*, 77(3) : 358-374.

Maddala, G. S. (1986a), « Disequilibrium, Self-Selection, and Switching Models », *in* Z. Griliches et M. D. Intriligator (éds), *Handbook of Econometrics*, vol. 3, ch. 28, Elsevier Science Publishers BV, p. 1633-1688.

Maddala, G. S. (1986b), « Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics », *Econometric Society Monographs Series*, nº 3, Cambridge University Press, Cambridge, New York et Sydney.

Maddala, G. S. (1991), « Disequilibrium Modeling, Switching Regressions, and their Relationship to Structural Change », *in* P. Hackl et A. H. Westlund (éds), *Economic Structural Change : Analysis and Forecasting*, Springer, New York, Berlin, London et Tokyo, p. 159-168.

Maddala, G. S. et I. M. Kim (2000), *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press.

Mankiw, N., J. A. Miron et D. N. Weil (1987), « The Adjustment of Expectations to a Change in Regime : A Study of the Founding of the Federal Reserve », NBER Working Paper, nº 2124.

McQueen, G. et S. Thorley (1993), « Asymmetric Business Cycle Turning Points », *Journal of Monetary Economics*, 31(3) : 341-361.

MICHAEL, P., D. A. PEEL et M. P. TAYLOR (1997), « Ajustement non-linéaire vers le taux de change d'équilibre de long terme : le modèle monétaire revisité », *Revue Économique*, 48(3) : 653-659.

MICHAEL, P., A. R. NOBAY et D. A. PEEL (1997), « Transactions Costs and Nonlinear Adjustment in Real Exchange Rates : An Empirical Investigation », *Journal of Political Economy*, 105(4) : 862-879.

NEFTÇI, S. N. (1984), « Are Economic Time Series Asymmetric over the Business Cycle? », *Journal of Political Economy*, 92(2) : 307-328.

NEFTÇI, S. N. (1993), « Statistical Analysis of Shapes in Macroeconomic Time Series : Is There a Business Cycle? », *Journal of Business and Economic Statistics*, 11(2) : 215-224.

OSIELWALSKI, J. et A. WELFE (1998), « The Price-Wage Mechanism : An Endogenous Switching Model », *European Economic Review*, 42 : 365-374.

PEEL, D. A. et A. E. H. SPEIGHT (1996), « Is the US Business Cycle Asymmetric? Some Further Evidence » *Applied Economics*, 28 : 405-415.

PEEL, D. A. et A. E. H. SPEIGHT (1998), « Threshold Nonlinearities in Output : Some International Evidence », *Applied Economics*, 30(3) : 323-333.

PEEL, D.A. et A.E.H. SPEIGHT (1998), « The Nonlinear Time Series Properties of Unemployment Rates : Some Further Evidence », *Applied Economics*, 30(2) : 287-294.

PEEL, D. A. et A. E. H. SPEIGHT (2000), « Threshold Nonlinearities in Unemployment Rates : Further Evidence for the UK and G3 Economies », *Applied Economics*, 32(6) : 705-715.

PERRON, P. (1989), « The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis », *Econometrica*, 57(6) : 1361-1401.

PHILLIPS, K. L. (1991), « A Two-Country Model of Stochastic Output with Changes in Regime », *Journal of International Economics*, 31(1-2) : 121-142.

POLE, A. M. et A. F. M. SMITH (1985), « A Bayesian Analysis of Some Threshold Switching Models », *Journal of Econometrics*, 29 : 97-119.

PRAT, G. et R. UCTUM (2007), « Switching between Expectation Processes in the Foreign Exchange Market : A Probabilistic Approach Using Survey Data », à paraître dans *Review of International Economics*, 15(4) : 700-714.

QIN, D. et M. LU (1998), « Dynamic Structure of Disequilibrium Models », *Economics of Planning*, 31(1) : 15-27.

QUANDT, R. E. (1972), « A New Approach to Estimating Switching Regressions », *Journal of the American Statistical Association*, 67(338) : 306-310.

QUANDT, R. E. (1983), « Computational Problems and Methods », *in* Z. GRILICHES et M. D. INTRILIGATOR (éds), *Handbook of Econometrics*, I, Elsevier Science, Amsterdam, p. 699-746.

QUANDT, R. E. (1988), *The Econometrics of Disequilibrium*, Basil Blackwell, New York and Oxford.

QUANDT, R. E. et J. B. Ramsey (1978), « Estimating Mixtures of Normal Distributions and Switching Regressions », *Journal of American Statistical Association*, 73(364) : 730-738.

RAMSEY, J. B. et P. ROTHMAN (1996), « Time Irreversibility and Business Cycle Asymmetry », *Journal of Money, Credit, and Banking*, 28(1) : 1-21.

ROTHMAN, P. (1991), « Further Evidence on the Asymmetric Behavior of Unemployment Rates over the Business Cycle », *Journal of Macroeconomics*, 13(2) : 291-298.

SARANTIS, N. (1999), « Modeling Non-linearities in Real Effective Exchange Rates », *Journal of International Money and Finance*, 18(1) : 27-45.

SERCU, P., R. UPPAL et C. VAN HULLE (1995), « The Exchange Rate in the Presence of Transaction Costs : Implications for Tests of Purchasing Power Parity », *Journal of Finance*, 50(4) : 1309-1319.

SICHEL, D. E.(1993), « Business Cycle Asymmetry : A Deeper Look », *Economic Inquiry*, 31(2) : 224-236.

TAYLOR, M. P., D. A. PEEL et L. SARNO (2001), « Nonlinear Mean-Reversion in Real Exchange Rates : Toward a Solution to the Purchasing Power Parity Puzzles », *International Economic Review*, 42(4) : 1015-1042.

TERÄSVIRTA, T. (1994), « Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models », *Journal of the American Statistical Association*, 89 : 208-218.

TERÄSVIRTA, T. (1998), « Modeling Economic Relationships with Smooth Transition Regressions », *in* A. ULLAH et D. L. A. GILES (éds.), *Handbook of Applied Economic Statistics*, vol. 155, Basel, Dekker, Hong Kong et New York, p. 507-552.

TERÄSVIRTA, T. et H. M. ANDERSON (1992), « Characterizing Nonlinearities in Business Cycles Using Smooth Transition Autoregressive Models », *Journal of Applied Econometrics*, 7 : S119-S136.

TERÄSVIRTA, T., D. TJOSTHEIM et C. W. J. GRANGER (1994), « Aspects of Modelling Nonlinear Time Series », *in* Z. GRILICHES et M. D. INTRILIGATOR (éds), *Handbook of Econometrics*, volume 4, Elsevier, North-Holland, Amsterdam; London et New York, p. 2917-2957.

TITTERINGTON, D. M., A. F. SMITH et U. E. MAKOV (1987), *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons.

TONG, H. (1978), « On a Threshold Model », *in* C. H. CHEN (éd), *Pattern Recognition and Signal Processing*, Sijthoff and Noordhoff, Amsterdam, p. 101-141.

TONG, H. (1983), « Threshold Models in Nonlinear Time Series Analysis », *Lecture Notes in Statistics,* 21, Springer-Verlag, New York.

TONG, H. (1990), *Nonlinear Time Series : A Dynamical Systems Approach*, Oxford University Press, Oxford.

TONG, H. et K. S. LIM (1980), « Threshold Autoregressions, Limit Cycles, and Data », *Journal of the Royal Statistical Society*, B 42 : 245-292.

TSAY, R. S. (1989), « Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes », *Journal of the American Statistical Association*, 84 : 231-240.

UCTUM, R. (1995), *Théorie et économétrie du déséquilibre en économie ouverte*, Economica, Paris.

VAN DIJK, D. et P.H. FRANSES (2000), « Nonlinear Error-Correction Models for Interest Rates in the Netherlands », *in* W. A. BARNETT, D. F. HENDRY, S. HYLLEBERG, T. TERÄSVIRTA, D. TJOSTHEIM, A. WÜRTZ (éds), *Nonlinear Econometric Modeling in Time Series : Proceedings of the Eleventh International Symposium in Economic Theory*, International Symposia in Economic Theory and Econometrics, Cambridge University Press, Cambridge, New York et Melbourne, p. 203-227.

VAN DIJK, D., P. H. FRANSES et T. TERÄSVIRTA (2002), « Smooth Transition Autoregressive Models : A Survey of Recent Developments », *Econometric Reviews*, 21(1) : 1-47.

VIGFUSSON, R. (1997), « Switching between Chartists and Fundamentalists : A Markov Regime-Switching Approach », *International Journal of Finance and Economics*, 2(4) : 291-305.

WILLIS, R. J. et S. ROSEN (1979), « Education and Self-Selection », *Journal of Political Economy*, Part 2, 87(5) : S7-S36.

ZIVOT, E. et W. K. ANDREWS(1992), « Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis », *Journal of Business & Economic Statistics*, 10(3) : 25-44.