

## LINIA DŁUGA

### 1. Wprowadzenie

W przypadkach gdy wymiary geometryczne układów elektrycznych są porównywalne z długością fali elektromagnetycznej, to nie spełniają one warunku quasi-stacjonarności i powinny być opisywane ogólnymi metodami teorii pola elektromagnetycznego. Układy takie nazywa się układami o parametrach rozłożonych.

W pewnych przypadkach można jednak zastosować analizę obwodową do układów o parametrach rozłożonych. Dotyczy to tzw. **linii długiej**, gdzie warunek quasi-stacjonarności jest naruszony tylko w jednym kierunku, tzn. przy danej częstotliwości sygnału wymiary wzdłuż osi linii są dużo większe niż w pozostałych kierunkach i porównywalne z długością fali elektromagnetycznej. W takich układach wartości prądów i napięć w linii zależą zarówno od czasu jak i od współrzędnej przestrzennej.

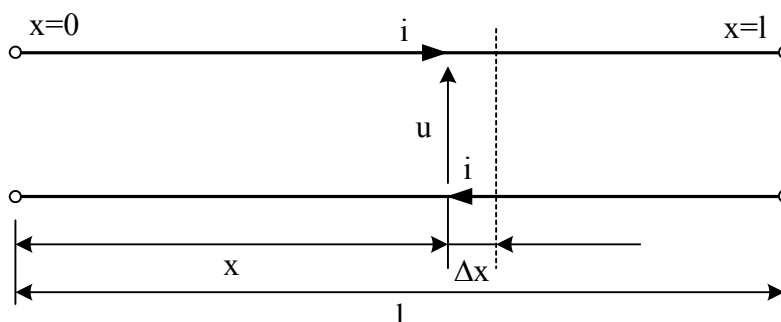
$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (0.1)$$

gdzie:

$\lambda$  - długość fali  
 $c$  - prędkość światła  
 $f$  - częstotliwość

$f$	$\lambda$	$l$
50 Hz	6000 km	~ 60 km
500 kHz	60 m	~ 60 cm
0.5 GHz	60 cm	~ 60 mm

### 2. Równania linii długiej



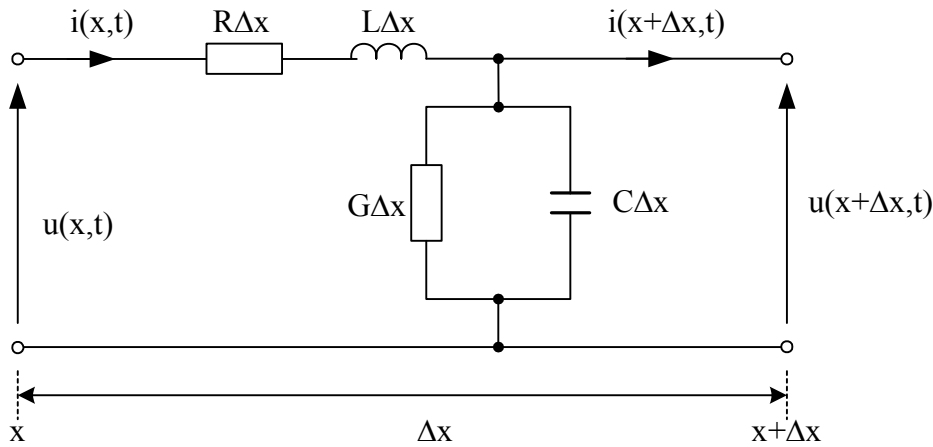
Napięcia i prądy w linii są funkcjami czasu „ $t$ ” i współrzędnej długości „ $x$ ”.

$$i = i(x, t), u = u(x, t) \quad (0.2)$$

Parametry elektryczne są rozłożone wzdłuż linii. Linia charakteryzuje się następującymi parametrami rozłożonymi:

- $R[\Omega/m]$  oporem na jednostkę długości linii
- $L[H/m]$  indukcyjnością na jednostkę długości linii
- $C[F/m]$  pojemnością na jednostkę długości linii
- $G[S/m]$  upływnością na jednostkę długości linii

Zakłada się, że dostatecznie krótki odcinek linii  $\Delta x$  spełnia warunki quasi-stacjonarności, można go zatem zamodelować jako układ skupiony:



Zgodnie z prawami Kirchhoffa:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[ Ri(x,t) + L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \right] \cdot \Delta x + u(x+\Delta x, t) \\ i(x,t) &= \left[ Gu(x+\Delta x, t) + C \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial t} \right] \cdot \Delta x + i(x+\Delta x, t) \end{aligned} \quad (0.3)$$

$$\begin{aligned} -\frac{u(x+\Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} &= Ri(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ -\frac{i(x+\Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} &= Gu(x+\Delta x, t) + C \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (0.4)$$

Dla  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (0.5)$$

gdzie:

$$i = i(x, t), u = u(x, t)$$

Równania wyrażone (0.5) nazywa się równaniami linii długiej lub *równaniami telegrafistów*.

### 3. Stan ustalony przy zasilaniu sinusoidalnym

Zespolone wartości prądu i napięcia linii w punkcie odległym o  $x$  od jej początku:

$$\underline{I} = \underline{I}(x), \underline{U} = \underline{U}(x) \quad (0.6)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= (R + j\omega L)\underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= (G + j\omega C)\underline{U} \end{aligned} \quad (0.7)$$

Po wyrugowaniu prądu z (0.7) otrzymujemy:

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0, \quad \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (0.8)$$

Gdzie  $\gamma$  nazywa się współczynnikiem propagacji fali.

Rozwiązanie równania różniczkowego (0.8) ma postać:

$$\underline{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} \quad (0.9)$$

Na podstawie pierwszego równania (0.7):

$$\underline{I} = -\frac{1}{(R + j\omega L)} \frac{d\underline{U}}{dx} \quad (0.10)$$

Podstawiając (0.9) do (0.10) otrzymamy:

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_f} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \quad \underline{Z}_f = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (0.11)$$

Gdzie  $\underline{Z}_f$  nazywa się impedancją falową.

Stałe  $A_1$  i  $A_2$  wyznacza się na podstawie znanych wartości  $U_1$  i  $I_1$  na początku linii ( $x=0$ ) lub  $U_2$  i  $I_2$  na końcu linii ( $x=l$ ).

Przyjmując jako dane  $U_1$  i  $I_1$  w równaniach (0.9) oraz (0.11) obliczamy dla  $x=0$ :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= A_1 + A_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_f}(A_1 - A_2)\end{aligned}\quad (0.12)$$

$$A_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2}, \quad A_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2}\quad (0.13)$$

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} e^{\gamma x} \\ \underline{I} &= \frac{1}{\underline{Z}_f} \left( \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1}{2} e^{\gamma x} \right)\end{aligned}\quad (0.14)$$

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{Z}_f \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \\ \underline{I} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}\end{aligned}\quad (0.15)$$

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_1 ch(\gamma x) - \underline{Z}_f \underline{I}_1 sh(\gamma x) \\ \underline{I} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f} sh(\gamma x) + \underline{I}_1 ch(\gamma x)\end{aligned}\quad (0.16)$$

Analogicznie przyjmując jako dane  $U_2$  i  $I_2$  w równaniach (0.9) oraz (0.11) obliczamy dla  $x=l$ :

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_2 ch(\gamma y) + \underline{Z}_f \underline{I}_2 sh(\gamma y) \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} sh(\gamma y) + \underline{I}_2 ch(\gamma y) \\ y &= l - x\end{aligned}\quad (0.17)$$

#### 4. Impedancja wejściowa linii długiej

Impedancja wejściowa:

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \quad (0.18)$$

Stan jałowy (linia otwarta)	Stan zwarcia (linia zwarta)
$\underline{I}_2 = 0$	$\underline{U}_2 = 0$
$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma l)$ $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \operatorname{sh}(\gamma l)$	$\underline{U}_1 = \underline{Z}_f \underline{I}_2 \operatorname{sh}(\gamma l)$ $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch}(\gamma l)$
$\underline{Z}_{we0} = \underline{Z}_f \operatorname{cth}(\gamma l)$	$\underline{Z}_{wez} = \underline{Z}_f \operatorname{th}(\gamma l)$

Parametry falowe linii można obliczyć z pomiarów:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{we0} \underline{Z}_{wez} &= \underline{Z}_f^2 \operatorname{cth}(\gamma l) \operatorname{th}(\gamma l) \\ \underline{Z}_{we0} \underline{Z}_{wez} &= \underline{Z}_f^2 \\ \underline{Z}_f &= \sqrt{\underline{Z}_{we0} \underline{Z}_{wez}} \end{aligned} \quad (0.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_{we0}}{\underline{Z}_{wez}} &= \frac{\operatorname{cth}(\gamma l)}{\operatorname{th}(\gamma l)} \\ \sqrt{\frac{\underline{Z}_{we0}}{\underline{Z}_{wez}}} &= \operatorname{cth}(\gamma l) \\ \gamma &= \frac{1}{l} \operatorname{cth}^{-1} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{we0}}{\underline{Z}_{wez}}} = \end{aligned} \quad (0.20)$$

Oznaczając:

$$\underline{Z} = R + j\omega L, \quad \underline{Y} = G + j\omega C \quad (0.21)$$

Z (0.8) oraz z (0.11) mamy:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{ZY}}, \quad \underline{Z}_f = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} \quad (0.22)$$

Stąd:

$$\underline{Z} = \underline{\gamma} \underline{Z}_f, \quad \underline{Y} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_f} \quad (0.23)$$

Oraz parametry jednostkowe linii długiej:

$R = \operatorname{Re}\{\gamma Z_f\}$	$G = \operatorname{Re}\left\{\frac{\gamma}{Z_f}\right\}$
$L = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\{\gamma Z_f\}$	$C = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\left\{\frac{\gamma}{Z_f}\right\}$

## 5. Linia obciążona

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \quad (0.24)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + \underline{Z}_f \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} + \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} \end{aligned} \quad (0.25)$$

Porządkując względem funkcji wykładniczych:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_f \underline{I}_2) e^{\gamma l} + \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{Z}_f \underline{I}_2) e^{-\gamma l} \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} + \underline{I}_2\right) e^{\gamma l} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} + \underline{I}_2\right) e^{-\gamma l} \end{aligned} \quad (0.26)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_{p1} + \underline{U}_{o1} \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_{p1} + \underline{I}_{o1} \end{aligned} \quad (0.27)$$

Współczynnik odbicia w odległości  $y$  od końca linii:

$$\underline{\Gamma}_u = \frac{U_o}{U_p} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_f \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_f \underline{I}_2} e^{-2\gamma y} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_f}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_f} e^{-2\gamma y} \quad (0.28)$$

## 6. Linia obciążona falowo

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_f, \quad \Gamma = 0 \quad (0.29)$$

Przy obciążeniu falowym brak fali odbitej:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{Z}_f \underline{I}_2) e^{\gamma l} = \underline{U}_2 e^{\gamma l} \\ \underline{I} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} + \underline{I}_2 \right) e^{\gamma l} = \underline{I}_2 e^{\gamma l} \end{aligned} \quad (0.30)$$

## 7. Linia bez strat

$$R \ll \omega L, \quad G \ll \omega C \quad (0.31)$$

$$\underline{Z}_f = R_f = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (0.32)$$

Na podstawie (0.17)

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos(\beta y) + jR_f \underline{I}_2 \sin(\beta y) \\ \underline{I} &= j \frac{\underline{U}_2}{R_f} \sin(\beta y) + \underline{I}_2 \cos(\beta y) \end{aligned} \quad (0.33)$$

Impedancja wejściowa

St. jałowy	St. zwarcia	Obc. falowe
$\underline{Z}_2 = \infty$	$\underline{Z}_2 = 0$	$\underline{Z}_2 = R_f$
$Z_{we0} = -jR_f \operatorname{ctg}(\beta l)$	$Z_{wez} = jR_f \operatorname{tg}(\beta l)$	$Z_{we} = R_f$

## 8. Linia długa jako czwórnik:

Równania (0.17) dla całej długości  $y=l$  zapiszemy w postaci

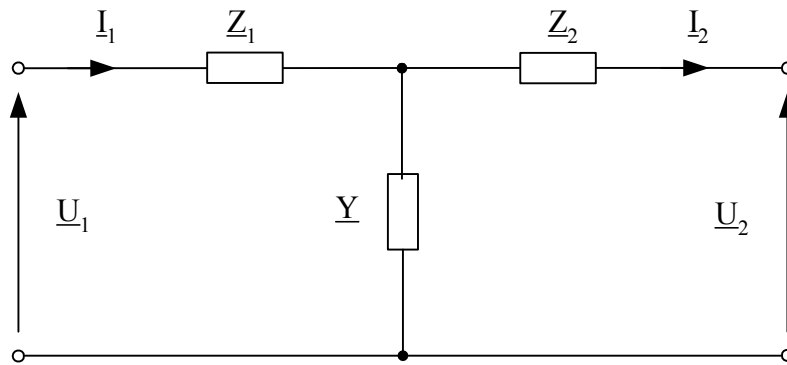
$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma l) + \underline{Z}_f \underline{I}_2 \operatorname{sh}(\gamma l) \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \operatorname{sh}(\gamma l) + \underline{I}_2 \operatorname{ch}(\gamma l) \end{aligned} \quad (0.34)$$

W postaci macierzowej równania łańcuchowe:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\gamma l) & \underline{Z}_f \operatorname{sh}(\gamma l) \\ 1/\underline{Z}_f \operatorname{sh}(\gamma l) & \operatorname{ch}(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (0.35)$$

Ponieważ  $\mathbf{a}_{11}=\mathbf{a}_{22}$  oraz  $\det \mathbf{A}=1$  czwórnik jest **symetryczny**

Czwórnik typu T



Równania łańcuchowe czwórnika typu T:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y} \\ \underline{Y} & 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (0.36)$$

Stąd porównując (0.36) oraz (0.35):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_f (\operatorname{cth}(\gamma l) - \operatorname{ch}(\gamma l)) \\ \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_2 \\ \underline{Y} &= 1 / \underline{Z}_f \operatorname{sh}(\gamma l) \end{aligned} \quad (0.37)$$

## 9. Przykłady

### Linia długa jako indukcyjność

Pytamy się przy jakiej długości linii „l” o parametrach jak w tabeli równoważna jest ona indukcyjności o wartości „L”?

Dane:

$R_f$	f	$\beta$	Linia zwarta	Linia bez strat
-------	---	---------	--------------	-----------------

$$\begin{aligned} Z_{weZ} &= jR_f \operatorname{tg}(\beta l) = j\omega L \\ R_f \operatorname{tg}(\beta l) &= \omega L \\ \operatorname{tg}(\beta l) &= \frac{\omega L}{R_f} \\ \beta l &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R_f}\right) \\ l &= \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R_f}\right) \end{aligned} \quad (0.38)$$



Rezonans napięć

Linia długa o danych jak w tabeli obciążona jest indukcyjnością  $L_2$ . Jaką wartość ma  $L_2$  jeżeli wiadomo że obwód znajduje się w stanie rezonansu ?

Dane:

$R_f$	$\beta$	$L_2$	$f$	Linia bez strat
-------	---------	-------	-----	-----------------

Warunek rezonansu:

$$\text{Im}(\underline{Z}_{we}) = 0 \quad (0.39)$$

Stąd zgodnie z (0.33)

$$\underline{Z}_{we} = \frac{U_2}{I_2} = jR_f \frac{\omega L_2 + R_f \text{tg}(\beta l)}{R_f - \omega L_2 \text{tg}(\beta l)}$$

$$L_2 \neq \frac{R_f}{\omega} \text{ctg}(\beta l) \quad (0.40)$$

$$L_2 = -\frac{R_f}{\omega} \text{tg}(\beta l)$$

Obliczanie napięć i prądów linii:

Dane:

<b>R</b>	<b>L</b>	<b>G</b>	<b>C</b>	<b>f</b>	<b>l</b>	<b>I<sub>1</sub>(od końca)</b>
2,87Ω/km	1,94mH/km	0,14μS/km	6,35nF/km	800Hz	100km	20km

$$\underline{Z} = R + j\omega L = 2,87 + j9,75 = 10,2e^{j73^\circ} \left[ \frac{\Omega}{\text{km}} \right]$$

$$\underline{Y} = G + j\omega C = (0,14 + j32)10^{-6} = 32 \cdot 10^{-6} e^{j90^\circ} \left[ \frac{\text{S}}{\text{km}} \right] \quad (0.41)$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}\underline{Y}} = 18 \cdot 10^{-3} e^{j81,5^\circ} \left[ \frac{1}{\text{km}} \right]$$

$$\underline{Z}_f = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} = 564 e^{-j8,5^\circ} [\Omega] \quad (0.42)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 2,56 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{\text{Np}}{\text{km}} \right] + j17,8 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{km}} \right] \quad (0.43)$$

Napięcie i prąd w linii ( linia otwarta):

$$\underline{I}_2 = 0$$

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \text{ch}(\gamma l_1), \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch}(\gamma l) \quad (0.44)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \text{sh}(\gamma l_1), \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \text{sh}(\gamma l)$$