Zakład Elektrotechniki Teoretycznej

ver.3

ĆWICZENIE III

ANALIZA WIDMOWA SYGNAŁÓW DYSKRETNYCH

🕒 **(00)**

Celem ćwiczenia jest przeprowadzenie analizy widmowej dyskretnych sygnałów okresowych przy zastosowaniu szybkiego przekształcenie Fouriera (FFT) oraz zbadaniu wpływu różnych czynników na dokładność przetwarzania. Do analizy i wizualizacji otrzymanych wyników wykorzystano funkcje programu MATLAB.

Wykonując ćwiczenie zwróć uwagę na oznaczenia ikonami poszczególnych akapitów tej instrukcji. Mają one na celu usprawnienie wykonywania ćwiczeń.
Oznaczenia

- Ⓟ przykłady
- ◈ opis funkcji MATLABA
- ⌁ zadania do wykonania.
- 🕒 (15) oznacza, iż aktualne zadanie powinno być wykonywane w czasie nie późniejszym niż 15 minuta ćwiczeń.

Czas wykonania ćwiczenia wynosi 180 minut.

1. WSTĘP

FFT jest wykorzystywana do transformacji sygnałów zmiennych w czasie do dziedziny częstotliwości, czyli do wyznaczenia częstotliwościowej zawartości sygnału.

Przykład

W MATLABie algorytm dyskretnego przekształcenia Fouriera jest zrealizowany jako funkcja fft

Funkcje `Y = fft(x)` oraz `x = ifft(Y)` implementują prostą i odwrotną dyskretną transformatę Fouriera zgodnie z zależnościami:

$$Y(k)=\sum_{n=1}^{N}x(n)W_N^{(n-1)(k-1)}$$ **UWAGA na indeksowanie od 1 a nie od 0**

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X(k)W_N^{-(n-1)(k-1)}$$

gdzie: $W_N=e^{\frac{-j2\pi}{N}}$

◈

Y = fft(x) daje w wyniku dyskretną transformatę Fouriera (DFT) wektora x

Y = fft(x,N) daje w wyniku N-punktową DFT; jeśli długość wektora x jest mniejsza niż N, wektor x jest uzupełniany zerami do długości N, jeśli większa od N, to wektor x jest odpowiednio skracany.

℗

<u>Przykład 1</u>

FFT wektora x obliczamy następująco:

```
» x = [4 3 7 -9 1 0 0 0]';
» y = fft(x)
» y =
» 6.0000
» 11.4853 - 2.7574i
» -2.0000 -12.0000i
» -5.4853 +11.2426i
» 18.0000
» -5.4853 -11.2426i
» -2.0000 +12.0000i
» 11.4853 + 2.7574i
```

Wektor x jest rzeczywisty natomiast y jest zespolony. W przykładzie pierwszy wyraz reprezentuje składową stałą, a piąty wyraz odpowiada częstotliwości Nyquista. Ostatnie trzy wyrazy odpowiadają częstotliwościom ujemnym i są odpowiednio sprzężone z 2, 3 i 4 wyrazem.

Najważniejsze informacje o sygnale poddanym transformacji zawarte są w widmie amplitudowym i fazowym DFT. W MATLABie otrzymujemy te charakterystyki przy pomocy funkcji `abs` i `angle`.

Tworzymy przebieg składający się z jednej składowej sinusoidalnej. Najpierw tworzymy wektor czasu `t` i przy jego pomocy tworzymy sygnał `x`.

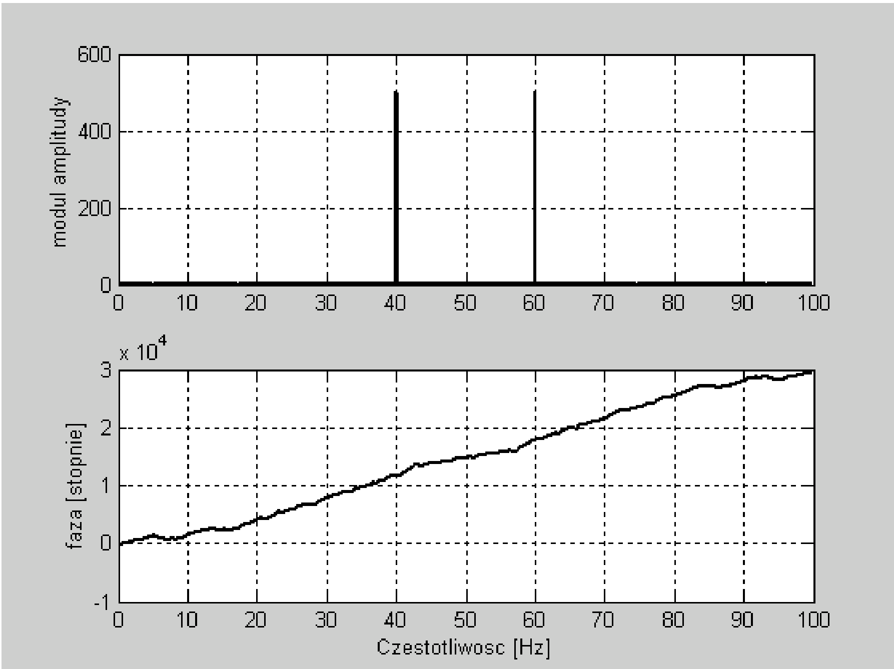
℗

```
» t=0:1/100:10-1/100;%jaka jest częstotliwość próbkowania?
» x=sin(2*pi*40*t);
» y=fft(x); %obliczanie DFT ciągu x
» m=abs(y); % widmo amplitudowe
» p=unwrap(angle(y)); %widmo fazowe;
```

Funkcja unwrap służy do usunięcia skoków fazy większych niż π.

Tworzymy oś częstotliwości i rysujemy wykres amplitudy i fazy

```
» f=(0:length(y)-1)'*100/length(y); %oś czestotliwości
» subplot(2,1,1), plot(f,m); %wykres amplitudy
» ylabel('modul amplitudy'), grid on
» subplot(2,1,2), plot(f,p*180/pi); %faza
» ylabel('faza [stopnie]'), grid on
» xlabel('Czestotliwosc [Hz]')
```



Wykres amplitudy jest symetryczny względem częstotliwości Nyquista 50 Hz. Całkowita informacja o sygnale zawarta jest w przedziale od 0 do 50 Hz (dlaczego ?).

🕔 **(10)**

ĆWICZENIE 1

A. Przeprowadzić analizę amplitudy i fazy (DFT) dla sygnału o jednej składowej sinusoidalnej o różnych częstotliwościach [f], amplitudach [A] oraz częstotliwościach próbkowania [fp] przy akwizycji pełnej liczby okresów sygnału.

B. Zbadać wpływ akwizycji niepełnej liczby okresów badanego sygnału na wyniki FFT.

C. Zbadać wpływ położenia okna pomiarowego FFT.(wpływ przesunięcia czasowego).

D. Zbadać wpływ na wyniki analizy DFT uzupełnienia zerami (zero-padding).

Cw.1A-D

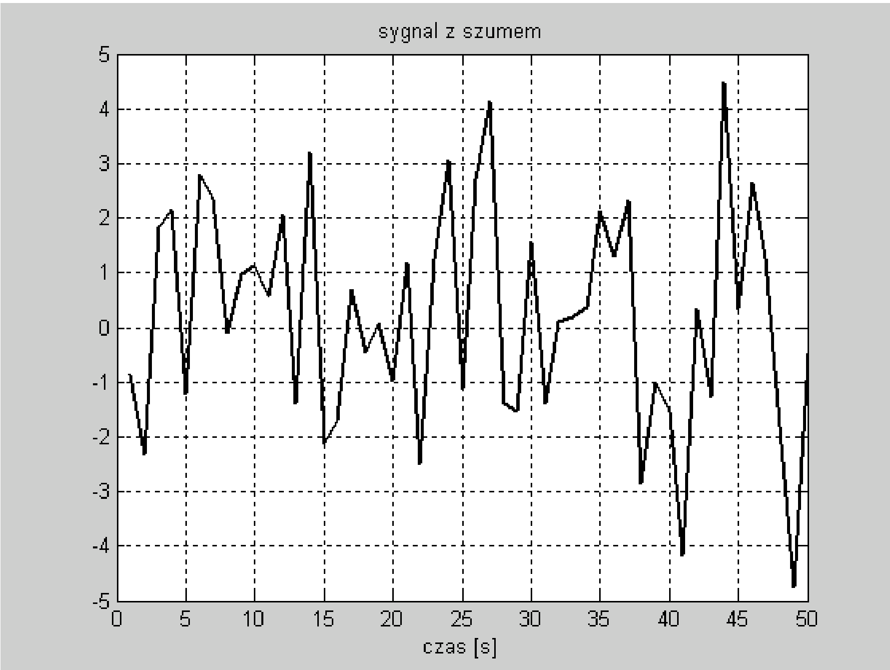
gr	f	A	fp
1	50	6	150
2	60	5	180
3	70	4	210
4	80	3	240
5	90	2	270
6	100	1	300

Ⓟ

<u>Przykład 2</u>

DFT stosuje się powszechnie do znajdowania składowych częstotliwościowych sygnału czasowego z szumem. Częstotliwość próbkowania wynosi 1000 Hz. Utworzono sygnał składający się z dwóch składowych o częstotliwościach 50 Hz i 120 Hz i szumu o średniej zerowej.

```
» t=0:0.001:0.6;
» x1=sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*120*t);
» x=x1+2*randn(size(t));
» plot(x(1:50))
» title('sygnal z szumem');grid on
» xlabel('czas [s]')
```



Patrząc na przebieg czasowy trudno powiedzieć, z jakich składowych widmowych składa się sygnał. Obliczamy 512 próbek DFT sygnału `x` :

Ⓟ

```
» Y=fft(x,512);
```

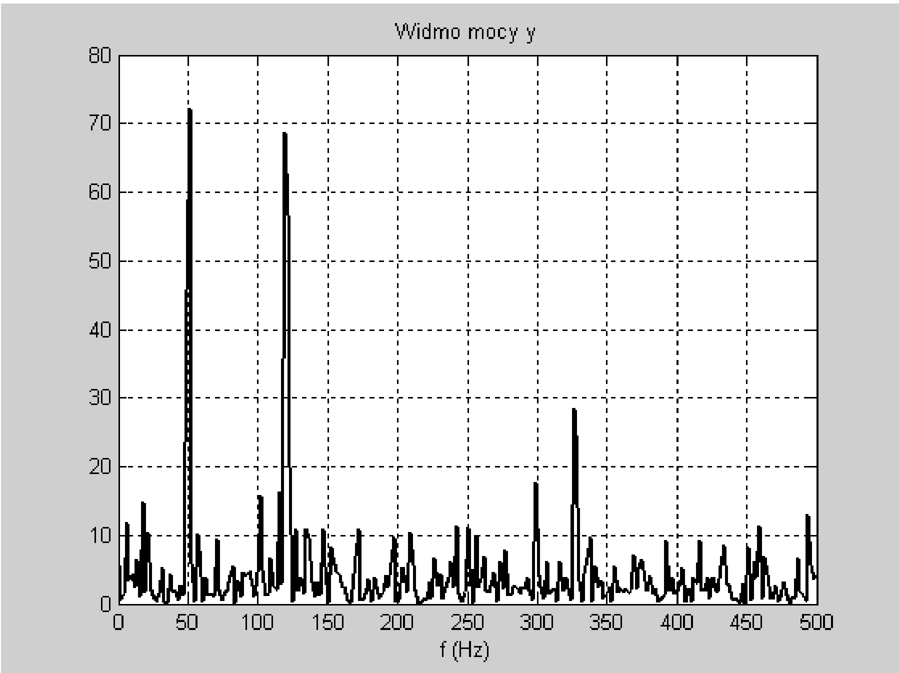
Widmo mocy, czyli miarę zawartości poszczególnych składowych sygnału w dziedzinie częstotliwości obliczamy z zależności:

```
» Pyy=Y.*conj(Y)/512;
```

Rysujemy wykres pierwszych 257 punktów na osi częstotliwości:

```
» f=1000*(0:256)/512;
» plot(f,Pyy(1:257));grid on
» title('Widmo mocy y')
» xlabel('f (Hz)')
```

Wykres ten przedstawia zawartość częstotliwościową sygnału od częstotliwości 0 Hz do częstotliwości Nyquista 500 Hz.



(50)

ĆWICZENIE 2

Przeprowadzić analizę widmową sygnału będącego sumą 2 składowych sinusoidalnych o częstotliwościach [f1,f2], o amplitudach w zakresie od 1 do 3 przy poziomie szumu K. Szum gaussowski dodać do sygnału za pomocą funkcji randn, np:

```
»x=sin(2*pi*f1*t)+2*sin(2*pi*f2*t)+
K*randn(size(t))
```

Cw.2

gr	f1	f2	K
1	30	130	1,2
2	60	100	1,3
3	40	110	2,3
4	20	90	2,1
5	70	120	1,5
6	80	140	1,7

Ⓟ

Przykład 3

Jednym ze sposobów analizy widmowej sygnału jest obliczenie tzw. **periodogramu** zgodnie z zależnością:

$$P(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} w[k]x[k]e^{-jk\omega}\right|^2}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|w[k]|^2};$$

gdzie x[k] – próbki sygnału, w[k] – dyskretne wartości okna modyfikującego próbki

Periodogram przedstawia ciągły rozkład gęstości mocy sygnału w dziedzinie częstotliwości (power spectral density - psd) i może być wyznaczany z transformaty Fouriera.

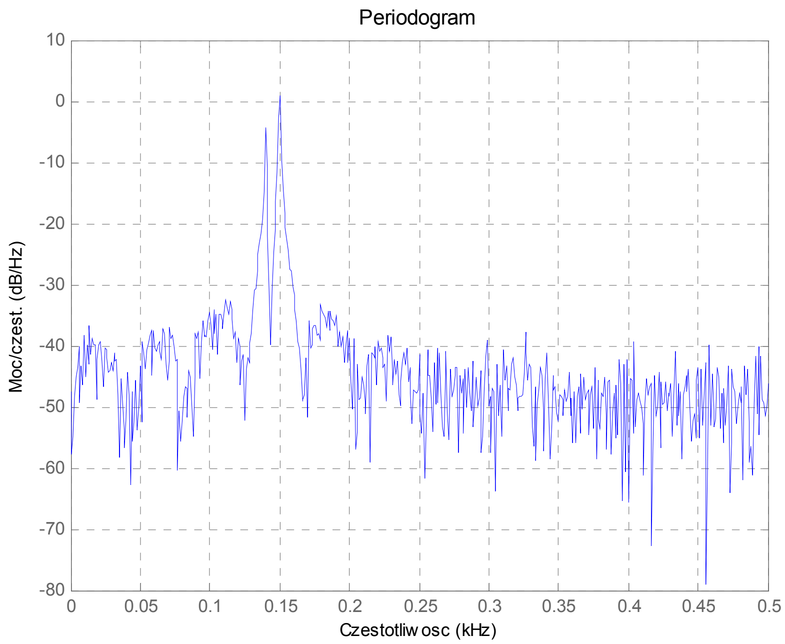
W Matlabie do obliczeń periodogramu można wykorzystać podstawową funkcję **FFT**, lub bardziej złożone **PSD** lub **PERIODOGRAM**

`[Pxx,f] = periodogram(x,window,nfft,fs)`

wyznacza PSD sygnału **x**. Domyślnie wektor x jest modyfikowany oknem prostokątnym (**window** = BOXCAR) o tej samej długości co wektor x, **nfft** – szerokość okna pomiarowego fft, **fs** – częstotliwość próbkowania.

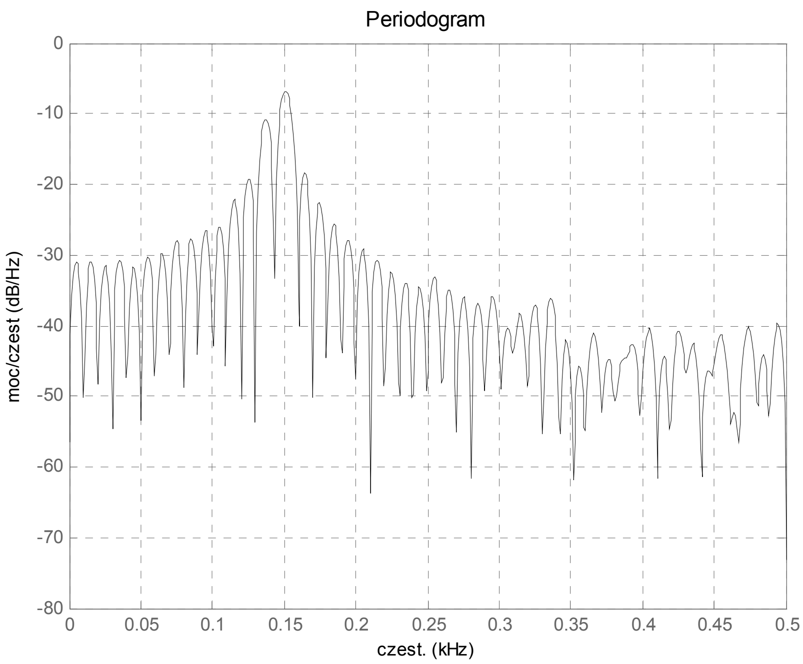
Ⓟ

```
fs=1000;             % częstotliwość próbkowania 1000 Hz
t=(0:fs)/fs;         % próbki o czasie trwania 1 s
A=[1 2];             % amplitudy sinusoid
f=[140;150];         % częstotliwości sinusoid
x=A*sin(2*pi*f*t)+0.1*randn(size(t)); %sygnał
[Pxx,f]=periodogram(x,[],1024,fs); %periodogram
semilogy(f,Pxx); grid;
```



Przeciek widma

Jedną z wad periodogramu jest nakładanie się widma (przeciek). Występuje on najwyraźniej w przypadku badania krótkich sekwencji danych. Jeśli weźmiemy tylko 100 próbek sygnału x to otrzymamy:



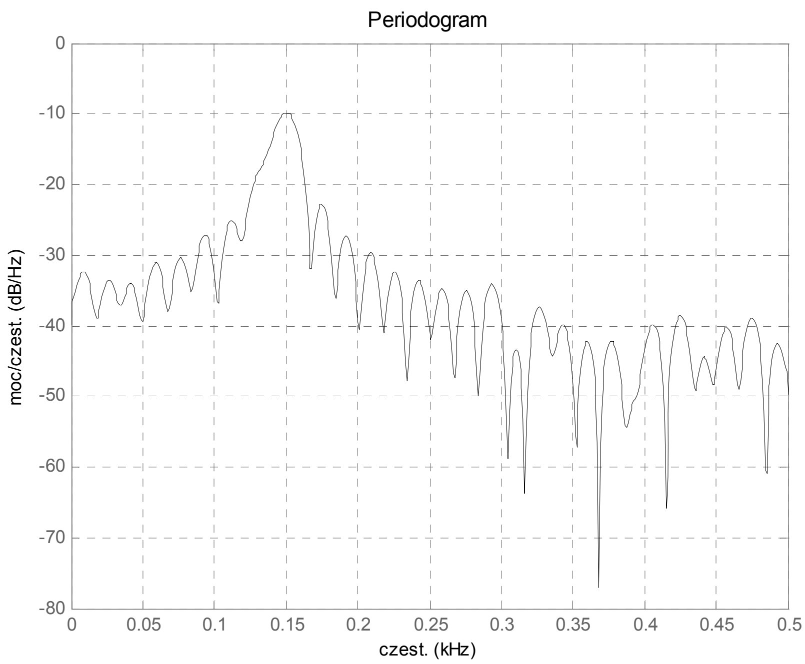
Rozdzielczość

Rozdzielczość jest zdolnością do rozróżnienia dwóch blisko siebie położonych składowych częstotliwościowych. Warunkiem przybliżonym rozróżnienia dwóch składowych jest

$$\Delta f = f_1 - f_2 > \frac{f_s}{N}.$$

W przypadku nie spełnienia tego warunku (61 próbek), otrzymano:

```
periodogram(x(1:61),[],1024,fs); %periodogram
```



(90)

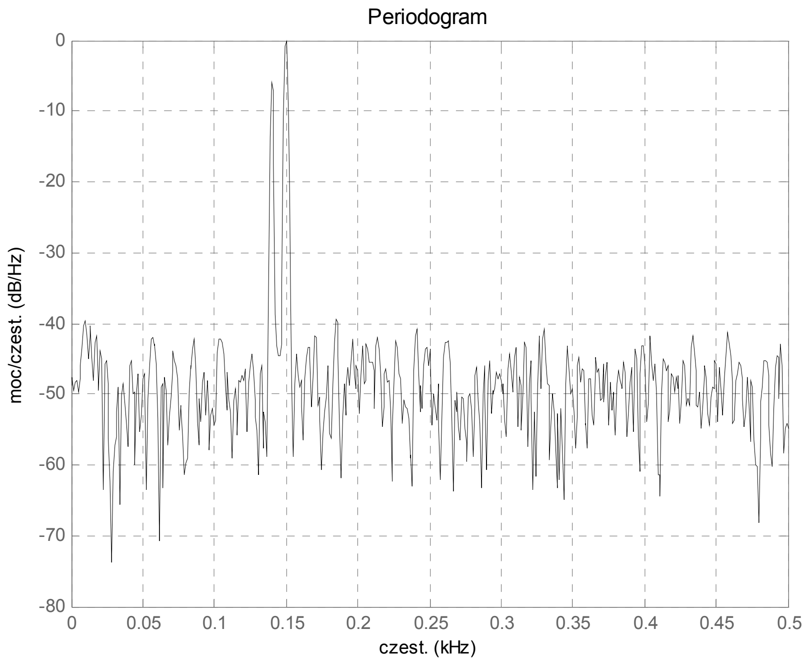
ĆWICZENIE 3

Sprawdzić wpływ częstotliwości próbkowania, długości sekwencji próbek sygnału na zjawisko przecieku widma i zdolności rozdzielczej periodogramu. Zbadać wpływ poziomu szumu na właściwości periodogramu.

Przykład 4

Modyfikacja periodogramu polega na zastosowaniu czasowej funkcji okna do próbek sygnału w celu zmniejszenia niektórych niekorzystnych właściwości.
Wyznaczono periodogram sygnału o długości 100 próbek

```
[Pxx,f]=periodogram(x,blackman(length(x)),1024,fs); %periodogram
```



Dostępne funkcje okna:

bartlett, blackman , chebwin, hamming, hann, kaiser, triang

(120)

ĆWICZENIE 4

Zbadać wpływ dwóch wybranych funkcji okna na właściwości periodogramu (przeciek, rozdzielczość). Badania przeprowadzić na sygnale zawierającym składowe o bliskich częstotliwościach oraz szum.

Cw.4

gr	Okno 1	Okno2
1	Bartlett	Chebwin
2	Hamming	Kaiser
3	Hann0	Tukeywin
4	Bartlett	Kaiser
5	Hamming	Tukeywin
6	Hann	Chebwin

Przykład 5

Analiza harmoniczna sygnału, wyznaczenie mocy harmonicznych i rekonstrukcja sygnału.

Rozłożono sygnał trójkątny o okresie T=5s i amplitudzie 1 na składowe harmoniczne. 512 próbek sygnału zbadano w celu określenia jaka część mocy sygnału zawarta jest w kolejnych składowych harmonicznych.

```
» T=5;
» N=512;
» t=linspace(0,T,N+1);t=t(1:N); oś czasu
» x=sawtooth(0.4*pi*t,0.5);sygnał trójkątny
» X=fft(x,512);
» PSD=X.*conj(X)/N;
» [sum(PSD) norm(x)^2]  Dlaczego te wyniki są sobie równe?
» ans =
» 170.6719
```

»`[moc,ind]=sort(PSD);` *dzięki operacji sortowania można wyznaczyć składowe widma o największej mocy.*

» `m=6; ind(N:-1:N-m+1)` *identyfikacja 6 składowych o największej mocy*

```
» ans =
»      512   2   510   4   508   6
```

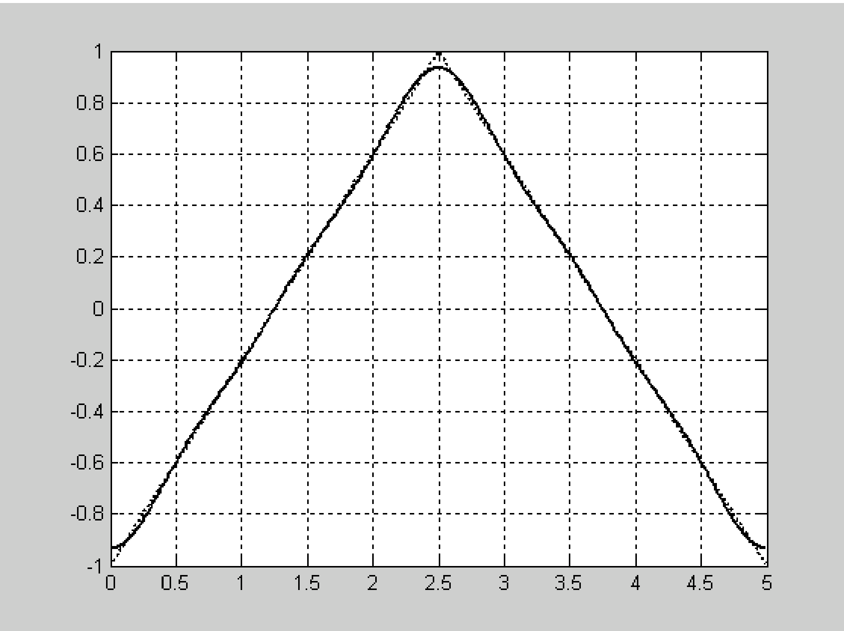
Rekonstrukcja sygnału z jego harmonicznych

» `X6=zeros(1,N);` *zarezerwowanie przestrzeni dla rekonstruowanego widma*

» `h=[512 2 510 4 508 6];`

» `X6(h)=X(h);` *kopiowanie 6 składowych do rekonstruowanego widma sygnału*

```
» xr=ifft(X6); odwrotna FFT
» plot(t,[x;xr]);grid on; wykres
```




```
» proc=100*(norm(X6)/norm(X))^2;
» proc =
»    99.9276
```

Wniosek: 99,9276 % mocy sygnału zawarte jest w jego sześciu harmonicznych. Są to harmoniczne o indeksach 2, 4 i 6 odpowiadające częstotliwościom 0,2 Hz 0,4 i 0,6 Hz oraz składowe sprzężone.

(160)

ĆWICZENIE 5

Przeprowadzić analizę i rekonstrukcję dowolnego sygnału prostokątnego (funkcja square) i piłokształtnego (funkcja sawtooth). Określić zależności pomiędzy właściwościami sygnału a liczbą harmonicznych koniecznych do ich możliwie dokładnej rekonstrukcji (syntezy).

(180)

Literatura

Oppenheim, R.W. Schaffer: „„**Cyfrowe przetwarzanie sygnałów**". WKŁ, Warszawa 1979.
W.Borodziewicz, K.Jaszczak: „**Cyfrowe przetwarzanie sygnałów**". WNT, Warszawa 1987.
A. Biran, M. Breiner: **Matlab 5 for Engineers**, Addison-Wesley, 1999
„**Matlab User's Guide**" The MathWorks Inc.1996