Article

« Un modèle non coopératif de consommation des ménages »

David Ulph

*L'Actualité économique*, vol. 82, n°1-2, 2006, p. 53-85.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 82, nos 1-2, mars-juin 2006

# UN MODÈLE NON COOPÉRATIF DE CONSOMMATION DES MÉNAGES*

David ULPH
*Analysis*
*HM Revenue and Customs*

RÉSUMÉ – Cet article construit un modèle de consommation du ménage fondé sur un équilibre non coopératif de Nash. Ce modèle est extrêmement général, tant du point de vue des types de biens et de revenus considérés que de la nature des fonctions d'utilité individuelles. Les conditions d'unicité d'un tel équilibre sont déduites; on montre que, malgré la généralité de sa structure sous-jacente, des contraintes fortes sont placées sur les demandes de biens issues des modèles respectant ces conditions d'unicité. Les propriétés générales de statique comparée des demandes de biens du ménage sont dérivées.

ABSTRACT – *A General Non-cooperative Nash Model of Household Consumption Behaviour.* The paper constructs a non-cooperative Nash model of household consumption behaviour which is extremely general in both the pattern of intra-household flows for commodities and income that are permitted, and in the nature of the individual utility functions that are employed. Conditions are derived for the uniqueness of such equilibria, and it is shown that, despite the generality of the underlying structure, some striking restrictions can be placed on household commodity demands arising from models satisfying these conditions. The general comparative static properties of household commodity demands are derived.

## INTRODUCTION

Selon une opinion largement répandue, des prestations telles que les allocations familiales auront des répercussions considérables sur le profil de consommation des ménages – et par conséquent sur le niveau de bien-être des divers membres de ces ménages – selon qu'elles sont versées au mari ou à l'épouse.

* Toute ma reconnaissance à Patricia Apps, avec qui j'ai pu discuter de la modélisation du comportement des ménages, ce qui m'a d'ailleurs amené à adopter l'approche utilisée dans cet article, à Ian Walker, avec qui j'ai eu des conversations au sujet des données empiriques et des approches possibles pour la modélisation, et à Richard Cornes, avec qui j'ai pu échanger des idées sur la modélisation des biens publics.

Et pourtant, la plupart des analyses théoriques et empiriques du comportement des ménages effectuées par les économistes utilisent un cadre conceptuel dans lequel la répartition du revenu du ménage n'a en principe aucune importance. C'est certainement le cas pour le modèle néoclassique, presque universellement utilisé, dans lequel le ménage fonctionne comme s'il poursuivait un objectif unique; mais il en va de même avec d'autres modèles – j'y reviendrai plus loin.

On trouve, cependant, dans la littérature quelques modèles de comportement pour lesquels la répartition du revenu au sein du ménage, en particulier les prestations de l'État, joue un rôle – par exemple, dans Apps (1981) et Apps et Jones (1986). Le principal problème de ces modèles découle du fait qu'ils reposent sur une vision très particulière du comportement des ménages, excluant tout rapprochement avec le modèle néoclassique. Ils sont donc également singuliers et difficiles à valider empiriquement comme solution de rechange au modèle néoclassique.

En revanche, les travaux de Becker (1981a, 1981b) ont prouvé que même si les membres d'un ménage ont des préférences très différentes, et à la condition que l'un d'eux soit suffisamment altruiste, la répartition du revenu dans le ménage, du moins dans un certain intervalle, peut n'avoir aucune incidence sur le profil des dépenses. De nombreux travaux dans la littérature sur la neutralité fiscale procèdent, en fait, d'une idée très semblable et démontrent comment les modèles à plusieurs agents peuvent reproduire le comportement de modèles à un seul agent. Comme le souligne Bernheim et Bagwell (1988), la structure des rapports interpersonnels dans de tels modèles peut être beaucoup plus générale que ce qui est supposé dans les modèles simples à générations imbriquées, sans que les résultats n'en soient affectés. Bergstrom et Varian (1985) ont rapporté des résultats semblables sur l'indépendance des équilibres de Nash à la répartition des caractéristiques individuelles, tandis que Bergstrom, Blume et Varian (1986) tirent les mêmes conclusions pour les modèles de contributions privées aux biens publics basés sur un équilibre de Nash. Si ces travaux confirment que l'abandon de la description néoclassique à un seul agent n'engendre pas automatiquement des conclusions différentes, il est important de noter que les modèles cités ci-dessus reposent souvent sur des hypothèses structurelles assez fortes. Par exemple, ils nécessitent des conditions non triviales sur la nature du rapport entre les préférences des agents; ou bien, ils considèrent un cadre d'analyse à un seul bien, le revenu, dans lequel ce bien est transféré d'un agent à l'autre; et enfin, comme on le sait bien, ils supposent des solutions intérieures.

Dans le présent article, j'examinerai le modèle très général d'un ménage composé de deux personnes et je caractériserai complètement, avec le moins d'hypothèses possibles sur la nature des préférences individuelles, l'équilibre non coopératif de Nash dont découlent les demandes de biens du ménage.

Il s'avère que le modèle se comporte *localement* un peu comme tous les modèles évoqués précédemment. Cela signifie que si nous prenons un ménage avec un revenu total et des préférences individuelles donnés et permettons à la part du revenu dévolue à l'épouse de varier sur un intervalle de 0 à 1, alors :

(i) Dans certains cas, il existe deux sous-intervalles (à l'une et l'autre extrémité de l'intervalle 0-1) pour lesquels l'équilibre de Nash correspond à la répartition maximisant l'utilité de l'un des conjoints; il est clair que sur ces sous-intervalles, le comportement du ménage est, localement, de type parfaitement néoclassique.

(ii) Entre ces deux sous-intervalles, il en existe d'autres pour lesquels, comme dans les modèles de Becker, la répartition du revenu du ménage est localement non pertinente, de telle sorte que les demandes du ménage satisfont certaines, mais généralement pas toutes, les prédictions néoclassiques.

(iii) Enfin, il existe d'autres sous-intervalles où, localement, la répartition du revenu du ménage affecte véritablement les demandes de biens, de telle sorte que même cet aspect du modèle néoclassique ne se vérifie pas.

Ces deux derniers types de sous-intervalles alternent toujours, produisant avec les deux premiers intervalles mentionnés en (i), une configuration de sous-intervalles pour lesquels la demande de biens est localement, et alternativement, indépendante et dépendante de la répartition du revenu au sein du ménage. De plus, il existe un bien dont la demande s'accroît avec la proportion du revenu allant à l'épouse, un autre bien pour lequel la demande baisse, alors que pour tous les autres biens, la demande fléchit tout d'abord, avant de se redresser. Ce phénomène frappant constitue une prédiction de la théorie que l'on pourrait chercher à tester empiriquement.

En outre, il existe généralement quelques groupes de biens pour lesquels toutes les propriétés néoclassiques standard de la théorie de la demande sont vérifiées, c.-à-d. que leur demande, *conditionnellement au montant total de la dépense consacrée à ce groupe*, satisfait toutes les propriétés néoclassiques.

Enfin, le modèle présenté dans cet article constitue une généralisation du modèle néoclassique, qui y est imbriqué comme un cas particulier. Essentiellement, le modèle n'est qu'une extension de ceux utilisés par Ashworth et Ulph (1981) et par Leuthold (1968) lorsque les membres du ménage ont un comportement de type Nash, aussi bien pour la demande de biens que pour l'offre de travail. Comme l'ont fait remarquer Ashworth et Ulph, ce genre de modèle se réduit au modèle néoclassique lorsque les préférences des conjoints sont identiques.

Le plan de cet article est le suivant. Dans la prochaine section, j'exposerai le cadre général de l'analyse. En utilisant le modèle néoclassique comme référence, je montrerai que les modèles de négociation sont incapables d'expliquer les effets de la répartition du revenu dans le ménage si le rôle que joue cette répartition du revenu dans le modèle non coopératif développé ci-dessous n'est pas compris.

Dans les trois sections suivantes, je développerai le modèle non coopératif de consommation, en supposant que les décisions d'offre de travail sont données. Dans la première de ces sections, j'exposerai le modèle et j'en déduirai quelques résultats généraux caractérisant l'équilibre. Dans la section suivante, j'examinerai la question cruciale de l'unicité de l'équilibre de Nash. C'est une question capitale, car elle garantit non seulement que les équilibres que nous considérons ont des propriétés convenables, mais elle est également à l'origine du remarquable profil de comportement que nous avons mentionné ci-dessus. Dans la dernière section, je détaillerai toutes les propriétés de statique comparée du modèle.

## 1. Le cadre général

Le modèle néoclassique standard possède deux caractéristiques : le ménage fonctionne comme s'il n'était soumis qu'à une seule contrainte budgétaire, liant sa dépense totale à son revenu total et il prend ses décisions comme s'il ne poursuivait qu'un seul objectif convenu. La première caractéristique est le corollaire naturel de la seconde. Par conséquent, si l'on désire abandonner la première, il faut commencer par remettre en question la seconde.

Pour développer cette approche, supposons d'abord que le ménage comporte deux membres, un mari et une épouse, et que les biens puissent se répartir en deux groupes : $n$ biens de consommation et deux types de loisirs, soit celui du mari $l_m$ et celui de l'épouse $l_f$. De plus, nous pouvons distinguer trois vecteurs différents, à $n$ dimensions, représentant les biens de consommation : $x_m$, le vecteur des biens consommés uniquement par le mari; $x_f$, le vecteur des biens consommés uniquement par l'épouse et $x_c$, le vecteur de biens consommés en commun. Très souvent, un bien donné ne sera affecté d'une valeur positive que dans l'un de ces vecteurs, même si on peut envisager que certains biens, comme un repas au restaurant, puissent faire partie des trois, selon que le mari et l'épouse mangent ensemble ou chacun de leur côté. Je maintiens donc la pleine généralité du modèle en donnant à ces vecteurs les mêmes dimensions que l'espace des biens.

Nous désirons que, dans nos hypothèses, l'utilité de chaque personne dépende du vecteur de sa propre consommation de biens, du vecteur des biens consommés conjointement et de ses loisirs. Nous voulons aussi, dans une perspective totalement générale, permettre de l'altruisme entre les conjoints, de sorte que le vecteur décrivant la consommation du partenaire et les loisirs de ce dernier soit incorporé dans la fonction d'utilité de chacun. Sans restreindre *a priori* les modalités de cette interaction, soulignons que si l'altruisme du mari (par exemple) envers son épouse se matérialisait uniquement en ce qu'il donne de l'importance à son utilité à elle, alors les préférences pour les biens consommés exclusivement par l'épouse (conditionnellement à toute autre consommation) seraient identiques pour les deux conjoints. Le cadre le plus général avec lequel nous pouvons commencer consiste à poser que l'utilité de chaque conjoint dépend, sans restriction préalable, du vecteur à $(3n + 2)$ dimensions : $z \equiv (x_m, x_f, x_c, l_m, l_f)$. Notons ces fonctions d'utilité $u_m(z)$ et $u_f(z)$.

On peut concevoir le modèle néoclassique comme un modèle dans lequel le mari et l'épouse ont les mêmes préférences, de telle sorte que, *pour décrire le* *comportement du ménage*, nous pouvons poser : $u_m(z) \equiv u_f(z)$[1]. Que nous voulions, du point de vue du bien-être, faire une telle supposition est une autre question; Apps et Rees (1988) analysent justement les conséquences de l'absence de cette dernière hypothèse, quoique dans un contexte légèrement différent.

Un effet immédiat du modèle néoclassique est que nous pouvons maintenant considérer que la fonction d'utilité commune ne dépend que de la consommation totale des biens, $x_h \equiv x_m + x_f + x_c$, et des loisirs, par l'intermédiaire de la fonction d'utilité suivante :

$$u_h(x_h, l_m, l_f) \equiv \max u_m(z) \quad \text{tel que} \quad x_m + x_f + x_c \leq x_h \quad x_m, x_f, x_c \geq 0\,. \tag{1}$$

La raison est que, vu l'accord entre le mari et l'épouse, les conjoints choisiront toujours de répartir leur consommation totale de biens entre leur consommation individuelle et leur consommation commune de façon à maximiser l'utilité. La fonction d'utilité du ménage définie en (1) correspond à celle qui figure dans pratiquement toutes les analyses néoclassiques de la demande et de l'offre de travail d'un ménage.

Supposons maintenant que : $u_m(z) \neq u_f(z)$. Nous devons alors expliquer le comportement du ménage. Selon une interprétation inspirée des travaux de Manser et Brown (1980), le comportement du ménage peut se décrire par la solution d'un jeu coopératif de négociation. L'une des caractéristiques d'un tel équilibre est son efficience, c.-à-d. que l'utilité de l'un des membres du ménage est maximisée, pour une utilité de l'autre donnée. Ce faisant, tous les revenus sont regroupés sous une seule contrainte budgétaire, liant la dépense totale pour tous les biens (de même que les loisirs) à la totalité du revenu du ménage. Mais cela ne prouve pas directement que le comportement du ménage est indépendant de la répartition du revenu au sein du ménage. Pour déterminer l'issue de la négociation, nous devons spécifier trois choses :

(i) La solution de *statu quo* – les niveaux d'utilité atteints si les conjoints, bien que vivant sous le même toit, n'arrivaient pas à s'entendre (seul l'excédent d'utilité par rapport au *statu quo* fera l'objet du marchandage).

(ii) Les options hors ménage – le niveau d'utilité pour chaque personne, advenant la séparation du couple.

(iii) La nature de l'équilibre de négociation – en particulier, l'existence éventuelle d'un pouvoir de négociation pouvant influencer la position spécifique le long de la frontière d'efficacité que prendra l'équilibre de négociation.

---

1. On avance parfois une conception du modèle néoclassique selon laquelle, bien qu'ils aient des préférences différentes, les deux individus agissent de façon à maximiser une certaine fonction de bien-être combinant les deux utilités dans une fonction d'utilité agrégée pour le ménage. Mais cette façon de voir est clairement équivalente à supposer que les deux conjoints ont, comme fonction d'utilité personnelle, précisément cette fonction d'utilité agrégée. En fait, peu importe la façon par laquelle les époux résolvent leurs divergences en matière de préférences, s'ils en viennent à maximiser une certaine fonction d'utilité, nous retrouvons l'équivalent de la situation où chacun aurait cette même fonction d'utilité.

Arrêtons-nous successivement à chacune de ces trois questions et voyons si nous pouvons en déduire quelque chose concernant les répercussions de la répartition du revenu sur l'équilibre du ménage.

La façon de modéliser la solution de *statu quo* varie beaucoup selon le type de négociation considéré. S'il existait une solution non coopérative naturelle, cette dernière serait considérée comme la solution de *statu quo*. Toutefois, jusqu'à présent, nous ne possédons pas de théorie générale non coopérative de la consommation des ménages qui pourrait nous servir de point de référence, de sorte que nous n'avons *a priori* aucune idée sur le lien entre la consommation et la répartition du revenu. C'est d'ailleurs exactement le genre de théorie que le présent article cherche à développer. Aussi, même si l'approche non coopérative était vue comme peu vraisemblable, le travail qui va suivre pourrait être considéré comme offrant un point de départ pour une amélioration de l'approche par modèles de négociation.

Les options externes qui sont à la portée des agents dépendent beaucoup de la situation modélisée, mais il est certainement raisonnable de supposer que le revenu des individus y joue un rôle. Le problème rencontré ici découle du fait que ces options ne peuvent influencer la répartition au sein du ménage que lorsqu'elles deviennent « mordantes ». Ce qui signifie que s'il s'agissait là de la principale influence de la répartition du revenu sur les décisions de consommation, elle ne deviendrait opérante que lorsque la séparation du couple est envisagée. Les partisans du versement des allocations familiales à la femme estiment sans l'ombre d'un doute qu'une telle mesure aurait une portée beaucoup plus grande.

Enfin, on pourrait considérer que la répartition du revenu au sein du ménage influence le pouvoir de négociation des partenaires. On obtiendrait alors une théorie dans laquelle la répartition du revenu aurait certes de l'importance, mais elle resterait essentiellement *ad hoc*, et il faudrait des raisons supplémentaires pour créer un tel type de modèle.

Il semble donc que la meilleure façon de comprendre comment la répartition du revenu influence les résultats de la négociation au sein du ménage consiste premièrement à étudier comment cette répartition se répercute sur l'équilibre non coopératif – et c'est précisément l'objectif de cet article.

Deux remarques concernant l'approche par négociation s'imposent ici. Cette approche est parfois justifiée par le fait que les conjoints s'aiment et que, par conséquent, ils sont toujours disposés à coopérer. Mais leurs sentiments réciproques sont déjà pris en compte dans leurs préférences et la coopération est plutôt motivée par l'intérêt personnel, les deux partenaires y trouvant la possibilité d'améliorer leur situation. Un autre argument en faveur de la solution coopérative repose sur le surplus qui peut être généré par la coopération. Certes, la coopération est à la base de nombre de comportements dans le ménage, mais il ne faut pas oublier que beaucoup d'autres ne nécessitent pas de collaboration, notamment dépenser de l'argent. En effet, si l'un des partenaires dispose d'un revenu, il peut toujours en dépenser une partie sur un ensemble de biens, s'assurant ainsi que la consommation du ménage de ces biens ne tombe pas sous un certain seuil. Nous touchons ici aux préoccupations à l'origine du débat concernant les allocations familiales – c'est-à-dire l'idée qu'en versant les prestations au mari, celui-ci pourrait les dépenser au bar et au jeu avant de rentrer chez lui, alors que si la femme touche le chèque, l'argent sera utilisé pour vêtir et nourrir les enfants avant que le mari ne soit revenu. Tout cela incite à l'étude d'une théorie non coopérative du comportement du ménage – et certainement du comportement en termes de dépenses. C'est une théorie de ce genre que j'élaborerai dans la section suivante.

## 2. Le modèle non coopératif général

À partir d'ici et jusqu'à la fin de cet article, je ferai abstraction de la question de l'offre de travail : je supposerai tout simplement que la quantité de loisir de chaque partenaire a été déterminée préalablement. Désignons par $y_m$ le revenu total (issu du travail ou non) du mari et $y_f$, celui de l'épouse. Définissons $x \equiv (x_m, x_f, x_c)$, de sorte que nous puissions désormais supposer que l'utilité de chaque conjoint est fonction de $x$ seulement.

Une façon de modéliser la consommation du ménage consiste à permettre les transferts de revenu entre conjoints, chacun pouvant ensuite dépenser la totalité de ses revenus de façon à maximiser sa propre utilité. Toutefois, comme l'un peut toujours acheter des biens pour l'autre, tout ce que l'on pourrait obtenir au moyen d'un transfert de revenu peut également l'être par un achat direct au profit du conjoint. Mais la réciproque n'est pas vraie : puisque chaque partenaire a des préférences personnelles particulières, si l'épouse, par exemple, transférait une partie de son revenu à son conjoint, ce dernier pourrait décider de dépenser l'argent d'une façon que sa femme n'approuve pas, de telle sorte qu'elle aurait obtenu un résultat plus à son goût en utilisant le revenu transféré pour acheter elle-même les biens auxquels elle tient – y compris des biens destinés à la consommation exclusive de son mari. Naturellement, si le mari dépense le revenu d'une façon qui plaît à sa femme, celle-ci n'aura guère de réticence au transfert, mais du point de vue de de la consommation du ménage, il importe peu que l'un ou l'autre des conjoints dispose du revenu et la femme aurait aussi bien pu effectuer elle-même les achats. Aussi, utiliserons-nous, dans la suite de cette argumentation, les achats et les transferts de biens comme concepts théoriques de base. Comme nous pourrons le constater, ceux-ci recouvrent la notion de transfert de revenu, que l'on pourrait d'ailleurs toujours retrouver grâce à un examen approfondi des biens transférés; nul besoin donc de l'introduire dans la théorie dès le départ.

Ainsi, supposons que $x^f$ soit le vecteur de dimensions $3n$ représentant les achats effectués avec le revenu de la conjointe et, parallèlement, $x^m$ les achats payés avec le revenu du mari. Je considérerai que ces achats sont effectués par la personne dont le revenu sert à les faire, bien que, comme nous l'avons noté précédemment, et nous y reviendrons plus loin, la théorie ne prédit généralement pas lequel des conjoints effectue l'achat, et que dans ce cas, l'identité de l'acheteur effectif n'a aucune incidence sur la consommation finale du ménage. Ainsi, $x^f$ englobera les vecteurs suivants : $x^f_m$, représentant les achats réalisés par l'épouse pour la consommation de son mari; $x^f_f$, ceux qu'elle effectue pour sa propre consommation; et $x^f_c$, ceux qu'elle réalise en vue de leur consommation commune. Il en va de même pour $x^m$. Évidemment, $x = x^f + x^m$ [2]. Supposons que $p$ soit le vecteur à $3n$ dimensions des prix de $x$.

Le concept d'équilibre auquel je recourrai est simplement la solution non coopérative de Nash, qui est bien connue. Ainsi, en prenant sa décision, l'épouse considérera $x^m$ comme donné et choisira $x^f$ de façon à

$$\max u_f(x^m + x^f) \quad \text{tel que} \quad p \,.\, x^f \leq y_f \quad x^f \geq 0.$$

En supposant que $u_f$ est strictement quasi concave, il existe un seul $x^f$ pouvant résoudre ce problème et nous pouvons obtenir la fonction de demande/réaction :

$$x^f = R_f(x^m, p, y_f)\,. \tag{2}$$

De la même manière, nous pouvons obtenir la fonction de demande/réaction pour le mari

$$x^m = R_m\,(x^f, p, y_m)\,. \tag{3}$$

Un équilibre de Nash est une paire $\hat{x}^f, \hat{x}^m$ satisfaisant à (2) et (3) simultanément. Nous pouvons en déduire aisément la demande totale de biens du ménage $\hat{x}_h = \hat{x}^f + \hat{x}^m$, qui sera fonction, en général, de $p$, $y_m$ et $y_f$. L'équilibre est caractérisé par :

$$\frac{\partial u_f(\hat{x}_h)}{\partial x_{hi}} \leq \hat{\lambda}_f \,.\, p_i, \quad \hat{x}_i^f \geq 0\,; \quad \frac{\partial u_m(\hat{x}_h)}{\partial x_{hi}} \leq \hat{\lambda}_m \,.\, p_i, \quad \hat{x}_i^m \geq 0\,. \tag{4}$$

Avant d'établir les conséquences de cette théorie, il faut remarquer une chose. Supposons que nous puissions partager $x$ en deux vecteurs, $x_1$ et $x_2$ tels que les deux conjoints aient toujours les mêmes préférences sur $x_2$ (conditionnellement à $x_1$)[3]. Nous pourrions alors écrire :

$$u_m(x) \equiv \phi_m[x_1, \Psi(x_2;\, x_1)]; \qquad u_f(x) \equiv \phi_f[x_1, \Psi(x_2;\, x_1)]$$

où $\Psi(x_2;\, x_1)$ est la fonction d'utilité représentant les préférences communes $x_2$, conditionnellement à $x_1$. Parallèlement, répartissons $p$ en $p_1$ et $p_2$ et définissons :

$$v(p_2, x_1, e) \equiv \max \Psi(x_2;\, x_1) \quad \text{tel que} \quad p_2 \,.\, x_2 \leq e$$

et

$$x_2 \equiv \xi_2(p_2, x_1, e), \tag{5}$$

2. Puisque l'utilité des deux individus dépend de leurs achats totaux de biens, ce modèle est essentiellement un modèle d'équilibre de provision de biens publics à 2 personnes et à $3n$ biens.

3. Notez qu'il n'existe aucun chevauchement logique entre ces biens et les biens $x_c$. En effet, il se peut, par exemple, que le mari ait des préférences personnelles concernant les vêtements de son épouse, mais qu'il lui laisse la décision finale en cette matière. Dans ce cas, les biens en question figureraient dans la liste des biens pour lesquels les conjoints sont d'accord.

la demande implicite pour $x_2$, conditionnellement à la dépense totale pour ces biens et à la consommation de tous les autres biens. Enfin, posons $\xi_1 \equiv (x_1, e)$ et définissons :

$$\upsilon_m(\xi_1; p_2) \equiv \phi_m[x_1, v(p_2, e)]; \quad \upsilon_f(\xi_1, p_2) \equiv \phi_f[x_1, v(p_2, e)] \,.$$

Nous pouvons dès lors définir un équilibre de Nash $\xi_1^{of}$, $\xi_1^{om}$ pour ce dernier modèle, de la même manière que nous l'avons fait pour notre modèle originel. Remplaçons $\xi_1^o = \xi_1^{of} + \xi_1^{om}$ dans (4) et répartissons arbitrairement le vecteur résultant $x_2^o$ en $x_2^{of}$ et $x_2^{om} (x_2^o = x_2^{of} + x_2^{om})$ de telle manière que

$$p_2 \,.\, x_2^{of} = e^{of} \quad \text{et} \quad p_2 \,.\, x_2^{om} = e^{om} \,.$$

Il apparaît clairement que les vecteurs $x^{of} \equiv (x_1^{of}, x_2^{of})$ et $x^{om} \equiv (x_1^{om}, x_2^{om})$ constituent un équilibre de Nash dans le modèle originel, et que, d'une façon similaire, tout équilibre de Nash du modèle originel induit un équilibre de Nash dans ce modèle plus agrégé.

Autrement dit, advenant que les membres du ménage aient des préférences identiques pour certains biens et divergentes pour d'autres, la théorie prédit qu'ils s'assureront que certains achats stratégiques soient effectués dans le groupe des biens faisant l'objet d'un désaccord, de façon à garantir dès le départ une dépense minimale pour ces biens, et ensuite ils consentiront à mettre en commun le reste de leur revenu pour financer les achats faisant l'unanimité, qui seront effectués de la façon convenue.

Cela cadre très bien avec l'histoire du mari qui dépense d'abord une certaine partie de son salaire au bar et à la loterie, avant d'en remettre le reste à sa femme (ou de le déposer dans un compte conjoint) pour les dépenses du ménage, tandis que des épouses achètent plutôt certains biens auxquels elles tiennent, avant de mettre en commun le reste de leur revenu.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, cette théorie est compatible avec la notion de transfert de revenu. De plus, pour la classe des biens faisant l'objet d'un consensus et compte tenu de la façon arbitraire avec laquelle nous avons précédemment scindé $x_2^o$, la théorie est incapable d'expliquer qui effectue les achats, même si elle peut rendre compte des quantités totales achetées. Cela signifie que les observations portant sur les personnes qui font réellement les achats, comme celles fournies par les carnets journaliers du *Family Expenditure Survey*, ne sont d'aucune utilité pour tester la théorie. On ne peut essayer de la valider qu'en dégageant les conséquences concernant les achats totaux du ménage.

Enfin, remarquons qu'étant donné la façon avec laquelle la demande pour ces biens consensuels est obtenue en (5), cette demande présentera toutes les propriétés néoclassiques, conditionnellement à la dépense totale pour ces biens et à la consommation de tous les autres biens. Naturellement, lorsque cette demande est mise en relation avec le revenu, on trouve en général que la répartition du revenu a un impact sur la demande, mais seulement par l'entremise de la dépense totale pour ces biens.

Dans ce qui suit, je garderai à l'esprit cette interprétation du modèle et, lorsqu'une entente existera, je considérerai que les biens en question auront été regroupés d'une façon similaire. Toutefois, je reprendrai ma notation originelle, de telle sorte que les vecteurs $x$, $x^f$ et $x^m$ seront de dimensions moindres que précédemment – et peut-être même de beaucoup, si les zones d'entente au sein du couple sont étendues. J'utiliserai la lettre $n$ pour désigner la nouvelle dimensionnalité de ces vecteurs, en espérant que cela ne cause aucune confusion.

Compte tenu de cette reformulation du modèle, dérivons-en les principales propriétés.

Comme pour nombre de modèles d'équilibre de Nash, il faut reconnaître que plusieurs vecteurs de demande domestique peuvent constituer un équilibre, à prix et revenus donnés (tant pour le mari que pour l'épouse). Aussi, lorsque seront déterminés, dans les deux théorèmes suivants, les cas pour lesquels la demande d'un ménage est localement indépendante de la répartition du revenu entre les conjoints, il ne faudra pas oublier que cette demande peut ne pas être unique. Dans la section suivante, je clarifierai les conditions d'unicité. Voici donc le premier résultat :

**Théorème 1.** *Supposons que nous ayons un équilibre tel que, pour au moins un i,*

$$\hat{x}_i^f > 0 \quad et \quad \hat{x}_i^m > 0.$$

*Alors, la demande du ménage pour* <u>*tous*</u> *les biens est localement indépendante de la répartition du revenu.*

**Preuve.** Soustrayons ε de $y_f$, avec $0 < \varepsilon \leq p_i . \hat{x}_i^f$, et augmentons $y_m$ de cette même quantité. Examinons les vecteurs de demande du ménage $\tilde{x}^f$ et $\tilde{x}^m$, construits de la façon suivante :

$$\hat{x}_j^f = \hat{x}_j^f \quad ; \quad \hat{x}_j^m = \hat{x}_j^m \quad \text{pour} \quad j \neq i;$$

$$\hat{x}_i^f = \hat{x}_i^f - \varepsilon / p_i \quad ; \quad \hat{x}_i^m = \hat{x}_i^m \quad + \varepsilon / p_i \ .$$

Pour ε situé dans l'intervalle mentionné, les demandes sont non négatives et, de toute évidence, la demande globale du ménage demeure inchangée; par conséquent, les mêmes conditions (d'équilibre) du premier ordre sont satisfaites. Compte tenu de la quasi-concavité stricte, ces conditions sont aussi suffisantes pour l'équilibre. Un argument du même genre peut être proposé pour une petite diminution de $y_m$ ■

Jusqu'à un certain point, nous pouvons donc redistribuer le revenu au sein du ménage tout en étant certain qu'il existe un autre équilibre de Nash, caractérisé par la même demande domestique totale pour chaque bien. Nous retrouvons donc le résultat bien connu de Becker (1981a, 1981b) et de Bergstrom, Blume et Varian (1986), entre autres.

**Corollaire 1.1.** *Pour que la répartition du revenu affecte localement le profil de demande du ménage, il faut que, localement, les conjoints dépensent leur revenu sur deux sous-ensembles disjoints de biens.*

Ce résultat nous indique jusqu'à quel point il est difficile d'échapper au fait que la répartition du revenu n'a pas d'importance. Dans le cadre de l'interprétation que nous avons formulée précédemment, il faudrait que seulement l'un des conjoints contribue au « compte en commun », servant à acheter les biens convenus – l'épouse se contentant, par exemple, de ne travailler que pour son « argent de poche ».

Avant d'énoncer notre deuxième résultat, nous devons introduire de nouvelles définitions.

Soit $\bar{x}^f = R_f(0, p, y_f + y_m)$ ; $\bar{x}^m = R_m(0, p, y_f + y_m)$. Ce sont les demandes qui seraient formulées par l'un et l'autre des conjoints, si chacun avait la responsabilité exclusive de dépenser tout le revenu du ménage. Par hypothèse, $\bar{x}^f \neq \bar{x}^m$. Nous aurons donc :

**Théorème 2.** *Supposons que* $\bar{x}^f >> 0$. *Alors,* $\exists\, \tilde{\pi}_f$, $0 < \tilde{\pi}_f < 1$, *tel que, si* $\pi_f \equiv y_f / (y_f + y_m) \geq \tilde{\pi}_f$, *il existe un équilibre de Nash pour lequel* $\hat{x}_h = \bar{x}^f$.

Cela signifie que si le revenu est distribué d'une façon suffisamment inégalitaire au profit d'un des époux, l'allocation préférée du revenu total de ce dernier peut être rationalisée sous la forme d'un équilibre de Nash.

**Preuve.**

Définissons : $\lambda_{mj} \equiv \dfrac{\partial u_m(\bar{x}^f) \big/ \partial x_j}{p_j}$

et $\bar{\lambda}_m \equiv \max\limits_j \{\lambda_{mj}\}$.

Soit $N_m \equiv \{k \in \{1, ..., 3n\} \mid \lambda_{mk} < \bar{\lambda}_m\}$; $\quad B_m = \{1, ..., 3n\} - N_m$ .

Alors $N_m$ correspond à l'ensemble des biens que l'épouse devra payer entièrement à même son propre revenu, car, autrement, son conjoint n'en achètera pas la quantité qu'elle souhaite. Posons donc

$$\tilde{\pi}_f \equiv \left\{ \sum_{k \in N_m} p_k \,.\, \bar{x}_k^{\,f} \right\} \Big/ (y_m + y_f); \text{ alors, clairement, } 0 < \tilde{\pi}_f < 1.$$

Maintenant, supposons que $y_f > \tilde{\pi}_f \,.\, (y_f + y_m)$. Construisons $\hat{x}^m$ et $\hat{x}^f$ de la façon suivante.

Pour $k \in N_m$, $\hat{x}_k^m = 0$; $\hat{x}_k^f = \overline{x}_k^f$.

Pour $j \in B_m$, $\hat{x}_j^m = \hat{x}_j^m \geq 0$; $\hat{x}_j^f = \hat{x}_j^f > 0$,

de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

(i) $\sum_{j \in B_m} p_j \,.\, \hat{x}_j^{\,m} = y_m$; $\sum_{j \in B_m} p_j \,.\, \hat{x}_j^{\,f} = y_f - \sum_{k \in N_m} p_k \,.\, \overline{x}_k^{\,f}$ ,

(ii) $\forall\, j \in B_m$ $\hat{x}_j^m + \hat{x}_j^f = \overline{x}_j^f$.

Alors, de toute évidence, $\hat{x}^f$ et $\hat{x}^m$ constituent un équilibre de Nash, supportant $\overline{x}^f$ ■

**Corollaire 2.1.** *Un résultat similaire vaut pour* $\overline{x}^m$.

Remarquez que pour que ce théorème puisse s'appliquer, il faut que chaque membre du ménage ait suffisamment à cœur le bien-être de son partenaire pour qu'il consente, lorsqu'ils ont la responsabilité exclusive de disposer du revenu du ménage, à dépenser un montant positif pour tous les biens qui seront exclusivement consommés par son partenaire.

Pour illustrer ces résultats et ainsi mieux saisir intuitivement la nature de ces équilibres, considérons un exemple. Supposons donc qu'il n'existe que trois biens et que les préférences soient données par :

$$u_f = \alpha\log(x_1) + \beta\log(x_2) + (1 - \alpha - \beta)\log(x_3); \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta < 1,$$

$$u_m = a\log(x_1) + b\log(x_2) + (1 - a - b)\log(x_3); \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a + b < 1.$$

Supposons que

$$\alpha / a > (1 - \alpha - \beta) / (1 - a - b) > \beta / b\,. \tag{6}$$

Cela signifie que le désaccord porte essentiellement sur les biens 1 et 2, pour lesquels les pondérations relatives des conjoints divergent le plus. Dans ce qui suit, je poserai :

$$\pi_f = y_f / (y_f + y_m)\text{ ; et } y = y_f + y_m\,.$$

Soit

$$\pi_1^f = a; \quad \pi_2^f = \alpha(1 - a - b) / [\alpha(1 - a - b) + (1 - a)(1 - \alpha - \beta)],$$

$$\pi_3^f = (1 - \beta)(1 - a - b) / [(1 - \beta)(1 - a - b) + b(1 - \alpha - \beta)]; \quad \pi_4^f = 1 - \beta\,.$$

En remarquant que

$$\alpha(1 - a - b) + (1 - a)(1 - \alpha - \beta) = (1 - \beta)(1 - \alpha) - ab$$
$$= b(1 - \alpha - \beta) + (1 - \beta)(1 - a - b)\,,$$

il est facile de vérifier, compte tenu de notre hypothèse (6), que

$$0 < \pi_1^f < \pi_2^f < \pi_3^f < \pi_4^f < 1.$$

Posons $s_i \equiv p_i x_i / y$. Alors, il existe cinq équilibres possibles :

**A** : les préférences de *m* prévalent. Dans ce cas, la proportion des dépenses du ménage consacrée à chaque bien est donnée par :

$$s_1 = a; \quad s_2 = b; \quad s_3 = 1 - a - b.$$

Cet équilibre se produit ssi $0 \leq \pi_f \leq \pi_1^f$. Il ne s'agit que d'une application du théorème 2. La répartition des biens est indépendante des prix et du revenu total $y$, à cause du type de fonction d'utilité (Cobb-Douglas). L'indépendance (locale) par rapport à $\pi_f$ ne provient pas du type de la fonction d'utilité, mais seulement du fait que la répartition du revenu est suffisamment asymétrique au profit du mari.

**B** : *m* achète seul les biens 2 et 3, et *f* achète seule le bien 1. Cela implique

$$s_1 = \pi_f; \quad s_2 = [b / (1 - a)] (1 - \pi_f); \quad s_3 = [(1 - a - b) / (1 - a)] (1 - \pi_f).$$

Cet équilibre tient ssi $\pi_1^f \leq \pi_f \leq \pi_2^f$. Ce résultat illustre le corollaire du théorème 1.

**C** : *m* achète les biens 2 et 3, et *f* achète les biens 1 et 3. Cela implique

$$s_1 = \alpha(1 - a - b) / [b(1 - \alpha - \beta) + (1 - \beta) (1 - a - b)],$$

$$s_2 = b(1 - \alpha - \beta) / [b(1 - \alpha - \beta) + (1 - \beta) (1 - a - b)],$$

$$s_3 = (1 - \alpha - \beta) (1 - a - b) / [b(1 - \alpha - \beta) + (1 - \beta) (1 - a - b)].$$

Cet équilibre prévaut ssi $\pi_2^f \leq \pi_f \leq \pi_3^f$. Ce résultat illustre le théorème 1.

**D** : *m* achète seul le bien 2, et *f* achète seule les biens 1 et 3. Cela implique

$$s_1 = [\alpha / (1 - \beta)] \pi_f; \quad s_2 = 1 - \pi_f; \quad s_3 = [(1 - \alpha - \beta) / (1 - \beta)] \pi_f .$$

Cet équilibre prévaut ssi $\pi_3^f \leq \pi_f \leq \pi_4^f$ .

**E** : les préférences de *f* prévalent. Cela implique

$$s_1 = \alpha; \quad s_2 = \beta; \quad s_3 = 1 - \alpha - \beta.$$

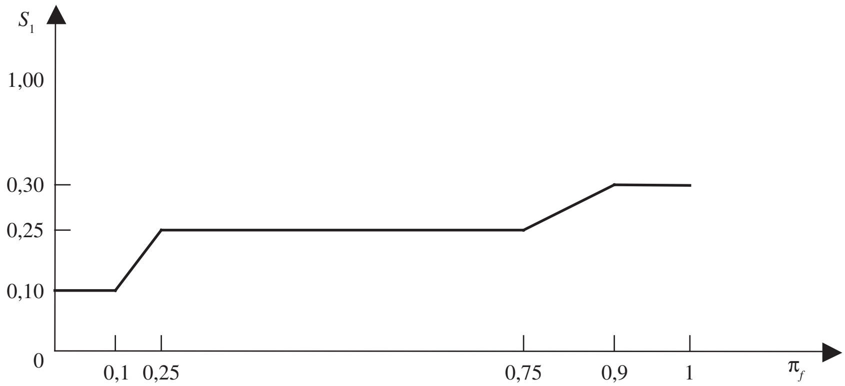
Cela peut tenir ssi $\pi_4^f \leq \pi_f \leq 1$.

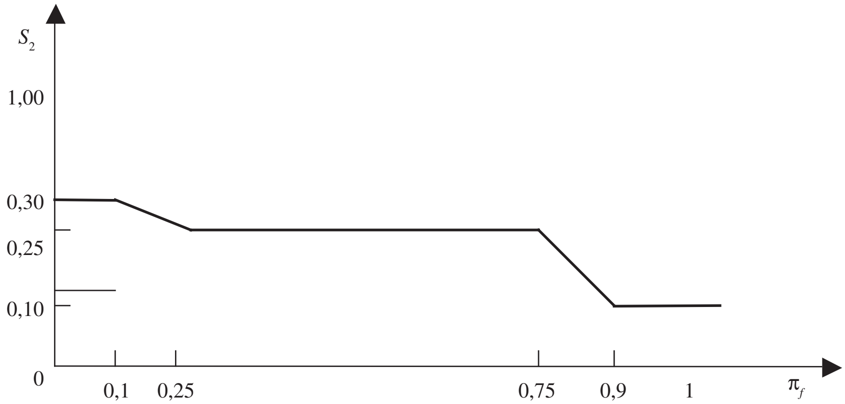
Nous avons donc passé en revue tous les équilibres possibles lorsque $\pi_f$ varie de 0 à 1; et, dans tous les cas, l'équilibre est unique. En voici un exemple avec des données numériques :

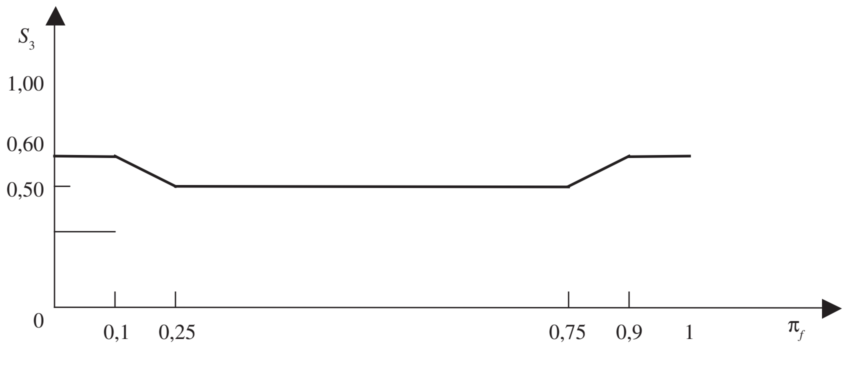
$$\alpha = 0{,}3; \quad \beta = 0{,}1; \quad a = 0{,}1; \quad b = 0{,}3.$$

Alors $\pi_1^f = 0{,}1$; $\pi_2^f = 0{,}25$; $\pi_3^f = 0{,}75$; $\pi_4^f = 0{,}9$. La demande pour les trois biens est illustrée au graphique 1.

GRAPHIQUE 1


$S_1$
1,00
0,30
0,25
0,10
0
0,1
0,25
0,75
0,9
1
$\pi_f$


$S_2$
1,00
0,30
0,25
0,10
0
0,1
0,25
0,75
0,9
1
$\pi_f$


$S_3$
1,00
0,60
0,50
0
0,1
0,25
0,75
0,9
1
$\pi_f$

Nous obtenons donc un bien dont la part dans le budget est croissante avec l'importance du revenu de l'épouse au sein du ménage, un autre dont la part dans le budget diminue et enfin un dernier, pour lequel elle décroît tout d'abord, puis se redresse. De plus, les intervalles sur lesquels les parts de budget sont strictement croissantes ou décroissantes sont intercalés entre des paliers où elles demeurent constantes. À la section suivante, je donnerai la preuve d'un résultat remarquable, à savoir que ce genre de demande doit prévaloir dans tous les modèles qui satisfont aux conditions que je spécifierai pour l'unicité de l'équilibre.

## 3. L'unicité de l'équilibre

L'exemple de type Cobb-Douglas possède un équilibre unique, en ce sens que pour n'importe quelle répartition entre mari et femme du revenu du ménage, il existe un vecteur unique de consommation totale pour le ménage qui est un équilibre de Nash. Dans la présente section, je veux déterminer les conditions garantissant (presque toujours) l'unicité. Pour ce faire, il faudra premièrement approfondir notre compréhension du cas Cobb-Douglas. Par la suite, les conditions que nous devrons imposer pour obtenir une classe de modèles dans lesquels l'équilibre est presque toujours unique deviendront assez évidentes.

Les notions et les notations suivantes seront beaucoup utilisées dans ce qui suit.

Premièrement, réécrivons les utilités individuelles en fonction des parts de budget. Notons $s_i$ la proportion du budget du ménage allouée au bien $i$ et $s$, le vecteur à $n$ dimensions regroupant ces différentes parts. De plus, posons $S = \{s \geq 0 \mid \sum s_i = 1\}$, le simplexe unitaire à $n$ dimensions. Alors, pour $\forall\ s \in S$, nous aurons

$$\tilde{u}_j(s) = u_j[s_1\, y / p_1, \ldots, s_n\, y / p_n], \quad j = f, m,$$

et aussi $\partial \tilde{u}_j / \partial s_i = (y / p_i) \,.\, \partial u_j / \partial x_i$.

Posons $I = \{1, \ldots, n\}$. Maintenant, en gardant à l'esprit les conditions de premier ordre pour la maximisation de l'utilité, nous voyons que pour tout $s \in S$, nous pouvons définir l'ensemble $B_j(s)$ des biens pour lesquels l'individu $j$ consentirait à débourser une somme positive si $s$ était l'allocation de la consommation dans le ménage

$$B_j(s) \equiv \{i \in I \mid \partial \tilde{u}_j / \partial s_i \geq \partial \tilde{u}_j / \partial s_k, \quad \forall\ k \in I\}.$$

Définissons également $N_j(s) \equiv I - B_j(s)$, l'ensemble des biens que n'achèterait absolument pas $j$ si $s$ était la répartition du revenu. Notez que ces ensembles sont entièrement définis à partir de la fonction d'utilité de $j$ et qu'ils ne renferment aucune information garantissant que $j$ ait suffisamment de revenu pour acheter les biens en question. Pour en tenir compte, nous pouvons définir comme suit $\underline{\pi}_j(s)$, la part minimale de revenu dont $j$ aurait besoin si $s$ était un équilibre, et $\overline{\pi}_j(s)$ la part maximale de revenu dont $j$ disposerait si $s$ était un équilibre :

$$\underline{\pi}_j(s) = \sum_{i \in N_k(s)} s_i \qquad k \neq j$$

et

$$\overline{\pi}_j(s) = \sum_{i \in B_j(s)} s_i \ .$$

Notez que $\underline{\pi}_j(s) = 1 - \overline{\pi}_k(s)$, $j = f, m, k = j$. Dans ce qui suit, je supposerai que si, pour tout $s$ donné, $s_i = 0$ pour au moins un $i$, alors

$$B_f(s) = B_m(s) = \{i \in I \mid s_i = 0\}.$$

Cela entraîne que si la quantité achetée de n'importe quel bien est nulle, alors, pour les deux personnes, l'utilité marginale de ce bien domine celle de tous les autres.

Il s'ensuit que pour tout $s \in S$ donné, seulement trois situations peuvent se produire :

(E1) $B_f(s) \cup B_m(s) \subset I$. Mais, alors

$$\sum_{j=f,m} \overline{\pi}_j(s) < 1 < \sum_{j=f,\ m} \underline{\pi}_j(s)$$

et ainsi, pour au moins un $j = f, m$, $\underline{\pi}_j(s) > \overline{\pi}_j(s)$, et $s$ ne peut pas être un équilibre, quelle que soit la répartition effective du revenu au sein du ménage.

(E2) $B_f(s) \cup B_m(s) = I$ et $B_f(s) \cap B_m(s) = \varnothing$ .

Il découle des définitions que $B_j(s) = N_k(s)$, $j = f, m$, $k \neq j$, de telle sorte que

$$\underline{\pi}_f(s) = \overline{\pi}_f(s) = 1 - \underline{\pi}_m(s) = 1 - \overline{\pi}_m(s).$$

En conséquence, $s$ sera un équilibre si $\pi_f = \overline{\pi}_f(s)$.

(E3) $B_f(s) \cup B_m(s) = I$ et $B_f(s) \cap B_m(s) \neq \varnothing$ .

Ici, pour $j = f, m$ et pour $k \neq j$, $N_j(s) \subset B_k(s)$. Mais alors

$$1 - \overline{\pi}_m(s) = \underline{\pi}_f(s) \leq \overline{\pi}_f(s) = 1 - \underline{\pi}_m(s)$$

et, par conséquent, $s$ est un équilibre si $\underline{\pi}_f(s) \leq \pi_f \leq \overline{\pi}_f(s)$.

Ainsi, tout $s$ satisfaisant à E2 ou à E3 sera un équilibre, à la condition que la répartition du revenu soit appropriée.

Enfin, posons

$$\beta = \{B \mid B \subseteq I, \quad B \neq \varnothing\}$$

et

$$\sum_j(B) = \{s \in S \mid B \subseteq B_j(s)\}.$$

Alors $\sum_j(B)$ est l'ensemble de tous les vecteurs de répartition pour lesquels l'ensemble des biens $B$ seraient achetés par $j$. En raison de la dérivabilité continue de la fonction $u_j$, et par conséquent de $\tilde{u}_j$, les ensembles $\sum_j(B)$ sont fermés pour $\forall B \in \beta$.

De plus, nous avons :

(i) $\sum_j(I) = \hat{s}_j$ – le vecteur de répartition qui maximise $\tilde{u}_j$,

(ii) $\sum_j(B \cup B') = \sum_j(B) \cap \sum_j(B')$.

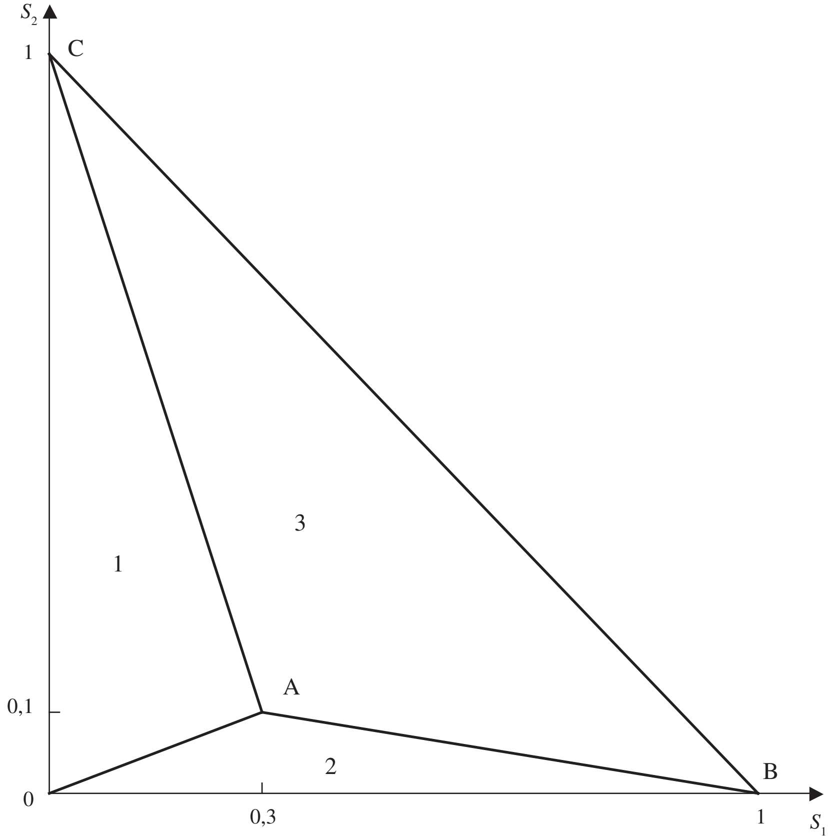
Ceci complète la liste des nouvelles notions nécessaires pour la présente section.

Je peux donc maintenant illustrer, à l'aide d'un graphique, l'exemple Cobb-Douglas de la section précédente et montrer pourquoi son équilibre est unique. Commençons par représenter $S$ en deux dimensions par l'ensemble

$$S' = \left\{(s_1, s_2) \geq 0 \mid \sum s_i \leq 1\right\}.$$

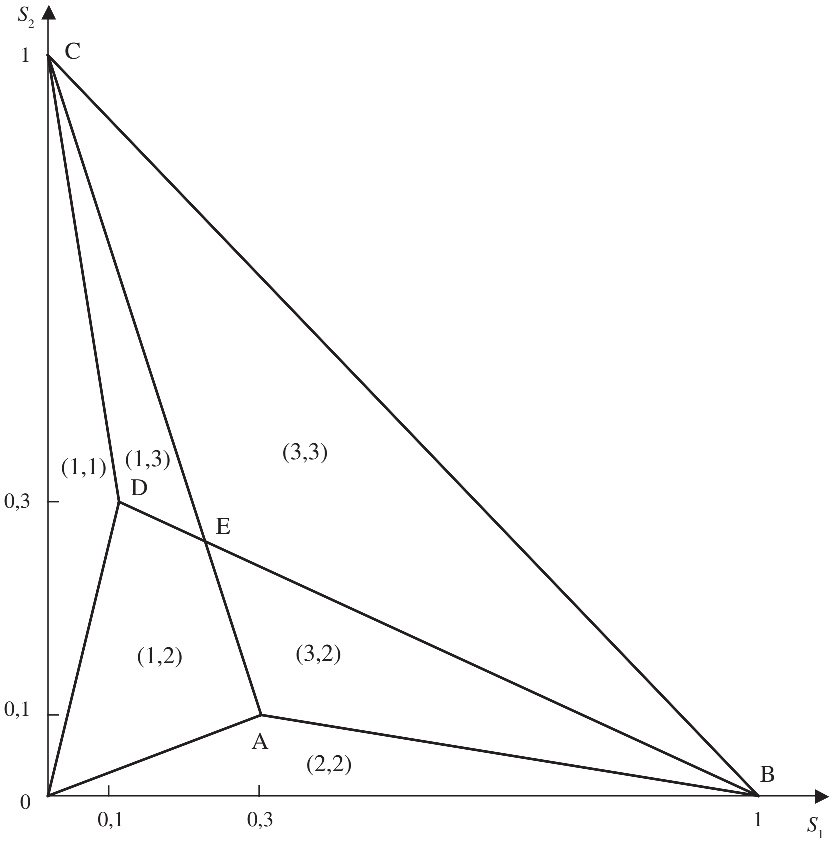
Il est facile de montrer que, dans le cas de préférences Cobb-Douglas, les ensembles $\sum_f(\{i\})$, $i = 1, 2, 3$ de l'épouse correspondent aux zones triangulaires désignées par 1, 2 et 3 au graphique 2; le segment de droite 0A est tout simplement l'ensemble $\sum_f(\{1, 2\})$, des interprétations similaires étant valides pour AB, et AC; quant au point A, c'est tout simplement $\hat{s}_j \sum_f(I)$.

GRAPHIQUE 2




De toute évidence, il existe une représentation similaire des ensembles $\sum_m(B)$ pour le mari, et dans le graphique 3, je la superpose aux préférences de l'épouse, illustrées dans le graphique 2. Ainsi, D correspond à $\hat{s}_m \sum_m(I)$, 0D représente $\sum_m(\{1, 2\})$, et ainsi de suite pour DB et DC. Quant à toutes les autres zones étiquetées, par exemple $(i, j)$, il s'agit de $\sum_f(\{i\}) \cap \sum_m(\{j\})$.

GRAPHIQUE 3




Cherchons maintenant quels points du graphique 3 pourraient éventuellement constituer des points d'équilibre, c.-à-d. satisfaire aux conditionx E2 ou E3, évoquées précédemment. Il est clair que les seuls points du graphique 3 qui satisferont à ces conditions sont ceux qui correspondront aux cinq types d'équilibre définis à la section précédente, c.-à-d. :

(i) Le point D (0,1, 0,3). Ici, les préférences du mari prévalent; $B_m = I$ et $B_f = I$, de telle sorte que nous avons un équilibre possible, satisfaisant à la condition E3. Les définitions impliquent $\underline{\pi}_f = 0$ et $\overline{\pi}_f = 0{,}1$, de telle sorte que l'équilibre peut se maintenir si $0 \le \pi_f \le 0{,}1$ – ce qui confirme ce que nous savions déjà.

(ii) Les points situés à l'intérieur de l'intervalle DE. Ici $B_m = \{2, 3\}$ et $B_f = \{1\}$, de telle sorte que nous avons affaire à un équilibre qui satisfait à la condition E2. Les définitions impliquent directement que pour les points de cet intervalle, $\underline{\pi}_f(s) = \overline{\pi}_f(s) = s_1$. De plus, comme on peut le voir au graphique 3, en parcourant cet intervalle de D à E, $s_1$ s'accroît, passant de 0,1 à 0,25. D'où l'équilibre unique sur cet intervalle, à la condition que $0{,}1 < \pi_f < 0{,}25$.

(iii) Le point E (0,25, 0,25). Ici $B_m = \{2, 3\}$ et $B_f = \{1, 3\}$, de telle sorte que nous avons affaire à un équilibre possible, satisfaisant à la condition E3. $\underline{\pi}_f = 0{,}25$ et $\overline{\pi}_f = 0{,}75$, de sorte que cet équilibre peut être obtenu si $0{,}25 \leq \pi_f \leq 0{,}75$.

(iv) Les points situés à l'intérieur de l'intervalle EA. Ici $B_m = \{2\}$ et $B_f = \{1, 3\}$. $\underline{\pi}_f(s) = \overline{\pi}_f(s) = 1 - s_2$, qui est clairement une fonction strictement croissante, passant de 0,75 à 0,9 lorsque l'on se déplace de E à A. D'où l'équilibre unique dans cet intervalle, que l'on peut obtenir à la condition que $0{,}75 \leq \pi_f \leq 0{,}9$.

(v) Le point A (0,3, 0,1). Ici $B_m = \{2\}$ et $B_f = I$, et nous avons une possibilité d'équilibre stable, satisfaisant à E3. $\underline{\pi}_f = 0{,}9$ et $\overline{\pi}_f = 1$, de telle sorte que cet équilibre peut se maintenir si $0{,}9 \leq \pi_f \leq 1$.

Avant d'aborder le cas général, notons une conséquence remarquable de l'exemple précédent. Supposons qu'au lieu de fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas, l'homme et la femme aient eu des fonctions d'utilité caractérisées par des élasticités de substitution constantes, arbitraires et possiblement distinctes, strictement entre zéro et l'infini, mais que la répartition du budget qu'ils souhaitent corresponde exactement à celles du graphique 3. Alors, on peut montrer facilement que toutes les autres caractéristiques du graphique 3 demeureraient inchangées, et il en irait de même, par conséquent, de tous les équilibres du ménage. Cela illustre avec force le fait que, dans de tels modèles, la consommation des ménages est davantage tributaire des tensions entre les profils de dépense des conjoints, reflétés par leurs pondérations comparatives des différents biens, que par la nature précise de l'arbitrage entre les biens auquel chaque conjoint est disposé à consentir.

Tournons-nous maintenant vers notre modèle général. À partir de notre exemple Cobb-Douglas, il devrait être clair qu'il existe *deux* caractéristiques *généralement nécessaires et suffisantes* pour garantir l'unicité de l'équilibre. Ce sont :

(U.1) Il existe dans $S$ un chemin à *une dimension* reliant $\hat{s}_m$ à $\hat{s}_f$, le long duquel se trouvent tous les points qui satisfont à la condition E2 ou E3.

Puisque les fonctions d'utilité sont continûment dérivables deux fois et vu la façon avec laquelle les conditions E2 et E3 sont définies, un tel chemin sera continu. Supposons maintenant que nous mesurions la distance parcourue sur ce chemin – après avoir fixé le point zéro à $\hat{s}_m$ – et qu'elle s'accroisse de façon continue en s'y déplaçant pour finalement égaler 1 à $\hat{s}_f$. Alors, la deuxième condition nécessaire sera :

(U.2) Les valeurs de $\underline{\pi}_f$ et $\overline{\pi}_f$, associées à chacun des points du chemin, sont des fonctions strictement croissantes de la distance parcourue.

Évidemment, ce ne seront pas des fonctions continues, comme on peut d'ailleurs s'en rendre compte avec l'exemple précédent, dans lequel, malgré le fait que $\underline{\pi}_f$ soit continu à gauche à E, $\overline{\pi}_f$ n'y est pas continu – et vice versa pour la continuité à droite.

Ces deux conditions, si elles sont vérifiées simultanément, sont de toute évidence suffisantes pour garantir l'unicité de l'équilibre, puisque pour chaque $\pi_f$, il ne peut exister qu'un seul point $s$ sur ce chemin à une dimension pour lequel $\pi_f \in [\underline{\pi}_f(s), \overline{\pi}_f(s)]$.

Pour prouver qu'elles sont en outre nécessaires, il faudrait supposer tout d'abord qu'il existe un ensemble de points à $m$ dimensions dans $S$ ($m \geq 2$) satisfaisant à E2 ou E3, et ensuite que certains points distincts dans cet ensemble constituent un équilibre pour la même valeur de $\pi_f$. (Sinon, nous pourrions avoir recours à une valeur arbitraire de $\pi_f$ dans l'intervalle $[\underline{\pi}_f(s), \overline{\pi}_f(s)]$ associé à chaque point dans le sous-ensemble comme méthode unidimensionnelle pour désigner tous les points distincts faisant partie de l'ensemble.) De même, si $\underline{\pi}_f(s)$ et $\overline{\pi}_f(s)$ n'étaient pas strictement croissants au fur et à mesure que nous parcourons le chemin, nous pourrions, de toute évidence, trouver deux points $s$, $s'$ sur le chemin pour lesquels

$$[\underline{\pi}_f(s), \overline{\pi}_f(s)] \cap [\underline{\pi}_f(s'), \overline{\pi}_f(s')] \neq \varnothing,$$

de telle sorte que pour toute valeur de $\pi_f$ dans cette intersection, il existerait un équilibre non unique.

Les conditions U.1 et U.2 ne sont évidemment que des reformulations de la propriété d'unicité. La question cruciale consiste à se demander quelles conditions sur les préférences sous-jacentes doivent être vérifiées pour que U.1 et U.2 s'appliquent. Examinons-les une à une.

**Condition (U.1)**

*Supposons immédiatement*

(U.1.1) $\forall\, s \in S, \quad B_f(s) \cap B_m(s) = \varnothing$ *ou* $\{k\}$, *pour certains* $k \in I$.

Cela exclut la possibilité qu'il existe deux biens (ou plus) que les deux conjoints voudraient acheter simultanément. Si cette hypothèse semble de premier abord exigeante, il ne faut pas oublier que lorsque les deux individus ont des préférences identiques pour certains biens, ceux-ci ont déjà été regroupés. Cela a pour conséquence qu'après avoir effectué une telle agrégation, il n'existe plus d'autres régions de l'espace pour lesquelles les préférences sont les mêmes pour au moins deux biens.

Compte tenu de cette hypothèse, il n'existe que deux sortes de point $s$ pouvant satisfaire à E2 ou E3 :

A. Ceux qui satisfont à E2. Examinons par exemple les points où $f$ achète $\ell$ biens et $m$, les autres $(n - \ell)$ biens, $1 \leq \ell \leq n - 1$. Il existe donc $\ell - 1$ égalités des utilités marginales caractérisant les décisions de $f$, et $n - \ell - 1$ égalités, pour celles de $m$. Nous pouvons donc maintenant poser l'hypothèse :

(U.1.2) *Les* $n - 2$ *égalités caractérisant tous les points satisfaisant à* E2 *constituent toujours des contraintes indépendantes.*

Dans ce cas, ces $n$ – 2 contraintes, ajoutées à la contrainte d'addition (*adding-up*), réduiront tous ces points à un chemin unidimensionnel.

Cette hypothèse exige que les deux fonctions d'utilité soient indépendantes l'une de l'autre et ce, de deux manières distinctes. Premièrement, il faut exclure la possibilité que lorsque les utilités marginales de $f$ pour deux biens $i$ et $j$, sont égales, que les utilités marginales de $m$ pour les biens $k$ et $l$ le soient aussi. Autrement, les $n$ – 2 contraintes ne seraient plus indépendantes et il pourrait exister plus qu'un ensemble unidimensionnel de points les satisfaisant. Deuxièmement, elle empêche que les préférences soient tellement similaires que l'utilité marginale commune de $f$ pour son propre groupe de biens soit égale à l'utilité marginale commune de $m$ pour le sien, auquel cas, les $n$ – 1 contraintes, ajoutées à la contrainte d'addition, confineraient ces points à un ensemble de dimension zéro – le point unique de maximisation de l'utilité commune.

S'il est évident qu'une paire arbitraire de préférences des conjoints puisse ne pas satisfaire à (U.1.2), de petits écarts par rapport à cette paire donneront des préférences qui le satisferont, de telle sorte que (U.1.2) n'exclut pas nombre de combinaisons possibles.

B. Ceux qui satisfont à E3. Compte tenu de (U.1), ces points n'admettent qu'un bien acheté en commun par le mari et sa conjointe. Il existe donc $n$ – 1 conditions d'égalité caractérisant de tels points et, à la condition de poser l'hypothèse :

(U.1.3) *Les $n$ – 1 conditions d'égalité caractérisant tous les points satisfaisant à* E3 *constituent toujours des contraintes indépendantes.*

Dans ce cas, ajoutées à la contrainte d'addition, ces conditions garantissent que tous ces points seront des singletons isolés.

Somme toute, à la condition d'avoir regroupé toutes les préférences identiques, pour que (U.1) soit satisfaite, nous n'avons besoin que de conditions d'indépendance relativement modérées (U.1.1) – (U.1.3).

Les principales contraintes sur les préférences sont celles qui sont nécessaires pour satisfaire la condition suivante :

**Condition (U.2)**

Il ressort que, dans l'exemple Cobb-Douglas, la caractéristique essentielle pour valider la seconde condition d'unicité de l'équilibre est que, si nous examinons, par exemple, la frontière $\sum_f(\{1, 2\})$ entre $\sum_f(\{1\})$ et $\sum_f(\{2\})$ en s'y déplaçant vers $\hat{s}_f$, $s_1$ et $s_2$ s'accroissent et que $s_3$ décroît. Autrement dit, pour maintenir constantes les utilités marginales des parts de 1 et 2, il faut les augmenter (diminuer) simultanément, en faisant les rajustements conséquents sur $s_3$. Pour formuler cette propriété dans le cas général, désignons, pour tout ensemble $B \in \beta$ :

(a) le nombre d'éléments dans $B$ par $v(\beta)$;

(b) pour n'importe quel $s \in \sum_j(B)$, par $s_B$, le sous-vecteur de dimension $v(\beta)$ contenant les éléments de $s$ dont les indices sont dans $B$, et par $s_{-B}$, les autres éléments de $s$.

La condition que je veux rajouter est la suivante :

(U.2.1) *Pour $j = f, m$ et pour tous les $B \in \beta$ tels que $n - 1 \geq v(B) \geq 1$, les $v(\beta) - 1$ égalités d'utilité marginale caractérisant les points dans $\sum_f(B)$, ajoutées à la contrainte d'addition sur la répartition, impliquent l'existence d'un vecteur de fonctions $\Phi_B$, de dimensions $v(\beta)$, tel que tous les points s dans $\sum_f(B)$ satisfont à la condition*

$s_B = \Phi_B(s_{-B})$ .

*De plus,*

*(1) chacune de ces fonctions est strictement décroissante sur tous ses arguments;*

*(2) toute hausse dans $s_{-B}$, accompagnée de la diminution correspondante de $s_B$, augmente l'utilité marginale commune des biens dans B en regard de celle de tous les biens qui ne font pas partie de B.*

Pour obtenir une interprétation de cette condition, notez premièrement que nous pouvons facilement construire les fonctions $\Phi_B$ de la façon suivante. Il suffit de prendre n'importe quel point $\tilde{s} \in \sum_j(B)$, de fixer $\tilde{s}_{-B}$ et de résoudre le problème :

$$\max_{s_B \geq 0} \tilde{u}_j(s_B, \tilde{s}_{-B}) \quad \text{tel que} \quad \sum_{i \in B} s_i = T \equiv 1 - \sum_{k \in -B} \tilde{s}_k .$$

Étant donné la stricte quasi-concavité de $\tilde{u}_j$, la solution est clairement $\tilde{s}_B$, que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$\tilde{s}_B = \Psi_B(\tilde{s}_{-B}, T)$$

et aussi $\Phi_B \equiv \Psi_B\left[\tilde{s}_{-B}, 1 - \sum_{k \in -B} \tilde{s}_k\right]$.

Tout accroissement de $s_{-B}$ a, par conséquent, deux effets : il réduit $T$, ce qui, compte tenu de la normalité des biens, fait nécessairement diminuer $s_B$; il peut aussi modifier la hiérarchie des préférences conditionnelles de $s_B$. La condition (i) de (U.2.1) implique que le premier effet est toujours prépondérant. Ce qu'elle exclut, c'est une complémentarité prononcée entre les biens, selon laquelle une augmentation de la dépense pour un bien ne faisant pas partie de $B$ pourrait tellement modifier les préférences de $s_B$ que le consommateur pourrait décider de dépenser davantage pour l'un de ces derniers biens. D'une manière un peu similaire, la condition (ii) exige qu'en partant de n'importe quel point dans $\sum_j(B)$ – où, du point de vue de $j$, les biens dans $B$ sont relativement rares (au sens de leur utilité marginale commune en regard de ceux qui ne sont pas dans $B$) –, de nouvelles hausses dans $s_{-B}$, accompagnées des diminutions correspondantes dans $s_B$, ne puissent jamais rendre rare (au sens ci-dessus) l'un des biens ne faisant pas partie de $B$.

Notez que les conditions (i) et (ii) de (U.2.1) sont de toute évidence satisfaites par toute fonction d'utilité concave additivement séparable – *a fortiori*, par une fonction de type Cobb-Douglas.

Voici une justification intuitive du fait que, pour garantir l'unicité, nous avons besoin d'exclure le genre de complémentarité entre les biens que nous venons d'évoquer. Supposons que nous nous déplacions sur un chemin unidimensionnel de points, le long duquel $m$ achète les biens dans $B$, $f$ achetant ceux qui ne font pas partie de $B$. Comme la part du revenu de $f$ augmente, elle achète davantage de biens non inclus dans $B$ et le mari achète moins de ceux qui sont dans $B$. En permettant la complémentarité, nous pourrions obtenir un point $s^o$, disons, où le mari voudrait acheter l'un des biens qu'il n'achète pas à l'heure actuelle. Mais cela signifie que $\overline{\pi}_f$ devrait se situer à $s^o$, ce qui déroge à une condition nécessaire pour l'unicité.

Voici la preuve rigoureuse de ce résultat :

**Théorème 3.** *Si les préférences satisfont à (U.1.1)-(U.1.3) et à (U.2.1), alors l'équilibre est unique.*

**Preuve.** Montrons que U.1 et U.2 sont vérifiées.

Partons de $\hat{s}_m = \sum_m(I)$. En vertu de (U.1.1), il n'existe alors qu'un seul bien que $f$ consentirait à acheter à ce point. Sans perte de généralité, nous pouvons désigner les biens de telle sorte que celui-là soit le bien 1. $\underline{\pi}_f(\hat{s}_m) = 0$, $\overline{\pi}_f(\hat{s}_m) = \hat{s}_{m1}$. Tournons-nous maintenant vers l'ensemble $\sum_f(\{1\}) \cap \sum_m(\{2, ..., n\})$. En vertu de (U.1.2), il s'agit d'un ensemble à une dimension. Pour tous les points dans cet ensemble $\underline{\pi}_f(s) = \overline{\pi}_f(s) = s_1$, et à cause de (U.2.1), lorsque nous le parcourons en nous éloignant de $\hat{s}_m$, $s_1$ augmente et $s_2$, ..., $s_n$ diminuent. Compte tenu de (U.1.1), cet ensemble ne peut se terminer qu'à un point où un seul bien est acheté en commun par $f$ et par $m$. Et, de toute évidence, ce ne peut être le bien 1, sinon nous serions alors de retour à $\hat{s}_m$; il faut donc que ce soit $f$ qui achète un autre bien. Sans restreindre la généralité de ce qui suit, appelons ce dernier 2. En vertu de (U.1.3), l'ensemble $s^1 \equiv \sum_f(\{1, 2\}) \cap \sum_m(\{2, ..., n\})$ est un singleton. $\underline{\pi}_f(s^1) = s_1^1$, $\overline{\pi}_f(s^1) = s_1^1 + s_2^1$. Examinons maintenant l'ensemble $\sum_f(\{1, 2\}) \cap \sum_m(\{3, ..., n\})$. En vertu de (U.1.2), c'est un ensemble à une dimension. Pour chaque point dans cet ensemble, $\underline{\pi}_f(s) = \overline{\pi}_f(s) = s_1 + s_2$. De plus, lorsque nous parcourons cet ensemble en nous éloignant de $s^1$, en vertu de (U.2.1), $s_1$ et $s_2$ s'accroissent simultanément, alors que $s_3$, ..., $s_n$ diminuent. Cet ensemble se terminera à un point, disons $s^2$, où, en vertu de (U.1.1), un seul bien est acheté conjointement par les deux personnes.

Compte tenu de la condition (ii) de (U.2.1), il ne peut s'agir de 1 ou de 2, de sorte que $f$ doit commencer à acheter un autre bien, disons 3. Alors, $\underline{\pi}_f(s^2) = s_1^2 + s_2^2$, $\overline{\pi}_f(s^2) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$. Conformément à (U.1.1), $s^2$ est un singleton, de telle sorte que nous passons ensuite à l'ensemble $\sum_f(\{1, 2, 3\}) \cap \sum_m(\{4, ..., n\})$. En réitérant la même procédure, il est clair que nous construirons un chemin à une dimension reliant $\hat{s}_m$ à $\hat{s}_f$, chemin dont tous les points satisferont à E2 et E3 et le long duquel, $\underline{\pi}_f$ et $\overline{\pi}_f$ seront strictement croissants ■

**Corollaire 3.1.** *Avec les mêmes hypothèses qu'au théorème 3, le chemin des points d'équilibre (qui satisfont à* E2 *ou* E3*) comprend :*

*(i)* *Une séquence de n points où un seul bien est acheté conjointement par le mari et sa femme. Si nous désignons le premier de ces points par $\hat{s}_m$, alors, en parcourant séquentiellement les autres points, le nombre de biens achetés par le mari diminue de 1, alors que pour la femme, le nombre correspondant augmente de 1. Le dernier point de la séquence est $\hat{s}_f$. Sont associés à chacun de ces n points, des sous-intervalles discrets* [0, 1]*, tels que la demande du ménage pour les biens demeure inchangée lorsque la proportion du revenu de la conjointe varie dans le sous-intervalle.*

*(ii)* *(n – 1) sous-intervalles* [0, 1]*, chacun se trouvant entre deux des intervalles identifiés précédemment, et pour chacun desquels les deux conjoints achètent des ensembles disjoints de biens. Au fur et à mesure que $\pi_f$ augmente dans chacun de ces sous-intervalles, la demande domestique pour chacun des biens achetés par la femme s'accroît, tandis que la demande pour chacun des biens achetés par le mari diminue.*

**Corollaire 3.2.** *Avec les mêmes hypothèses qu'au théorème 3, lorsque $\pi_f$ augmente,*

*(i)* *la demande du ménage pour le bien 1 s'accroît;*

*(ii)* *la demande du ménage pour le bien n diminue;*

*(iii)* *pour i =* 2, ..., *n* – 1, *la demande pour le bien i retombe jusqu'à ce que la proportion du revenu de la femme devienne telle que celle-ci commence à acheter le bien et la demande augmente par la suite.*

Étant donné que les demandes sont constantes sur les intervalles désignés en (i) du corollaire 3.1, elles ne peuvent évidemment pas être strictement croissantes ou décroissantes partout.

Le corollaire 3.2 démontre que le profil qualitatif de la demande du ménage dans l'exemple Cobb-Douglas peut se généraliser à toute configuration des préférences individuelles satisfaisant aux conditions suffisantes pour garantir l'unicité de l'équilibre. Pour étudier les autres propriétés de la demande domestique de biens, j'analyserai, dans la section suivante, les propriétés de statique comparée du modèle.

## 4. Résultats de statique comparée

Jusqu'à maintenant, j'ai cherché à comprendre comment la répartition du revenu au sein du ménage a des répercussions sur la demande domestique. Je veux maintenant m'attacher à montrer, dans une perspective plus traditionnelle de statique comparée, comment la demande variera en fonction des prix et des revenus. Naturellement, puisqu'il faudra considérer deux revenus au lieu d'un seul, l'analyse ne pourra être totalement conventionnelle.

Voici deux résultats que l'on peut déduire immédiatement :

**Résultat 1.** *La demande de biens du ménage et les fonctions d'utilité individuelles sont homogènes de degré zéro par rapport aux prix et aux deux revenus.*

Il est évident que cela peut se démontrer à l'aide d'un argument standard. Notez que nous ne pouvons prouver l'homogénéité par rapport aux prix et au revenu total du ménage.

**Résultat 2.** *Si, pour des prix et des revenus donnés,* $\pi_f < \tilde{\pi}_f(\hat{s}_m)$ *ou* $\pi_f > \underline{\pi}_f(\hat{s}_f)$ *alors, localement, toutes les propriétés standard de la demande des biens sont vérifiées.*

Cela découle du fait que, dans ces régions, le ménage se comporte, localement, comme s'il cherchait à maximiser une seule et même fonction objectif.

Pour bien comprendre le comportement des fonctions d'utilité individuelles dans ces régions, examinons le cas d'une femme qui touche une si faible proportion du revenu du ménage que les préférences de son mari prévalent. En introduisant la demande de biens de l'époux dans sa propre fonction d'utilité directe, nous obtenons sa fonction d'utilité indirecte normale, qui vérifie toutes les propriétés standard, notamment l'identité de Roy. En substituant les demandes de biens du mari dans la fonction d'utilité directe de l'épouse, nous obtenons une fonction d'utilité indirecte pour cette dernière, qui ne possède pratiquement aucune des propriétés standard. Tout ce que nous pouvons affirmer c'est que si, pour le mari, tous les biens sont normaux et que la fonction d'utilité de la conjointe est croissante pour tous les biens, alors une hausse du revenu du ménage améliorera la condition de la femme. Toutefois, il est tout à fait possible qu'une hausse de prix de certains biens soit bénéfique pour la conjointe, si ce relèvement de prix pousse le mari à acheter davantage des biens préférés par sa conjointe.

Les prochains résultats que je démontrerai s'appliquent lorsque, à prix et revenus donnés, la proportion de revenu de la conjointe se trouve à l'intérieur de l'un des intervalles dans lesquels les revenus des deux conjoints sont dépensés pour des biens complètement différents (ce sont les intervalles évoqués dans la partie (ii) du corollaire 3.1, à la section précédente). Naturellement, pour de petites variations de prix et de revenu, ils continueront tous deux à dépenser la totalité de leur revenu pour acheter les mêmes sous-ensembles disjoints de biens.

Pour bien saisir ce qui se passe ici, scindons le vecteur $x$ de la consommation du ménage, en $x^1$, le vecteur à $\ell$ dimensions des biens pour lesquels, localement, l'intégralité du revenu de la conjointe est dépensé, et en $x^2$, le vecteur à $n - \ell$ dimensions des biens pour lesquels le revenu du mari est dépensé. Posons $p = (p^1, p^2)$, la partition correspondante du vecteur des prix.

Posons $v^f(p', y_f, x^2) \equiv \max\limits_{x^1 \geq 0} u^f(x^1, x^2)$ tel que $p^1 . x^1 \leq y_f$

et $x^1 \equiv R^f(p^1, y_f, x^2)$, la fonction de demande associée pour la conjointe, conditionnelle aux choix effectués par le mari.

De même, posons $v^m(p^2, y_m, x^1) \equiv \max u^m(x^1, x^2)$ tel que $p^2 . x^2 \leq y_m$

et $x^2 \equiv R^m(p^2, y_m, x^1)$, le vecteur associé de demande conditionnelle de biens du mari.

Alors les vecteurs d'équilibre de Nash pour les demandes du ménage sont simplement les solutions des équations simultanées

$$x^1 = R^f(p^1, y_f, x^2) \tag{7}$$

et $$x^2 = R^m(p^2, y_m, x^1) \tag{8}$$

Désignons ces solutions par

$$x^1 = \xi^1(p^1, p^2, y_f, y_m) \tag{9}$$

et $$x^2 = \xi^2(p^1, p^2, y_f, y_m) \tag{10}$$

Désignons aussi les niveaux d'utilité individuels associés à l'équilibre de Nash par

$$w^f(p^1, p^2, y_f, y_m) \equiv v^f[p^1, y_f, \xi^2(p^1, p^2, y_f, y_m)] \tag{11}$$

et

$$w^m(p^1, p^2, y_f, y_m) \equiv v^m[p^1, y_m, \xi^1(p^1, p^2, y_f, y_m)]\ . \tag{12}$$

Soit $M^f$ la matrice de dimensions $\ell \times \ell$ de $(\partial R^f / \partial x^2) . (\partial R^m / \partial x^1)$, décrivant les effets de rétroaction des achats de l'épouse sur ses propres achats, par l'entremise des retombées de ces derniers sur les préférences – et par conséquent, des choix – de son mari, lesquelles auront des répercussions sur ses propres préférences. Alors, il est facile de vérifier, en dérivant (7) et (8), que nous avons :

$$[\,I - M^f\,]\,\frac{\partial \xi^1}{\partial p^1} = \frac{\partial R^f}{\partial p^1}, \tag{13}$$

$$[\,I - M^f\,]\,\frac{\partial \xi^1}{\partial y_f} = \frac{\partial R^f}{\partial y_f}, \tag{14}$$

$$[\, I - M^f\,]\,\frac{\partial \xi^1}{\partial p^2} = \frac{\partial R^f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial R^m}{\partial p^2}, \tag{15}$$

$$[\, I - M^f\,]\,\frac{\partial \xi^1}{\partial y_m} = \frac{\partial R^f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial R^m}{\partial y_m}. \tag{16}$$

Pour bien mesurer les conséquences de ces résultats, examinons certains cas particuliers.

Supposons tout d'abord que les préférences de l'épouse sont séparables entre les biens achetés par elle-même et ceux achetés par son mari. Alors, la matrice $\partial R^f / \partial x^2$ serait égale à 0 et, par conséquent, la matrice $M^f$ le serait aussi.

Dans un tel cas, la demande du ménage pour les biens achetés par l'épouse réagit de la même manière par rapport aux prix de ces mêmes biens et du revenu de l'épouse que la demande de cette dernière en considérant $x_2$comme fixe. En particulier, puisque les demandes liées à la fonction de réaction $R^f$ satisfont à toutes les propriétés standard, il est clair, à partir de (13), que les répercussions des variations de prix du premier ensemble de biens sur la demande pour ces mêmes biens peuvent être décomposées en effets de revenu et de substitution – *l'effet de revenu devant ici être compris comme la conséquence de la variation du revenu de la femme* – et la matrice de substitution sera symétrique et définie négative.

D'autre part, la séparabilité de la fonction d'utilité de l'épouse a pour conséquence que la demande pour ces premiers biens n'est absolument pas influencée par les prix du deuxième ensemble de biens, ni par le revenu du mari.

Supposons maintenant que les préférences du mari soient séparables, de telle sorte que $\partial R^m / \partial x^1$ soit égal à 0 et que, de nouveau, $M^f$ le soit aussi.

Alors, pour le premier ensemble de biens, toutes les propriétés de la demande (relativement aux prix de ces derniers et au revenu de l'épouse) seront les mêmes que précédemment. Toutefois, la demande de ces biens peut maintenant être influencée par les prix du deuxième ensemble de biens et par le revenu du mari. Nous ne pouvons pas dire grand-chose de ces effets sinon que, étant donné que le revenu de la conjointe demeure constant, la dépense totale pour le premier ensemble de biens devra également être fixe. Ainsi, advenant qu'une hausse du revenu du mari produise une augmentation des dépenses de la femme pour des biens du premier ensemble, la demande pour au moins un autre bien dans ce même ensemble devrait diminuer. Par conséquent, l'ampleur et le signe de l'effet d'une augmentation du revenu du ménage sur la demande des biens dépendront en général de la personne dont le revenu s'accroît.

Enfin, lorsque les préférences des deux conjoints ne sont pas séparables, $M^f$ ne sera pas égale à 0. Dans ce cas, on ne peut prédire grand-chose. Par exemple, bien que le membre droit de (13) puisse toujours être décomposé en effets de revenu et de substitution, permettant, si $(I - M^f)$ est inversible, une décomposition de $\partial\xi^1 / \partial p^1$ en effets de revenu et de substitution, ces effets n'auront pas leur interprétation habituelle, ni leurs propriétés traditionnelles, car la matrice de substitution ne sera généralement pas symétrique, ni définie négative.

Si je me suis concentré sur la demande pour le premier ensemble de biens, il est évident qu'une argumentation similaire peut s'appliquer au deuxième ensemble de biens. Ainsi, d'une façon générale, pratiquement aucune des propriétés standard de la demande ne tient lorsque les revenus des conjoints sont dépensés sur des biens complètement différents. Et maintenant, que pouvons-nous affirmer concernant les utilités individuelles?

De nouveau, nous pouvons nous concentrer sur un seul individu, disons la conjointe. En dérivant (11), nous obtenons

$$\frac{\partial w^f}{\partial p^1} = \frac{\partial v^f}{\partial p^1} + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial p^1}\right)' \left(\frac{\partial v^f}{\partial x^2}\right), \tag{17}$$

$$\frac{\partial w^f}{\partial p^2} = \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial p^2}\right)' \left(\frac{\partial v^f}{\partial x^2}\right), \tag{18}$$

$$\frac{\partial w^f}{\partial y_f} = \frac{\partial v^f}{\partial y_f} + \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial y_f}\right)' \left(\frac{\partial v^f}{\partial x^2}\right), \tag{19}$$

$$\frac{\partial w^f}{\partial y_m} = \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial y_m}\right)' \left(\frac{\partial v^f}{\partial x^2}\right). \tag{20}$$

De ces relations, nous pouvons déduire un certain nombre de résultats intéressants. Supposons premièrement que la fonction d'utilité de la femme soit strictement croissante pour tous les biens. Alors $\partial v^f / \partial x^2 >> 0$. Supposons aussi que tous les biens du groupe 2 soient normaux, de telle sorte que $\partial\xi^2 / \partial y_m >> 0$. Alors, de toute évidence, compte tenu de (20), l'utilité de la conjointe est une fonction strictement croissante du revenu du mari. De plus, précisément parce que la femme ne veut pas dépenser la moindre portion de son revenu sur les biens du groupe 2, nous savons, grâce aux conditions de premier ordre, que

$$\partial v^f / \partial x^2 << \partial v^f / \partial y_f \,.\, p^2$$

et puisque, étant donné la contrainte budgétaire du mari, $(\partial\xi^2 / \partial y_m)' \,.\, p^2 = 1$, il s'ensuit que

$$\partial w^f / \partial y_m < \partial v^f / \partial y_f \,. \tag{21}$$

De plus, si les préférences du mari sont séparables, le revenu de la femme n'a aucune influence sur la demande des biens du deuxième groupe, de telle sorte que (19) et (21) impliquent

$$\partial w^f / \partial y_m < \partial w^f / \partial y_f \qquad (22)$$

et l'augmentation du revenu du mari est moins bénéfique pour la femme qu'une hausse de son revenu à elle.

Toutefois, ce résultat dépend étroitement de l'hypothèse de séparabilité. En l'absence de séparabilité, il ne semble pas possible de garantir qu'un accroissement du revenu de la femme rehausse sa propre utilité, encore moins qu'il la relève davantage qu'une majoration équivalente du revenu de son conjoint.

Quant aux effets des modifications de prix, la séparabilité et (17) garantissent que des hausses de prix des biens du premier ensemble détérioreraient la situation de la femme; de plus, ces effets de prix satisfont à l'identité de Roy. En l'absence de séparabilité, l'Identité de Roy ne tiendrait plus et il n'existerait pas de présomption que des augmentations de ces prix dégraderaient la situation de la femme.

Si des hausses de prix des biens de la deuxième catégorie ont des conséquences moins claires, il n'en demeure pas moins qu'elles réduisent la demande pour tous les biens du groupe, par l'entremise d'un fort effet de revenu, de telle sorte que la situation de la femme se détériorerait aussi.

Voilà tout ce que nous pouvons affirmer lorsque les deux conjoints achètent des ensembles distincts de biens. Examinons maintenant ce qui se produit lorsqu'ils achètent un bien en commun, de telle sorte que, localement, la répartition du revenu au sein du ménage est sans conséquence.

Pour pouvoir jauger cette situation, supposons que $x^1$ soit, comme précédemment, l'ensemble de biens achetés exclusivement par la femme, $x^2$ ceux qui sont choisis exclusivement par le mari et $x^3$ ceux qui sont achetés en commun. (N'oublions pas que, compte tenu des hypothèses adoptées à la section précédente, il n'existe qu'un seul bien acheté en commun.) Aussi, si $x^3_m$ correspond à la contribution du mari au bien $x^3$, l'épouse considère cette valeur ainsi que $x^2$ comme données et elle choisit $x^1$ et $x^3_f$ de façon à

$$\max_{x^1,\, x^3_f \geq 0} u^f(x^1, x^2, x^3_f + x^3_m) \quad \text{tel que} \quad p^1x^1 + p^3x^3_f \leq y_f\,.$$

Mais cela donne, de toute évidence, la même solution que si l'épouse choisissait $x^1$ et $x^3$ de façon à

$$\max_{x^1,\, x^3_f \geq 0} u^f(x^1, x^2, x^3) \quad \text{tel que} \quad \begin{aligned} p^1x^1 + p^3x^3_f \leq y_f + p^3x^3 &= y_f + y_m - p^2x^2 \\ &= y - p^2x^2 \end{aligned}$$

où $y$ est le revenu total du ménage. En utilisant la même notation que précédemment, nous pouvons écrire les solutions ainsi :

$$x^1 \equiv R^{f1}(p^1, p^3, x^2, y - p^2x^2) \tag{23}$$

et

$$x^3 \equiv R^{f3}(p^1, p^3, x^2, y - p^2x^2)\ . \tag{24}$$

Notez que, dans ce raisonnement, il n'existe aucune raison pour donner la priorité à la femme dans le choix de $x^3$, et nous aurions pu aussi bien considérer que c'est le mari qui effectue le choix, en prenant $x^1$ comme donné. Nous aurions alors obtenu :

$$x^2 \equiv R^{m2}(p^2, p^3, x^1, y - p^1x^1) \tag{25}$$

et

$$x^3 \equiv R^{m3}(p^2, p^3, x^1, y - p^1x^1)\ . \tag{26}$$

Remarquez également qu'en résolvant les équations simultanées (23) et (25) pour $x^1$ et $x^2$ et qu'en écrivant ainsi les solutions

$$x^1 \equiv \xi^1(p^1, p^2, p^3, y) \tag{27}$$

et

$$x^2 \equiv \xi^2(p^1, p^2, p^3, y), \tag{28}$$

la substitution de ces solutions dans (24) ou (26) donnera, compte tenu des contraintes budgétaires, exactement la même valeur pour $x^3$.

Pour l'épouse, le niveau d'utilité correspondant est :

$$w^f(p^1, p^2, p^3, y) \equiv v^f[p^1, p^3, \xi^2(p^1, p^2, p^3, y), y - p^2\xi^2(p^1, p^2, p^3, y)]\ , \tag{29}$$

l'utilité du mari étant donnée par une expression analogue.

Tout comme précédemment, le comportement des fonctions $\xi^i$ peut s'obtenir en dérivant (23) et (25). Notez qu'en faisant cela, $x^2$ influence $x^1$ aussi bien par d'éventuels effets des préférences de la femme sur $x^1$ que par ses conséquences sur le revenu résiduel disponible pour acheter $x^1$. Aussi, posons

$$dx^1 / dx^2 \equiv \partial r^{f1} / \partial x^2 - (\partial r^{f1} / \partial y)\ .\ (p^2)' \tag{30}$$

et une expression similaire pour $dx^2 / dx^1$, de même que

$$M^f \equiv (dx^1 / dx^2).\ (dx^2 / dx^1). \tag{31}$$

Alors, nous avons, par exemple,

$$[I - M^f]\frac{\partial \xi^1}{\partial p^1} = \frac{\partial R^{f1}}{\partial p^1} - \left(\frac{dx^1}{dx^2}\right)\left(\frac{\partial R^{m2}}{\partial y}\right)(x^1)', \tag{32}$$

$$[I - M^f]\frac{\partial \xi^1}{\partial p^2} = \frac{\partial R^{f1}}{\partial y}(x^2)' + \left(\frac{dx^1}{dx^2}\right)\left(\frac{\partial R^{m2}}{\partial p^2}\right), \tag{33}$$

$$[I - M^f]\frac{\partial \xi^1}{\partial p^3} = \frac{\partial R^{f1}}{\partial p^3} - \left(\frac{dx^1}{dx^2}\right)\left(\frac{\partial R^{m2}}{\partial p^3}\right), \tag{34}$$

$$[I - M^f]\frac{\partial \xi^1}{\partial y} = \frac{\partial R^{f1}}{\partial y} + \left(\frac{dx^1}{dx^2}\right)\left(\frac{\partial R^{m2}}{\partial y}\right). \tag{35}$$

Malheureusement, étant donné les deux interactions présentes dans $dx^1 / dx^2$, la séparabilité des deux préférences ne permet pas de simplifier beaucoup ces expressions. Par conséquent, même si, dans les intervalles où le mari et la femme achètent un bien en commun, la demande satisfait à la propriété néoclassique d'indépendance par rapport à la répartition du revenu, d'une façon générale, elle ne possédera pas les autres propriétés néoclassiques.

Parallèlement, on ne peut guère tirer de proposition générale concernant les propriétés des fonctions d'utilité indirecte.

## Conclusion

Dans cet article, j'ai présenté une théorie non coopérative très générale de la consommation des ménages et j'en ai tiré les conséquences concernant la théorie de la demande. Celles-ci sont remarquables. Il existe un lien très clair entre la répartition des dépenses sur les divers biens et la proportion du revenu du ménage allant à l'épouse, cette relation devant pouvoir être observée si cette théorie est correcte. La théorie s'accorde bien avec beaucoup de récits anecdotiques concernant le comportement des ménages et cette forte relation, au demeurant vérifiable, pourrait être employée pour rechercher des indices probants dans les grandes bases de données transversales utilisées pour analyser le comportement des ménages.

Toutefois, beaucoup reste à faire. Comme nous l'avons mentionné, la théorie pourrait être invoquée pour soutenir un modèle de négociation, pour lequel le résultat du modèle de Nash serait utilisé comme *statu quo*. Je n'ai pas examiné les conséquences du modèle sur l'offre de travail, mais on peut pressentir la possibilité de fortes incitations poussant la femme à gagner de l'argent elle-même, afin de pouvoir mieux imposer ses préférences sur la consommation finale du ménage. Enfin, il reste beaucoup à faire pour établir les répercussions sur la formulation des diverses politiques.

## BIBLIOGRAPHIE

Apps, P.F. (1981), *A Theory of Inequality and Taxation*, Cambridge University Press, Angleterre.

Apps, P.F. et G. Jones (1986), « Selected Taxation of Couples », *Journal of Economics*, 5 (Suppl.) : 1-15.

Apps, P.F. et R. Rees (1988), « Taxation and the Household », *Journal of Public Economics*, 35 : 355-369.

Ashworth, J. et D. Ulph (1981), « Household Models », *in* C.V. Brown (éd.), *Taxation and Labour Supply*, George Allen & Unwin, Londres.

Becker, G.S. (1981a), *A Treatise on the Family*, Harvard University Press, Massachussets.

Becker, G.S. (1981b), « Altruism in the Family and Selfishness in the Market Place », *Economica*, 48 : 1-15.

Bergstrom, T. et H. Varian (1985), « When Are Nash Equilibria Independent of the Distribution of Agents' Characteristics? » *Review of Economic Studies*, 52 : 715-718.

Bergstrom, T., L. Blume et H. Varian (1986), « On the Private Provision of Public Goods », *Journal of Public Economics*, 29 : 25-49.

Bernheim, B.D. et K. Bagwell (1988), « Is Everything Neutral? », *Journal of Political Economy*, 96 : 308-338.

Leuthold, J.H. (1968), « An Empirical Study of Formula Income Transfer and the Work Decisions of the Poor », *Journal of Human Resources*, 3 : 312-323.

Manser, M.E. et N. Brown (1980), « Marriage and Household Decision Making: A Bargaining Analysis », *International Economic Review*, 21 : 31-44.