Article

« Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie »

Philippe R. Richard et Anna Sierpinska

Revue des sciences de l'éducation, vol. 30, n° 2, 2004, p. 379-409.

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXX, nº 2, 2004, p. 379 à 409

Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie

Philippe R. Richard
Professeur
Université de Montréal

Anna Sierpinska
Professeure
Université Concordia

Résumé – Cet article vise à montrer l'utilité d'une approche fonctionnelle-structurelle pour l'étude des manuels scolaires en mathématiques. L'approche s'inspire de trois sources : la théorie des fonctions du langage de Duval, le modèle des fonctions du langage dans la communication de Jakobson et le modèle des structures sémiotiques développé par Richard. Après avoir présenté l'approche dans la première partie, nous l'appliquons ensuite à l'analyse de deux courts textes, tirés des manuels de géométrie qui ont été en usage au Québec, dans les écoles secondaires de langue française. L'intention adidactique qui se dégage des deux textes montre comment les moyens sémiotiques mobilisés sont mis au sevice de la qualité de la communication avec l'éventuel lecteur.

Introduction

L'approche proposée, que nous appelons fonctionnelle-structurelle, est appliquée à l'étude textuelle des manuels destinés à l'enseignement des mathématiques. Nous considérons l'étude des manuels comme faisant partie de l'anthropologie didactique des savoirs mathématiques (Bosch et Chevallard, 1999). Que révèlent les pages d'un manuel à propos du sens accordé aux notions mathématiques ? Comment renseignent-elles utilement sur la philosophie et l'épistémologie des mathématiques, ainsi que sur la philosophie de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques dominant à une époque et en un lieu particulier ?

Dans les pages qui suivent, nous commençons par montrer les composantes de l'approche fonctionnelle-structurelle. Celle-ci s'inspire essentiellement de trois sources : la théorie des fonctions du langage de Duval (1995), le modèle des fonctions du langage dans la communication de Jakobson (1960, 1963) et le modèle des structures sémiotiques développé par Richard (2004*a*) à partir de l'analyse de textes d'élèves.

Nous mettons ensuite cette approche à l'épreuve grâce à l'analyse de deux extraits de manuels scolaires de mathématiques. Le premier est tiré du manuel de Baillairgé (1866), et le second, du manuel de Tessier et Beaugrand (1958). Ils se rapportent au même contenu mathématique, c'est-à-dire la propriété de la somme des angles d'un triangle (PSAT). Chaque manuel a été en usage au Québec dans les écoles secondaires de langue française, à des époques distantes d'environ cent ans.

Description de l'approche fonctionnelle-structurelle

Chaque chose peut se percevoir sous l'angle statique de son être, ou sous l'angle dynamique de son devenir. Un texte peut s'analyser, d'une part, comme une organisation de structures sémiotiques existantes (perspective structurelle) et, d'autre part, comme l'effet d'emploi d'un langage avec ses diverses fonctions (perspective fonctionnelle). Ces perspectives se complètent sans diverger ni se contredire. La perspective structurelle dominait la linguistique dans les années 1950-1970. Elle a été très critiquée par la suite pour sa vue limitée du langage comme phénomène culturel et dynamique. Toutefois, ces critiques n'enlèvent pas à la perspective structurelle son intérêt. Dans ce texte, nous allons reprendre un modèle de structures sémiotiques développé au sein de la didactique des mathématiques (Richard, 2004*a*), pour l'adapter à l'analyse de manuels scolaires.

Quant à la perspective fonctionnelle utilisée dans cet article, elle s'appuie sur deux théories des fonctions du langage: la théorie des fonctions discursives, métadiscursives et non discursives de Duval (1995), et la théorie des fonctions du langage dans un acte de communication de Jakobson (1960, 1963), qui nous permet de raffiner l'étude de cette fonction.

Dans notre analyse des textes, les perspectives structurelle et fonctionnelle se complètent: nous considérons qu'une description de l'emploi du langage dans n'importe laquelle de ses fonctions est approfondie par celle de l'organisation des structures sémiotiques mise au service de ces fonctions.

Nous présentons, par la suite, les concepts et les idées de base de cette approche. Nous partirons des éléments les plus simples de la structure d'un texte – de ses «unités signifiantes» – très près du texte, pour en arriver à des fonctions du langage qui vont au-delà du texte.

Organisation des structures sémiotiques

Selon le modèle de Richard (2004*a*), nous dirons que nous avons décrit l'organisation des structures sémiotiques d'un texte si nous avons identifié : 1) l'ensemble des unités signifiantes élémentaires utilisées (mots du langage courant ou termes techniques, symboles mathématiques, signes graphiques, etc.) ; 2) les formes de raccordement des unités signifiantes élémentaires pour produire des unités signifiantes complexes ; 3) l'objectif du raccordement (produire ou compléter un discours sous forme de propositions, d'équations, de figures géométriques, de graphes, etc.) ; 4) les règles de raccordement (règles d'orthographe, de grammaire, de syntaxe d'expressions mathématiques, de logique ainsi que des règles conventionnelles de la représentation graphique, d'étiquetage d'éléments figuraux, etc.).

Discours, langue et communication

Dans notre définition de l'organisation des structures sémiotiques du texte, nous avons déjà utilisé le terme « discours ». Mais qu'est-ce que le discours ? Duval (1995) définit ce terme comme « une expression portant référence au monde d'une façon qui puisse être partagée par des interlocuteurs » (p. 91). Un discours consiste donc en une expression qui :

– désigne des objets (fonction référentielle) ;
– dit quelque chose à propos de ces objets sous forme d'énoncés complets (fonction apophantique) ;
– relie ces énoncés dans une suite cohérente (fonction d'expansion discursive),
– tout en marquant la valeur, le mode et le statut attribués à l'expression par celui qui la produit (réflexivité discursive) (*Ibid.*)

Un système sémiotique qui rend possible la réalisation de ces fonctions (dites discursives) est appelé langue. Les langues naturelles, comme le français, et les langues formelles, comme le calcul des prédicats en logique du premier ordre, sont effectivement des langues.

On peut se demander si les représentations graphiques des figures géométriques planes, qui suivent un certain nombre de règles et de conventions, peuvent également être considérées comme composantes d'une langue. Ce type de représentation graphique constitue certes un registre sémiotique au sens de Duval (1995) puisqu'il accède aux trois opérations cognitives exigées, soit la représentation, le traitement et la conversion dans un autre système (par exemple, le discours technique de la théorie géométrique). Cependant, pour être une langue, ce registre doit permettre les quatre fonctions discursives, soit la désignation, la production d'énoncés complets, l'articulation d'énoncés en un tout cohérent et la réflexivité discursive. On peut montrer, dans la mise en situation d'un problème, que les deux premières et la quatrième fonctions sont certainement possibles. Dans l'exemple suivant, issu d'une question posée à un examen oral en Suède:

> Deux villes A et B sont à 16 km l'une de l'autre. La distance de chaque ville à un lac, qui est supposé les alimenter en eau, et de 2 km. On fait le projet de construire trois aqueducs, PS, PA et PB. Où devrait-on situer P pour que la longueur totale des aqueducs soit la moindre possible? De quelle manière le résultat dépend-il de la distance des villes au lac? (traduction libre).

on pourrait représenter les données du problème par la figure 1.

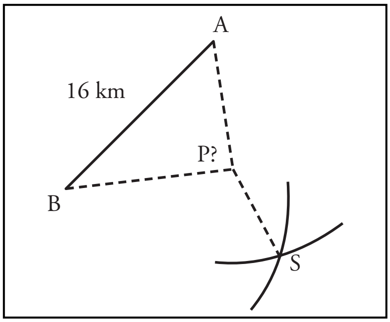


Figure 1 – Figuration possible du problème

Pourtant, l'énoncé du problème était accompagné de la figure 2.

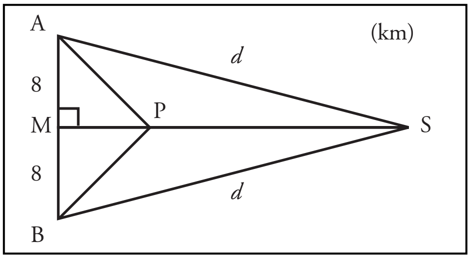


Figure 2 – Figure donnée dans l'examen

Le dessin de la figure 2 contient déjà une partie de la solution. L'énoncé verbal du problème ne pose pas P sur la médiatrice du segment AB. La démonstration de cette propriété n'est aucunement triviale. Mais, en exhibant P sur la droite MS, laquelle coupe perpendiculairement AB (symbole du petit carré) en son milieu M (AM = MB = 8 et M est sur AB), la figure lui donne le statut d'un fait donné (réflexivité). Le diagramme contient donc un énoncé complet à propos des objets (points, segments) qu'il nomme ou qu'il désigne, avec des chiffres, des lettres et des symboles. La seule fonction que ce diagramme ne semble pas satisfaire est l'expansion discursive : il n'explique pas, ne démontre pas et ne permet pas la construction d'un raisonnement. Même si les signes du dessin sont susceptibles de supporter un raisonnement, le dessin lui-même ne le montre pas. Au contraire, il le cache.

Toutefois, il faut bien admettre que la représentation graphique en géométrie joue un rôle heuristique important dans la découverte ou l'invention de l'idée essentielle développée dans un raisonnement. Jusqu'à un certain point, il est possible de communiquer cette idée en n'utilisant que des moyens graphiques (Nelsen, 1993, 2001 ; Richard, 2003, 2004*c*).

Néanmoins, on ne peut en conclure que le registre figural est lui-même une langue. Car « une figure ne représente une situation géométrique que dans la mesure où la signification de certaines unités figurales et de certaines de leurs relations sont explicitement fixées au départ » (Duval 1995, p. 188). Il est difficile, dans ce registre, de faire ce qui est le plus important dans tout domaine de recherche ou d'apprentissage, notamment de poser une question ou de donner le statut de conjecture à une proposition. Sans indications verbales pour ancrer les propriétés géométriques d'une figure, ce qui paraît dans un dessin a le statut d'un fait.

Si pour produire un discours il faut une langue, celle-ci peut s'employer autrement que dans les fonctions discursives, comme dans certaines fonctions de communication, de traitement de représentations sémiotiques ou d'objectivation de représentations virtuelles : ce sont les fonctions « métadiscursives » (Duval, 1995, p. 92). Une langue peut également s'utiliser pour l'organisation rédactionnelle d'un texte, comme la segmentation en sections, avec une hiérarchie de titres et de sous-titres à différents niveaux ; ce sont les fonctions « non discursives » (*Ibid.*, p. 358). Cependant, ces fonctions peuvent être remplies par d'autres systèmes que les langues. Nous parlerons alors de « langage » pour évoquer, outre la langue, les multiples systèmes de signes qui satisfont les fonctions métadiscursive, non-discursive et discursive. Un manuel de mathématiques se sert normalement de plusieurs moyens graphiques tels l'encadrement, la couleur, les diagrammes et les tableaux.

Lorsqu'on dit « oui », « d'accord », « ça va » au cours d'une conversation, on utilise la langue pour entretenir la conversation, c'est sa fonction « phatique » (Jakobson, 1960). Employer une langue pour maintenir une conversation ne consiste pas à produire un discours, parce que ce qui est dit ne désigne pas d'objets ou ne fait pas de constatations sur ces objets. Cet usage de la langue n'est pas spécifique à celle-ci: il est propre à la communication.

Ainsi, on pourrait définir la communication comme étant la propriété d'un système d'éléments, capables d'agir indépendamment, qui permet la coordination des actions individuelles de façon à ce que le système demeure un système et ne se désintègre pas.

Dans ce sens, l'idée de communication est une manière de gérer les différences et de capitaliser sur les différences entre individus. Ce n'est pas que le «partage du commun» (*sharing of commonalities*) comme le voudraient certains auteurs (Oers, 2001). Si deux locuteurs ne faisaient que partager ce qu'ils ont en commun, ils n'auraient rien à se dire. La communication serait triviale; la quantité d'information échangée, nulle. Mais un texte destiné à l'enseignement doit se préparer pour des échanges qui sont fortement non triviaux, qui exigent la gestion des différences importantes entre les individus.

Faute de pouvoir disposer de la passion du narrateur et de la vivacité des situations d'action qui alimentent le texte d'un roman, quelles sont les stratégies possibles, dans la confection d'un manuel scolaire, pour entretenir le contact avec ses lecteurs? La théorie des fonctions du langage dans la communication proposée par Jakobson (1963; Bruner, 1974), nous aide à répondre à cette question, comme nous essayons de le montrer dans la section suivante.

Fonctions du langage dans la communication

Dans le modèle de Jakobson, toute communication verbale comporte six aspects (Bruner, 1974; Jakobson, 1963):

a) l'expression du sentiment du locuteur envers ce qu'il dit (statut de vérité, de conjecture, de commande, de plaidoyer, de plainte, etc.) – le langage est employé dans sa fonction émotive-expressive;

b) la manière plus ou moins esthétique ou claire dont il le dit (phrases courtes ou longues, liaisons plus ou moins mélodieuses entre les mots, rythme des phrases, etc.) – fonction poétique;

c) l'expression explicite ou implicite de ce que le locuteur attend de son interlocuteur (provoquer une attitude, une action, fomenter un sentiment envers quelqu'un ou quelque chose, etc.) – fonction conative;

d) l'expression de la volonté du locuteur de rester en contact avec son interlocuteur – fonction phatique ;

e) l'expression d'une réflexion sur les moyens linguistiques employés dans la communication (questionner sur le sens des termes utilisés) – fonction métalinguistique ;

f) les précautions prises pour limiter, avec plus ou moins d'intensité, la liberté interprétative de ce qui est dit – fonction référentielle.

Nous montrerons ensuite comment nous interprétons ces fonctions dans le contexte de la communication mathématique, en classe et dans les textes destinés à l'enseignement.

– La fonction émotive

Toute expression orale manifeste l'état d'esprit émotif du locuteur envers ce qu'il dit. La même proposition « alors ceci est ta solution du problème », lancée en classe par un enseignant, peut s'émettre sur plusieurs tons différents, exprimant l'indifférence, l'étonnement, la curiosité, l'éloge, l'acquiescement, la désapprobation, le dénigrement ou l'ironie. Dans un texte écrit, la fonction émotive doit se servir des moyens linguistiques disponibles à travers les mots, les signes de ponctuation ou la mise en forme. Toutefois, l'absence de certaines expressions traduit aussi une attitude émotive. Ainsi, dans un manuel de mathématiques, les expressions telles que « je crois » ou « je pense » peuvent apparaître dans l'introduction pour annoncer un *credo* pédagogique ou philosophique, mais pas dans la présentation de contenu mathématique.

– La fonction poétique

Si un même message peut être rendu de différentes façons, certaines tournures sonnent bien à l'oreille ou se lisent mieux que d'autres. Une phrase courte est agréable et se mémorise plus facilement. Une phrase longue, avec plusieurs niveaux de subordonnées ou qui multiplie les conjonctions, devient même pénible. Une phrase qui rime ou qui est bien rythmée se mémorise encore mieux.

– La fonction conative

Le langage ne s'emploie pas seulement pour exprimer un jugement ou une intention. Il s'utilise bien plus souvent pour changer le comportement ou l'attitude de nos interlocuteurs, grâce au mode impératif ou avec un moyen détourné.

L'enseignement des mathématiques vise à changer la manière de penser, le fonctionnement cognitif; l'instruction directe n'est pas efficace. Comme le dit Brousseau (1997, p. 41), plus l'enseignant se soumet à la demande de l'élève pour lui dire exactement comment faire pour résoudre un problème, donc l'instruire, moins il a de chances d'obtenir de l'élève l'apprentissage visé.

– La fonction phatique

Le langage peut aussi s'employer pour établir ou conserver la communication entre les locuteurs. Il est courant d'inclure des expressions comme «d'accord» pour vérifier si l'interlocuteur nous écoute toujours. Mais que peut faire un texte pour entretenir ou cultiver l'attention du lecteur? Dans les manuels modernes de mathématiques, on utilise abondamment les structures plastiques (les photos, par exemple), graphiques (comme les figures géométriques ou les représentations graphiques des fonctions), ou encore des icônes, pictogrammes, bordures et trames, etc. qui permettent d'attirer l'attention du lecteur sur certains éléments en leur donnant un statut particulier (définition, théorème, exercice, etc.) ou en distinguant pour lui un contenu marginal d'un contenu principal.

– La fonction métalinguistique

La communication au plan métalinguistique porte sur le langage lorsqu'il s'agit de clarifier le sens d'un mot ou d'un autre signe. Cette fonction présuppose le caractère conventionnel du langage et la possibilité d'utiliser un autre langage pour dire la même chose, ce qui implique la possibilité d'existence de langages en nombre infini. Elle est très importante dans les textes mathématiques. Même en comparaison avec les textes scientifiques, la fonction métalinguistique apparaît de façon plus explicite dans les textes mathématiques que dans d'autres textes: elle s'exprime particulièrement à travers la formulation de définitions.

– La fonction référentielle

Cette fonction est l'objectif principal dans toute communication visant l'enseignement, les autres fonctions lui étant subordonnées. Tandis que Jakobson (1963) soulignait l'autonomie des langages ou leur indépendance relativement aux contextes d'énonciation, ainsi que leur capacité à développer des métalangages, dans l'enseignement des mathématiques d'aujourd'hui, cette insistance sur l'indépendance relative du langage par rapport au contexte d'énonciation a été considérée comme une erreur du passé. On soulevait le rôle important du contexte situationnel de la communication dans l'interprétation du sens par les participants. Le besoin de contextualisation du savoir mathématique a été aussi souligné par certains mathématiciens, comme Thurston (1994, p. 165-166). Toutefois, certains chercheurs en didactique des mathématiques essaient de redonner du sens au travail de décontextualisation en disant que ce n'est qu'en « clarifiant le contexte » que l'enseignant est susceptible d'attirer l'attention des élèves sur la généralité des notions mathématiques qu'il introduit (Nesher, dans Sfard, Nesher, Streefland, Cobb et Mason, 1998).

Synthèse : Approche fonctionnelle-structurelle à l'étude des textes

Dans les descriptions des fonctions du langage ci-dessus, nous nous sommes beaucoup éloignés de l'analyse des structures sémiotiques d'un texte fini, figé comme un objet matériel. Mais les fonctions du langage dans un texte se réalisent par le moyen d'une organisation appropriée de structures sémantiques. Sans une analyse fine de ces structures, certaines fonctions du texte pourraient nous échapper. D'autre part, du point de vue de la didactique des mathématiques, l'analyse seule des structures sémantiques des textes destinés à l'enseignement n'est pas suffisante. Nous devons avoir des moyens d'identifier et d'évaluer ce que le texte peut potentiellement communiquer au lecteur et comment il l'engage dans l'interaction. Ce que nous appelons ainsi « approche fonctionnelle-structurelle » de l'analyse des textes (mathématiques) sera une synthèse de trois modèles : celui des fonctions discursives, non discursives et métadiscursives de l'emploi d'une langue de Duval (1995), celui des fonctions du langage dans la communication de Jakobson (1960, 1963), et celui des structures sémiotiques de Richard (2004*a*).

L'analyse d'un texte va commencer par l'identification des fonctions non discursives (Duval, 1995) de l'emploi du langage dans le texte ; c'est-à-dire l'organisation rédactionnelle, la fonction synoptique et les représentations centrées sur le contenu cognitif. Ces représentations seront décrites, entre autres, en identifiant les unités signifiantes du texte, dont les formes de raccordement vont expliquer l'organisation rédactionnelle du texte. Ainsi, le modèle de Richard s'imbriquera dans celui de Duval.

Ensuite seront décrites les fonctions métadiscursives du texte (Duval, 1995, p. 92) : objectivation, traitement et communication. Objectivation et traitement vont être décrits avec les catégories introduites par Duval (*Ibid.*). Mais l'analyse de la fonction de communication sera enrichie par l'apport du modèle de Richard, par l'explicitation des objectifs du raccordement des unités signifiantes, ainsi que par le modèle de Jakobson qui nous permettra de raffiner l'analyse en décrivant les moyens utilisés par le texte pour traduire ses fonctions poétique, conative, phatique et métalinguistique.

Les fonctions émotive et référentielle de l'emploi du langage dans la communication, prises en compte par Jakobson (1960, 1963), correspondent déjà aux fonctions discursives au sens de Duval (1995), sauf que, chez ce dernier, il s'agit des fonctions d'une langue au sens restreint; tandis que Jakobson considère plutôt les fonctions d'un langage au sens large. La fonction émotive de Jakobson est proche de la fonction de réflexivité discursive de Duval; et les «fonctions référentielles» se recouvrent dans les deux modèles, à la distinction langue/langage près.

Les deux autres fonctions discursives – la fonction apophantique et la fonction d'expansion discursive – vont être décrites en se basant sur les catégories de Duval et en termes de règles et formes de raccordement des unités signifiantes dans le sens de Richard.

Dans la section suivante, nous allons montrer comment cette approche peut être mise à l'œuvre dans l'analyse et la comparaison des textes concrets destinés à l'enseignement des mathématiques.

Application de l'approche fonctionnelle-structurelle

Pour mettre à l'épreuve notre approche, nous avons choisi d'analyser et de comparer deux textes: des extraits de Baillairgé (1866, p. 60-61) (illustration 1) et de Tessier et Beaugrand (1958, p. 110-111) (illustration 2), dont les reproductions figurent en annexe; par la suite, la mention [B] sera utilisée pour la renvoyer à l'illustration 1, tandis que la mention [T] renverra à l'illustration 2. Nous allons montrer, en particulier, comment ces textes se servent de leurs éléments sémiotiques pour réaliser les différentes fonctions du langage: non discursives, métadiscursives et discursives.

Fonctions non discursives

Parmi les fonctions non discursives, nous examinons l'organisation rédactionnelle, la fonction synoptique du langage, et les représentations non discursives centrées sur le contenu cognitif.

Dans chaque texte, l'organisation rédactionnelle se subordonne à l'organisation déductive de la théorie. Les propositions proviennent des hypothèses de la propriété de la somme des angles d'un triangle (PSAT) ou elles résultent de propositions antérieures. Pourtant, cette organisation ne présuppose pas forcément un processus déductif de pensée qui mène à la découverte des propositions. La démonstration de l'énoncé de la PSAT vient après sa formulation; elle ne fait qu'expliquer ou justifier ce à quoi l'on pourrait arriver par des moyens autres que la déduction. Il n'y a que des corollaires qui sont sensés «se déduire» à partir du théorème. Dans [B], au corollaire 1 (paragraphe 251), la conséquence «l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés» découle de la proposition démontrée. Dans [T], les corollaires sont peut-être énoncés, mais ils ne sont ni déduits ni démontrés. Le lecteur est ainsi informé de leur vérité: il ne lui reste qu'à se les expliquer.

L'organisation rédactionnelle de [B] suggère qu'il s'agit d'un texte de référence dans lequel un savoir déjà convenablement établi et bien institutionnalisé se présente de façon concise (synoptique) pour faciliter la recherche d'information par celui qui est familier avec la théorie de l'ouvrage. Dans [T], on ne lésine pas dans l'aménagement de l'espace pour mettre à jour la structure de la démonstration. On place, dans deux colonnes séparées, le «raisonnement» à gauche et les «preuves» à droite. Ainsi, la forme des raccordements entre les éléments de la démonstration sont plus explicites dans [T] que dans [B]; la couche métamathématique du texte est en fait très visible. Chaque constatation dans la colonne «raisonnement» est justifiée dans la colonne des «preuves». Si nous empruntons la terminologie de Toulmin (1958), on peut dire qu'elle y reçoit son *warrant* (au sens de «licence d'inférer»; Plantin, 1990, p. 27) dans la partie qui commence par «comme», et son *backing* («support», *Ibid.*, p. 28) dans la partie qui enchaîne avec «à cause de». Le tableau 1 en est un exemple.

Tableau 1
Démonstration

Raisonnement	Preuves
(…)	
2. $\angle A = \angle 1$	2. *comme* alternes-internes [licence d'inférer] *à cause des* parallèles AC et DE et de la sécante AB [support]
(…)	

(Tessier et Beaugrand, 1958)

Le texte [B] ne facilite pas du tout l'appréhension synoptique du texte (Duval, 1995, p. 355); les sections des chapitres n'ont pas de titres décrivant leur contenu conceptuel mais seulement leur place dans l'exposition de la théorie. Par exemple, le titre de la section où se trouve la PSAT est «PROP. IV. THÉOR.». Les propositions et corollaires sont aussi numérotés comme la PSAT et sa démonstration portent le numéro 250 dans l'ouvrage; le premier corollaire est le numéro 251. Ce codage est utile lorsqu'il faut renvoyer, dans une démonstration, à une proposition démontrée auparavant; il exprime donc la structure déductive de la théorie.

Dans [T], le théorème ne porte pas d'autre nom que son rang « théorème 26 », mais la fonction synoptique de l'ensemble est plus apparente grâce aux termes mathématiques et métamathématiques de nombreux en-têtes. La PSAT appartient à une section intitulée « parallèles et sécantes ». Ce court texte contient 11 termes métamathématiques : théorème, énoncé, figure, hypothèse, conclusion, CQ faut D, démonstration, raisonnement, preuve, construction, CQ fallait D (en excluant les termes corollaires et axiomes au paragraphe suivant). Il n'y en a que 4 dans [B], qui ne fait même pas de démarcation rédactionnelle entre l'énoncé du théorème et sa démonstration.

La figure qui accompagne le texte peut être vue comme un exemple de l'emploi non discursif du langage centré sur le contenu cognitif. La figure diminue l'ambiguïté du texte écrit en ce qui concerne la position des points et des segments construits à des fins démonstratives (voir remarque à la figure 2) ; elle facilite la recontextualisation du discours abstrait (Duval, 1995, p. 356). Chaque texte comprend des figures : [B] n'en montre qu'une seule sous l'énoncé du théorème, alors que [T] en ajoute une deuxième pour accompagner un corollaire « VI. Tout angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des 2 angles qui ne lui sont pas adjacents ». [B] n'a pas besoin de cette seconde figure, car il démontre cette propriété en même temps que la PSAT.

Si nous rapprochons les figures proposées par chaque auteur d'un point de vue structurel, ce qui frappe est le grand nombre d'unités signifiantes élémentaires utilisées chez [T] comparativement à [B]. Dans [T] les lignes « auxiliaires » construites pour la démonstration (DE pour la PSAT, DE et BF pour le corollaire VI) sont marquées en pointillé, tandis que les segments assumés par les hypothèses (les côtés du triangle) sont dessinés avec des lignes continues. Cette distinction entre segments « donnés » et segments « construits » n'est pas établie dans [B]. De plus, les angles égaux ne sont marqués que dans [T].

Fonctions métadiscursives

Nous allons regarder comment les fonctions métadiscursives du langage, c'est-à-dire le traitement, l'objectivation et la communication, sont présentes dans les deux textes étudiés. Le sens donné au terme « traitement » dans cet article comprend aussi bien l'opération de « traitement » que l'opération de « conversion » dans l'acception restreinte de la définition de registre de représentation sémiotique de Duval (1995). Il s'agit de l'opération de transformation d'une représentation en une autre représentation selon certaines règles sémiotiques, que ce soit avec ou sans changement de registre.

– Objectivation

On dirait bien que l'objectivation est la fonction première de [B] : il s'agit d'écrire la théorie, de l'organiser d'une manière déductive, de vérifier le bien-fondé logique des propositions et de créer de la sorte un texte de référence.

Le texte de [T], comme nous l'avons vu, contient non seulement la théorie, mais aussi la métathéorie sous forme de messages à propos de la méthodologie du savoir mathématique et de la structure d'une démonstration. L'absence ou la présence du niveau « méta » peut se percevoir comme un signe d'intention objectivante ou communicationnelle relativement au texte. Si le texte de [B] se consacre à écrire la théorie, [T] se préoccupe de communiquer comment elle a été écrite (ce qui permet au lecteur de la reproduire ou de produire d'autres théories). Pour [T], la fonction première est celle de la communication d'une structure de savoir et d'un modèle de sa construction : c'est un texte didactique.

– Traitement

À première vue chez [B], on a l'impression que le langage n'est pas utilisé dans sa fonction de traitement. Il n'y a ni équations, ni manipulations arithmétiques ou algébriques sur quelque symbolisme alphanumérique que ce soit. Cependant, en y regardant de plus près, on se rend compte que le texte renferme bel et bien des équations : celles-ci sont exprimées et se manipulent verbalement. De fait, on peut repérer trois opérations de traitement aux paragraphes 250 et 251. Dans le premier cas (paragraphe 250), on a :

a) Le traitement figural lors duquel on ajoute au triangle ABC les segments CD et CE « ayant prolongé AC indéfiniment jusqu'en D, et fait l'angle ECD égal à BAC ».

b) Le traitement des égalités des angles ; en particulier,

– égalité par construction (ECD est « fait » égal à BAC) ;
– égalité par synonymie : « angles alternes » est synonyme des « angles égaux » « les angles ABC, ECB seront donc alternes et égaux » ;
– égalité par substitution « l'angle ACB qui avec les angles BCE, ECD vaut deux angles droits, formera aussi deux angles droits avec les angles A et B qui leur sont égaux ».

Dans le deuxième cas (paragraphe 251), le traitement des égalités continue : on obtient l'égalité de l'angle extérieur BCD à la somme des angles BCE et ECD par construction, et son égalité à la somme des angles A et B intérieurs au triangle par substitution. Dans ce paragraphe, une nouvelle opération de traitement apparaît:

c) Transformation de l'égalité en inégalité par élimination d'un terme de la somme: l'angle extérieur est «plus grand que l'un de ces angles pris séparément».

Dans [T], le traitement implique les expressions symboliques/algébriques. Ainsi, le premier traitement est celui de formalisation de l'énoncé, absent dans [B]. Un autre traitement s'ajoute chez [T] au plan métamathématique: le «CQ faut D» au terme de l'«énoncé» se transforme en un «CQ fallait D» à la suite de la démonstration.

– Communication

La fonction poétique dans [B] s'exprime par le rythme sonore de la parole. Dans [T], mises à part les phrases complètes de l'énoncé et des corollaires, c'est surtout par le rythme visuel de la composition graphique des éléments du texte [la démonstration est une écriture «en deux colonnes» (Herbst, 2002)] que s'exprime cette fonction. Le langage mathématique apparaît donc dans [T] comme un langage écrit non linéaire; sa signification est à la fois iconique et symbolique, au sens de Peirce (1955, p. 104). On ne peut le lire tel quel à voix haute, sans effort de traduction. Dans le texte de [B] au contraire, le langage mathématique est un langage oral. Il est linéaire, sans notation formelle. Il utilise un style simple, des phrases courtes et faciles à lire à voix haute, comme si le texte avait été aménagé expressément pour être appris par cœur et récité avec aisance. À titre d'exemple, le rythme de la phrase «la somme A + B + C des trois angles d'un triangle quelconque ABC vaut deux angles droits» est naturel et agréable. Pour s'en rendre compte, nous n'avons qu'à le lire à voix haute, comparativement au rythme saccadé de la formalisation de l'énoncé de la PSAT dans [T]: «Hypothèse: A, B, et C sont les 3 angles d'un triangle. Conclusion: A + B + C = 2 droits CQ faut D».

Il est remarquable de noter chez [B], comment l'auteur prend soin de permuter les lettres latérales dans la désignation des angles pour obtenir un «rythme de transition». Il change «ECB» en «BCE» et obtient ainsi AC**B** + **B**CE + **E**CD comme représentation de l'angle ACD. Cette configuration correspond à la configuration spatiale des angles et rend la constatation plus convaincante et plus facilement compréhensible. Si on imaginait une personne au tableau en train de réciter cette somme, tout en pointant les éléments de la figure auxquels elle se réfère avec une baguette, l'ordre des points économiserait le mouvement (pas besoin de revenir deux fois au même point) et rendrait le sens de cette somme plus transparent. Le texte de [B] communique ainsi une image des raisonnements mathématiques comme des enchaînements de sons rythmés (voix et battement alternatifs de la baguette contre le tableau). Un raisonnement mathématique doit non seulement être logique, il faut en plus qu'il rime et qu'il marque un bon rythme : on dit qu'il doit être élégant. Un argument qui se lit mal à haute voix n'est pas élégant.

En ce qui concerne la fonction conative, aucun des deux textes ne donne d'ordres ni d'instructions directes ou explicites au lecteur. [B] ne dit pas, par exemple, « Prolongez AC indéfiniment jusqu'en D et construisez l'angle ECD égal à BAC ». Il dit : « Ayant prolongé AC indéfiniment jusqu'en D, et fait l'angle ECD égal à BAC ». Les constructions sont considérées comme étant déjà effectuées. Même le « problème » du paragraphe 253, dans lequel il s'agit de construire une droite parallèle à une droite donnée par un point donné, n'est pas présenté comme une tâche pour le lecteur ; il est déjà résolu. On pourrait dire que la théorie est déjà construite et il n'y a qu'à l'assimiler. Pourtant, la compréhension est une tâche qui incombe au lecteur et elle est loin d'être évidente. L'auteur lui laisse le soin de rapprocher le texte et la figure : il doit voir sur la figure ce que le texte constate. De plus, l'auteur ne livre pas tous les détails des raisonnements. Il laisse au lecteur la responsabilité de les compléter ou de les finir en cas de besoin (par exemple, « donc, etc. »). Dans [T], les corollaires ne sont pas démontrés, sauf dans le cas VI. Par conséquent, contrairement à ce que l'on pourrait croire, les lecteurs modèles des deux textes ne sont pas des lecteurs passifs.

Le texte de [B] n'évite pas systématiquement l'usage de l'impératif. À la section « PROP. III. THÉOR. » par exemple, ce mode est utilisé deux fois au cours de la démonstration : « Du point B menez BD » et « Supposez maintenant… ». En outre, remarquons que chez [T], l'impératif est sous-entendu dans « CQ faut D ».

De prime abord, la fonction phatique n'apparaît pas dans les deux textes. Les auteurs ne semblent pas tenter, du moins explicitement, d'entretenir la communication avec le lecteur, en leur posant des questions par exemple. Mais ce n'est qu'une apparence. Puisqu'ils se réfèrent constamment à leur propre contenu, [B] et [T] laissent très peu de marge de manœuvre pour s'éloigner des manuels. On peut dire qu'implicitement, la fonction phatique est plutôt forte. Dans [B], les références aux propositions précédentes obligent le lecteur à maintenir un contact constant avec le manuel, tel un tout, alors que [T] se contente d'une attention locale (les propositions de référence sont citées et le lecteur n'a pas besoin de revenir en arrière). Ces références sont une manière de négocier la validité des énoncés avec le lecteur : « si tu ne me crois pas, tu peux toujours consulter le paragraphe auquel je me réfère » ou « revois la référence si tu as oublié ».

Enfin, en ce qui a trait à la fonction métalinguistique, les textes étudiés ne s'occupent pas d'expliquer le sens des termes et symboles mathématiques. Ceux-ci sont définis au début des ouvrages, une fois pour toute, dans des sections dédiées aux notions préliminaires et aux conventions notationnelles et, pour la plupart des termes métamathématiques dans [T], lors du développement d'un exemple générique. Somme toute, seul [T] est explicite par rapport au statut métamathématique des parties du texte. Il montre ostensiblement quelle est l'hypothèse du théorème, quelle en est la conclusion et quel est le statut des différents types de constatations dans la démonstration.

Fonctions discursives

Les fonctions émotive et référentielle du langage dans la communication, issues du modèle de Jakobson (1960, 1963), recoupent les fonctions référentielle de désignation d'objets et de réflexivité discursive de la théorie de Duval (1995). Dans ce qui suit, nous les traitons conjointement.

– La fonction de réflexivité discursive/la fonction émotive-réflexive

Le style de chaque texte est consciencieusement impersonnel. Les auteurs ne parlent pas d'eux, et ne s'adressent jamais directement au lecteur. Ils n'utilisent pas les pronoms «je», « nous» ou «vous»; les infinitifs se substituent aux impératifs («mener» au lieu de «menez» au paragraphe 258 dans [B]). Les sujets des phrases sont toujours des objets mathématiques, sauf dans trois cas chez [B].

On pourrait dire que la fonction réflexive dans les deux textes se rapporte essentiellement au statut de vérité des énoncés et à la validité des raisonnements. Ce statut se manifeste par l'intermédiaire des titres ou des termes métamathématiques tels que «PROP IV. THÉOR.» dans [B], ou «théorème» et «CQ fallait D» dans [T]. Ces termes apportent, en outre, une distinction dans l'importance relative des vérités. Dans [B], «COR.» désigne une vérité secondaire telle une conséquence qui se déduit facilement du théorème déjà démontré, ou «SCO. 1. PROB.» avertit le lecteur d'une remarque au théorème pour la résolution immédiate d'un problème. Cet auteur utilise aussi des moyens non discursifs pour signaler l'importance relative des énoncés. Le théorème s'annonce en majuscules, tout en occupant une ligne à part; les corollaires et le scolie s'indiquent en lettres minuscules pendant que le titre se trouve sur la même ligne que le texte qu'il annonce.

Par deux fois dans [B], le sujet des propositions est le pronom impersonnel «il»: «il résulte», « il est clair». Dans ce dernier cas, [B] se permet d'exprimer son sentiment sur la simplicité d'entendement du raisonnement. À une reprise, le sujet du verbe sous-entend une personne : « ayant prolongé AC… et fait l'angle ECD égal à… ».

– La fonction référentielle

Selon Jakobson (1960, 1963), cette fonction est remplie par les moyens que le texte engage pour éliminer l'ambiguïté dans son interprétation. Parmi ces moyens, les manuels étudiés emploient de concert le dessin et le texte écrit. En masquant le dessin dans [B], il n'est pas clair que « prolonger un côté » veut dire « prolonger en ligne droite ». Le point D, issu du prolongement de AC, resterait quelque peu mystérieux ; on peut se demander s'il demeure dans le plan de la figure, puisque le côté est censé être prolongé « indéfiniment ». Le texte ne donne pas non plus de précisions quant au point E. En l'absence du dessin, on pourrait figurer la construction de sorte que A se situe entre D et C, ce qui ne permettrait pas le même raisonnement. Sans le dessin, le texte serait alourdi. Non seulement le langage devrait être plus explicite, mais toute la théorie devrait contenir des notions additionnelles relatives à l'ordre des points et à l'orientation des angles. Dans [T], les angles 1 et 2 sont en fait « définis » sur le dessin, dont la fonction référentielle devient très forte.

Discutons maintenant de la fonction référentielle au sens de Duval (1995), et des unités signifiantes et de leurs règles de raccordement, au sens de Richard (2004*a*). Comme nous l'avons déjà remarqué, [T] désigne un grand nombre d'objets métamathématiques. En ce qui a trait aux objets mathématiques, [B] et [T] se réfèrent principalement à trois catégories : les angles, les opérations sur les angles et les relations entre les angles (égalité, inégalité dans [B], égalité exclusive dans [T]). La distinction explicite entre les angles et leur mesure n'est pas établie dans ces textes. [B] utilise quatre unités signifiantes pour désigner un angle : le mot « angle », une lettre, trois lettres et un syntagme graphique (les signes sur le dessin qui représente l'angle). [T] en utilise sept : le mot « angle », une lettre, trois lettres, un chiffre, le symbole « ∠ » et deux types de syntagme graphique (avec arc simple et arc double). La notation en trois lettres ne s'utilise qu'en cas d'éventuelles ambiguïtés pour désigner un angle. Si les dessins prétendent réduire le caractère équivoque des désignations, dans [T], les angles 1 et 2 ne se définissent que par la figure. Les angles égaux sont déjà marqués dans les dessins de [T].

En ce qui concerne les opérations sur les angles et leurs relations, [B] utilise surtout les mots pour parler de la somme, des égalités et des inégalités d'angles. Le symbole d'addition (+) ne s'utilise qu'une seule fois dans l'énoncé, et cela de façon redondante en spécifiant que A + B + C est une somme. Le symbole d'égalité n'est jamais utilisé. Dans [T], l'emploi des signes « + » et « = » est certainement plus audacieux, mais ils ne sont pas toujours algébriquement opérationnels, comme s'il s'agissait d'abréviation. On écrit bien que «$\angle A = \angle 1$ et $\angle C = \angle 2$», mais le signe d'égalité n'apparaît pas dans l'expression «$\angle 1 + \angle ABC + \angle 2$ égalent $\angle A + \angle B + \angle C$», alors qu'il s'utilise ensuite dans la conclusion «$\angle A + \angle B + \angle C = 2$ droits».

Les deux manuels se sont déjà bien éloignés des versions anciennes des éléments, mais les auteurs hésitent encore à joindre les graphies algébriques au langage géométrique, et ce, de façon plus prononcée chez [B]. Le langage algébrique présuppose des opérations sur les nombres, ce qui exige que la notion de mesure soit abstraite du monde des figures. Toutefois, même si la géométrie d'Euclide distingue le segment d'une distance par exemple, la congruence et l'équivalence en mesure coïncident. On parle de proportions entre grandeurs et non pas d'égalité entre nombres. De même, un angle droit n'est pas défini par une mesure de 90 degrés, mais par la congruence d'angles adjacents formés en élevant une droite sur une autre (Définition 10, Livre I; Heath 1956). De ce point de vue, la perception de l'inégalité est antérieure à la perception de l'égalité dans les textes anciens des éléments. C'est sans doute pourquoi les propositions sur les inégalités d'angles apparaissent avant la PSAT: les corollaires 1 et 2 dans [B] (paragraphe 251 et 252) correspondent aux propositions 16 et 17 dans Euclide d'Alexandrie (1990) (la PSAT étant la 32[e]). Il est remarquable que dans [T], on ne touche pas à la comparaison d'angles par inégalité. Cela peut être une conséquence de la conceptualisation algébrique des égalités d'angles et de leurs mesures, les inégalités étant plus difficiles à manipuler algébriquement. D'ailleurs, avant la PSAT, cet auteur introduit des inégalités relatives à l'inégalité triangulaire par la comparaison d'entiers, mais ces inégalités se motivent dans les démonstrations en rapprochant des grandeurs géométriques. Quelquefois cependant, malgré l'accompagnement de dessins, les preuves montrent des substitutions, l'ajout, la soustraction ou la décomposition algébrique de grandeurs.

Il semble que [B] parle des angles comme des figures géométriques, alors que [T] en parle comme des mesures d'angles. Dans [B] la somme des angles d'un triangle «vaut deux angles droits»; dans [T], cette somme «égale 2 droits». Cette dernière expression fait abstraction de la figure (l'angle) et ne parle que de sa mesure. Le texte pourrait tout aussi bien s'écrire «égale 180 degrés» (ailleurs, au corollaire IV de [T], la mesure d'un angle est donnée en degrés: «45°»). Si le terme «2 droits» se conserve dans [T], c'est probablement par égard à la tradition, mais il ne s'agit plus du même objet de référence qu'en [B]. En utilisant le terme «vaut», [B] suggère que «angle» renvoie à une grandeur géométrique qui a une «valeur» par comparaison à d'autres grandeurs du même genre, la comparaison procédant par la relation de congruence.

– Fonction apophantique

[B] utilise des propositions complètes du point de vue grammatical : chacune se compose d'un verbe avec son sujet et son complément. Mais on a vu que certaines propositions ne pouvaient guère se comprendre sans regarder le dessin. Si les propositions de [T] ne pouvaient pas non plus se comprendre sans le dessin ; ce serait aussi le cas sans les moyens graphiques non géométriques, comme les lignes de séparation entre la figure et la formalisation de l'énoncé, entre le raisonnement et les preuves, ainsi que la disposition des preuves qui sont à l'opposé et sur la même ligne que les éléments du raisonnement correspondants. Le découpage du texte dans [T] ne se gouverne pas seulement par les règles grammaticales, mais aussi par les catégories métamathématiques. Les propositions grammaticalement complètes dans [T] ne se rencontrent que dans l'énoncé (en langue naturelle) de la PSAT, ses corollaires et certaines des propositions posées dans les preuves. La formalisation de la PSAT et la démonstration ne sont pas constituées de propositions complètes. Cependant, dans [T], il ne faut pas oublier que cet énoncé se décompose ensuite en figure, en hypothèses et en conclusion, et que cette analyse comporte déjà une désignation des angles avec des lettres et une traduction de la formulation verbale en équation algébrique. Ainsi, la fonction apophantique dans [T] devient plus complexe du point de vue sémiotique, en utilisant simultanément une plus grande variété de registres.

– La fonction d'expansion discursive

Suivant la classification des formes d'expansion discursive de Duval (1995, p. 129), on note que [B] emploie exclusivement l'expansion cognitive (et non pas lexicale, formelle ou naturelle). En revanche, [T] utilise aussi bien l'expansion formelle que cognitive en se servant du traitement formel sur les égalités d'angles. Dans chaque texte, la connexité entre les phrases et les expressions peut et doit se comprendre à partir de la connaissance des définitions et propositions introduites plus tôt dans le texte.

Résumé de l'analyse des textes

– Similarités

Les textes étudiés se ressemblent sous plusieurs aspects. Ils présentent tous les deux la géométrie comme un système logique et sûr de propositions objectives qui s'appliquent à des objets abstraits. Le style est impersonnel : les auteurs ne parlent pas en leur nom et ne s'adressent pas directement aux lecteurs. Ils transmettent un savoir qui ne leur appartient pas. Toute l'attention porte sur ce savoir.

L'organisation rédactionnelle des textes est conforme au développement déductif linéaire de la théorie. Le théorème est d'abord énoncé, puis démontré. Les textes ne se réfèrent qu'à eux-mêmes et entretiennent ainsi un contact constant avec le lecteur. Le sens des termes mathématiques et métamathématiques de même que celui des symboles graphiques doit se chercher dans les descriptions ou les définitions données plus tôt dans le texte, et non pas dans les dictionnaires de langue courante ou dans les encyclopédies.

Les figures géométriques jouent un rôle important dans la clarification du sens; sans elles, la théorie deviendrait beaucoup plus lourde. Il n'y a pas d'exercices au voisinage de la PSAT. Le lecteur modèle est quelqu'un qui lit attentivement, essaie de comprendre et de compléter les bouts de raisonnements ou de démontrer ce qui est laissé sans démonstration. Sa préoccupation principale est l'importance relative des énoncés, leur vérité et la validité des arguments. Ce n'est pas, par exemple, leur application en dehors de la théorie[1].

– Différences

Ce qui peut être moins évident, c'est que les différences entre les deux textes sont tout à fait fondamentales. [B] est un texte de référence, centré sur le contenu conceptuel de la théorie et des «idées» principales des preuves. Il reste presque uniquement dans le registre de la langue naturelle et des figures géométriques, sans emprunter ni la notation ni le traitement algébriques. Il demeure aussi en géométrie du point de vue conceptuel; les notions d'angle et d'angle droit sont géométriques, leur comparaison étant basée sur la relation de congruence de figures géométriques.

L'énoncé de la PSAT est le même dans [T], mais il ne s'agit pas des mêmes objets. Dans [B], on fait la somme des angles-figures géométriques alors que dans [T], c'est la somme des mesures d'angles en degrés qui est calculée, bien que cela ne soit pas tout à fait explicite dans le texte (voir cependant le corollaire IV où l'angle est donné en degré). Les démonstrations sont différentes et les implications tirées du théorème (les corollaires) ne sont pas les mêmes. Les corollaires dans [T] parlent uniquement de l'égalité des angles; dans [B], il est question de l'inégalité des angles et de construction. [T] a déjà un pied dans l'algèbre.

Une autre grande différence est l'intention didactique, évidente dans [T], quasiment absente dans [B]. Pour le lecteur de [T], il s'agit non seulement de connaître la théorie, mais de la faire soi-même. Ainsi, le lecteur doit apprendre sinon la théorie de la théorie – la métathéorie –, alors un peu de la technique de formulation et de démonstration de propositions. Avec les termes introduits par la théorie et ceux des figures géométriques (utilisées aussi dans [B]), cette technique ajoute plusieurs registres sémiotiques à ceux du langage naturel. Elle comprend quelques termes métathéoriques qui mettent à jour la structure des énoncés (hypothèse, conclusion) et des démonstrations (démonstration, raisonnement, preuve). L'apprenant doit savoir reconnaître ce qu'il faut démontrer (en le signalant par «CQ faut D») et le moment où la démonstration a été dûment complétée. L'explicitation de la structure de l'énoncé implique aussi la formalisation en notation algébrique des relations entre les grandeurs. La technique de la démonstration suppose une technique du tracé des figures avec tout un langage de symboles qui permet autant d'exprimer les relations d'égalité entre les éléments de la figure que de distinguer entre ce qui est donné par hypothèse et ce qui a été construit dans la démonstration. Cette technique utilise, en plus des signes graphiques non géométriques (ligne verticale séparant les colonnes «raisonnement» et «preuves»), des moyens d'organisation rédactionnelle (correspondance entre les éléments du raisonnement et des preuves) qui représentent l'aspect spatial de la structure de la démonstration.

La «didactification» de la théorie – au sens d'intention «d'initier le lecteur au discours mathématique» (Kieran, Forman et Sfard, 2001, p. 28) comme il est à la mode de dire aujourd'hui – souligne les aspects techniques en les rendant plus visibles du point de vue rédactionnel. Encore faut-il souligner que, du point de vue sémiotique, cela rend le texte de [T] beaucoup plus lourd, la forme l'emportant sur le contenu conceptuel.

Dans [T], l'important travail de segmentation du texte, de recherche de sa structure et d'un équilibre entre formalisation et «déformalisation», sans lequel aucune lecture d'un texte mathématique n'est possible, est déjà réalisé; il ne reste au lecteur qu'à le contempler et en imiter les résultats. Toutefois, cette imitation n'est pas facile, car le lecteur doit apprendre plusieurs nouveaux systèmes sémiotiques, avec leurs unités signifiantes propres et leurs règles de raccordement qui ne sont ni évidentes ni naturelles. À l'opposé, [B] laisse au lecteur la liberté de choisir ses propres moyens sémiotiques pour mettre à jour la structure conceptuelle du théorème et de sa démonstration.

Curieusement, si [T] semble vouloir rendre son lecteur capable de faire des démonstrations, il n'utilise jamais de verbes d'action, mais seulement d'état. Et paradoxalement, [B], sans intention didactique visible, laisse le lecteur prolonger les segments, construire des angles de façon à les faire égaux, bref, d'être maître de la théorie, et non l'esclave d'un système rigide qui est déjà là, en place, défendu par d'innombrables conventions sémiotiques.

Conclusion

Nous avons certes déploré le didacticisme de [T], un manuel des années 1950, qui se retrouve méthodiquement tout au long de l'ouvrage. Les courants en didactique des mathématiques qui se sont développés à partir des années 1960 se sont d'abord élevés contre cette «méthodique» rigide (connue en Allemagne, par exemple, sous le nom de *Stoffdidaktik*). Mais la liberté regagnée, les manuels plus récents donnent-ils plus de chances au lecteur de mieux connaître la géométrie?

En comparant aux textes [B] et [T], les pages de manuels se rapportant à la PSAT tels que *Mathématiques nouvelles* (Hamel, Richard, Hébert, Labrie et Colas, 1966, p. 191-192), *Mathématiques* (Letarte, 1983, p. 210-211), *Mathématiques Soleil* (Drolet et Rochette, 1983, p. 396-397), *Mathématiques au secondaire* (Breton, Mathieu et Smith, 1983, p. 211), *Les maths et la vie* (Maurer, Lopez et De La Grange, 1993, p. 219), *Carrousel mathématiques* (Breton, 1993, p. 260-261) et *Scénarios* (Soulière et Thibaudeau, 1993, p. 317), nous constatons tout de suite que le souci d'objectivation a été remplacé par la volonté de communiquer avec le jeune élève dans son propre langage et par le désir de jouer avec lui. L'importance croissante de la fonction phatique du langage se remarque dans l'usage soutenu de nombreux registres sémiotiques. Les auteurs s'empressent toujours davantage de séduire le lecteur, de lui plaire, de retenir son attention, sinon sur le contenu mathématique, alors du moins sur la page. Les auteurs s'adressent directement au lecteur en le tutoyant, en faisant parler des élèves fictifs [dans *Mathématiques* (Letarte, 1983), l'élève dessiné dit: «J'ai obtenu 180° pour chacun des triangles.»], ainsi qu'en le distrayant avec des icônes, des dessins ou des activités de découpage. *Mathématiques nouvelles* (Hamel *et al.*, 1966) et *Mathématiques au secondaire* (Breton *et al.*, 1983) engagent même le lecteur à découper un triangle dans une feuille de papier pour lui arracher les coins de façon à les placer côte à côte. La fonction phatique se sert de la fonction conative: il faut que le lecteur soit constamment interpellé, questionné, occupé à faire quelque chose.

La terminologie métamathématique disparaît progressivement (plus question de théorèmes, de démonstrations, etc.) au profit d'une terminologie didactique (exercices, activité, objectif, objectif intermédiaire, feuille de travail, un peu plus, etc.). D'ailleurs, parmi les manuels cités, la PSAT n'est, à proprement parler, démontrée que dans *Mathématiques nouvelles* (Hamel *et al.*,1966) et, d'une certaine façon, dans *Mathématiques Soleil* (Drolet et Rochette, 1983).

Les mathématiques deviennent de plus en plus personnelles. On fait parler l'auteur, l'élève, les mathématiciens. Dans un cas (*Les maths et la vie*, Maurer *et al.*, 1993), la PSAT est d'abord vérifiée expérimentalement, par la mesure, mais sa validité, en fin de compte, repose sur un argument d'autorité: il faut l'accepter parce que c'est Descartes qui le dit. Le théorème est désormais une affirmation de la certitude du lecteur. Cette certitude n'est pas nécessairement le résultat d'une dérivation ou d'une explication logique qui se fonde sur des propositions démontrées antérieurement. On cherche à convaincre immédiatement, de façon visuelle ou physique.

Le traitement de l'égalité des angles apparaît verbalement et algébriquement dans *Mathématiques nouvelles* (Hamel *et al.*, 1966) tandis que, dans *Mathématiques Soleil* (Drolet et Rochette, 1983), il se déroule de façon figurale en raisonnant à partir d'une translation du triangle tout entier. Dans les autres manuels, le traitement porte essentiellement sur les modèles physiques ou sur les nombres (addition des mesures des angles en degrés).

En contraste avec une grande richesse des moyens plastiques et du souci d'esthétisme, la fonction poétique du langage est rarement utilisée ou pas employée du tout pour mettre en valeur les rimes et les rythmes de la pensée mathématique.

Les manuels récents ne présentent pas la PSAT comme un élément d'un système théorique et, par conséquent, hypothétique. Le théorème se dévoile comme un fait empirique que l'on découvre à la suite d'activités physiques, comme la manipulation d'un clou que l'on promène le long des côtés d'un triangle, le découpage des coins d'un triangle pour leur disposition côte à côte (*Mathématiques au secondaire*, Breton *et al.*, 1983), ou le mesurage d'angles au rapporteur (*Les maths et la vie*, Maurer *et al.*, 1993).

L'élaboration de manuels scolaires est une tâche difficile et laborieuse. Ce sont souvent des enseignants enthousiastes et compétents qui s'engagent dans une telle aventure, à partir d'un matériel primitif éprouvé en classe pendant plusieurs années. Mais, dans la réalité d'aujourd'hui, tous les auteurs doivent composer avec un ensemble de contraintes techniques, politiques et économiques qui jalonnent la continuité du processus d'élaboration (Richard, 2004*b*). Les élèves et les enseignants accèdent et se servent d'un produit fini, ayant ses caractéristiques sémiotiques spécifiques dont certaines ont été mises en évidence dans notre analyse. Il faut toutefois se garder de porter des jugements de valeur sur ces manuels. Ceux-ci ne pourraient être que trop partiels dans la complexité du contexte historique de production et du panorama scolaire. En outre, notre comparaison s'effectue au voisinage d'une même propriété qui ne peut, à elle seule, rendre compte de caractéristiques globales, comme l'intention des auteurs véhiculée par la constance des messages entretenus par les structures sémiotiques mobilisées.

Malgré cela, l'approche proposée dans l'article peut s'avérer utile dans l'analyse des manuels existants, et peut mener à une planification et à l'écriture de manuels nouveaux, avec non seulement la conscience du pouvoir des moyens langagiers de changer la compréhension d'un texte mathématique, pour le meilleur ou pour le pire, mais avec un savoir théorique capable de développer des procédures systématiques. Ce savoir pourrait alimenter l'étude de questions fondamentales au regard du développement de compétences mathématiques. Dans quelle mesure les manuels scolaires peuvent-ils contribuer éventuellement à la progression des connaissances annoncées dans les programmes officiels? S'agit-il réellement des mêmes concepts, procédures et attitudes mathématiques? Quelle doit être la nature du dispositif didactique qu'il faudrait mettre en place pour compléter l'usage de tel ou tel manuel scolaire?

Notes

1 Si cette dernière affirmation tient pour l'ensemble de [T], il faut nuancer par rapport à l'intentionnalité de [B]. Plus loin dans l'ouvrage, tout à la fin du développement des propositions, cet auteur donne la solution de quelques problèmes non triviaux et plutôt variés.

2 Il s'agit d'un personnage thématique (un mathématicien par volume de la collection) introduit de façon iconique dans la structure organisationnelle pour institutionnaliser certaines propriétés.

Abstract – The objective of this article is to show the pertinence of a functional-structural approach to the study of mathematics school texts. This approach is based on three sources: Duval's theory of language functions, Jakobson's model of language functions in communication, and the model of semiotic structures developed by Richard. Following the presentation of the approach in the first part, the authors apply this to an analysis of two short texts taken from a geometry text used in French secondary schools in Québec. The adidactic objective that can be derived from these two texts shows how the semiotic means used can serve to improve the quality of communication with the future reader.

Resumen – Este artículo tiene por obetivo demostrar la utilidad de un enfoque funcional-estructural para el estudio de los libros de texto en matemáticas. El enfoque origina de tres fuentes: la teoría de las funciones del lenguaje de Duval, el modelo de las funciones del lenguaje en la comunicación de Jakobson y el modelo de las estructuras semióticas desarrollado por Richard. Una vez presentado el enfoque en la primera parte, lo aplicaremos luego al análisis de dos breves textos que proceden de libros de geometría que han sido utilizados en Québec, en escuelas secundarias de lengua francesa. La intención adidáctica que resalta de los dos textos demuestra cómo los medios semióticos movilizados sirven la calidad de la comunicación con el eventual lector.

Zusammenfassung – Dieser Beitrag hat sich zum Ziel gesetzt, die Nützlichkeit einer funktionell-strukturellen Methode für die Untersuchung von Mathematiklehrbüchern zu beweisen. Die Grundlage dazu bilden drei Quellen: Die Theorie der Sprachfunktionen von Duval, das Sprachfunktionsmodell von Jakobson sowie das Modell der semiotischen Strukturen von Richard. Nach Erläuterung unserer Ausgangsquellen bringen wir diese bei der Analyse zweier kurzer Texte aus Geometrielehrbüchern, wie sie an französischen Sekundarschulen in Québec in Gebrauch sind, zur Anwendung. Trotz der in beiden Texten

enthaltenen undidaktischen Intention wird deutlich, wie die eingesetzten semiotischen Mittel für die Kommunikationsqualität mit dem potentiellen Leser eingesetzt werden.

Références

Alexandrie, E. (d') (1990). *Les éléments. Livres I à IV*. Paris : Presses universitaires de France.

Austin, J.L. et Howson, A.G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(3), 161-197.

Baillairgé, C. (1866). *Nouveau traité de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique : suivi du toisé des surfaces et des volumes et accompagné de tables de logarithmes des nombres et sinus, etc., naturels et logarithmiques et d'autres tables utiles*. Québec : C. Darveau.

Barbin, E., Duval, R., Giorgiutti, I., Houdebine, J. et Laborde, C. (2001). *Produire et lire des textes de démonstration*. Paris : Ellipse.

Benveniste, E. (1966). *Problèmes de linguistique générale, 1*. Paris : Gallimard.

Benveniste, E. (1974). *Problèmes de linguistique générale, 2*. Paris : Gallimard.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-123.

Breton, G. (1993). *Carrousel mathématiques 1*. Montréal : Centre éducatif et culturel.

Breton, G., Mathieu, P. et Smith, J.G. (1983). *Mathématiques au secondaire, 1*. Montréal : Éditions HRW.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dortrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J.S. (1974). From communication to language : A psychological perspective. *Cognition*, *3*(3), 255-287.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et la pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Drolet, M. et Rochette, H. (1983). *Mathématiques Soleil 1*. Montréal : Guérin.

Ellerton, N.F. et Clarkson, P.C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. *In* A.J. Bishop (dir.), *International handbook of mathematics education* (p. 987-1034). Dortrecht : Kluwer Academic Publishers.

Gardner, M. (1956). *Mathematics, magic and mystery*. New York, NY : Dover Publications.

Hamel, O., Richard, G.W., Hébert, M., Labrie, J.M. et Colas, L. (1966). *Mathématiques nouvelles. Cours secondaire 2*. Laprairie : Les Éditions FIC.

Heath, T.L. (1956). *The thirteen books of Euclid's elements* (Trad. par T.L. Heath). New York, NY : Dover Publications (1re éd. 1926).

Herbst, P.G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry : Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 283-312.

Jakobson, R. (1960). Linguistics and poetics. *In* T. Sebeok (dir.), *Style in Language* (p. 350-377). Cambridge, MA : Technology Press of M.I.T.

Jakobson, R. (1963). *Essai de linguistique générale*. Paris : Éditions de Minuit.

Kieran, C., Forman, E. et Sfard, A. (2001). Bridging the individual and the social : Discursive approaches to research in mathematics education. *Special Issue of Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 13-271.

Krantz, S.G. (1998). *A primer of mathematical writing*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Krause, E.F. (1986). *Taxicab geometry: An adventure in Non-Euclidean geometry*. Mineola-New York, NY: Dover Publications.

Krygowska, Z. (1969). Le texte mathématique dans l'enseignement. *Educational Studies in Mathematics*, *2*, 360-370.

Letarte, J.M. (1983). *Mathématiques, 1*. Saint-Hyacinthe: Éditions JML.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(2), 165-190.

Love, E. et Pimm, D. (1996). This is so: A text on texts. *In* A.J. Bishop (dir.), *International handbook of mathematics education* (p. 371-410). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Maurer, S., Lopez, A. et De La Grange, C. (1993). *Les maths et la vie, 1re*. Montréal: Brault et Bouthillier.

Meier, J. et Rishel, T. (1998). *Writing in the teaching and learning of mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Nelsen, R.B. (1993). *Proofs without words. Exercises in visual thinking*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Nelsen, R.B. (2001). *Proofs without words II: More exercises in visual thinking*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 59-85.

Otte, M. (1983). Textual strategies. *For the Learning of Mathematics*, *3*(3), 15-28.

Peirce, C.S. (1955). *Philosophical writings of Peirce*. New York, NY: Dover Publications (1re éd. 1940).

Pirie, S.E.B. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol. *In* H. Steinbring, M.G. Bartolini Bussi et A. Sierpinska (dir.), *Language and communication in the mathematics classroom* (p. 7-29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Plantin, C. (1990). *Essais sur l'argumentation. Introduction linguistique à l'étude de la parole argumentative*. Paris: Éditions Kimé.

Richard, P.R. (2003). Proof without words: Equal areas in a partition of a parallelogram. *Mathematics Magazine*, *76*(5), 348.

Richard, P.R. (2004*a*). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berne: Peter Lang.

Richard, P.R. (2004*b*) Continuité et ruptures dans l'évolution des caractéristiques sémiotiques des manuels scolaires de mathématiques en usage au Québec depuis le milieu du XIXe siècle. *In* P. Blouin, S. Cyr, J. Portugais et H. Squali (dir.), *Continuité et rupture entre les mathématiques enseignées au primaire et au secondaire. Actes du colloque 2002 du Groupe de didactique des mathématiques* (p. 31-45). Trois-Rivières: GDM.

Richard, P.R. (2004*c*). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discurso-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, *57*, 229-263.

Sfard, A., Nesher, P., Streefland, L., Cobb, P. et Mason, J. (1998). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? *For the Learning of Mathematics*, *18*(1), 41-51.

Soulière, M. et Thibaudeau, J.G. (1993). *Scénarios, 1*. Montréal: Éditions HRW.

Steenrod, N.E., Halmos, P.R., Schiffer, M.M. et Dieudonné, J.E. (2000) *How to write mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Sterrett, A. (1990). *Using writing to teach mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tahta, D. (1981). On poetry and mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *1*(3), 43-47.

Tessier, G. et Beaugrand, R. (1958). *Manuel de géométrie plane*. Montréal: Centre de psychologie et de pédagogie.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161-177.

Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Annexes

– Illustration 1 [B]. Baillairgé (1866). *Nouveau traité de géométrie* (p. 60-61).

60 **GÉOMÉTRIE.**

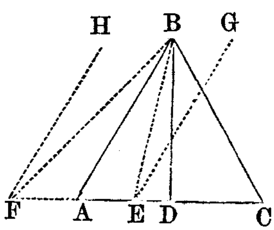
cercle *abc* coupant la ligne indéfinie AB aux points A, B, joindre CA, CB et bissecter l'angle ACB par la ligne CD qui sera la perpendiculaire requise.

En effet, CA, CB étant rayons d'un même cercle, sont égaux, et le triangle ACB est en conséquence isocèle.

(247) Sco. 8. PROB. Si le point D dans la ligne AB était à l'extrémité de cette ligne, ou si le point C hors de cette ligne était tel que la perpendiculaire dût tomber au delà de la ligne; il est évident qu'il n'y aurait qu'à prolonger d'abord la ligne et à procéder ensuite comme ci-dessus.

PROP. III. THÉOR.

(248) Si deux angles BAC, BCA d'un triangle ABC sont égaux, les côtés BC, BA qui sous-tendent ces angles ou qui leur sont opposés, sont aussi égaux.



Du point B menez BD perpendiculaire à AC (**246**), ce qui donnera l'angle BCD = BDA. Supposez maintenant que le triangle BDC tourne autour de la ligne BD de manière à s'appliquer sur le triangle BDA; l'angle BDC étant par construction égal à celui BDA, le côté DC tombera sur DA, le point C sur le point A et le côté BC sur le côté BA; car si le point C ne tombe pas sur le point A, il tombera en deçà ou au delà de ce point, soit en E ou F, et la ligne BC tombera en BE ou BF.

Dans chacun de ces cas les lignes BE, BF ont une inclinaison sur AC ou AC prolongée différente de celle de la ligne BA, et les angles BEC, BFC sont en conséquence (**123**) inégaux à l'angle A; car, ayant mené FH, EG parallèles à AB, on a l'angle BFC plus petit que HFC ou que son égal BAC, et l'angle BEC plus grand que GEC ou que son égal

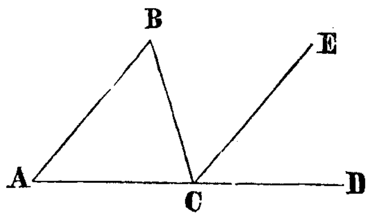
BAC ; les angles HFC, GEC étant à cause des parallèles FH, EG, égaux l'un à l'autre et à l'angle BAC.

Mais si tout autre point que A donne un angle inégal à l'angle C, et puisque par hyp. l'angle BAC=BCA ; il en résulte que le point C tombera sur A et le côté BC sur le côté BA ; et par suite que les côtés BC, BA sont égaux ; donc, etc.

(249) Cor. **Tout triangle équiangle est** donc **aussi équilatéral.**

PROP. IV. THÉOR.

(250) **La somme** A+B+C **des trois angles d'un triangle quelconque** ABC **vaut deux angles droits.**



Ayant prolongé AC indéfiniment jusqu'en D, et fait l'angle ECD égal à BAC, la ligne CE sera parallèle au côté AB du triangle (154). Les angles ABC, ECB seront donc alternes et égaux (153), et l'angle ACB qui avec les angles BCE, ECD vaut deux angles droits, formera aussi deux angles droits avec les angles A et B qui leur sont égaux ; donc, etc.

(251) Cor. 1. **L'angle extérieur** BCD **d'un triangle quelconque** ABC **vaut les deux angles intérieurs et opposés** A, B **du triangle, et est par conséquent plus grand que l'un de ces angles pris séparément.**

(252) Cor. 2. **La somme de deux angles quelconques d'un triangle vaut moins que deux angles droits.** Il est clair que ceci résulte directement du théor.

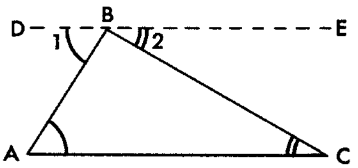
(253) Sco. 1. **PROB.** De l'égalité des angles ECD, BAD, il résulte que EC est parallèle à BA et par suite que pour **mener par un point quelconque** C **une ligne** CE **parallèle**

– Illustration 2 [T]. Tessier et Beaugrand (1958). *Manuel de géométrie plane*, (p. 110-111).

257. THÉORÈME 26

ÉNONCÉ : La somme des 3 angles d'un triangle égale 2 droits.

Figure :



Hypothèse :

A, B et C sont les 3 angles d'un triangle

Conclusion :

$\angle A + \angle B + \angle C = 2$ droits

C.Q. FAUT D.

DÉMONSTRATION

Raisonnement	**Preuves**
1. Menons par B, DE parallèle à AC	1. Construction.
2. $\angle A = \angle 1$	2. comme alternes-internes à cause des parallèles AC et DE et de la sécante AB.
3. $\angle C = \angle 2$	3. comme alternes-internes à cause des parallèles AC et DE et de la sécante BC.
4. $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 2$ droits	4. La somme des angles consécutifs formés dans un plan, autour d'un point et du même côté d'une droite égale 2 droits.
5. $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2$ égalent $\angle A + \angle B + \angle C$	5. puisque $\angle 1 = \angle A$ $\angle 2 = \angle C$ et $\angle ABC = \angle B$
6. donc : $\angle A + \angle B + \angle C = 2$ droits C.Q. FALLAIT D.	6. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

258. COROLLAIRES DU THÉORÈME 26

I. Tout angle dans un triangle, est égal au supplément de la somme des 2 autres.

II. Lorsque 2 triangles ont 2 angles égaux, le 3e angle est aussi égal dans chaque triangle.

III. Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.

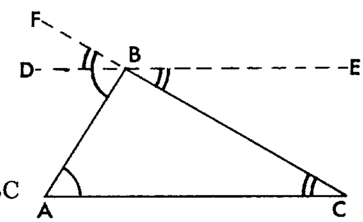
Th. 26

PARALLÈLES ET SÉCANTES **111**

IV. Dans tout triangle rectangle isocèle chaque angle aigu vaut 45°.

V. Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

VI. Tout angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des 2 angles qui ne lui sont pas adjacents.



$\angle$ ABF est l'angle extérieur de $\angle$ ABC (No 93)

$\angle$ ABF est le supplément de $\angle$ ABC (Th. 1)

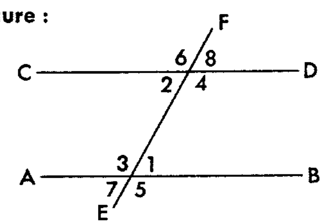
$\angle$ A + $\angle$ C est le supplément de $\angle$ ABC d'après le Corollaire I.

donc $\angle$ ABF = $\angle$ A + $\angle$ C (Axiome No 32 1°).

259. THÉORÈME 27

ÉNONCÉ : **Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-externes sont égaux.**

Figure :



Hypothèse :

AB est parallèle à CD
EF est sécante commune.

Conclusion :

$\angle$ 7 = $\angle$ 8
$\angle$ 5 = $\angle$ 6

C.Q. FAUT D.

DÉMONSTRATION

Raisonnement	Preuves
1. $\angle$ 7 = $\angle$ 1	1. comme opposés par le sommet.
2. $\angle$ 1 = $\angle$ 2	2. comme alternes-internes.
3. $\angle$ 2 = $\angle$ 8	3. comme opposés par le sommet.
4. $\angle$ 7 = $\angle$ 8 C.Q. FALLAIT D.	4. 2 quantités égales à une 3e sont égales entre elles.
5. $\angle$ 5 = $\angle$ 6 C.Q. FALLAIT D.	5. comme suppléments d'angles égaux.

N.B. Nous pourrions démontrer de la même façon que $\angle$ 5 = $\angle$ 6 puis que $\angle$ 7 = $\angle$ 8

Th. 27