ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

POR D. BENITO BAILS,

Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de la de Ciencias naturales, y Artes de Barcelona.

SEGUNDA EDICION.

TOMO II.

MADRID
IMPRENTA DE IBARRA
1816.

BAILS

ELEMENTOS DE MATEMATIC

TOMO

2

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

SEGUNDA EDICION.

TOMO II.

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

POR D. BENITO BAILS,
Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de la de Ciencias naturales, y Artes de Barcelona.

SEGUNDA EDICION.

TOMO II.

MADRID
IMPRENTA DE IBARRA
1816.

PRÓLOGO.

Entre los muchos descubrimientos con que puede honrarse la Matemática, el mas portentoso, quando no sea el mas fundamental, es sin duda alguna el Algebra. Haber inventado símbolos ó caractéres que representen todas las cantidades, sea la que fuere su naturaleza; dar reglas seguras para combinarlas y valuarlas, de modo que en un caso solo vengan cifrados otros infinitos, aunque se diferencien del primero en alguna circunstancia particular; trasladar á la clase de reales cantidades de suyo imposibles; calcular finalmente el mismo infinito, todos estos que parecen prodigios los executa el Algebra con igual acierto que facilidad.

Por lo mismo que es tan dilatado el campo donde luce esta ciencia sus primores, no puede menos de tropezar con asuntos que se la resistan, ó, lo que para ella viene á ser lo propio, no consientan tratarse con aquella generalidad que es el carácter distintivo de todas las investigaciones algebráicas; fundándose en esto la queja de algunos que califican al Algebra de imperfecta. Peró á pesar de los límites en que la tiene ceñida, no sabemos si su naturaleza, ó la cortedad del entendimiento humano, maneja tantos asuntos, que un tratado completo de Algebra en lo que cabe compondria hoy dia muchos volúmenes.

La imposibilidad en que nos hallábamos de tratarla con tanta extension, nos proporcionó dar á nuestro tratado tal carácter, que en el concepto de los que aprecian los trabajos agenos por el entendimiento, y no por la voluntad, le hiciese acreedor á alguna aceptacion, se pudiera cotejar, sin recelo nuestro de padecer algun sonrojo, con los mas de los que andan impresos en varios idiomas, y le hiciese recomendable, ya que no la muchedumbre, á lo menos la eleccion, ó importancia de las doctrinas que en él declaramos. Dirigióse con esta mira todo nuestro empeño á no omitir punto alguno de los que pudiesen facilitar la inteligencia de otros tratados de análisis menos elementales que el que publicamos; deseosos de que en lo que sobrase en este tomo para la cabal inteligencia de los siguientes, hallasen los aficionados un auxîlio con que suplir los principios que suponen obras sobre la misma materia de mayor profundidad y extension. Y como despues de determinados los asuntos podia descaminarnos todavía nuestra cortedad, acudimos para precaver este riesgo á los tratados de Algebra últimamente publicados por Matemáticos de alguna opinion.

El primero de quien echamos mano es el de M. Bezout (1), de donde trasladamos quasi todo lo que en el nuestro se leerá hasta la resolucion de las equaciones su-

(1) *Cours de Mathématiques, a l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine. Par M. Bézout, de l'Académie Royale des Sciences, &c.* París 1767. Son seis tomos en 8. y el tratado de Algebra está en el tercero.

periores. Ninguna obra habia llegado hasta entonces á nuestras manos que tratase con tanto método, claridad y maestría asuntos tan abstractos; siendo lo que trae acerca de la aplicacion del Algebra á la Geometría, que tambien hemos aprovechado, un pedazo tan primoroso, que dudamos se encuentre otro que le iguale, ó por lo menos logre excederle.

Esta aplicacion del Algebra á la Geometría es con efecto un abismo para los principiantes, porque abraza tres puntos que cada uno tiene su dificultad particular. Es preciso 1.º trazar una figura acomodada al intento, entre cuyas líneas hay á veces muchas que se pueden considerar como incógnitas; 2.º hacer un cálculo ajustado á las condiciones de la cuestion; 3.º construir la equacion final, ó trazar, en virtud del valor que expresa de la incógnita, una figura que determine lo que se buscaba. De estas tres operaciones, la segunda da poca, ó ninguna dificultad al que tiene presentes las reglas de calcular; la tercera es ya algo mas complicada; pero la primera es sin contradiccion alguna muy penosa. Ambas piden muchísima práctica, y acerca de la primera solo pueden proponerse reglas generales, que en los casos particulares dan todavía bastante egercicio á la meditacion; de escoger para incógnita, ó para unidad una de las líneas de la figura antes que otra, se originan cálculos mas ó menos complicados, y expresiones algebráicas mas ó menos dificultosas de construir. La mucha práctica infunde, digamosIo así, un tino, un instinto que en esta operacion guia al calculador quasi sin advertirlo. El que deseare adquirir este tino no deberá contentarse con entender las resoluciones que se encuentran de las cuestiones geométricas en las obras impresas; deberá buscar otras, y dar, como dicen, muchas vueltas á una misma cuestion. Alguna vez hallará en premio de sus afanes una resolucion mas directa y sencilla que la del autor con quien luchare; de quien no hemos de presumir diese á la estampa la primera que le ocurrió, sino entre muchas, ó muchísimas que buscó, la que por su elegancia le pareció mas merecedora de salir al público (2).

Entre varias obras donde se hallan resueltas muchas cuestiones geométricas, y cuyo estudio podríamos aconsejar, señalaremos dos no mas, ambas fundamentales, y parto de dos ingenios extraordinarios, á quienes debe la Matemática los grandes progresos que ha hecho de un si-

(2) "Mas es fortuna que destreza, dice Rabuel pag 22. de su Comentario „á la Geometría de Descartes, escoger con acierto las líneas, y empezar co„mo conviene el cálculo. Cuestion hay que se resuelve con suma facilidad si„guiendo un rumbo, la qual seria muy trabajosa, y acaso imposible de re„solver, si se siguiera otro distinto. Por lo que, siempre que un camino pa„rezca largo, ó muy penoso, será prudencia buscar otro, ú otros muchos, „si fuere necesario. No os dexeis alucinar de las resoluciones breves y „despejadas que leyéreis en las obras impresas, donde se encuentran cues„tiones resueltas con tal brevedad y elegancia, que luego se entiende su „resolucion, á la qual no llegó su autor, sino despues de muchísimo traba„jo, y de haberla buscado en vano por muchos caminos."

glo á esta parte. Pero salieron de las manos de sus autores con tan profunda concision, que sin el socorro del docto comentario con que cada una de ellas se publicó despues, sería para todos dificultosísima, é imposible para muchos su inteligencia. La primera es la Geometría de Descartes, Francés (3), que enriqueció la análisis con muchos inventos propios, de donde le vino el nombre de Algebra ó Análisis Cartesiana al asunto que tratamos en este tomo, y fue el primero que aplicó el Algebra á la Geometría de las curvas. La otra obra es la Arismética universal de Newton, Inglés (4), que ensanchó todavía mas los límites de la Análisis Cartesiana. Los comentadores de estas dos obras verdaderamente clásicas, no se ciñeron á aclarar los puntos obscuros del original, variaron al mismo tiempo los egemplos, á fin de que hiciera su variedad mas perceptible todavía el caso ó la regla que dió motivo á su explicacion.

Aunque para el mayor aprovechamiento de los que desearen profundizar esta materia, importa estudien succesivamente la obra de Descartes, y la de Newton, en cuyo estudio tambien se enterarán de lo que cada uno de

(3) *Commentaires sur la Géométrie de M Descartes. Par Claude Rabuel.* Leon de Francia 1730. Es un tomo en 4.

(4) *Arithmetica universalis, sive de compositione & resolutione arithmetica, Auctore Is. Newton. Cum Commentario Joannis Castillionei, in Almo Lycæo Trajectino Philosophiæ, Matheseos & Astronomiæ Professoris ordinarii.* Amsterdam 1761. dos tomos en 4.

estos varones tan señalados añadió á lo que se habia adelantado hasta su tiempo; sin embargo, la dificultad de hallar el Comentario de Rabuel, nos mueve á aconsejarles se contenten con la Arismética universal de Newton. La preferencia que la damos tambien la merece por ser obra mucho mas moderna; y aun quando no la acompañara esta circunstancia, la haria acreedora al distinguido lugar en que la colocamos, el ser un tratado completo de Algebra y Geometría superior, donde, mediante la suma diligencia de M. Castillon, están declarados ambos asuntos por los métodos mas recientes, desde sus primeros elementos. No contento este docto Comentador con aclarar siempre que es necesario las resoluciones analíticas que trae el original de varias cuestiones, resuelve tambien para mayor ilustracion y complemento algunas de las mismas cuestiones por la análisis geométrica; por manera, que la Arismética universal de Newton, conforme ha salido de las manos de su comentador, forma hoy dia una obra que puede suplir por otras muchas.

Antes de declarar cómo se aplica el Algebra á la Geometría, tratamos de la resolucion de las cuestiones indeterminadas, llamadas con este nombre porque incluyen menos condiciones que incógnitas; bien que tambien suelen llamarse semideterminadas siempre que alguna condicion particular reduce á número limitado la infinidad de resoluciones que admiten. Porque como las unidades que en estas cuestiones se consideran son indivisibles en varios casos, y lo son, por egemplo, quando expresan personas, &c. suelen excluirse las resoluciones por números quebrados, cuya circunstancia reduce á mucho menor número los valores de las incógnitas que hacen papel en una cuestion indeterminada. Siguiendo el egemplo de quasi todos los Matemáticos que publicaron tratados de Algebra, nos detuvimos poco en este asunto, pesándonos muchísimo despues que no hubiese salido todavía á luz, quando nos convenia disfrutarla, el Algebra de Leonardo Euler, Suizo (5), donde ademas de lo que trae este gran varon acerca de las cuestiones indeterminadas, hay sobre lo mismo un apéndice muy precioso del célebre Matemático Piamontés M. de Lagrange. El que estudiare este asunto en el Algebra de M. Euler, aunque no se detenga en lo que añadió M. de Lagrange, sabrá de Algebra indeterminada mas de lo que pueda enseñarle ninguno de los tratados de que hacemos y haremos mencion, entrando en este número el del ciego Saunderson, Inglés (6), así por la generalidad y elegancia de los métodos, como por la atinada eleccion de las cuestiones á que los aplica para su mayor declaracion.

(5) *Elémens d'Algebre, par M. Leonard Euler, traduits de l'Allemand, avec des notes, et des additions.* Paris 1774. dos tomos en 8. El traductor es Juan Bernouli el mozo, Director del Observatorio Real de Berlin.

(6) *Elémens d'Algebre de M. Saunderson, Professeur de Mathématiques dans l'Université de Cambridge. Traduits de l'Anglois, & augmentés de quelques remarques par M. de Joncourt.* Paris 1746. dos tomos en 4.

Tambien nos detenemos en manifestar qué cosa es el infinito, y el infinitamente pequeño, de que se hace mencion con mucha frecuencia en varias investigaciones matemáticas, sentando desde ahora los fundamentos de las consideraciones que en el tomo tercero nos servirán para desvanecer el errado concepto que algunos tienen hecho del infinito matemático. No es este, segun se hará patente, una cantidad que no puede ser mayor; pues ninguna hay, por grande que la supongamos, que no admita incremento. Una cantidad que de puro grande no admitiese aumento alguno, seria un infinito metafisico, un ente de razon en las cosas criadas, un absurdo que argüiria de limitada la Omnipotencia del Criador. Pero considerado matemáticamente el infinito, esto es, como el valor sumo, el último término de aumento á que puede llegar una cantidad, que sin embargo nunca le alcanza, es una cosa muy fácil de percibir, y de ningun modo repugna con los principios de la Geometría; y aunque dicha cantidad jamas llegue á su último grado de aumento, podemos suponer en algunos casos que le ha conseguido, en cuyo supuesto quanto se la añadiere no la engrandecerá mas, ni tampoco padecerá diminucion alguna reparable quando se la quitare una cantidad cortísima ó despreciable; quiero decir, que el infinito siempre se queda el mismo aunque se le añada, ó quite una cantidad finita ó infinitamente pequeña. Esta es una proposicion de suyo evidente; pero no por eso nos pareció superflua la demostracion rigurosa, en nuestro entender, que de ella trae Emerson (7), y hemos copiado.

Como las cantidades imaginarias suelen espantar á muchos principiantes, damos á conocer su orígen, aprovechando lo que acerca de este punto trae M. Mauduit en su Astronomía Esférica (8). Es constante que las cosas imposibles ni exîsten, ni parece pueden servir de egercicio á un calculador: esto es verdad; pero siempre que un calculador haga un supuesto absurdo, ha de parar forzosamente su cálculo en una imposibilidad; debe, pues, haber en el Algebra una señal característica de las cantidades que dan á conocer por el cálculo final el absurdo sobre que va fundado. Este es el orígen de las cantidades imaginarias; y como solo manifiestan la imposibilidad del caso que se considera quando se hallan en el último resultado del cálculo, es preciso haya reglas para calcularlas; porque casos suelen ocurrir en los quales combinándolas unas con otras, al fin se desaparecen, y sale la última expresion en que para el cálculo libre de cantidades imaginarias.

(7) En su *Treatise of Algebra in two Books. Book I. Containing the fundamental principles of this art. Together with all the practical rules of operation. Book II. Containing a great variety of problems in the most important branches of the Mathematics.* Londres 1764. un tomo en 8.

(8) *Principes d'Astronomie Sphérique, ou traité complet de Trigonométrie Sphérique: dans l'quel on a réuni les solutions numériques, géométriques & analytiques de tous les problêmes qui ont rapport à la résolution des triangles sphériques quelconques; avec une théorie des différences des mêmes triangles, par M. Mauduit, Professeur de Mathématiques.* Paris 1765. un tomo en 8.

A la aplicacion del Algebra á la Geometría, se sigue la doctrina de las equaciones superiores, y no pasamos de las de quarto grado. En esta teórica no hemos copiado á ningun autor en particular; tuvimos por mas acertado entresacar de varios lo mejor que en nuestro juicio traia cada uno de ellos sobre el asunto. Acudimos con esta mira al Algebra de Clairaut (9), muy acreedora á los grandes créditos con que ha corrido, que en muchos puntos aclara la Arismética universal de Newton, y obra de un ingenio monstruosamente temprano, pues no tenia mas de diez y seis años de edad quando escribió un tratado de curvas, con el qual podrian honrarse aun hoy dia Matemáticos provectos. Lo que sacamos de Clairaut lo juntamos con algunos pedazos de Ricati (10), y del Abate Marie (11), sacando de este último quasi al pie de la letra lo que pertenece á la resolucion de las equaciones de quarto grado, y

(9) *Elémens d' Algebre, par M. Clairaut, de l' Académie Royale des Sciences, &c.* Paris 1749. un tomo en 8.

(10) *Institutiones Analyticæ à Vincentio Ricati, & Hieronymo Saladino Collectæ.* Bolonia 1765. tres tomos en folio.

(11) *Lezons élémentaires de Mathématiques, par M. l'Abbé de la Caille, &c. Nouvelle édition, augmentée de la resolution des problêmes indeterminés, d' une introduction à la théorie des équations des degrés supérieurs, de la méthode inverse des séries, du calcul analytique des logarithmes, de nouveaux élémens de Géométrie, de Trigonométrie, & de Sections coniques, de la description de plusieurs autres courbes, & des principes du Calcul différentiel, & du Calcul intégral. Par M. l'Abbé Marie, Professeur de Mathématiques au College Mazarin.* Paris 1770. un tomo en 8.

el método de extraer las raices de las cantidades en parte racionales, y en parte irracionales, á las quales algunos llaman *binomios* (12), aun quando incluyen alguna cantidad imaginaria.

De los dos casos que abraza esta operacion, el que pertenece á la extraccion de la raiz quadrada de los binomios, incluyan ó no imaginarias, no tiene dificultad, y todos los Autores modernos le resuelven por una misma fórmula; pero quando se trata de sacar la raiz cúbica de las mismas cantidades, cuesta no poco trabajo conseguirlo. De los dos métodos que conocíamos para la resolucion de este caso, siempre nos ha parecido muy elegante el que inventó Moivre, Frances, y le declara latamente Castillon

(12) Así las llaman Leonardo Euler en sus Elementos de Algebra, y el P. Reyneau, Frances, plana 257 de su Obra famosa intitulada:

Analyse démontrée, ou la méthode de résoudre les problêmes des Mathématiques, & d'apprendre facilement ces Sciences; expliquée & démontrée dans le premier volume, & appliquée dans le second à decouvrir les proprietés des figures de la Géométrie simple, & composée; à résoudre les problêmes de ces Sciences, & les problêmes des Sciences Physico-Mathématiques en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le Calcul différentiel, & le Calcul intégral, ces derniers calculs, y sont aussi expliqués & démontrés. Paris 1708. dos tomos en 4. Esta Obra ha sido hasta poco ha muy clásica en Francia; pero fuera de que no cumple su autor la palabra que da de demostrarlo todo, y se le han notado algunos descuidos en el Cálculo integral, se debe mirar como antiquada hoy dia, que se han multiplicado y perfeccionado tanto los métodos. Este es el concepto que tambien ha formado de la Obra del P. Reyneau el gran Matemático Frances M. D'alembert, segun lo da á entender en el Diccionario Encyclopédico.

en su citado Comentario. A no ser porque respecto de los binomios que incluyen imaginarias empeña en cálculos sumamente prolixos, le hubiéramos preferido al que proponemos, porque la práctica de este tiene todas las dificultades peculiares á la resolucion de las equaciones de tercer grado, por cuyo motivo le omite M. Euler (13). Pero la brevedad con que se demuestra, nos movió á preferirle al de Moivre. Y si hubieran llegado con tiempo á nuestras manos los Elementos del P. Gherli, dejando todos estos métodos particulares, hubiéramos aprovechado uno general que trae en su tomo tercero este docto Religioso para extraer una raiz qualquiera quadrada, cúbica, &c. de un binomio, sea quadrado, ó cúbico el radical que incluye.

En la doctrina de las equaciones superiores acaso se echarán menos dos métodos, de los quales el uno es sumamente aventajado para resolver qualesquiera equaciones numéricas, y es de fecha bastante antigua (14) para que pudiera haber llegado á nuestra noticia. Pero se hallaba estampado cabalmente en dos colecciones (15), que desde los princi-

(13) Véase la plana 630 del tom. 1. de sus Elementos de Algebra.

(14) La publicó Lagny, Frances, su inventor, en el tomo de las Memorias de la Real Academia de las Ciencias de Paris para el año de 1722.

(15) Se halla, segun digimos en la nota antecedente, en el tomo de las Memorias de la Academia de las Ciencias de Paris para el año de 1722, y en el tomo de las de la Real Academia de Petersburgo para el año de 1728.

pios excluimos de la clase de las obras que pensábamos disfrutar; habiendo hecho firme propósito de sacar todo quanto hubiese de entrar en nuestra obra de tratados escritos exprofeso sobre cada una de las materias que habia de incluir, fiados en que la diligencia de sus Autores nos ahorrase el trabajo de registrar las Actas de diferentes Academias, que ni en todas partes se encuentran con facilidad, ni tampoco cabia su adquisicion en la corta esfera de nuestros posibles. Fúndase este método en la teórica de las diferencias finitas, y en una propiedad muy reparable de las potencias de los términos de la serie de los números naturales, las diferencias de cuyas potencias forman otra serie, las diferencias de los términos de esta forman otra, hasta parar en una serie de términos en progresion arismética, cuyas diferencias son constantes. De aquí resulta un número de series, incluyendo la de las diferencias constantes, una unidad mayor que el exponente de la potestad á la qual se suponen levantados los términos de la serie natural. Por lo que mira á la declaracion de las consecuencias y aplicaciones que de aquí se sacan para la resolucion de las equaciones, acúdase al Curso del P. Gherli, que trata este punto con la misma claridad que todos los demas. Aquí nos ceñirémos á decir que mediante lo que le ha mejorado M. de Lagrange en las Memorias de la Real Academia de Berlin, es universalísimo este método, aplicándose á qualesquiera equaciones, sean las que fueren sus raices, reales, imaginarias, racionales, irracionales, enteros, quebrados, iguales, desiguales, parte reales, y parte imaginarias, &c.

El otro método para resolver las equaciones que falta en este tratado, es el de su resolucion por los divisores irracionales. Moviónos á omitirle su poca utilidad, y las dificultades que acompañan su aplicacion; este es el concepto que de él formará qualquiera que le usare, y ha formado un Escritor Frances (16), que seguramente no peca de poco afecto á los descubrimientos y gloria de Newton, inventor de este método. Thomas Simpson, Inglés, se empeñó de intento en su demostracion (17), y sin duda alguna hizo patentes sus fundamentos mejor que ninguno de los escritores de Algebra, cuyas obras han llegado á nuestra noticia.

Ultimamente, si hubiéramos tenido con tiempo los Elementos de Matemática que para la Academia de los

(16) M. Mourraille, individuo de la Academia de las Ciencias de Marsella, en su Obra intitulada: *Traité de la résolution des équations invariables.* Paris 1770. Este tratado, que compone un tomo en 4. es profundo, y supone mucha doctrina en su Autor, y no poca en los que desearen entenderle. Acaso incluye algunas proposiciones aventuradas; pero conviene suspender el juicio acerca de ellas hasta ver cómo las prueba, segun ofrece, M. Mourraille en el tomo segundo, que no se ha publicado todavía.

(17) Hallase en su Obra intitulada: *Miscellaneous tracts on some Curious, and very interesting subjects in Mechanics, Physical-Astronomy, and Speculative Mathematics &c. By Thomas Simpson.* Londres 1757. un tomo en 4.

Caballeros Guardias Marinas de Nápoles iba escribiendo D. Vito Caraveli (18), hubiéramos aprovechado para la resolucion de las equaciones afectas de quarto grado un método que trae de Vicente Christofaro, por el qual se saca con suma brevedad la equacion de tercer grado, llamada *auxiliar* ó *reducida*, á que apelan en este asunto todos los escritores de Algebra, y se aplica con igual facilidad á qualesquiera equaciones de quarto grado, ora tengan todos sus términos, ora carezcan del segundo, en cuyo último estado las supone el método ordinario.

Declarado quanto llevábamos ánimo de publicar acerca de las equaciones superiores, nos engolfamos en la doctrina de las series, dándolas á conocer con las mismas expresiones que usa Leonardo Euler en una obra muy profunda y original (19), porque aun los asuntos que no son nuevos los trata con maravillosa novedad, y su estudio tendrá mucha conveniencia á los que desearen adelantar en la ciencia del Análisis. Pero el punto mas dificultoso que abraza la doctrina de las series, esto es, el hallar su suma quando es posible, y dar á conocer las

(18) *Elementi di Matematica, composti per uso della Reale Academia de' Cavalieri Guardia-Marine, dal primario professore della medesima Vito Caraveli.* Nápoles 1770. Siete tomos en 8. que los quatro últimos componen un tratado completo de Algebra.

(19) *Introductio in analysin infinitorum. Auctore Leonardo Eulero, Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.* Lausana 1748. dos tomos en 4.

que son sumables, le hemos copiado al pie de la letra de los Opúsculos de Ricati (20). Dudamos que se encuentre cosa igual en esta materia, ya se atienda á la elegancia del método, ya á la claridad con que le propone su Autor; tanto, que ha merecido le copiasen igualmente el Abate Sauri, y el P. Gherli, y aconseja su uso el Abate Bossut (21), dándole los dos primeros escritores las alabanzas que tan justamente se merece.

Hemos alargado la doctrina de las series con manifestar su aplicacion al cálculo de los logaritmos, y de las líneas trigonométricas. La primera de estas dos aplicaciones se encamina á enseñar cómo se calculan los logaritmos por el Algebra Cartesiana, con mas brevedad que por el método insinuado en el Tomo primero. Y por no omitir punto alguno de los principales que encierra esta investigacion, hemos trasladado con alguna corta declaracion parte de lo que trae Leonardo Euler en su introduccion antes citada para hallar el logaritmo de un número propuesto; señalamos la diferencia que hay entre los diferentes sistemas de logaritmos, y particularmente en qué discrepan de todos los demas los logaritmos llamados *hiperbólicos* ó *naturales*; y manifestamos cómo se averigua qué

(20) *Vincentii Riccati Opusculorum ad res physicas, & mathematicas pertinentium. Tomus primus* 1758. *Tomus secundus* 1762. Bolonia. Son ambos en 4.

(21) Véase la plana 430 de su Obra intitulada: *Traité Elémentaire d'Algebre: par M. l'Abbé Bossut, de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingenieurs, &c.* Paris 1773. un tomo en 8.

número corresponde á un logaritmo dado, y cómo se reducen á logaritmos vulgares los hiperbólicos, y estos á logaritmos naturales.

Por lo que toca á la aplicacion de las series al cálculo de las líneas trigonométricas, la hemos propuesto de intento con bastante extension; así lo requeria la novedad é importancia de la materia. Las líneas trigonométricas hacen un papel lucidísimo en todas las investigaciones matemáticas desde que el gran Geómetra Leonardo Euler discurrió introducirlas en el cálculo. Como hay tablas donde están calculadas estas lineas, todo cálculo final en que hay lineas trigonométricas se convierte prontamente en números; siendo siempre precisa esta reduccion, porque solo con los números podemos dar idea cabal de las cantidades que determinamos.

No recelamos, ni tampoco nos dá cuidado que sea mal admitida la gran profusion con que damos las fórmulas trigonométricas; nos consta que muchas mas se encuentran en obras profundas, y tambien en otras tan elementales como la nuestra, particularmente en la que escribia Vito Caraveli para la Academia de los Guardias Marinas de Nápoles. El modo que proponemos para sacar las que publicamos dará luz para inventar las que hemos omitido. El que quisiere cerciorarse de que nos hemos quedado cortos, emprenda el estudio (y nos agradecerá el consejo) de la Introduccion de Euler antes mencionada, que no es la sola obra que en este asunto nos ha servido, por tenernos mejor cuenta disfrutar otras donde está tratada esta materia por un término mas elemental que el que es peculiar á su profundo inventor, cuyos Autores tomaron, bien que siguiendo distintos rumbos, desde sus primeros elementos esta doctrina. Aunque hemos sacado algunas proposiciones de tratados sobre asuntos mas encumbrados que los de este Tomo, son tan pocas, que quasi se nos hace exceso de escrupulosidad el no callarlo. Las primeras consideraciones que publicamos acerca de estas cantidades pertenecientes al círculo, son de las Instituciones Analíticas de Ricati; la parte sintética y las fórmulas son de la Astronomía Esférica de M. Mauduit, y lo demas es de la Obra del Matemático Suizo.

A continuacion del cálculo de las lineas trigonométricas manifestamos el uso de algunas fórmulas para averiguar la razon entre el diámetro del círculo, y su circunferencia, y resolver las equaciones de tercer grado comprehendidas en el caso llamado *irreductible*; caso singularísimo, porque siempre se presentan con aspecto imaginario las raices de estas equaciones, siendo así que todas tres son reales.

Es muy antiguo el empeño de determinar la razon entre el diámetro y la circunferencia del círculo, porque desde los tiempos mas remotos hizo indispensable esta determinacion la frecuencia con que la suponen executada los Matemáticos. Como la medida del círculo no se puede sacar cabal sin conocer el verdadero valor de su periferia, conforme lo hemos manifestado en el Tomo antecedente, y medir el círculo es lo propio que hallar quantas veces un quadrado conocido cabe en su superficie; este es el motivo de ser tan sonada esta cuestion con el nombre de quadratura del círculo: y como esto es lo mismo que averiguar quanto coge de largo la circunferencia, ó con qué linea recta es igual, buscar la quadratura del círculo, y buscar su rectificacion es todo uno. Por la suma importancia de este punto han probado para averiguarle sus fuerzas hombres de mucho talento y doctrina: pero todo lo ha burlado su gran dificultad; sin que la poca fortuna que en esta parte han tenido los mayores geómetras baste á escarmentar á tantos ignorantes que con una satisfaccion que toca en descaro se dan de quando en quando por inventores de un hallazgo, que los mas de ellos acaso nunca supieron en qué consiste (22).

La resolucion de las equaciones de tercer grado que estan en el caso irreductible por fórmulas trigonométricas, coincide con la cuestion de la triseccion del ángulo; ó la division de un arco de círculo en tres partes iguales; otra cuestion tambien muy famosa, que ya dexó resuelta

(22) El docto y diligente historiador de las Matemáticas M. Montuclá ha publicado en un tomito en 12. la historia de las tentativas que se han hecho para quadrar el círculo, de los inventos que con este empeño han hecho los verdaderos matemáticos, y de los desvaríos de los temerarios, que pobres de tino, y escasos de noticias han intentado superar la dificultad de esta averiguacion.

por Geometría Diocles, Matemático Griego. El método que dimos para esta division en la Geometría Práctica no la executa con tal rigor, que dexe satisfecho á un Matemático escrupuloso; pero lo que no alcanza aquella operacion mecánica, se logra por Algebra, resolviendo una equacion de tercer grado, cuyas raices se hallan inmediatamente en las tablas de senos, &c. (23).

Aunque podian bastar las aplicaciones que hasta aquí habíamos dado del Algebra á diferentes asuntos, nos pareció oportuno añadir varias cuestiones de Arismética, Algebra y Geometría, á fin de que tantos casos prácticos acabaran de hacer mas perceptibles y familiares á los principiantes los preceptos de la teórica.

Con todas las cuestiones arisméticas que trae Newton en su arismética universal juntamos otras que nos proporcionaron demostrar analíticamente los fundamentos de la regla de dos falsas posiciones, tan socorrida en la Astronomía, y de las reglas de interes simple y compuesto, que ocurren ó pueden ocurrir en asuntos de comercio. En la declaracion de las reglas de interes, de las quales los Autores Ingleses tratan con particular cuidado por el estrecho enlace que tienen con el cálculo político, copiamos con muy leves alteraciones á Emerson (24); pero si

(23) En el tomo IV. de los Elementos citados del P. Gherli hay un método general para dividir un arco de círculo en un número impar qualquiera de partes iguales, y es digno de verse.

(24) Véase su Algebra. Tambien las trae en su Miscelanea.

alguno deseare enterarse mas de raiz, y ver resueltas por rumbos distintos las cuestiones peculiares á esta materia, podrá acudir á una Obra del P. Fontana, que luego darémos á conocer, ó á otra de Ward (25), que con preferencia á la de Emerson hubiéramos disfrutado, si quando convenia las hubiésemos tenido á nuestra disposicion.

En las cuestiones algebráicas, sacadas todas de Emerson, reducimos á una expresion mas sencilla la fórmula que habíamos dado antes para elevar á una potencia qualquiera un binomio dado; enseñamos, bien que no con la generalidad que en el Tomo siguiente, cómo se forma una potencia, ó se saca una raiz qualquiera de una serie pro-

(25) *The Young Mathematician's Guide: being a plain and easy introduction to the Mathematicks. In Five parts.*

I. Arithmetick, vulgar and decimal, with all the usefal Rules: and a general method of extracting the roots of all single powers.

II. Algebra, or arihmetick in species: wherein the method of raising and resolving equations is rendered easy; and illustrated with variety of examples, and numerical questions. Also the whole business of interest and annuities, &c. performed by the pen.

III. The elements of Geometry contracted, and analyticall demonstrated; with a new and easy method of finding the circle's periphery and area to any assigned exacteness, by one equation only; also a new way of making sines and tangents.

IV. Conic Sections, wherein the chief properties, &c. of the ellipsis, parabola, and hyperbola, are clearly demonstrated.

V. The arithmetck of infinites explained, and rendered easy; with it's application to superficial and solid geometry.

With an Appendix of practical gauging. By John Ward. the twelfth edition, carefully corrected and improved by Samuel Clark. Londres 1771. un tomo en 8.

puesta; y últimamente, con el fin de completar lo que dexamos dicho atrás acerca de la resolucion de las equaciones superiores, proponemos un método para expresar con series descendientes ó ascendientes las raices de las equaciones que llevan dos indeterminadas. Aunque el paralelogramo analítico que Newton inventó para esta operacion siempre nos pareció muy acreedor á que le diéramos á conocer; sin embargo, la dificultad de extractar las demostraciones que de sus propiedades traen Cramer (26), y Caraveli (27), la brevedad con que se determinan dichas raices por el método que proponemos, y la recomendable circunstancia que le asiste de traer consigo su demostracion, nos determinó á darle la preferencia.

Ultimamente, las cuestiones geométricas están resüeltas por el método sintético, sin quitar, ni poner, conforme se hallan en Thomas Simpson (28), de quien las hemos

(26) El prólogo del Tomo III. dirá en que Obra.

(27) En su Curso para los Caballeros Guardias Marinas de Nápoles M. Cousin, Socio de la Real Academia de las ciencias de París, ha publicado poco ha una Obra, de la qual darémos individual noticia en el Prólogo del Tomo III. donde ha generalizado muchísimo el método que aquí publico, que al cabo viene á ser el del paralelogramo de Newton presentado con otro aspecto.

(28) Se hallan al fin de su obra intitulada: *A treatise of Algebra. Wherein the principles are demonstrated, and applied in many useful and interesting enquiries, and in the resolution of a great variety of problems of different Kinds. To wich added the geometrical construction of a great number of linear and plane problems, with the method of resolving the same numerically. By Thomas Simpson.* Londres 1767. un tomo en 8.

copiado. Tuvimos por necesario dar á conocer con alguna individualidad, bien que solo en casos de Geometría Elemental, el método sintético que dexa tan satisfecho al entendimiento, el qual en la resolucion de las cuestiones que son de su distrito, nada tiene que envidiar al método analítico. ¡Ojalá fuera la Síntesis tan universal como la Análisis! Si esta coadyuva infinito para la invencion, la otra es admirable para la enseñanza; parecen mas convincentes, por mas luminosas, sus demostraciones. Si alguno deseáre ver mas de cerca la diferencia que va de las resoluciones analíticas á las sintéticas, acuda al Tomo VII. de la Obra antes citada de Caraveli, donde entre cuestiones arisméticas, algebráicas, y geométricas juntó el Autor 153 para proporcionar á los principiantes hacer del Algebra aplicaciones muy provechosas. Muchas de las cuestiones geométricas las resuelve por ambos métodos, y esta práctica es sumamente recomendable.

Ademas de los portentos que, segun deciamos al principio de este Prólogo, obra el Algebra, egecuta otro que se hace mas increible á los que no conocen esta ciencia, y es que sugeta tambien al cálculo la contingencia ó probabilidad de los acontecimientos humanos; en una palabra, la misma casualidad. Es constante que por ser el acaso una cosa tan incierta como todos sabemos, parece fuera de los alcances de la Análisis; pero como respecto de qualquier suceso hay algun grado de probabilidad de que acontezca ó no acontezca, esta probabilidad es la que determinan los algebristas. Ninguno hay, por diestro y sutil que sea, cuyo talento alcance á determinar de qué manera una cosa sucederá; pero sabrá apreciar la probabilidad que hubiere de que sucederá ó no, y este es el fin de todos los cálculos de las probabilidades.

Estas investigaciones no se quedan en la clase de especulaciones vanas; son muy útiles para los jugadores, pues les manifiestan qué ventaja ó riesgo tienen de su parte, y cómo se han de gobernar para jugar con la mayor ventaja posible; se aplican al cálculo de las rentas vitalicias (29),

(29) Hay sobre este asunto una Obra muy celebrada de Thomas Simpson, cuyo título es: *The doctrine of annuities and reversions, deduced from general and evident principles: with useful tables shewing the values of single and joint lives &c. at different rates of interest. To wich is added a method of investigating the value of annuities by approximation, without the help of tables. The whole explained in a plain and simple manner, and illustrated by great variety of examples. By Thomas Simpson.* Londres 1775 un tomo en 8.

La primera edicion de esta Obra, que solo sirve para lectores algebristas, es del año de 1742. Pero hecho cargo su autor de la importancia del asunto, y de la multitud de personas á quienes puede ofrecerse resolver algunos casos de esta materia sin mas auxilio que el de la arismética vulgar y decimal, publicó quanto les hace al caso al fin de otra obra suya, cuyo título es: *Select exercices for young proficients in the Mathematicks. Containing*

I. A large variety of algebraical problems with their solutions.

II. A choise number of geometrical problems with their solutions both algebraical and geometrical

III. The Theory of Gunnery, independent of the conic sections.

IV. A new and very comprehensive method for finding the roots of equations in numbers.

de la probabilidad de la vida humana, y á la medida de la mortandad (30). En suma, ninguna investigacion matemática da tanta luz para formar compañías de comercio, hacer otras contratas de que se esperan ganancias, y para apreciar los acasos, y todas las contingencias de la vida civil. Los Legisladores, los que tienen á su cargo el gobierno de las Naciones, necesitan en esta parte del auxilio del Matemático por lo perteneciente á la probabilidad de la vida, y á los cálculos de la mortandad; puntos importantísimos, de cuya determinacion pende la noticia cabal de la poblacion, de su aumento, del consumo de los frutos de la tierra, y el repartimiento equitativo de los tributos.

Aunque de un siglo á esta parte se ha escrito muchísimo sobre esta importante materia, particularmente en Inglaterra, donde se sabe lo mucho que importa el cálculo político (31); sin embargo estrañábamos, y de lo mismo

V. *A short account of the nature and first principles of fluxions.*

VI. *The valuation of annuities for single and joint lives, with a set of new tables, far more extensive than any extant. By Thomas Simpson.* Londres 1752. un tomo en 8.

(30) Llámase *Medida de la Mortandad* la parte, ó número de los vivientes de un lugar determinado que muere cada año.

(31) El año pasado de 1776 se puplicó en Milan una Obra con este título: *La Dottrina degli azzardi applicata ai problemi della probabilità della vita, delle penzione vitalizie, delle reversioni, tontine, &c. di Abramo Moivre: trasportata dall' idioma Inglese, arrichita di note ed aggiunte, e presa per argumento di publica esercitazione matematica tenuta nell' aula della Regia Università di Pavia dal P. Don Roberto Gaeta Monaco Cisterc. Sotto l'ass*

se quejaba Juan Bernouli el mozo (32), de que ningun Matemático se hubiese dedicado hasta ahora á escribir un tratado elemental sobre el cálculo de las probabilidades. Parece que Emerson oyó desde Inglaterra su queja, pues dos años despues publicó tres tratados sobre todos los puntos á que puede aplicarse el cálculo de los acasos (33), que hubiéramos trasladado gustosísimos al Castellano, si hubiesen salido á luz algunos años antes (34).

sistenza del P. Don Gregorio Fontana delle Schole Pie, Regio Professore delle matematiche superiori nella medesima Università. Un tomo en 8.

El autor de esta Obra trae un catálogo de todos los escritos que sobre esta materia se han publicado desde el año de 1662; y son, en Ingles 28; en Frances, 12; en Holandes, 8; en Sueco, 5; en Dinamarques, 1; en Aleman, 9; en Italiano, 3.

(32) Vease la plana 430 del Tomo I. de su traduccion del Algebra de Euler.

(33) Estos tres tratados son *I. Laws of chance. II. Annuities. III. Societies.* Hállanse en la última obra que ha dado á luz Emerson, y se intitula: *Miscellanies. Or a Miscellaneous treatise; containing several Mathematical subjects.* Londres 1776. un tomo en 8.

(34) No creo que nadie se haya figurado que los Matemáticos adivinan; infieren sí, y discurren sobre los antecedentes que se les subministran, y salen sus consecuencias, que son los resultados de sus cálculos, mas ó menos concertadas, segun sea el número, y la naturaleza de estas premisas. Para todos los cálculos que se dirigen á apreciar la probabilidad de la vida humana, es preciso tener á la vista observaciones hechas sobre el número de los muertos y nacidos, con expresion del estado y edad de los que mueren, y quanto mayor fuere la extension del pais donde se hicieren estas observaciones, tanto mas adequadas serán al intento las tablas que por ellas se formaren. Es de suma importancia que estas tablas de la mortandad expresen el estado de los individuos que mueren, porque solo con esta circunstancia pueden ser de algun provecho; pues uno que quisiere

Declaracion del n. 425.

Lo que aquí ocurre principalmente declarar es por qué en virtud de los supuestos que allí hacemos de ser el radio $= r$, sen $nA = a$, sen $A = x$, $n = 3$, la fórmula (402) que espresa el valor de sen nA ó a se reduce á $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}r^2a = 0$.

Para cuyo fin recordaremos que en el supuesto de ser el radio $= r$, las fórmulas que espresan (I. 655 y 656) el valor de sen$(A \pm B)$, y cos$(A \pm B)$ estan divididas por r; de lo qual se sigue que la espresion (379) cos $2A = (\cos A)^2 - (\text{sen } A)^2$ será cos $2A = \frac{(\cos A)^2 - (\text{sen } A)^2}{r}$, que sen $2A = \frac{2 \text{ sen } A \cdot \cos A}{r}$, que cos $3A = \cos(2A + A) = \frac{\cos 2A \cdot \cos A - \text{sen } 2A \cdot \text{sen } A}{r}$, que sen $3A = \text{sen}(2A + A) = \frac{\text{sen } 2A \cdot \cos A + \cos 2A \cdot \text{sen } A}{r}$, y que por lo mismo $(\cos A)^2 - (\text{sen } A)^2 = r \cos 2A$, $2 \text{ sen } A \cdot \cos A = r \text{ sen } 2A$,

imponer dinero á fondo perdido, por egemplo, en cabeza de otro, le buscará en la clase de personas donde fuere menor la mortandad. Pero al Gobierno toca dár al Matemático estas tablas, ó por lo menos las observaciones en que se fundan; las de Süssmilch Aleman, publicadas por tercera vez en dos tomos en 8. en Berlin el año de 1765, pasan por las mejores. De todas las tablas que hasta hoy se han formado de la mortandad se deduce, que de la gente del campo, y de las Villas y Lugares muere cada año de quarenta uno; de las personas de toda una Provincia muere de treinta y seis uno; en las Ciudades menores uno de treinta y dos; en las Ciudades comerciantes y maritímas de veinte y ocho uno; en las grandes Ciudades como uno de veinte y cinco. Tambien manifiestan dichas tablas que las mugeres son de mas larga vida que los varones, y que mueren mas hombres célibes que casados.

$\cos 2A \,.\, \cos A - \text{sen } 2A \,.\, \text{sen } A = r \cos 3A$, y $\text{sen } 2A \,.\, \cos A + \cos 2A \,.\, \text{sen } A = r \text{ sen } 3A$.

Esto presupuesto, si levantamos al quadrado la cantidad $\cos A \pm \text{sen } A\sqrt{-1}$, saldrá $(\cos A \pm \text{sen } A\sqrt{-1})^2 = (\cos A)^2 \pm 2 \cos A \,.\, \text{sen } A\sqrt{-1} - (\text{sen } A)^2$; si en lugar de $(\cos A)^2 - (\text{sen } A)^2$, y de $2 \cos A \,.\, \text{sen } A$, substituimos sus valores sacados poco ha, será $(\cos A \pm \text{sen } A\sqrt{-1})^2 = r \cos 2A \pm r \text{ sen } 2A\sqrt{-1}$. Si multiplicamos ambos miembros por $\cos A \pm \text{sen } A\sqrt{-1}$, saldrá $(\cos A \pm \text{sen } A\sqrt{-1})^3 = r \,.\, \cos 2A \,.\, \cos A \pm r \cos A \,.\, \text{sen } 2A\sqrt{-1} \pm r \cos 2A \,.\, \text{sen } A\sqrt{-1} - r \text{ sen } 2A \,.\, \text{sen } A$; si en lugar de $\cos 2A \,.\, \cos A - \text{sen } 2A \,.\, \text{sen } A$, y de $\text{sen } 2A \,.\, \cos A + \cos 2A \,.\, \text{sen } A$, substituimos sus valores $r \cos 3A$, $r \text{ sen } 3A$, saldrá $(\cos A \pm \text{sen } A\sqrt{-1})^3 = rr \cos 3A \pm rr \text{ sen } 3A\sqrt{-1}$. Prosiguiendo el cálculo á este tenor, inferiríamos que $(\cos A \pm \text{sen } A\sqrt{-1})^n = r^{n-1} \cos nA \pm r^{n-1} \text{sen } nA\sqrt{-1}$; y practicando lo propuesto (401 y 402) vendremos á sacar que la espresion de a, ó del seno de un arco n veces mayor que A, en los supuestos espresados, es $r^{n-1} \text{sen } nA = n.\ \text{sen } A(\cos A)^{n-1} - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\text{sen } A)^3.\ (\cos A)^{n-3} +$ &c. cuya fórmula en virtud de los supuestos hechos, se reduce á $r^2a = 3x(\cos A)^2 - x^3$, de donde sacaremos finalmente $x^3 - \frac{3}{4}r^2 + \frac{1}{4}ar^2 = 0$ con substituir en lugar de $\cos A^2$ su valor $rr - xx$, reducir y trasladar.

ERRATAS.

Página.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
36	2	$\frac{nb+ac-bb-\&}{aa-bb}$	$\frac{ab+ac-bb-\&}{aa-bb}$
36	3	$\frac{3ac-bb-bc-aa}{aa-bb}$	$\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$
82	2	$\frac{\frac{}{2}-4}{5}$	$\frac{\frac{1}{2}-4}{5}$
120	26	$\frac{229+9y}{8}$	$\frac{228-9y}{8}$
122	20	cadaequaci on.	cada equacion.
142	15	2.	2.°
156	26	(153).	(152)
158	12	$x^2+\frac{141}{4}=$.	$x^2+\frac{141}{4}x$
158	14	$\frac{141}{12}x$.	$\frac{141}{4}x$
161	5	$\sqrt{\frac{n}{4m^2}+\frac{p}{m}}$.	$\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}}$
163	14	$\frac{(5-y^2)^5}{y^3}$.	$\frac{(5-y^2)^3}{y^3}$
184	17	$\frac{1}{(2)^8}$.	$\frac{1}{(2)^3}$
205	6	$\sqrt{a+bc}$.	$\sqrt{a^2+bc}$
212	5	$\frac{ty}{n}$.	$\frac{ry}{n}$
215	19	$(a+\frac{aa+bb-cc}{2c})$.	$(a+\frac{aa-bb+cc}{2c})$
215	20	$\frac{2ac+aa+cc-bh}{2c}$.	$\frac{2ac+aa+cc-bb}{2c}$
228	25	R.	R'
229	5	$AI'+IR'$.	$AI+IR'$
240	4	$=\frac{1}{8}cc$,.	$=\frac{1}{4}cc$,
285	9	$=\frac{-a^8b}{a\sqrt{ab}}$.	$=-\frac{a^3b}{a\sqrt{ab}}$
295	15	$+\frac{q}{2g}$.	$-\frac{q}{2g}$
309	16	$+a^2b=0$.	$+a^2b^2=0$

Página.	Linea.	Dice.	Léase.
309	19	$(x-a)$	$(x-a)^2$
310	18	$m(x+b)^{m-}$	$m(x+b)^{m-1}$
315	15	$\sqrt[3]{(P+Q)}$	$\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})}$
315	19	$x-a,$	$x^2-a,$
315	20	$4x^3-4ax-\frac{P}{?}=0$	$4x^3-3ax-\frac{P}{?}=0$
329	2	$+\frac{C}{x^{m-}}$	$+\frac{C}{x^{m-2}}$
329	17	$+Cx$	$+Cx^3$
358	11	$3.\ 2.\ \frac{3^{3n}}{2^{2n}}$	$3.\ 2^2.\ \frac{3^{3n}}{2^{2n}}$
360	10	$\frac{AK^{n+}}{K}$	$\frac{AK^{n+1}}{K}$
360	15	$\frac{(AK-1)K^n+BK^n+(nBK-1)K^n}{K}$	$\frac{A(K-1)K^n+BK^n+nB(K-1)K^n}{K}$
366	23	$\frac{(3-\sqrt{5^n})}{2^n}$	$\frac{(3-\sqrt{5})^n}{2^n}$
389	1	y el menor.	y menor.
390	25	$\frac{1}{}sen.\ 2A$	$\frac{1}{2}sen.\ 2A$
393	2	$cot\frac{1}{2}comp.\ A$	$tan\frac{1}{2}comp.\ A$
393	26	$\frac{1}{2}comp.\ A+tan.\ A$	$tan\frac{1}{2}comp.\ A+tan.\ A$
400	10	$cos(2A+)A$	$cos(2A+A)$
408	10	$cos(A+B)\sqrt{-1}$	$cos(A+B)+\sqrt{-1}$
409	9	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3\ 4.}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$
409	11	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.}(cos.\ A)^{d-4}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}(cos.\ A)^{n-4}$
411	16	$\frac{sen^2(45^\circ+\frac{1}{2}Q)}{cos^2\frac{2}{2}P}$	$\frac{sen^2(45^\circ+\frac{1}{2}Q)}{cos^2\frac{1}{2}P}$

Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Léase.*
414	4	en lugar de *A*......	en lugar de tan. *A*
416	26	$\frac{1-10T^2+5T^4}{5T-10T^2+T^5}$........	$\frac{1-10T^2+5T^4}{5T-10T^3+T^5}$
417	14	$-\frac{1}{m^l}$.............	$-\frac{1}{m^7}$
422	22	$x^3-\frac{1}{3}r^2x+\frac{1}{4}r^2a$....	$x^3-\frac{3}{4}r^2x+\frac{1}{4}r^2a$
424	4	$\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\,\text{sen}\,\frac{1}{}A$......	$\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\,\text{sen}\,\frac{1}{3}A$
449	12	$\frac{-x^9}{16r^5}$..............	$\frac{-x^6}{16r^5}$
450	9	$-\frac{8}{9}c^{\frac{xx}{a}}{}_{a}$............	$-\frac{8}{9}c^{\frac{rx}{aa}}$
461	1	$\frac{1-2bAB-cA^3}{a}$........	$\frac{1-2bAB-CA^3}{a}$
461	7	$\frac{x^4}{2^4}$..............	$\frac{x^4}{24}$
466	22	$a^3x+ax-a^3y-y^4$....	$a^3x+ax^3-a^3y-y^4$
469	18	$-\frac{2}{9}$.............	$-\frac{2}{9x}$
471	6	$-\frac{\ }{216bb}$..........	$-\frac{1}{216bb}$
472	26	$2n+2$...........	$2n=2$
513	10	$::dH:BD::$.......	$::bH:BD::$

INDICE

De lo que contiene este Tomo II.

ELEMENTOS
DE ÁLGEBRA.

1 El objeto de la Ciencia que llamamos *Álgebra*, es dar medios para reducir á reglas generales la resolucion de todas las cuestiones que se pueden proponer acerca de las cantidades. Para ser generales estas reglas, es preciso que no pendan de los valores de las cantidades que se consideran, sí de la naturaleza de cada cuestion; y han de ser siempre las mismas respecto de todas las cuestiones de una misma especie.

Debe, pues, valerse el Álgebra para representar las cantidades de caractéres y signos distintos de los que usa la Arismética. Es evidente que quando siguiendo las reglas que esta enseña, se llega á una conclusion, á un resultado, ó al último términó de la operacion, nada se vé que recuerde al entendimiento el camino por donde ha llegado al fin que se habia propuesto. Si despues de practicadas una ó muchas operaciones de Arismética, hallo 12, nada veo en 12 que me diga si este número proviene de la multiplicacion de 3 por 4, ó de 2 por 6, ó de la adicion de 5 con 7, ó de 2 con 10, ó en general de otra qualquiera combinacion de operaciones. La Arismética dá reglas para hallar ciertos resultados; pero estos resultados no pueden dar reglas. Uno y otro dá el Álgebra; esto es, resultados; y estos resultados subministran reglas: para conseguirlo representa las cantidades por signos generales, que son las letras del abecedario, que como no tienen mas relacion con un número que con otro, nada representan, y si algo representan, no representan mas que lo que uno quiere. Estos signos que permanecen á la vista en todo el discurso del cálculo guardan, por decirlo así, la estampa de las operaciones por donde han pasado; ó por lo menos ofrecen en los resultados de estas operaciones vestigios del camino que se debe seguir para llegar al mismo término por los medios mas sencillos.

No solo representa el Álgebra las cantidades por signos generales, sino que tambien representa cómo están las unas respecto de las otras, y las diferentes operaciones que con ellas se han de executar: en una palabra, todo es representacion; y quando decimos que hacemos una operacion, damos una nueva forma á una cantidad. Al paso que nos fuéremos internando en la materia de este tratado, manifestaremos estos diferentes modos de representar lo que pertenece á las cantidades.

De las operaciones fundamentales que se hacen con las cantidades consideradas generalmente.

2 Se hacen en el Álgebra con las cantidades representadas por letras operaciones análogas á las que se practican con los números en la Arismética: quiero decir que se suman, se restan, se multiplican, se dividen &c.; pero estas operaciones discrepan de las de la Arismética, en que

suelen sus resultados no ser mas que indicaciones de operaciones arisméticas.

De la Adicion y Sustraccion.

3 Llámanse *cantidades semejantes* aquellas que tienen una misma letra, ó unas mismas letras el mismo número de veces; a y a son cantidades semejantes; lo propio digo de bb y bb; pero a y aa no son semejantes.

4 No es menester regla alguna para la adicion de las cantidades semejantes. Es evidente que para sumar una cantidad representada por a con la misma cantidad a, se debe escribir $2a$. Para sumar $2a$ con $3a$, se debe escribir $5a$, y así prosiguiendo.

Por lo que mira á las cantidades que no son semejantes, nos contentamos con indicar esta adicion, para lo que sirve este signo $+$, que segun digimos en la Arismética se pronuncia *mas*. Así, si se quiere sumar una cantidad representada por a, con otra representada por b, nos hemos de contentar con escribir $a+b$: de suerte que no se conoce verdaderamente el resultado sino quando se conocen los valores particulares de las cantidades representadas por a y b: si a vale 5 y b 12, $a+b$ valdrá 17.

Asimismo para sumar $5a+3b$ con $9a+2c$ y $9b+3d$, se escribirá $5a+3b+9a+2c+9b+3d$; y juntando las cantidades semejantes, saldrá $14a+12b+2c+3d$. La operacion que se egecuta quando se forma un todo con las cantidades semejantes, se llama *reduccion*. En el egemplo propuesto $14a$ resulta de la reduccion de $5a$ con $9a$ &c.

5 Lo mismo dirémos respecto de la sustraccion. Sí fueren semejantes las cantidades, no se necesita de regla alguna: es evidente que si de $5a$ restamos $2a$, la resta será $3a$.

Pero si son desemejantes las cantidades, no se puede hacer mas que indicar la sustraccion: lo que se egecuta por medio de este signo $-$, que significa *menos*. Así, si se quiere restar b de a, se escribirá $a-b$. Para restar $5a+4b$, de $9a+6b$, se escribirá $9a+6b-5a-4b$, y juntando ó reduciendo las cantidades semejantes, saldrá la resta $4a+2b$. Finalmente para restar $5a+3b+4c$ de $6a+4b+4d$, se escribirá $6a+4b+4d-5a-3b-4c$, y haciendo la reduccion, saldrá $a+b+4d-4c$.

6 Un número puesto antes de una letra se llama el *coeficiente* de dicha letra: así en $3b$, 3 es el coeficiente de b. Quando ha de llevar una letra 1 por coeficiente, no se escribe este coeficiente: quando de $3a$ se resta $2a$, y sale $1a$, se escribe solo a. Conviene, pues, tener presente que no es cero el coeficiente de una letra quando no le lleva, entonces es 1 su coeficiente, pues se viene á los ojos que a, por egemplo, es una a ó $1a$.

7 Quando se suman ó se restan las cantidades literales, se pueden colocar como se quisiere: si tenemos que juntar a con b, es indiferente escribir $a+b$, ó $b+a$; y si ocurriese restar b de a, se podria escribir igualmente $a-b$, ó $-b+a$. Pero como se pronuncian con mas facilidad las le-

tras, escribiéndolas por el órden del abecedario, le seguiremos, y conviene seguirle lo mas que se pueda.

8 Repárese tambien que quando alguna cantidad no lleva signo, se supone, ó es lo mismo que si llevára el signo $+$: a es lo mismo que $+a$. Es uso corriente suprimir el signo de la cantidad que se escribe la primera, quando esta ha de llevar el signo $+$; pero si ha de llevar el signo $-$, es indispensable escribirle.

Quando despues de concluida una operacion se procede á la reduccion, puede ocurrir tener que restar una cantidad mayor de otra menor: en este caso se resta la menor de la mayor, y se le dá á la resta el signo de la mayor. Por egemplo, si despues de haber sumado $2a + 3b$ con $5a - 7b$, se quiere reducir el resultado $2a + 3b + 5a - 7b$, se escribirá $7a - 4b$, restando $3b$ de $7b$, y dando á la resta $4b$ el signo que llevaba $7b$. Con efecto el signo $-$ de $7b$ en la cantidad $5a - 7b$ indica que $7b$ ha de ser rebajado; pero si aumentamos á $5a - 7b$ la cantidad $2a + 3b$, se viene á los ojos que la cantidad $3b$ que se añade, disminuirá otro tanto la sustraccion que se debia hacer. No se debe, pues, restar sino $4b$: debe, pues, haber $- 4b$ en el resultado. De lo que inferimos esta regla general: *La adicion de las cantidades algebraicas se practica escribiendo sus partes, á continuacion las unas de las otras, con los signos que llevan: redúcense despues á una sola las cantidades semejantes, juntando en una suma todas las que llevan el signo $+$, y en otra todas las que llevan el signo $-$: finalmente se* *resta la menor suma de la mayor, y se le dá á la resta el signo que llevaba la mayor.*

EGEMPLO.

Sumando las quatro cantidades siguientes,

$$\begin{array}{l} 5a + 3b - 4c \\ 2a - 5b + 6c + 2d \\ \quad a - 4b - 2c + 3e \\ 7a + 4b - 3c - 6e \\ \hline \end{array}$$

la suma es $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e$.

Haciendo la reduccion, las a me dan $15a$; las b me dan por un lado $+7b$, y por otro $-9b$, y por consiguiente la resta $-2b$; las c me dan por un lado $-9c$, y $6c$ por otro, y por consiguiente la resta $-3c$: reduciendo las otras del mismo modo, sale finalmente $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9 Las cantidades separadas por los signos $+$ y $-$, se llaman los *términos* de las cantidades cuyas partes son.

10 Llámase *Monomio*, *Binomio*, *Trinomio* &c. una cantidad, quando se compone de 1, de 2, ó de 3 &c. términos; y una cantidad compuesta de muchos términos, cuyo número no se determina, se llama en general *Polynomio.*

11 Por lo que mira á la sustraccion de las cantidades algebraicas, la regla general es esta: *Múdense los signos de la cantidad que se debe restar, esto es, múdese* +

en $-$, *y* $-$ *en* $+$: *súmese esta cantidad, despues de hecha esta mudanza, con la cantidad de la qual se la ha de restar, y hágase la reduccion.*

EGEMPLO.

De $6a - 3b + 4c$ quiero restar la cantidad $5a - 5b + 6c$.

A continuacion de $6a - 3b + 4c$ escribo $- 5a + 5b - 6c$, que es la segunda cantidad despues de mudados sus signos, y sale $6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$; y reduciendo sale la resta $a + 2b - 2c$.

Para manifestar la razon de esta regla escogeremos un exemplo mas sencillo. Supongamos que de a se quiera restar b; es evidente que se debe escribir $a - b$; pero si de a se quiere restar $b - c$, digo que se debe escribir $a - b + c$; con efecto es evidente que lo que se ha de restar no es toda la cantidad b, sino b disminuida de c. Si se resta, pues, b entera escribiendo $a - b$, es preciso que para hacer una compensacion, añada despues lo que se ha restado de mas: se debe, pues, añadir c: se debe, pues, escribir $a - b + c$: quiero decir, que se deben mudar los signos de todas las cantidades que se han de restar.

Con los números no es necesario este cuidado, porque si se ofreciese restar, pongo por caso, $8 - 3$ de 12, se empezaria disminuyendo 8 de 3, de lo que resultaria 5 que se restaria de 12, y saldria la resta 7; pero tambien se echa de ver que se podria restar primero 8 de 12, y á la resta 4 añadirla 3, y saldria igualmente 7. Este último camino es el que se sigue y debe seguirse por precision en el Álgebra, porque no se puede egecutar con las letras como con los números la reduccion preliminar.

12 Las cantidades que llevan el signo +, se llaman *cantidades positivas*; y las que llevan el signo —, se llaman *oantidades negativas*. En adelante trataremos con alguna individualidad de la naturaleza y de los usos de estas cantidades consideradas separadamente la una de la otra.

De la Multiplicacion.

13 Para practicar la multiplicacion algebraica se han de hacer algunas consideraciones que la son peculiares, y que no vienen al caso en la multiplicacion arismética. Fuera de las cantidades hay que atender tambien á los signos.

Si en esta operacion no atendiéramos mas que á los valores numéricos de las cantidades representadas por las letras, hubiéramos de formar de la multiplicacion algebraica el mismo juicio que de la multiplicacion arismética (I. 29): así multiplicar a por b, seria tomar la cantidad representada por a, tantas veces quantas unidades hay en la cantidad representada por b.

14 Pero como el objeto que aquí nos proponemos es poner por obra ó representar la multiplicacion prescindiendo de los valores numéricos de las cantidades, conviene fijar los signos con que representaremos esta multiplicacion.

Se hace uso frecuentemente de este signo × que significa *multiplicado por*: de suerte que $a \times b$ significa a multiplicado por b, ó que se ha de multiplicar a por b.

Sirve tambien un punto puesto entre las dos cantidades que se han de multiplicar: de suerte que $a.b$, y $a \times b$ significan lo mismo.

Finalmente se indica tambien la multiplicacion (á lo menos entre los monomios) sin poner signo alguno entre el multiplicando y el multiplicador. Así $a \times b$, $a.b$, ab son tres expresiones que todas indican que se ha de multiplicar a por b. Este último modo de representar una multiplicacion es el mas usado.

15 Se escribirá, pues, abc quando se quisiere multiplicar ab por c. Para multiplicar ab por cd se escribirá $abcd$, y así de las demas. Es igual escribir las letras por el órden que se quisiere, porque es siempre uno mismo (I. 33) el producto, sígase el órden que se quisiere en la práctica de la operacion.

16 Por consiguiente quando encontráremos en adelante una cantidad como ab, ó abc, ó $abcd$ &c. compuesta de muchas letras escritas á continuacion las unas de las otras sin haber entre ellas signo alguno, inferiremos que dicha cantidad representa el producto de la multiplicacion succesiva de cada una de las letras de que se compone.

17 Hemos llamado factor (I. 31) de un producto todo número que concurre por medio de la multiplicacion para formar dicho producto. Así en ab, a y b son los factores: en abc los factores son a, b, c, y así de los demas.

18 Infiérese de la regla que acabamos de dar (15), que el producto de la multiplicacion de muchas cantidades algebraicas monomias debe incluir todas las letras que contienen el multiplicador y el multiplicando juntos.

Sentado esto, si las cantidades que se han de multiplicar constaren de una misma letra, esta letra se deberá escribir en el producto tantas veces quantas se halla en todos los factores juntos, sea el que fuere el número de las cantidades que se han de multiplicar: así *a* multiplicado por *a* dará *aa*: *aa* multiplicado por *aaa* dará *aaaaa*; *aa* multiplicado por *aaa* y multiplicado todavia por *a*, dará *aaaaaa*.

19 En los casos como este no se escribe dicha letra mas de una vez, pero se escribe ácia la derecha al lado de la letra un poco mas arriba un guarismo que se llama *esponente*, el qual señala quantas veces dicha letra es factor del producto, ó quantas veces se debe escribir. En lugar de *aa* se escribe a^2: en lugar de *aaa*, se escribirá a^3: en lugar de *aaaaa* se escribirá a^5, y á este tenor en los demas casos parecidos á estos. Téngase, pues, presente en adelante que el esponente de una letra señala quantas veces dicha letra es factor en un producto. En $a^3 b^2 c$ hay tres factores de valor diferente, es á saber, *a*, *b*, *c*; pero la primera letra es tres veces factor, la segunda dos veces, y la tercera una vez. Con efecto $a^3 b^2 c$ equivale á *aaabbc*.

De aquí resulta la diferencia que hay entre el coeficiente y el esponente: la diferencia que hay por egemplo entre $2a$ y a^2, entre a^3 y $3a$: en $2a$ el coeficiente 2 espresa que a está sumado con a, esto es, que $2a$ equivale á $a + a$; pero en a^2 el esponente 2 señala que la letra a se deberia escribir dos veces de seguida sin signo alguno; que está multiplicada por sí misma, ó finalmente que es dos veces factor; esto es, que a^2 equivale á $a \times a$: de suerte que si a vale 5, por egemplo, $2a$ vale 10; pero a^2 vale 25.

20 Resulta, pues, que *para multiplicar cantidades monomias que tuvieren letras comunes, se puede abreviar la operacion, sumando succesivamente los esponentes de las letràs semejantes del multiplicando y del multiplicador.* Así, para multiplicar a^5 por a^3, escribo a^8: quiero decir, que escribo la letra a dándola por esponente la suma de los dos esponentes 5 y 3. Igualmente, para multiplicar a^3b^2c por a^4b^3cd escribo $a^7b^5c^2d$, escribiendo primero todas las letras diferentes $abcd$, y dando despues á la primera el esponente 7 que es la suma de los esponentes 3 y 4: á la segunda el esponente 5 que es la suma de los dos esponentes 2 y 3: á la tercera el esponente 2 que es la suma de los dos esponentes 1 y 1; porque aunque no lleva c esponente señalado, se debe no obstante entender que es 1 su esponente, porque c es factor una vez de la cantidad misma c: luego quando una letra no lleva esponente expreso, se considera que tiene 1 por esponente; y recíprocamente todas las veces que fuere 1 el esponente de una letra, se puede escusar escribir este esponente.

Esta es la regla que se ha de seguir por lo que toca á las letras en la multiplicacion de las cantidades monomias.

21 Quando las cantidades monomias llevan un coeficiente, se debe empezar la multiplicacion por este coeficiente, cuya multiplicacion se practica por las reglas de la Arismética. Así para multiplicar $5a$ por $3b$, multiplico primero 5 por 3, despues a por b, y hallo que el producto es $15\,ab$. Del mismo modo, si he de multiplicar $12a^3b^2$ por $9a^4b^3$, me saldrá el producto $108a^7b^5$.

Digimos en la Arismética que una cantidad está elevada á la primera, segunda, tercera potencia &c. ó al primero, segundo, tercer grado, segun es factor 1, 2, 3 &c. veces: luego una letra cuyo esponente es 1, ó 2, ó 3, debe considerarse levantada á la primera, ó á la segunda, ó á la tercera potencia. Así a^2 es la segunda potencia ó el quadrado de a; a^3 es el cubo ó la tercera potencia de a, y así succesivamente.

22 Sentados estos principios, pasemos á la multiplicacion de las cantidades complexas. Para egecutar esta multiplicacion se practica lo mismo que en la Arismética respecto de los números que tienen muchos guarismos: quiero decir, que se ha de multiplicar cada uno de los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, sin apartarse de las reglas que hemos dado para la multiplicacion de los monomios. Pero quando se multiplica un polynomio por otro, se puede empezar la operacion por donde se quisiere: quiero decir, que no hay precision como en la Arismética de executarla de la derecha á

la izquierda: se puede hacer la multiplicacion de las cantidades algebraicas de la izquierda á la derecha; y así lo practicaremos por ser esta práctica la mas comun.

EGEMPLO I.

Se ha de multiplicar .... $a + b$
por c

producto .... $ac + bc$

1.º Multiplico a por c, cuyo producto es (15) ac. 2.º multiplico b por c, y el producto es bc: sumo este segundo producto con el primero, poniendo entre los dos el signo $+$, y hallo que $ac + dc$ es el producto total.

Si hubiese un término mas en el multiplicador, multiplicaria ahora todo el multiplicando por dicho término, y juntaria el segundo producto con el primero.

EGEMPLO II.

Si hubiera de multiplicar .... $a + b$
por .... $c + d$

producto .... $ac + bc + ad + bd$

Despues de multiplicado a y b por c, cuyo producto es $ac + bc$, multiplicaria tambien $a + b$ por d, cuyo producto seria $ad + bd$. Juntando este producto con el primero, saldria $ac + bc + ad + bd$. Con efecto, multiplicar $a + b$ por $c + d$ es tomar no solo a, sino tambien b, tantas veces quantas unidades hay en toda la cantidad $c+d$; esto es, tantas veces quantas unidades hay en c, mas tantas veces quantas unidades hay en d.

EGEMPLO III.

Hay que multiplicar	$a - b$
por	c
producto	$ac - bc$.

Despues de multiplicado a por c, cuyo producto es ac, multiplico b por c, cuyo producto es bc; pero en vez de sumar este segundo producto con el primero, le resto, porque en este caso no se trata de multiplicar la suma de las dos cantidades a y b, sino su diferencia, pues $a - b$ significa que b se debe restar de a; pero si se multiplica a todo entero, como se egecuta en la primera multiplicacion, es evidente que se multiplica de mas la cantidad b que se deberia rebajar de a. Se debe, pues, restar del primer producto la cantidad b multiplicada por c, esto es, se debe restar bc.

Quando se hace la multiplicacion con números es escusado este cuidado, porque antes de practicar la multiplicacion se haria primero la sustraccion que en nuestro caso está indicada en el multiplicando. Si hubiéramos de multiplicar 8 — 3 por 4, reduciríamos sobre la marcha 8 — 3 á 5 que despues multiplicaríamos por 4. Pero tambien se echa de ver que se llegaria al mismo resultado, multiplicando primero 8 por 4, cuyo producto es 32, y despues 3 por 4, cuyo producto es 12; y restando este segundo producto del primero, saldria el producto 20, el mismo que sale por el primer método; pero este modo de hacer la operacion, del qual sería ridículo valerse respecto de los números, se hace indispensable para con las cantidades literales, porque en estas no se puede practicar la sustraccion preliminar.

EGEMPLO IV.

Hay que multiplicar .... $a - b$
por .... $c - d$

producto .... $ac - bc - ad + bd$

Se multiplicará primero $a - b$ por c: el producto será $ac - bc$. Se multiplicará despues $a - b$ por d: saldrá el producto $ad - bd$. Finalmente se restará este segundo producto $ad - bd$ del primero, y saldrá (11) el producto total $ac - bc - ad + bd$.

Y de hecho, yá que el multiplicador c está disminuido de la cantidad d, espresa que no se ha de tomar el multiplicando sino tantas veces quantas unidades hay en c despues de rebajada d; pero como no se puede hacer esta diminucion antes de la multiplicacion, se puede tomar primero $a - b$ tantas veces quantas unidades hay en c, esto es, multiplicar $a - b$ por c, y restar despues del producto la cantidad $a - b$ tomada tantas veces quantas unidades hubiere en d, esto es, restar del primer producto el de $a - b$ multiplicado por d.

23 Si paramos la consideracion en los signos de los términos que componen el producto total $ac - bc - ad + bd$, y los comparamos con los signos de los términos del multiplicando y multiplicador que los han producido, hallaremos 1.º que el término a que suponemos que lleva el signo $+$, multiplicado por el término c que tambien se supone llevar el signo $+$, ha dado el producto ac que se considera que lleva el signo $+$. 2.º que el término b que lleva el signo $-$, multiplicado por la cantidad c que se supone llevar el signo $+$, ha dado el producto bc con el signo $-$. 3.º que el término a que tiene el signo $+$, multiplicado por el término d que lleva el signo $-$, ha dado el producto ad con el signo $-$. 4.º finalmente que el término b que tiene el signo $-$, multiplicado por el término d que lleva el signo $-$, ha dado el producto bd que lleva el signo $+$.

Luego en adelante podremos conocer en las multiplicaciones parciales si los productos particulares se deben sumar ó restar: bastará para esto tener presentes las dos reglas siguientes que nacen de las observaciones que acabamos de hacer.

24 *Si los dos términos que se han de multiplicar el uno por el otro, llevan ambos un mismo signo, esto es, ó ambos* $+$, *ó ambos* $-$, *llevará siempre su producto el signo* $+$. *Si al contrario llevan distintos signos, esto es, el uno* $+$ *y el otro* $-$, *ó el uno* $-$ *y el otro* $+$, *su producto llevará siempre el signo* $-$.

Con el socorro de estas reglas y de las que hemos dado (15, 20, 21 y 22) se puede executar qualquiera multiplicacion algebraica. Pero el que quisiere obrar con método, deberá atender primero á la regla de los signos, despues á la de los coeficientes, finalmente á la de las letras y de los esponentes. Concluiremos con un exemplo en el qual se ponen en práctica todas estas reglas.

EGEMPLO V.

Se ha de multiplicar . . . $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

por . . . . $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{l} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ -20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ +10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\ \hline \end{array}$$

producto $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Multiplico succesivamente los tres términos $5a^4$, $-2a^3b$, $+4a^2b^2$, por el primer término a^3 del multiplicador. Como los dos términos $5a^4$ y a^3 tienen un mismo signo, el producto ha de llevar el signo $+$ (24); pero omito este signo, porque corresponde al primer término del producto (7). Multiplico despues el coeficiente 5 de a^4, por el coeficiente 1 de a^3 (21); sale el producto 5: finalmente, multiplicando a^4 por a^3 segun la regla dada (20), esto es, sumando los dos esponentes 4 y 3 sale a^7, y es por consiguiente $5a^7$ el producto.

Paso al término $-2a^3b$; y habiéndole de multiplicar por a^3, me hago cargo de que siendo diferentes los signos de estas dos cantidades, el producto debe llevar el signo $-$: multiplico despues el coeficiente 2 de $a^3 b$ por el coeficiente 1 de a^3, y finalmente $a^3 b$ por a^3, y sale el producto $-2a^6 b$.

Practicando las mismas reglas, el término $+4a^2b^2$ multiplicado por a^3 dará $+4a^5b^2$.

Despues de multiplicados todos los términos del multiplicando por a^3, se han de multiplicar por el segundo término $-4a^2b$ del multiplicador. El término $5a^4$ multiplicado por $-4a^2b$ de signo opuesto, dará $-20a^6b$: el término $-2a^3b$ multiplicado por $-4a^2b$ que lleva el mismo signo, dará $+8a^5b^2$; y el término $+4a^2b^2$ multiplicado por $-4a^2b$ de signo distinto, dará $-16a^4b^3$.

Finalmente se multiplicará por el último término $+2b^3$, y practicando las mismas reglas saldrán los tres productos parciales $+10a^4b^3$, $-4a^3b^4$, $+8a^2b^5$.

Si se considera que entre los varios productos parciales que se han hallado, hay términos semejantes, esto es, compuestos de unas mismas letras con unos mismos esponentes, se hará la reduccion juntando en una suma los de un mismo signo, y rebajando unos de otros los de signos contrarios, de donde saldrá por fin $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ que será el producto total.

25 Para indicar la multiplicacion entre dos cantidades complexas, es estilo escribir cada una de las cantidades dentro de un paréntesis, poniendo en medio uno de los sig-

nos de multiplicacion de que hemos hablado arriba (14): algunas veces se omite este signo. Así para señalar que toda la cantidad $a^2+3ab+b^2$ se ha de multiplicar por toda la cantidad $2a+3b$, se escribe $(a^2+3ab+b^2)\times(2a+3b)$, ó solamente $(a^2+3ab+b^2)(2a+3b)$. Algunas veces en lugar de escribir cada cantidad dentro de un paréntesis, se tira una línea sobre cada una de este modo.
$\overline{a^2+3ab+b^2}\times\overline{2a+3b}$.

26 En muchos casos tiene mas cuenta indicar la multiplicacion que hacerla: sobre este punto particular no se pueden dar reglas generales, porque esto pende de las circunstancias que acompañan estas operaciones: en adelante ocurrirán algunos de estos casos que solo el uso puede enseñar. Podemos no obstante decir generalmente que conviene contentarse con indicar las multiplicaciones, quando á estas se debe seguir la division, porque como se egecuta muchas veces esta última operacion, solo con suprimir los factores comunes al dividendo y al divisor, se distinguen mas facilmente estos factores comunes, quando no está mas que indicada la multiplicacion.

De la Division.

27 El modo de practicar esta operacion por álgebra, pende mucho de los signos de que usan los Matemáticos para la multiplicacion. Su objeto es el mismo que en la Arismética.

28 Quando la cantidad que ocurriere dividir no tu-

biere letra alguna comun con el divisor, no será posible hacer la operacion: no se puede hacer mas que indicarla, lo que se egecuta escribiendo el divisor debajo del dividendo á manera de quebrado, separando el uno del otro con una raya: así, para espresar la division de a por b, se escribe $\frac{a}{b}$, y se lee a dividido por b: para señalar que se ha de dividir $aa + bb$ por $c + d$, se escribe $\frac{aa + bb}{c + d}$.

29 Quando el dividendo y el divisor son monomios; si todas las letras que hay en el divisor, estan tambien en el dividendo, se puede hacer cabal la division, y se practicará siguiendo esta regla. *Suprímanse en el dividendo todas las letras que tiene comunes con el divisor; las letras que quedáren formarán el cociente.* Así para dividir ab por a, suprimo a en el dividendo ab, y sale el cociente b. Para dividir abc por ab, borro ab en el dividendo, y sale el cociente c.

La razon de esto es muy patente, pues ya que las letras escritas (15) sin signo alguno intermedio, son los factores de la cantidad en que se hallan, las letras del divisor que le son comunes con el dividendo, son por lo mismo factores del dividendo; pero hemos visto (I. 56) que quando se divide un producto por uno de sus factores, debe salir al cociente el otro factor: luego debe constar el cociente de las letras del dividendo que no le son comunes con el divisor.

30 Infiérese de aquí que quando hubiere esponentes, la regla que se deberá seguir consiste en *restar el espo-*

nente de cada letra del divisor, del esponente que la misma letra tuviere en el dividendo: así para dividir a^3 por a^2, resto 2 de 3; resta 1, y por consiguiente el cociente es a^1 ó a. Del mismo modo si he de dividir $a^4b^3c^2$ por a^2bc; saldrá a^2b^2c. Con efecto $\frac{a^3}{a^2}$ es lo mismo que $\frac{aaa}{aa}$ que segun la regla dada se reduce á a con borrar las letras comunes al dividendo y al divisor. En general, ya que en el cociente no debe haber sino las letras que no son comunes al dividendo y al divisor, el esponente de cada letra del cociente no debe ser sino la diferencia entre los esponentes que dicha letra lleva en el dividendo y los que lleva en el divisor.

31 Luego si lleváre una misma letra el mismo esponente en el dividendo y en el divisor, será cero su esponente en el cociente: así a^3 dividido por a^3 dará a^0: $a^3\,bc^2$ dividido por a^2bc^2 dá $a^1b^0c^0$ ó ab^0c^0. En este caso es escusado escribir las letras que llevan el esponente cero; porque cada una de ellas no se distingue de la unidad. Porque quando se divide a^3, por a^3, se busca quántas veces a^3 contiene a^3; pero es evidente que le contiene una vez: luego el cociente debe ser 1 : por otra parte a^3 dividido por a^3 dá a^0: luego a^0 vale 1. En general *toda cantidad cuyo esponente es cero, vale* 1.

32 Si lleváre el divisor algunas letras que no se hallen en el dividendo, ó si algunos de los esponentes del divisor fuesen mayores que los de las mismas letras en el dividendo, en este caso no se podrá hacer cabal la division, y

será preciso contentarse con indicarla no mas, conforme se dijo (28). Pero se puede simplificar el cociente ó la cantidad fraccionaria que entonces le representa. Para cuyo fin se borrarán en el dividendo y el divisor las letras que se hallaren en ambos: de suerte que si hubiere esponentes, se borrará la letra que lleva el esponente menor, y se disminuye de igual cantidad el esponente mayor de la misma letra. Supongamos que se haya de dividir a^5bc^3 por $a^2b^3c^4$; se escribirá $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$ que se reducirá por el método siguiente: se borrará a^2 en el divisor, y se escribirá solo a^3 en el dividendo: se borrará b en el dividendo, y se escribirá solo b^2 en el divisor: finalmente se borrará c^3 en el dividendo, y se escribirá solo c en el divisor: de suerte que el cociente será $\frac{a^3}{b^2c}$. Practicando lo propio se hallará que $\frac{a^2b^5c^3}{a^3bc^2d}$ se reduce á $\frac{b^4c}{ad}$.

Si despues de practicadas estas operaciones no quedase letra alguna en el dividendo, se escribirá la unidad: así $\frac{a^2}{a^3}$ se reducirá á $\frac{1}{a}$.

Facil es percibir la razon de todas estas reglas despues de lo dicho hasta aquí, porque borrar, segun enseña la regla, el mismo número de letras en el dividendo y el divisor, es dividir por una misma cantidad cada uno de los dos términos del quebrado que representa el cociente; cuya operacion (I. 71) no muda el valor del quebrado, y solo le reduce á una espresion mas sencilla.

33 Hasta aquí no hemos atendido á los coeficientes que puede haber en el dividendo ó en el divisor ó en ambos.

Lo que hay que practicar con ellos se reduce á dividirlos como en la Arismética; y quando no puede salir cabal la division, se escriben á manera de quebrado que se reduce á su mas simple expresion (I. 74) quando es posible. Por exemplo, si he de dividir $8a^3b$ por $4a^2b$, divido 8 por 4; sale el cociente 2: dividiendo despues a^3b por a^2b, sale el cociente a, y por consiguiente es $2a$ el cociente total. Si ocurriese dividir $8a^3b^2$ por $6ab$, escribiré $\frac{8a^3b^2}{6ab}$ que se reduce á $\frac{4a^2b}{3}$.

34 La regla que acabamos de dar es general, ya sean monomios el dividendo y el divisor, ya sean polynomios, con tal que en este último caso las letras comunes al dividendo y al divisor sean al mismo tiempo comunes á todos los términos separados por los signos $+$ y $-$. Así si tuviera que partir $a^5+4a^4b-5a^2b^3$ por a^3-5a^2b, reduciria el cociente $\frac{a^5+4a^4b-5a^2b^3}{a^3-5a^2b}$, á la cantidad..... $\frac{a^3+4a^2b-5b^3}{a-5b}$, borrando a^2 que es factor comun de todos los términos del dividendo y del divisor.

35 Quando son complexos el dividendo y el divisor, no se pueden dar reglas generales para conocer solo con mirarlos, si la division puede salir cabal ó no. Para saberlo con certeza, y hallar al mismo tiempo el cociente, se debe practicar lo siguiente.

1.° Se escribirán en una misma línea el dividendo y el divisor, y se *ordenarán* sus términos respecto de una misma letra comun á los dos: quiero decir que se escribirán de manera que esten mas ácia la izquierda aquellos en que dicha letra tubiere mayor esponente, siguiéndose los demás por su orden.

2.° Escritas así ú ordenadas las dos cantidades, se separarán con una raya de arriba abajo el dividendo y el divisor, y se empezará la division partiendo solo el primer término del dividendo, segun las reglas arriba declaradas (29, 30 y 33) por el primer término del divisor, y se escribirá el cociente debajo del divisor.

3.° Se multiplicarán succesivamente todos los términos del divisor por el cociente que se acabare de hallar, y se escribirán los productos debajo del dividendo, teniendo presente que se han de mudar los signos de estos productos.

4.° Se tirará una línea debajo de todo; y hecha la reduccion de los términos semejantes, se escribirá la resta debajo para empezar otra division del mismo modo, tomando por primer término del nuevo dividendo, entre los términos restantes, el que mayor esponente tubiere.

Es de observar que en esta operacion se ha de atender, del mismo modo que en la multiplicacion, á los signos del término del dividendo y del término del divisor, con los quales se está egecutando la division, con cuyos signos se practíca la misma regla que en la multiplicacion; esto es, que

Si el dividendo y el divisor llevan un mismo signo, el cociente llevará el signo $+$.

Si al contrario llevan signos diferentes, el cociente llevará el signo $-$.

Fúndase esta regla de los signos en que (I. 56) el cociente multiplicado por el divisor, debe reproducir al dividendo. Es, pues, preciso que tenga el cociente tales signos que multiplicándole por el divisor salga el dividendo con los mismos signos; de cuya condicion resulta indispensablemente la regla que acabamos de dar.

Para proceder con orden se empezará por los signos, despues se dividirá el coeficiente, y finalmente las letras.

EGEMPLO.

Se ha de dividir $aa - bb$ por $b + a$.

Ordeno el dividendo y el divisor respecto de la una ó de la otra de las dos letras a y b, y respecto de a, por egemplo, y los escribo como se vé aquí.

$$
\begin{array}{lrrr|l}
\text{Dividendo} & aa & - bb & & a + b \text{ divisor.} \\
 & - aa & - ab & & \overline{a - b} \text{ cociente.} \\
\hline
 & & - ab & - bb & \\
 & & + ab & + bb & \\
\cline{3-4}
\text{Residuo} \ldots\ldots & & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Como el signo del primer término aa del dividendo es el mismo que el de a primer término del divisor, he de poner $+$ al cociente; pero como la cantidad que voy á escribir ha de ser el primer término del cociente, puedo omitir el signo $+$.

Divido aa por a: sale el cociente a que escribo debajo del divisor.

Multiplico succesivamente los dos términos a y b del divisor por el primer término a del cociente, y escribo los productos aa y ab debajo del dividendo con el signo —, opuesto al que dió la multiplicacion, porque estos productos se deben restar del dividendo.

Hago la reduccion borrando los dos términos aa y $-aa$ que se destruyen: resta $-ab$ que con la parte restante $-bb$ del dividendo propuesto, compone el nuevo dividendo.

Prosigo la division tomando $-ab$ por primer término del nuevo dividendo.

Dividiendo $-ab$ por a, doyle — al cociente, porque son opuestos los signos del dividendo y del divisor: por lo que mira á las letras, hallo el cociente b, y le escribo á continuacion del primer cociente.

Multiplico los dos términos a y b del divisor por el término $-b$ del cociente: salen los dos productos $-ab$ y $-bb$: mudo sus signos, y escribo $+ab+bb$ debajo de las partes restantes del dividendo. Hago la reduccion borrando las partes semejantes de signos contrarios: como no queda resta alguna, infiero que el cociente es $a-b$.

Se hubiera podido ordenar igualmente el dividendo y el divisor respecto de la letra b, y entonces hubiera sido $-bb+aa$ el dividendo, y $b+a$ el divisor; y operando del mismo modo hubiera salido el cociente $-b+a$, cuya cantidad es la misma que $a-b$.

36 Si despues de ordenados el dividendo y el divi-

sor respecto de una misma letra, se encontrasen muchos términos en los quales tubiera dicha letra un mismo esponente, se escribirian todos estos términos en una misma columna, como se vé en el egemplo siguiente; y en este caso se deberian ordenar todos los términos de cada columna respecto de otra letra distinta de la espresada.

EGEMPLO.

Quiero dividir $19a^2b^2 + 13a^3b - 20a^4 - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$, por $- 3ab - 5a^2 + bb$. Ordeno el dividendo y el divisor respecto de la letra a, con lo que tengo $- 20a^4 + 13a^3b - 10a^3c + 19a^2b^2 - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$, que he de dividir por $- 5a^2 - 3ab + bb$; pero como hay dos términos con a^3, dos con a^2, y otros dos con a: los escribo como se vé aquí, ordenando en cada columna respecto de la letra b.

Dividendo.	$-20a^4$	$+13a^3b$	$+19a^2b^2$	$-5ab^3$	Divisor.
		$-10a^3c$	$-6a^2bc$	$+2ab^2c$	$-5a^2 - 3ab + bb$
	$+20a^4$	$+12a^3b$	$-4a^2b^2$		Cociente.
Residuo		$+25a^3b$	$+15a^2b^2$	$-5ab^3$	$4a^2 - 5ab + 2ac$
		$-10a^3c$	$-6a^2bc$	$+2ab^2c$	
		$-25a^3b$	$-15a^2b^2$	$+5ab^3$	
Residuo. .		$-10a^3c$	$-6a^2bc$	$+2ab^2c$	
		$+10a^3c$	$+6a^2bc$	$-2ab^2c$	
Residuo		0	0	0	

Empiezo la operacion dividiendo $-20a^4$ primer término del dividendo por $-5a^2$ primer término del divisor. Hecha esta operacion por las reglas arriba dadas, sale el cociente $+4a^2$, ó solamente $4a^2$, porque es el primer término, y le escribo al cociente.

Multiplico los tres términos del divisor succesivamente por $4a^2$, y mudando el signo de los productos á medida que los voy formando, los escribo debajo del dividendo, y sale $20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2$ que reduzco con los términos del dividendo, y sale la resta $+25a^3b - 10a^3c + 15a^2b^2 - 6a^2bc - 5ab^3 + 2ab^2c$, que será el nuevo dividendo.

Prosigo la division tomando $+25a^3b$ por dividendo, y sale al cociente $-5ab$: escribo este cociente: multiplico por esta misma cantidad los tres términos del divisor; y mudando el signo de los productos á medida que los voy formando, escríbolos debajo del nuevo dividendo: sale $-25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3$; y reduciendo estas cantidades con los términos de dicho nuevo dividendo, sale la resta $-10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c$, que será el tercer dividendo.

Hago la tercera division tomando $-10a^3c$ por dividendo: hallo el cociente $+2ac$: egecuto la multiplicacion y la reduccion despues de mudados los signos, como antes: no resta nada; y así el cociente es $4a^2 - 5ab + 2ac$.

37 Si se nos ofreciera dividir, por egemplo, a por

$f+gz$, hallaríamos que no puede salir cabal la operacion, y sacaríamos la cantidad $\frac{a}{f}-\frac{agz}{f^2}+\frac{ag^2z^2}{f^3}-\frac{ag^3z^3}{f^4}+\frac{ag^4z^4}{f^5}$ &c. que como se echa de ver, se podria proseguir al infinito, sin que llegásemos jamás á apurar la division.

Esta especie de cocientes ó espresiones que se componen de una infinidad de términos, se llaman *séries infinitas*: hacen mucho papel en las investigaciones mas importantes de la Matemática, y tratarémos de ellas separadamente en otro lugar.

Método para hallar el mayor comun divisor de dos cantidades literales.

38 Este método es parecido al que dimos (I. 77) para sacar el mayor comun divisor de las cantidades numéricas. Despues de ordenadas ambas cantidades por una misma letra, se debe dividir aquella en que dicha letra llevase el mayor esponente por la segunda, y proseguir la division hasta que dicho esponente llegue á ser menor en dicha cantidad que en la segunda, ó igual quando mas. Se dividirá despues la segunda cantidad por la resta de la primera division, y siempre con las mismas condiciones. Hecho esto, se dividirá la primera resta por la segunda, y se proseguirá dividiendo la resta precedente por la resta nueva hasta llegar á una division exacta; en cuyo caso la cantidad que hubiere sido el divisor en la última division, será el mayor divisor comun que se busca. La demostracion

estriba en los mismos principios que la que dimos en la Arismética (I. 77).

Podremos facilitar la práctica de esta regla, observando antes de usarla que no mudan de mayor divisor comun dos cantidades, quando se multiplica ó divide la una de ellas por una cantidad que no es divisor de la otra, ni tiene con ella divisor alguno comun. Por egemplo, a es divisor comun de ab y ac: si multiplico ab por d, resultará abd que no tiene con ac mas divisor comun que a, el mismo cabalmente que tenian ab y ac.

No sucedería lo propio si multiplicára ab por una cantidad que fuese divisor de ac, ó que tuviese un factor comun con ac: por egemplo, si multiplicára ab por c, resultaria abc, cuyo divisor comun con ac es el mismo ac. Igualmente si multiplicára ab por cd que tiene un factor comun con ac, sacaría $abcd$, cuyo divisor comun con ac, es ac.

39 De aquí podremos inferir 1.° que si al tiempo de buscar el mayor divisor comun de dos cantidades, se repara en el discurso de las divisiones succesivas que se hicieren, que el dividendo ó el divisor tiene un factor ó divisor que no sea factor del otro, se podrá suprimir dicho factor.

2.° Que se podrá multiplicar una de las dos cantidades por la cantidad que se quisiese, con tal que no sea divisor de la otra cantidad, ni tenga con ella factor alguno comun.

Hagamos ahora alguna aplicacion de la regla y de estas advertencias.

Supongamos que se nos pida el mayor divisor comun de $aa + 3ab + 2bb$, y $aa - ab - 2bb$. Divido la primera por la segunda: saco el cociente 1 y la resta $-2ab + 4bb$. Intento, pues, la division de $aa - ab - 2bb$ por la resta $-2ab + 4bb$; pero como esta tiene un factor $2b$, que no lo es del nuevo dividendo, suprimo dicho factor $2b$, y me contento con buscar el divisor comun de $aa - ab - 2bb$, y $-a + 2b$, esto es, con dividir $aa - ab - 2bb$ por $-a + 2b$; cuya division sale cabal, é infiero por lo mismo que $-a + 2b$ es el mayor divisor comun de las dos cantidades propuestas.

Para segundo egemplo nos propondrémos hallar el mayor comun divisor de las dos cantidades $5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3$ y $7a^2 - 23ab + 6b^2$. Debería, pues, dividir la primera de estas dos cantidades por la segunda; pero como no se puede dividir cabalmente 5 por 7, multiplicaré la primera por 7, y esto no puede alterar en nada el comun divisor, por no ser 7 factor de todos los términos de la segunda. Tendré, pues, que dividir $35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3$ por $7a^2 - 23ab + 6b^2$. Egecutando la division, sacaré el cociente $5a$ y la resta $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$. Como el esponente de a en la resta es igual al que lleva a en el divisor, podré continuar la division; pero reparo que por la misma razon que antes deberé multiplicar tambien por 7 el nuevo dividendo; y reparo ademas que podre borrar b en todos los términos de $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$, porque no es factor comun de todos los términos del divisor $7a^2 - 23ab + 6b^2$. Hechas estas observaciones, dividiré $-77a^2 + 329ab - 294b^2$ por $7a^2 - 23ab + 6b^2$: sacaré el cociente -11, y la resta $76ab - 228b^2$. Pruebo, pues, la division de $7a^2 - 23ab + 6b^2$ que ha sido hasta ahora el divisor, por la resta $76ab - 228b^2$, ó por mejor decir por $76a - 228b$. Para que se pudiese egecutar la division, sería menester multiplicar la primera de estas dos cantidades por 76; pero antes de egecutarlo conviene saber si 76 es factor ó no de toda la cantidad $76a - 228b$, ó si tiene alguno de sus factores que sea factor comun de dicha cantidad. Reparo que 76 cabe 3 veces en $228b$; y como no es factor de $7a^2 - 23ab + 6b^2$, omito en el divisor $76a - 228b$ el factor 76, y tendré que dividir $7a^2 - 23ab + 6b^2$ solo por $a - 3b$; concluida la division, no queda resta alguna; de donde infiero que el comun divisor de las dos cantidades propuestas es $a - 3b$.

De los Quebrados literales.

40 Calcúlanse los quebrados literales por las mismas reglas que los numéricos, aplicándoles al mismo tiempo las reglas que antes hemos dado en orden á la adicion, la sustraccion, multiplicacion y division algebraicas. Como es muy fácil esta aplicacion, la declararemos con suma brevedad.

41 El quebrado $\frac{a}{b}$ se puede transformar, sin mudar de valor, en $\frac{ac}{bc}$, ó $\frac{aa}{ab}$, ó $\frac{aa + ab}{ab + bb}$, y así prosiguiendo.

Porque estos últimos no son otra cosa que el primero, cuyos dos términos se han multiplicado por c en el primer caso, por a en el segundo, y por $a + b$ en el tercero, cuya multiplicacion no muda (I. 70) el valor del quebrado propuesto.

42 El quebrado $\frac{aac}{abc}$ es el mismo que $\frac{a}{b}$: el quebrado $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ es el mismo que $\frac{2a+b}{4a+3c}$. Esto se comprueba (I. 71) dividiendo los dos términos del primer quebrado por ac, y los dos términos del quebrado $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ por $3a^2$. Esta reduccion de los quebrados á su mas simple espresion estriba en lo dicho (32).

43 Para reducir á un quebrado solo una cantidad compuesta de un entero y de un quebrado, se debe multiplicar, como en la Arismética, el entero por el denominador del quebrado que le acompaña. Por egemplo, $a + \frac{bd}{c}$ se puede transformar en $\frac{ac+bd}{c}$. Asímismo, $a + \frac{cd-ab}{b-d}$ se reduce á $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, multiplicando el entero a por el denominador $b - d$.

Quando despues de concluidas estas operaciones se hallan términos semejantes, se debe hacer su reduccion; así, en el último egemplo, la cantidad $a + \frac{cd-ab}{b-d}$ se transformó en $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$ que se reduce á $\frac{-ad+cd}{b-d}$ ó $\frac{cd-ad}{b-d}$, borrando los dos términos ab y $-ab$ que se destruyen.

44 Para sacar los enteros que puede contener un quebrado literal, se divide, como si fuese numérico, el numerador por el denominador, quanto se puede, practicando las reglas arriba dadas para la division; así, la

cantidad $\frac{3ab+ac+cd}{a}$, se puede reducir á $3b+c+\frac{cd}{a}$; igualmente la cantidad $\frac{a^2+4ab+4bb+cc}{a+2b}$ se reduce á $a+2b+\frac{cc}{a+2b}$, dividiendo por $a+2b$.

45 Quando se hubieren de reducir á un mismo denominador muchos quebrados literales, se practicará lo propio que en la Arismética, así, para reducir á un mismo denominador los tres quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, multiplico ambos términos a y b del primero por df que es el producto de los denominadores de los otros quebrados, y sale $\frac{adf}{bdf}$. Multiplico igualmente los dos términos c y d del segundo por bf producto de los otros dos denominadores, y sale $\frac{bcf}{bdf}$: finalmente multiplico los dos términos e y f del último por bd producto de los denominadores de los otros dos, y sale $\frac{bde}{bdf}$: de suerte que los tres quebrados reducidos al mismo denominador, se transforman en $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Lo propio se practicaria si los numeradores ó los denominadores, ó ambos fuesen complexos, teniendo presentes las reglas que dimos para la multiplicacion de las cantidades complexas. Así se hallará que los dos quebrados $\frac{b+c}{a+b}$ y $\frac{a-2c}{a-b}$ reducidos al mismo denominador se transforman en $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$, y $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, multiplicando los dos términos del primero por $a-b$, y los dos términos del segundo por $a+b$.

46 Quando tienen los denominadores un divisor ó factor comun, se pueden reducir los quebrados á un denominador comun, mas facilmente que por la regla general: supongamos que hayamos de reducir á un mismo denomi-

nador los dos quebrados $\frac{a}{bc}$ y $\frac{d}{bf}$: veo que los dos denominadores serian los mismos si fuese f factor del primero, y c factor del segundo: multiplico, pues, los dos términos del primer quebrado por f, y los dos términos del segundo por c; de cuya operacion sale $\frac{af}{bcf}$ y $\frac{cd}{bcf}$ mas sencillos que $\frac{abf}{bbcf}$ y $\frac{bcd}{bbcf}$ que hubieran salido practicando la regla general. Si hubiéramos de practicar la misma transformacion con los tres quebrados $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, veo que si fg fuese factor del denominador del primero, cg del denominador del segundo, y bf del denominador del tercero, tendrian los tres quebrados un mismo denominador: multiplico, pues, los dos términos del primero por fg, los dos términos del segundo por cg, y los dos términos del tercero por bf, y sale $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{dcg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

Esta observacion se puede aplicar á los números, resolviéndolos en sus factores. Por egemplo, $\frac{5}{12}$ y $\frac{3}{16}$ son lo mismo que $\frac{5}{4\times 3}$ y $\frac{3}{4\times 4}$: multiplico, pues, ambos términos del primero por 4, y ambos términos del segundo por 3, y sale $\frac{20}{4\times 3\times 4}$ y $\frac{9}{4\times 4\times 3}$ que tienen, como se vé, un mismo denominador, y son lo mismo que $\frac{20}{48}$ y $\frac{9}{48}$.

47 Por lo que toca á la adicion y sustraccion de los quebrados, una vez que estan reducidos á un mismo denominador, no hay mas que sumar ó restar sus numeradores. Así los dos quebrados $\frac{b+c}{a+b}$, y $\frac{a-2c}{a-b}$ reducidos á un mismo denominador se transforman, como se vió arriba, en... $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ y $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa+bb}$: si los queremos, pues, sumar, saldrá $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$ que se reduce

á $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Al contrario, si queremos restar el segundo del primero, saldrá $\frac{nb+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$, que se reduce á $\frac{3ac-bb-bc-aa}{aa-bb}$.

48 Para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$; se escribirá $\frac{ac}{bd}$, multiplicando el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador, segun las reglas que se dieron en la Arismética: asimismo, $\frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} b$ será $\frac{1}{4} ab$.

Si se ofreciese multiplicar $\frac{a}{b}$ por c, se podria considerar c como si fuese $\frac{c}{1}$, con lo que la operacion quedaria reducida á la del caso antecedente, y saldria el producto $\frac{ac}{b}$. Como se echa de ver que se reduce el cálculo á multiplicar el numerador por el entero c: inferiremos que *para multiplicar un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se debe multiplicar el numerador por el entero, y darle al producto el mismo denominador que llevase el quebrado.*

Si el numerador y el denominador fuesen complexos, se les aplicaria la regla de la multiplicacion de las cantidades complexas.

49 Si ocurriese dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$: se reducirá la operacion (I. 91) á multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{d}{c}$, practicando la regla antecedente, y sale $\frac{ad}{bc}$. La division de $\frac{a+b}{c+d}$ por $\frac{c+d}{a-b}$ se reduce á multiplicar $\frac{a+b}{c+d}$ por $\frac{a-b}{c+d}$, de cuya division sale $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$ ó $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)^2}$, ó egecutando la multiplicacion indicada en el numerador, $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

Finalmente, si hubiésemos de dividir $\frac{a}{b}$ por c, se podria considerar c como si fuese $\frac{c}{1}$, con lo que seria este caso parecido al antecedente, y se reduciria la operacion á multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{1}{c}$, cuyo resultado sería $\frac{a}{bc}$: de donde se infiere que *para dividir un quebrado por un entero, se debe multiplicar el denominador por el entero, y darle al producto el numerador que lleva el quebrado.*

De la Formacion del quadrado de las cantidades literales.

50 Quando son monomias las cantidades literales, no puede haber dificultad alguna para formar su quadrado. Hemos probado quando declaramos la multiplicacion de estas cantidades (18), que su producto contiene todas las letras del multiplicando y todas las del multiplicador; pero quando se levanta alguna cantidad al quadrado el multiplicando es lo mismo que el multiplicador: luego en un quadrado monomio, cada una de las letras de la raiz ha de ser dos veces factor: luego el esponente de cada una de las letras de un quadrado monomio ha de ser duplo del esponente que llevan las mismas letras en la raiz: luego *para formar el quadrado de una cantidad monomia, se las ha de dar á todas las letras que componen dicha cantidad un esponente duplo del que llevan.* La práctica de esta regla nos manifestará que el quadrado de a será a^2: el de a^3 será a^6: el quadrado de abc será $a^2b^2c^2$: el de $a^2b^3c^4$ será $a^4b^6c^8$: y generalmente, el de $a^m b^n c^p$ será $a^{2m}b^{2n}c^{2p}$.

51 Se echa, pues, de ver, que si la formacion del quadrado de una cantidad literal puede dar alguna dificultad, solo será quando dicha cantidad fuere complexa, ó

un polynomio. Pero ni aun en este caso será dificultosa esta operacion para el que tubiere presente lo que en orden á ella digimos en la Arismética (I. 139), cuya doctrina sirve sin variar en nada para formar el quadrado de los polynomios, conforme los vamos á manifestar.

52 Pero antes conviene hagamos una consideracion que puede ahorrar mucho trabajo en algunos casos, pues reduce la formacion del quadrado de los polynomios al de los monomios. Quando no precisa formar el quadrado de un polynomio, y basta señalarle, se escribe dicho polynomio dentro de un parentesis, y se le añade ácia la derecha, un poco mas arriba, el esponente 2. Para señalar el quadrado de $a + b$, que no se distingue de $(a + b)^1$, se escribirá $(a + b)^2$: el de $m — 3n + q$, se señalará $(m — 3n + q)^2$: representaré por $(m + n)^4$ el quadrado de $(m + n)^2$: lo propio se practicará para señalar el quadrado de otro qualquiera polynomio.

No es dificil hacerse cargo del fundamento de esta práctica. Porque una vez que en el quadrado de una cantidad, sea monomia, sea polynomia, es dos veces factor dicha cantidad, queda espresado el quadrado de un polynomio qualquiera, escribiendo al lado de dicho polynomio el esponente 2, que recuerda la operacion que se ha de hacer para formar el quadrado del polynomio propuesto.

Decimos que $(a + b)^2$ representa el quadrado de $a + b$, porque $(a + b)^2$ no es en realidad dicho quadrado, y solo recuerda que en este quadrado es dos veces factor $a+b$, y se ha de multiplicar $a+b$ por sí mismo si se quiere formar su quadrado. Asimismo $(a+b)\times(a+b)$ no es el producto de $a+b$ multiplicado por $a+b$; pero señala lo que es menester hacer para formar dicho producto.

53 Propongámonos ahora formar en realidad el quadrado de $a+b$, que representa ó puede representar la suma de dos cantidades, sean las que se quisiere. Es evidente que para conseguirlo he de multiplicar $a+b$ por $a+b$, de cuya operacion resultará $a^2+2ab+b^2$. Esta espresion manifiesta de un modo general lo que digimos en la Arismética (I. 139) en orden á la formacion del quadrado, es á saber, que el quadrado de la suma $a+b$ de dos cantidades, se compone del quadrado a^2 de la primera, del duplo $2ab$ de la primera multiplicada por la segunda, y del quadrado b^2 de la segunda.

54 Una vez que la fórmula ó espresion general $a^2+2ab+b^2$ representa el quadrado de la suma de dos cantidades, sean las que fueren, podrá servir para fomar el quadrado de la suma de dos cantidades, aun quando fuesen distintas de las que componen la suma, cuyo quadrado representa la fórmula. Si quisiera espresar el quadrado de $x+y$, por egemplo, es evidente que substituyendo en la fórmula $a^2+2ab+b^2$, x en lugar de a, é y en lugar de b, resultaría $x^2+2xy+y^2$, que es con efecto el quadrado de $x+y$.

Tambien espresará la misma fórmula el quadrado de la diferencia de dos cantidades literales, pongo por caso de $a - b$. Todo será lo mismo excepto el signo del segundo término que por contener el duplo del producto de a por $-b$, ha de llevar el signo $-$ por la razon arriba (24) dada, y así para espresar este quadrado será la fórmula $a^2 - 2ab + b^2$.

55 Del mismo modo que nos ha guiado en la Arismética el quadrado de un número compuesto de decenas y unidades, para formar el quadrado de otro número compuesto de centenares, millares &c. podrá tambien servir la fórmula $a^2 + 2ab + b^2$ para levantar al quadrado un polynomio qualquiera.

Supongamos que se me ofrezca formar el quadrado de $3bc + 4nf + 5mn$.

1.º Es evidente que si esta cantidad no constase mas que de los dos primeros términos, substituyendo en la fórmula $a^2 + 2ab + b^2$ (53), $3bc$ en lugar de a, y $4nf$ en lugar de b, tendríamos el quadrado de $3bc + 4nf$; y como esto sería lo propio que suponer a igual á $3bc$, y b igual á $4nf$, hago este supuesto para proceder con mas seguridad en las substituciones que he de hacer.

Sentado esto, ya que en la fórmula hay a^2, y a es $3bc$, en lugar de a^2 pondré $9b^2c^2$: en lugar de $2ab$ substituiré $2 \times 3bc \times 4nf$; esto es $24bcnf$, y en lugar de b^2 substituiré $16n^2f^2$: de suerte que el quadrado de $3bc + 4nf$ será $9b^2c^2 + 24bcnf + 16n^2f^2$.

2.º Pero como esta cantidad no es sino el quadrado de

$3bc + 4nf$ y no el de $3bc + 4nf + 5mn$ que busco, supondré para proseguir la operacion, que $3bc + 4nf$ es a, y $5mn$ es b, y la fórmula $a^2 + 2ab + b^2$ me dirá lo que queda por hacer.

Por decontado, el primer término a^2 de la fórmula me dice que he de formar el quadrado de a, esto es, en el caso actual el quadrado de $3bc + 4nf$; pero este está ya formado y le saqué antes. He de practicar, pues, lo que dicen el segundo término $2ab$ de la fórmula, y el tercero b^2: quiero decir, que he de formar el duplo del producto de $3bc + 4nf$ por $5mn$, y el quadrado de $5mn$, y juntar estas cantidades que son la primera, $30bcmn + 40mn^2f$, y la otra $25m^2n^2$. Y como no hay mas términos en la cantidad propuesta, queda concluida la operacion; y tendré el quadrado de $3bc + 4nf + 5mn$, juntando las cantidades que han resultado de todas las operaciones practicadas, y saldrá $9b^2c^2 + 24bcnf + 16n^2f^2 + 30bcmn + 40mn^2f + 25m^2n^2$ que es con efecto el quadrado que buscaba.

56 Si la cantidad cuyo quadrado me propuse formar, en vez de ser un trinomio hubiera sido un quadrinomio, supondria ahora que los tres primeros términos, de cuya suma tengo ya formado el quadrado, corresponden á a de la fórmula, y que el quarto corresponde á b, y practicaria siguiendo este supuesto, lo propio que antes.

De donde sacaremos esta regla general para levantar al quadrado una cantidad algebraica multinomia qualquiera: supóngase que el primer término de la cantidad propuesta es a, y el segundo b de la fórmula y fórmense todos los productos que hay en la fórmula $a^2 + 2ab + b^2$. 2.º Supondráse despues que la suma de los dos primeros términos de la cantidad cuyo quadrado se busca, corresponde á a, y el tercer término á b, y se formarán, siguiendo este supuesto, los productos que espresan los dos últimos términos de la fórmula, y se juntarán con lo hallado en la primera operacion. 3.º Se supondrá despues que los tres primeros términos juntos de la cantidad propuesta son a de la fórmula, y el quarto es b: se formarán, siguiendo este supuesto, los productos que señalan los dos últimos términos de la fórmula, y se juntará lo que saliere con lo que hubiere resultado de las dos primeras operaciones, y la suma será el quadrado del quadrinomio propuesto. Bien se echa de ver como se deberia proseguir si constase de mayor número de términos la cantidad cuyo quadrado se busca.

De la Estraccion de la raiz quadrada de las cantidades literales.

57 Buscar la raiz quadrada de una cantidad es, segun digimos ya en la Arismética (I. 133), buscar la cantidad que es dos veces factor en un quadrado propuesto, ó que multiplicada por sí misma una vez produjo dicho quadrado.

Es, pues, la estraccion de la raiz quadrada una operacion toda contraria á la formacion del quadrado, y será preciso, para egecutarla, seguir un camino opuesto al que digimos (50 y 56) se habia de seguir para formar el quadrado de una cantidad literal qualquiera.

58 Quando declaramos el método para formar el quadrado de una cantidad monomia (50), digimos que el esponente de cada una de las letras de un quadrado monomio ha de ser duplo del esponente de las mismas letras en la raiz: luego *para sacar la raiz quadrada de una cantidad monomia, se la ha de dar á cada una de las letras de la cantidad propuesta, un esponente la mitad menor*: en virtud de esta regla la raiz quadrada de a^2 es a; la de a^6 es a^3; la de $a^2b^2c^2$ es abc; la de $a^4b^6c^8$ es $a^2b^3c^4$.

59 Si hubiese algun esponente impar, sería señal de que la cantidad propuesta no es un quadrado perfecto; en este caso despues de practicada la regla, quedaria un esponente fraccionario, del qual se indicaria que se ha de sacar la raiz quadrada de la cantidad que llevare dicho esponente fraccionario. Así la raiz quadrada de $a^2b^3c^4$ es $ab^{\frac{3}{2}}c^2$ ó $abb^{\frac{1}{2}}c^2$; porque podemos considerar $a^2b^3c^4$ como $a^2b^2bc^4$.

60 Para espresar que se ha de sacar de una cantidad qualquiera la raiz quadrada, se escribe dicha cantidad á continuacion de este signo $\sqrt{}$, que se llama *signo radical*: así $abb^{\frac{1}{2}}c^2$, ó, lo que es lo propio, $abc^2b^{\frac{1}{2}}$ equivale á $abc^2\sqrt{b}$. Luego recíprocamente si una cantidad monomia llevare el signo $\sqrt{}$, se podrá omitir este radical con tal que se tome la mitad de cada uno de los esponentes.

Quando la cantidad cuya raiz quadrada se ha de sacar es un quebrado, se alargan las piernas del signo $\sqrt{}$ hasta mas abajo de la linea que separa los dos términos del quebrado: así para espresar la raiz quadrada del quebrado $\frac{a}{b}$ se escribe $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Pero si se quisiese espresar no mas que la raiz quadrada del uno de los dos términos del quebrado, el radical se deberia colocar ó encima ó debajo de la linea que señala la division: así para representar que se ha de dividir por b la raiz quadrada de a, se escribirá $\frac{\sqrt{a}}{b}$.

Si fuese complexa la cantidad cuya raiz quadrada se ha de sacar, se tiraria á continuacion del radical una raya que cubriese toda la cantidad; por egemplo, para representar la raiz quadrada de $3ab+b^2$, se escribiría.... $\sqrt{3ab+b^2}$. Tambien se estila no tirar raya alguna á continuacion del radical, y escribir la cantidad complexa dentro de un parentesis, á quien se le antepone el signo $\sqrt{}$ del modo siguiente $\sqrt{(3ab+b^2)}$.

61 De lo dicho (60) se infiere un método para simplificar quando es posible las cantidades *afectas* del signo $\sqrt{}$. Por egemplo, siendo la cantidad $\sqrt{a^2b^3c}$ lo mismo que $a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, se reduce á $abb^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, ó volviendo á poner el radical en lugar de los esponentes fraccionarios, á $ab\sqrt{bc}$. Asimismo, $\sqrt{a^5b^4c^3}$ se reduce á $a^2b^2c\sqrt{ac}$, considerando $a^5b^4c^3$ como $a^4b^4c^2ac$, y tomando la mitad de los esponentes 4, 4 y 2. Se hallará tambien que $\sqrt{\frac{a^3}{f}}$ se reduce á $a\sqrt{\frac{a}{f}}$, que si se multiplica el numerador y el denominador por f, se reduce á $a\sqrt{\frac{af}{f^2}}$, y finalmente á $\frac{a}{f}\sqrt{af}$.

62 Se ve, pues, que para sacar de debajo del ra-

dical los factores que se pueden sacar, se ha de tomar la mitad de los esponentes de dichos factores. Al contrario para poner debajo del radical un factor que esté fuera, se deberá duplicar el esponente de dicho factor, esto es levantar este factor al quadrado. Así $a\sqrt{b}$ se puede transformar en $\sqrt{a^2b}$; $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ se puede transformar en $\sqrt{\frac{aab}{a}}$ que se reduce á $\sqrt{ab}$. Igualmente se puede transformar $(a+b)\sqrt{c}$ en $\sqrt{\left[(a+b)^2c\right]}$.

63 En todo lo dicho hasta aquí no hemos atendido al coeficiente. Si hubiese alguno, y fuere este un quadrado perfecto, se sacaria su raiz quadrada por las reglas de la Arismética. Así $\sqrt{9a^2b^3}$ se tranforma en $3ab\sqrt{b}$. Igualmente $\sqrt{1024a^2b^3c}$ se transforma en $32ab\sqrt{bc}$.

64 Pero si no fuese el coeficiente un quadrado perfecto, se deberá ver si se puede resolver en dos factores, el uno de los quales sea un quadrado perfecto para sacar su raiz, y el otro se quedará debajo del radical: así $\sqrt{48a^2b^3}$ se reduce á $4ab\sqrt{3b}$, porque siendo 48 el producto de 16×3, $\sqrt{48a^2b^3}$ será $\sqrt{(16 \times 3a^2b^3)}$, ó $\sqrt{(16a^2b^2 \times 3b)}$ lo mismo que $4ab\sqrt{3b}$. Del mismo modo se hallará que $\sqrt{512a^3b^2}$ se reduce á $16ab\sqrt{2a}$.

65 Si la cantidad afecta del signo radical, siendo complexa, no fuese un quadrado perfecto, se deberá indagar si puede resolverse en dos factores, el uno de los quales sea un quadrado perfecto; en este caso se sacará la raiz del factor que fuese un quadrado cabal, y se dejará el otro debajo del radical. Quando el factor quadrado, si hay al-

guno, es monomio, es siempre facil hallarle. Por egemplo, en la cantidad $\sqrt{(4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6b^5)}$, veo que b^2 es factor de todos los términos, de suerte que la espresada cantidad equivale á estotra $\sqrt{[(4a^3 - 5a^2b + 6b^3) \times b^2]}$: saco, pues, la raiz quadrada de b^2, y sale $b\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3)}$.

66 Pero quando este factor quadrado es complexo, ó quando la cantidad complexa que está debaxo del radical es un quadrado, no se puede, para buscar su raiz, sacar separadamente la raiz de cada uno de los términos de que se compone. Por egemplo, si se ofreciera sacar la raiz de $a^2 + b^2$, se equivocaria el que creyese que $a + b$ es esta raiz, pues el quadrado de $a + b$ no es $a^2 + b^2$, si $a^2 + 2ab + b^2$ (53). No hay cantidad literal alguna que esprese cabalmente la raiz de $a^2 + b^2$. El método que se ha de seguir para sacar la raiz de una cantidad complexa que es un quadrado cabal, es el siguiente.

67 Supongamos que ocurra sacar la raiz quadrada de la cantidad complexa $60ab + 36a^2 + 25b^2$. Ordeno los términos de dicha cantidad respecto de una de sus letras, respecto de a por egemplo,

$$\begin{array}{l|l}
36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \text{ raiz} \\ \cline{2-2}
-36a^2 & 12a + 5b \\ \cline{1-1}
\quad + 60ab + 25b^2 & \\
\quad - 60ab - 25b^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Tomo la raiz quadrada del primer término $36a^2$ que es $6a$ y la escribo al lado de la cantidad propuesta.

Quadro esta raiz, y escribo su quadrado $36a^2$ debajo del primer término con el signo — para restarle. Hecha la reduccion resta $+ 60ab + 25b^2$.

Debajo de la raiz $6a$ escribo su duplo $12a$ que me sirve para dividir el primer término de la cantidad restante $60ab + 25b^2$. Hallo el cociente $+ 5b$ que escribo á continuacion de la raiz $6a$, y veo que la raiz que busco es $6a + 5b$; pero para comprobar esta operacion, escribo tambien al lado de $12a$ el cociente $5b$ que acabo de hallar, y multiplico el total $12a + 5b$ por este mismo cociente $5b$; á medida que voy formando los productos, los escribo debajo de la cantidad $60ab + 25b^2$, teniendo presente que he de mudar los signos de dichos productos: hago despues la reduccion, y no resta nada; de lo que infiero que la raiz hallada $6a + 5b$ es con efecto la raiz quadrada cabal de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Servirá de segundo egemplo la cantidad $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Ordénola respecto de la letra a, y sale

$$\begin{array}{l|l} \quad 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & \text{raiz} \\ -4a^2 & 2a - 3b + 4 \\ \hline \text{1.}^{\text{a}}\text{ resta} \quad -12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & 4a - 3b \\ \quad +12ab \qquad\qquad -9b^2 & 4a - 6b + 4 \\ \hline \text{2.}^{\text{a}}\text{ resta} \quad +16ac \qquad -24bc + 16c^2 & \\ \quad -16ac \qquad +24bc - 16c^2 & \\ \hline \text{3.}^{\text{a}}\text{ y última resta} \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 & \end{array}$$

Saco la raiz quadrada $2a$ de $4a^2$, y la escribo al lado; quadro $2a$, y escribo su quadrado con el signo — debajo de $4a^2$: hecha la reduccion, resta $-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2$.

Debajo de la raiz $2a$ escribo su duplo $4a$, que me sirve para dividir el primer término $-12ab$ de la resta: hallo el cociente $-3b$, que escribo á continuacion del primer término $2a$ de la raiz: tambien le escribo al lado del duplo $4a$ de la raiz, y multiplico el total $4a-3b$ por el mismo cociente $-3b$: escribo los productos, despues de mudados sus signos, debajo de la resta $-12ab+16ac$ &c. hago la reduccion, y sale la segunda resta $+16ac-24bc+16c^2$.

Considero ahora los dos términos de la raiz $2a-3b$, como una sola cantidad, duplico esta cantidad, y la escribo debajo, á fin de que me sirva para dividir la segunda resta; pero para egecutar esta division, me contento con dividir, en virtud de lo dicho (35); el primer término $+16ac$ por el primer término $+4a$

del divisor: saco el cociente $+4c$, que escribo á continuacion de la raiz $2a - 3b$, y tambien á continuacion del duplo $4a - 6b$: multiplico esta última suma $4a - 6b + 4c$ por el nuevo término $+4c$ de la raiz; y mudando los signos de los productos al paso que los formo, escribo estos productos debajo de la segunda resta: hecha la reduccion no resta nada. De donde infiero que la raiz hallada es cabal.

Todo esto se funda en que el quadrado de una cantidad compuesta de dos partes contiene el quadrado de la primera, el duplo de la primera multiplicada por la segunda, y el quadrado de la segunda; porque de aquí se sigue que para hallar la primera parte se deberá sacar la raiz quadrada del primer quadrado: que para hallar la segunda, se deberá dividir el término siguiente por el duplo de la raiz hallada; y finalmente, que para comprobar la operacion, se deberá multiplicar el duplo de la primera parte por la segunda, y la segunda por sí misma. A esto se reduce cabalmente el método que acabamos de declarar.

Cálculo de las cantidades afectas del signo $\sqrt{}$.

68 Con las cantidades radicales de que hemos hablado, se hacen las mismas operaciones que con las demas cantidades. Quando las dos cantidades radicales no son semejantes, basta para sumarlas ó restarlas, juntarlas con el signo $+$, ó el signo $-$. Asi $3a\sqrt{b}$ sumado con $4b\sqrt{c}$, dá $3a\sqrt{b} + 4b\sqrt{c}$; y $3a\sqrt{b}$ restado de $4b\sqrt{c}$,

dá $4b\sqrt{c} - 3a\sqrt{b}$. Pero si las cantidades radicales son semejantes, y no se diferencian sino en el coeficiente numérico que está fuera del radical, entónces se sumarán ó restarán los coeficientes, segun se tratáre de sumar ó restar las cantidades radicales. Por egemplo, $4ab\sqrt{c}$ sumado con $5ab\sqrt{c}$, dá $9ab\sqrt{c}$.

Aquí suponemos que se hayan reducido primero las cantidades radicales en virtud de lo dicho arriba (62); porque si tubiéramos que sumar $4b\sqrt{a^3c}$ con $6a\sqrt{ab^2c}$, debiéramos empezar reduciendo el primer radical á $4ab\sqrt{ac}$, y el segundo á $6ab\sqrt{ac}$, y la suma de los dos seria $10ab\sqrt{ac}$.

69 Quando ocurra multiplicar una por otra dos cantidades radicales, se ha de egecutar la operacion como si no hubiera radicales; y se le ha de dar despues al producto el signo radical. Por egemplo, si se me ofrece multiplicar $\sqrt{a}$ por $\sqrt{c}$, multiplicaré a por c; y dándole al producto ac el signo $\sqrt{\ }$, saldrá $\sqrt{ac}$. Multiplicando $\sqrt{a^2+b^2}$ por $\sqrt{ac}$, saldrá $\sqrt{a^3c+ab^2c}$. Asimismo, $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$ es $\sqrt{a^2}$ que es lo mismo que a. $\sqrt{a+b}\times\sqrt{a+b}$ es $\sqrt{(a+b)^2}$ que vale $a+b$; $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ es lo mismo que $\sqrt{(-a)^2}$ que vale $-a$. Se echa, pues, de ver que para quadrar una cantidad afecta del signo $\sqrt{\ }$, basta quitarla dicho signo: así para quadrar $\sqrt{a^2b+b^3}$, escribiré a^2b+b^3.

70 Si se ofreciere dividir una cantidad radical por otra, se egecutará la division como si no hubiese el signo $\sqrt{\ }$, y se le dará al cociente ó al quebrado el signo radical: así, para dividir $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$, se dividirá a por b, de lo que resul-

tará $\frac{a}{b}$; y dándole á este quebrado el signo radical, saldrá el cociente $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Si quiero dividir $\sqrt{ab}$ por $\sqrt{a}$, dividiré ab por a; saldrá b, y el cociente será $\sqrt{b}$. Quando se quisiere dividir $\sqrt{aa-xx}$ por $\sqrt{a+x}$ se dividirá $aa-xx$ por $a+x$; saldrá $a-x$, y el cociente será $\sqrt{a-x}$. $ab\sqrt{bc}$ dividido por $a\sqrt{b}$, dará el cociente $b\sqrt{c}$, dividiendo ab por a, y bc por b.

71 Si alguna de las dos cantidades no llevase el signo $\sqrt{}$, se separaria la una de la otra con una raya bastante larga, para espresar que el radical no cubre á las dos. Por egemplo, para representar la division de a por $\sqrt{b}$, se escribiria $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Para dividir a por $\sqrt{a}$, se escribiria $\frac{a}{\sqrt{a}}$; pero quando hay igualdad de letras en el dividendo y el divisor, suele ser del caso en muchas ocasiones darla el radical á la cantidad que no le lleva, porque esto proporciona simplificaciones muy acomodadas: practicando esto, convertiria a en $\sqrt{a^2}$, y en lugar de $\frac{a}{\sqrt{a}}$ tendria $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}, = \sqrt{a}$. Si se me ofreciere dividir $\sqrt{aa-xx}$ por $a+x$, escribiria $\frac{\sqrt{aa-xx}}{a+x}$ ó $\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{(a+x)^2}}$ ó $\sqrt{\frac{aa-xx}{(a+x)^2}}$; y como el numerador y el denominador se pueden ambos dividir por $a+x$, saldria por fin el cociente $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

De la Formacion de las potencias de las cantidades monomias, de la estraccion de sus raices, y del cálculo de los radicales y de los esponentes.

72 Llamamos *potencia* de una cantidad, segun llevamos dicho, el producto de dicha cantidad multiplicada por sí misma muchas veces consecutivas. a^3 es la tercera potencia de a, porque a^3 resulta de $a \times a \times a$. La cantidad que se ha multiplicado es tantas veces factor en la potencia, quantas unidades tiene el esponente de la misma potencia: así en a^5, a es cinco veces factor: en $(a+b)^6$ $a+b$ es seis veces factor.

73 Ya que para multiplicar las cantidades literales monomias que llevan esponentes, basta (20) sumar el esponente de cada letra del multiplicando con el esponente de la letra semejante del multiplicador, se sigue que *para levantar á una potencia propuesta una cantidad monomia, bastará multiplicar el esponente actual de cada una de sus letras por el número que espresa la potencia á que se quiere levantar dicha cantidad.* Llamaremos á este número *el esponente de la potencia.*

Así para levantar a^2b^3c á la quarta potencia, escribiré $a^8b^{12}c^4$, multiplicando los esponentes 2, 3 y 1 de a, b y c por el esponente 4 de la potencia á que quiero levantar a^2b^3c. Con efecto, para levantar a^2b^3c á la quarta potencia, tendria que multiplicar a^2b^3c por a^2b^3c, despues por a^2b^3c, y el segundo producto que resultaria por a^2b^3c;

pero para egecutar estas multiplicaciones, se han de sumar (20) los esponentes: luego ya que son unos mismos en cada factor, he de sumar cada esponente con él mismo quatro veces, esto es, le he de multiplicar por 4. Del mismo modo discurriríamos para levantar á otra qualquiera potencia un monomio propuesto, fuesen los que fuesen los esponentes actuales de sus letras.

Quando ocurre hacer con los esponentes consideraciones ó cálculos, que por ser independientes de sus valores particulares, se pueden aplicar á qualesquiera especie de esponentes, usamos de letras para representarlos. Así, para aplicar este artificio á la regla que acabámos de dar, si queremos levantar una cantidad qualquiera $a^m b^n c^p$ á una potencia qualquiera espresada por r, escribiremos $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

74 Si la cantidad que se ofrece elevar á una potencia propuesta, fuese una fraccion, se deberia elevar á dicha potencia el numerador y el denominador: asi $\frac{a^2 b^3}{cd^2}$ elevado á la quinta potencia es $\frac{a^{10}\ b^{15}}{c^5\ d^{10}}$; $\frac{a^m\ b^n}{c^p\ d^q}$ elevado á la potencia r, será $\frac{a^{mr}\ b^{nr}}{c^{pr}\ d^{qr}}$.

75 Quando la cantidad propuesta lleva algun coeficiente, se le eleva á la potencia propuesta multiplicándole por sí mismo por las reglas de la Arismética. Así $4a^3b^2$, levantado á la quinta potencia, será $1024a^{15}b^{10}$. En algunos casos nos contentaremos con indicar esta elevacion de los coeficientes del mismo modo que si fuesen letras, en cuyo supuesto $4^5a^{15}b^{10}$ representará la quinta potencia de $4a^3b^2$.

76 Por lo que mira á los signos, si el esponente de la potencia á que queremos elevar la cantidad propuesta, fuere par, el resultado llevará siempre el signo $+$; pero si fuere impar, llevará el resultado el signo $+$ ó el signo $-$, segun llevare la cantidad propuesta el signo $+$, ó el signo $-$. Esta es una consecuencia inmediata de la regla que dimos (24) acerca de los signos.

77 Síguese de todo lo que acabamos de decir que en una potencia qualquiera, el esponente actual de cada letra contiene al esponente de su raiz tantas veces como unidades hay en el esponente de la potencia que se considera: por egemplo, en la quarta potencia el esponente de cada letra es quádruplo de lo que era en la cantidad primitiva que es la raiz.

78 Luego para volver desde una potencia qualquiera á su raiz, esto es, *para estraer una raiz de un grado propuesto, de una cantidad monomia qualquiera, se ha de dividir el esponente actual de cada una de sus letras por el número que espresa el grado de la raiz que se quiere sacar.* Este número se llama *el esponente de la raiz.*

Así, para sacar la raiz tercera ó cúbica de $a^{12}b^6c^3$, dividiré cada uno de los esponentes por 3, y saldrá a^4b^2c. Para sacar la raiz quinta de $a^{20}b^{15}c^5$, dividiré cada uno de los esponentes por 5, y tendré a^4b^3c. En general, para sacar la raiz del grado r de la cantidad $a^m b^n$, escribiré $a^{\frac{m}{r}}b^{\frac{n}{r}}$.

79 Si la cantidad propuesta fuese una fraccion se sacaria separadamente la raiz del numerador y del denominador.

80 Si hubiese coeficientes, se sacaria su raiz quadrada ó cúbica por las reglas dadas en la Arismética; y por la que daremos en adelante, se sacará la raiz si fuese de un grado mas elevado.

81 Quando el esponente de la raiz que se quiere sacar no divide exactamente cada uno de los esponentes de la cantidad propuesta, es señal de que no es dicha cantidad una potencia perfecta del grado que se supone. En este caso se queda fraccionario el esponente, y espresa una raiz que está por sacar. Así, si se pide la raiz cúbica de $a^9b^3c^4$, tendremos $a^3bc^{\frac{4}{3}}$ ó $a^3bcc^{\frac{1}{3}}$, en la qual espresa el esponente $\frac{1}{3}$ que está por sacar la raiz cúbica de c.

82 Suelen representarse tambien las estracciones de raices superiores al segundo grado por medio del signo $\sqrt{}$; pero entre las dos piernas del signo se pone el número que espresa el grado de la raiz que se quiere sacar. Así $\sqrt[3]{a}$ espresa la raiz cúbica de a: $\sqrt[7]{a}$ denota la raiz séptima de a. Se deben, pues, mirar estas dos espresiones $a^{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt[3]{a}$ como que significan una misma cosa. Lo propio digo de $\sqrt[5]{a^4}$ y $a^{\frac{4}{5}}$.

83 Quando es complexa la cantidad, no se ha de dividir cada uno de sus esponentes; se debe sí considerar la totalidad de sus partes, como que no componen sino una sola cantidad cuyo esponente naturalmente es 1, que se divi-

de por el esponente de la raiz que se trata de sacar, lo que hablando con propiedad no es mas que una indicacion de dicha raiz: por egemplo, en lugar de $\sqrt[4]{a^2+b^2}$, que es lo mismo que $\sqrt[4]{(a^2+b^2)}$, se escribe $(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$..... ó $\overline{a^2+b^2}^{\frac{1}{4}}$. Si la cantidad total que está debajo del radical tubiese ya algun esponente, se dividiria del mismo modo este esponente por el de la raiz que se intenta sacar. Así en lugar de $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}$, se puede escribir $(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}$.

84 Las reglas dadas (68 y sig.) para la adicion, sustraccion, multiplicacion y division de las cantidades radicales de segundo grado, igualmente se aplican á las cantidades radicales de grados superiores, con tal que los radicales propuestos sean todos de un mismo grado. Así.... $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7a} = a\sqrt[7]{a}$; $\sqrt[5]{a^2b^3} \times \sqrt[5]{a^3b^2} = \sqrt[5]{a^5b^5} = ab$; $a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{\frac{a^5b}{a}} = \sqrt[5]{a^4b}$.

85 Si se quiere elevar un radical qualquiera á una potencia cuyo esponente sea el mismo que el del radical, bastará quitar este radical así $(\sqrt[5]{a})^5 = \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^5} = a$. La razon de esta operacion es facil de percibir, pues se dirige á restituir la cantidad á su primer estado.

Para elevar una cantidad radical monomia á una potencia qualquiera, basta elevar cada uno de sus factores á dicha potencia, segun la regla dada (73). Así $\sqrt[7]{a^2b^3}$ elevado á la quarta potencia es $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$ que se reduce á $ab\sqrt[7]{ab^5}$; y lo podemos verificar aun de estotro modo:

$\sqrt[7]{a^2b^3}$ es lo mismo (82) que $a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$, y para elevar esta cantidad á la quarta potencia, multiplico sus esponentes por 4, de lo que resulta $a^{\frac{8}{7}}b^{\frac{12}{7}} = aba^{\frac{1}{7}}b^{\frac{5}{7}} = ab\sqrt[7]{ab^5}$.

86 Para dividir $\sqrt[7]{a^5}$ por $\sqrt[7]{a^3}$, dividiré a^5 por a^3, y le daré al cociente a^2 el signo $\sqrt[7]{}$, y sale $\sqrt[7]{a^2}$; del mismo modo

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b^3}}{\sqrt[5]{a^2b^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b^3}{a^2b^2}} = \sqrt[5]{a^2b^1};\quad \frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} \ldots$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2};\quad \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}}$$

$= \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$, porque la raiz quinta de 1 es 1. En general, *toda potencia ó toda raiz de la unidad es la unidad.*

87 Para sacar una raiz qualquiera de una cantidad radical, se multiplica el esponente que lleva el radical por el esponente de la nueva raiz: así para sacar la raiz tercera de $\sqrt[5]{a^4}$, escribiremos $\sqrt[15]{a^4}$, multiplicando 5 por 3. Con efecto $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; pero para sacar la raiz tecera de la última cantidad, se ha de dividir (78) su esponente por 3, de cuya operacion resulta $a^{\frac{4}{15}} = \sqrt[15]{a^4}$.

88 Quando las cantidades radicales propuestas no son todas del mismo grado, es preciso para practicar con ellas las operaciones de sumar, restar, multiplicar y partir, reducirlas al mismo grado, cuya reduccion se egecuta con facilidad, practicando la regla siguiente.

Si no hay mas de dos radicales; multiplíquese el espo-

nente del uno por el esponente del otro: el producto será el esponente comun que han de tener los dos radicales: levántese al mismo tiempo la cantidad que está debajo de cada radical á la potencia espresada por el esponente del otro radical. Por egemplo, para reducir á un mismo radical las dos cantidades $\sqrt[5]{a^3}$ y $\sqrt[7]{a^4}$, multiplico 5 por 7, y saco 35 para el esponente del nuevo radical que será $\sqrt[35]{}$: levanto a^3 á la séptima potencia, y a^4 á la quinta, de lo que resultan a^{21} y a^{20}; de modo, que las cantidades propuestas se han transformado en $\sqrt[35]{a^{21}}$ y $\sqrt[35]{a^{20}}$.

Si hubiese mas de dos cantidades radicales, *multiplíquense unos por otros los esponentes de todos los radicales: el producto será el esponente comun que han de llevar todos los radicales despues de hecha la reduccion. Levántese al mismo tiempo la cantidad que está debajo de cada radical, á una potencia de un grado espresado por el producto de los esponentes de los demás radicales.* Por egemplo, si para egecutar la operacion que estamos declarando, se me propusieran los tres radicales $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$ y $\sqrt[8]{a^7}$, multiplicaria los tres esponentes 5, 7 y 8, y el producto 280 seria el esponente comun de los nuevos radicales: elevaria a^3 á la potencia 7×8 ó 56: a^2 á la potencia $5 \times 8 = 40$; y a^7 á la potencia $5 \times 7 = 35$, y tendria $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

Se percibirá con facilidad la razon de esta regla, si se atiende á que quando en el primer egemplo se eleva a^3 á la séptima potencia, se hace a siete veces mas factor de lo que era antes: pero con hacer el esponente de su radical siete veces mayor de lo que era, se hace a siete veces menos factor: luego hay compensacion, y solo se ha variado la forma de la cantidad propuesta.

89 Se puede inferir de este razonamiento que quando el esponente de la cantidad que está debajo del radical y el del radical tienen un divisor comun, se puede simplificar la espresion, dividiendo ambos esponentes por este divisor comun: por egemplo, $\sqrt[12]{a^8}$ se puede reducir á $\sqrt[3]{a^2}$, dividiendo 12 y 8 por 4.

Igualmente $\sqrt[4]{a^2}$ se puede reducir á $\sqrt{a}$; $\sqrt[6]{a^3}$ se reduce á $\sqrt{a}$.

90 Tambien se puede inferir que quando el esponente de la raiz que se quiere sacar, se compone del producto de dos ó mas números, se puede hacer succesivamente la estraccion del modo siguiente. Supongamos que se pide la raiz sexta de a^{24}: sacaré desde luego la raiz quadrada, despues la raiz cúbica, y tendré la raiz sexta. Con efecto $\sqrt[6]{a^{24}}$ se reduce (89) á $\sqrt[3]{a^{12}}$, despues á $\sqrt[1]{a^4}$ ó a^4, y es lo mismo que si hubiera tomado de repente la raiz sexta de a^{24}, dividiendo el esponente 24 por 6 (78).

Por lo demas, como los esponentes fraccionarios se usan en lugar de radicales, y son mas acomodados para los cálculos que los radicales, añadiremos algo mas acerca de los esponentes.

Si tubiera que multiplicar $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[5]{a^4}$, transformaria la operacion en estotra: $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$ que (20) dá $a^{\frac{7}{5}}$, ó $a.\ a^{\frac{2}{5}}$ que se reduce á $a\sqrt[5]{a^2}$. Si tubiese que multiplicar $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[7]{a^4}$, escribiria $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$ ó $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$ ó (reduciendo las dos fracciones á un mismo denomidador) $a^{\frac{21+20}{35}}$, ó $a^{\frac{41}{35}}$: que se reduce á $aa^{\frac{6}{35}}$, ó finalmente á $a\sqrt[35]{a^6}$.

En general $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$ se transforma en $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$, que se reduce á $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, ó reduciendo al mismo denominador $a^{\frac{qn+mr}{qm}} b^{\frac{pq+ms}{qm}}$, ó finalmente (82) á $\sqrt[mq]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$. Lo mismo sucede en la division: $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ se transforma en $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}}$ (30), ó finalmente en $\sqrt[5]{a}$. Igualmente $\frac{\sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}}$ se muda en $\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}}$ $= a^{\frac{3}{5}-\frac{2}{7}} b^{\frac{4}{5}-\frac{3}{7}}$ (30), ó reduciendo las fracciones al mismo denominador $a^{\frac{21-10}{35}} b^{\frac{28-15}{35}}$, que se reduce á $a^{\frac{11}{35}} b^{\frac{13}{35}}$ que es lo mismo que $\sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$. En general $\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} = \frac{a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}}$

$$= a^{\frac{qn-mr}{qm}} b^{\frac{pq-ms}{qm}} = \sqrt[mq]{a^{qn-mr} b^{pq-ms}}.$$

91 En el último egemplo hemos restado el esponen-

te de cada letra del denominador del esponente de la letra correspondiente del numerador. No parece que lo permite la regla que dimos (30) para la division sino en el caso de ser el esponente del denominador menor que el del numerador; pero no obstante se puede practicar esta operacion en general, dándole al exceso el signo — despues de hecha la reduccion: de suerte que podemos generalmente darla á toda fraccion algebraica la forma de entero. Por egemplo, en lugar de $\frac{a^3}{b^2}$ podremos escribir a^3b^{-2}. Con efecto, segun la idea que hemos dado de la division, destruye un divisor en el dividendo todos los factores que se hallan en el divisor: en $\frac{a^5}{a^2}$ que se reduce á a^3, el divisor a^2 destruye en a^5 dos factores iguales á a. Igualmente en la cantidad $\frac{a^3}{b^2}$, el oficio de b^2 ha de ser destruir en a^3 dos factores iguales á b. Pero aunque estos factores no esten esplícitamente en el dividendo, siempre podemos suponer que los incluye, porque se concibe que a contiene á b un número de veces, sea entero, sea fraccionario: si representa m este número de veces, a valdrá m veces b, ó mb; la cantidad $\frac{a^3}{b^2}$ será, pues, $\frac{m^3b^3}{b^2}$ que se reduce á m^3b; pero la cantidad a^3b^{-2} llega á ser en igual caso $m^3b^3b^{-2}$, ó (20) m^3b^{3-2}, esto es m^3b: luego $\frac{a^3}{b^2}$ se reduce á a^3b^{-2}. Luego en general *se puede trasladar una cantidad del denominador al numerador, escribiéndola en este como factor, pero con un esponente de signo contrario al que tenia en el denominador.*

Así en lugar de $\frac{1}{a^3}$ se puede escribir $1 \times a^{-3}$, ó solamente a^{-3}: en lugar de $\frac{1}{a^m}$ se puede escribir a^{-m}: en lugar de $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ se puede escribir $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$. En lugar de $\frac{a^m}{a^m}$ se puede escribir $a^{m-m} = a^0 = 1$; porque $\frac{a^m}{a^m} = 1$. Por consiguiente *toda potencia cuyo esponente es cero no se distingue de la unidad.* En lugar de $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ se puede escribir $(a^3+b^3) \times (a^2+b^2)^{-1}$; y teniendo presente todo lo dicho poco ha, en lugar de $\frac{\sqrt[5]{(a^3+b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}}$ se puede escribir $\frac{(a^3+b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}}$ y finalmente $(a^3+b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2+b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

92 Y recíprocamente, *si una cantidad se compone de partes que tengan esponentes negativos, se podrán trasladar estas partes al denominador, haciendo positivos sus esponentes.* Así en lugar de $a^3 b^{-4}$, se podrá escribir $\frac{a^3}{b^4}$; en lugar de a^{m-3}, que es lo mismo que $a^m \times a^{-3}$, se podrá escribir $\frac{a^m}{a^3}$, y así prosiguiendo.

De la Formacion de las potencias de las cantidades complexas, y de la estraccion de sus raices.

93 Para levantar una cantidad complexa á una potencia propuesta, no hay mas que hacer, segun la idea que hemos dado de las potencias, sino multiplicar dicha cantidad por ella misma tantas veces menos una quantas unidades hay en el esponente de la potencia; pero si nos contentáramos con este método, tendríamos que hacer en

muchas ocasiones cálculos muy prolijos para llegar á resultados, que se pueden conseguir con mucha menos costa, reflexîonando un poco sobre las propiedades de los productos de algunas de estas multiplicaciones.

Tratarémos de las potencias de las cantidades binomias, porque estas encaminan á la formacion de las potencias de las cantidades mas compuestas; pero para dar mejor á conocer la estension de lo que nos proponemos declarar, tomaremos el asunto desde mas lejos: indagaremos la naturaleza de los productos que se forman multiplicando succesivamente muchos factores binomios que tengan todos un término comun. Esta investigacion que nos guiará derechamente ácia nuestro objeto, nos suministrará al mismo tiempo muchas proposiciones que nos serán utilísimas en adelante.

94 Propongámonos multiplicar unas por otras muchas cantidades binomias como $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ &c. que todas tienen el término x comun.

Multiplicando . . . . $x+a$

por . . . . $x+b$

resultará . . . . $x^2+ax+ab$
$$+bx$$

Multiplicando este producto por $x+c$, tendremos

$$\begin{array}{l} x^3+ax^2+abx+abc \\ \quad +bx^2+acx \\ \quad +cx^2+bcx \end{array}$$

Multiplicando este segundo producto por $x + d$,

$$\begin{array}{llll} \text{sacarémos } x^4 & + ax^3 & + abx^2 & + abcx + abcd \\ & + bx^3 & + acx^2 & + abdx \\ & + cx^3 & + adx^2 & + acdx \\ & + dx^3 & + bcx^2 & + bcdx \\ & & + bdx^2 & \\ & & + cdx^2 & \end{array}$$

y así prosiguiendo; sobre cuya cantidad haremos las observaciones siguientes, considerando como un solo término todo lo que está en una misma columna.

1.° El primer término de cada producto es siempre el primer término x de cada binomio elevado á una potencia espresada por el número de estos binomios: de modo que si el número de los binomios fuese m, el primer término de cada producto será x^m.

2.° Las potencias de x van despues menguando siempre de una unidad hasta el último término en que ya no se halla x.

3.° Los multiplicadores de cada potencia de x (que en adelante llamaremos multiplicadores del término en que se hallan estas potencias) son, en el segundo término, la suma de los segundos términos a, b, c &c. de los binomios: en el tercer término, la suma de los productos de estas cantidades a, b, c &c. multiplicadas de dos en dos: en el quarto, la suma de los productos de estas cantidades a, b, c &c. multiplicadas de tres en tres; y así prosiguiendo hasta el último que es el producto de todas estas cantidades.

Estas consecuencias son evidentes, sea el que fuere el número de las cantidades $x+a$, $x+b$ &c. de cuya multiplicacion resulta el producto.

95 Si suponemos ahora que todas las cantidades a, b, c &c. son iguales entre sí, en cuyo caso lo serán tambien todos los binomios que se han multiplicado, los productos hallados arriba serán las potencias succesivas de qualquiera de estos binomios, de $x+a$ por egemplo, con suponer que las cantidades b, c, d &c. son iguales cada una á a. Por consiguiente, si se substituye en estos productos a en lugar de cada una de las letras b, c, d &c. tendrémos los resultados siguientes que serán los valores de las potencias que se acotan al lado:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$
$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$$
$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x+a)^4.$$

De lo que se echa de ver que si fuere m el esponente de la potencia á que se quiere elevar el binomio, las potencias succesivas de x, serán x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4} &c.

Pero no se percibe con igual evidencia como los coeficientes de los diferentes términos de cada potencia se originan unos de otros, ni qual es su dependencia del esponente m, del qual dependen, como lo vamos á probar.

96 Para hallar la ley que guardan estos coeficientes, debemos volver otra vez á los primeros productos, y notar que pues el multiplicador del segundo término es la suma de todas las cantidades a, b, c &c. será preciso quan-

do fueren iguales á a todas estas cantidades, que se componga de a tomada tantas veces como cantidades hubiere: luego si su número es m, este multiplicador será m veces a, ó ma: quiero decir que su coeficiente m será igual al esponente del primer término de dicha potencia. Esto se verifica en las tres potencias particulares puestas arriba.

Veamos ahora quales han de ser los multiplicadores de los demás términos. Es evidente en el supuesto actual que todos los productos ab, ac, ad, bc, bd &c. son iguales cada uno á a^2: que todos los productos abc, abd &c. vienen á ser cada uno iguales á a^3, y así prosiguiendo: luego el multiplicador del tercer término de cada uno de nuestros primeros productos se reduce entónces á a^2 tomado tantas veces quantos productos pueden dár las letras a, b, c &c. combinadas de dos en dos. Igualmente, el del quarto término se reduce á a^3 tomado tantas veces quantos productos pueden dár las letras a, b, c &c. tomadas de tres en tres, y así prosiguiendo: luego para formar el coeficiente numérico de los términos tercero, quarto &c. de la potencia m del binomio $x+a$, no hay mas que determinar el número de productos que puede dár un número m de letras a, b, c &c. multiplicadas de dos en dos, de tres en tres &c.

97 Pero advierto que si hay un número qualquiera m de letras, y se combinan de todos los modos imaginables de dos en dos, de tres en tres, de quatro en quatro &c. sin repetir una misma letra en una misma combinacion; advierto, digo

1.º Que el número de combinaciones de dos en dos será duplo del número de los productos realmente diferentes, formados de dos letras. Con efecto, dos letras se pueden combinar una con otra de dos modos diferentes: por egemplo, a y b dán estas dos combinaciones ab y ba, cuyas dos combinaciones no son dos productos diferentes.

2.º El número de combinaciones de muchas letras de tres en tres, será séxtuplo del número de los productos de tres letras realmente distintos. Con efecto, para formar las combinaciones de tres cantidades a, b, c, es menester, despues de haber combinado dos, a y b por egemplo, de donde resulta ab y ba, combinar la tercera c con cada una de las dos primeras combinaciones, esto es, darla todas las colocaciones posibles para con las letras a y b que entran en ab y ba; pero de esto resultan seis combinaciones de tres letras, segun se evidencia en las disposiciones siguientes abc, acb, cab, bac, bca, cba; y cada una de estas seis combinaciones no compone sino un mismo producto.

Discurriendo del mismo modo probarémos que quatro cantidades admiten veinte y quatro combinaciones, cada una de las quales forma un mismo producto: luego el número de los productos distintos que se pueden sacar combinando muchas letras de quatro en quatro, es la 24ma parte del número total de estas combinaciones. Igualmente el número de los productos distintos que se pueden formar combinando muchas letras de cinco en cinco, de seis en seis, de siete en siete &c. es la 120ma, 720ma, 5040ma &c.

parte del número total de estas combinaciones; esto es, se espresa en general por una fraccion cuyo numerador es el número total de las combinaciones, y cuyo denominador es el producto de todos los números 1, 2, 3, 4 &c. hasta el que espresa el número de letras de que se compone cada producto.

98 Veamos, pues, quál es el número total de las combinaciones que puede dár un número m de letras a, b, c &c. tomadas de dos en dos, de tres en tres &c.

Por lo que toca á las combinaciones de dos en dos, es evidente que no debiéndose combinar ninguna letra consigo misma, solo puede combinarse con las demás $m-1$, y por consiguiente debe dár $m-1$ combinaciones: luego yá que hay en todo m letras, darán m veces $\overline{m-1}$, ó $m.\overline{m-1}$ combinaciones. Luego en virtud de lo dicho (97) el número de los productos de dos letras realmente diferentes será $m.\frac{\overline{m-1}}{2}$

Por lo que mira á las combinaciones de tres en tres, se debe combinar cada una de las combinaciones de dos en dos con cada una de las letras que no incluye, quiero decir con un número de letras espresado por $m-2$: luego cada una de estas combinaciones dará $m-2$ combinaciones de tres letras: luego yá que hay $m.\overline{m-1}$ combinaciones de dos letras, cada una de las quales debe dár $m-2$ combinaciones de tres letras, habrá en todas $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}$ combinaciones de tres letras: luego yá que (97) el número de los productos realmente distintos es la sexta parte de este número total de combinaciones, será $m.\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{6}$ ó $m.\frac{\overline{m-1}}{2}.\frac{\overline{m-2}}{3}$.

Del mismo modo probaremos que el número de las combinaciones de quatro en quatro será $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}$; porque deberemos combinar cada combinacion de tres letras con todas las demas letras que no tubiere; y siendo $m-3$ su número, darán para cada combinacion de tres letras, $m-3$ combinaciones de quatro letras; luego siendo el número de las combinaciones de tres en tres $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}$, el de las combinaciones de quatro en quatro será $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}$; y ya que el número de los productos de quatro en quatro realmente diferentes es la 24ma parte de este número de combinaciones, será por consiguiente $m.\frac{\overline{m-1}}{2}.\frac{\overline{m-2}}{3}.\frac{\overline{m-3}}{4}$.

El mismo razonamiento probará que el número de los productos distintos que se pueden formar, multiplicando un número m de letras de cinco en cinco, de seis en seis &c. se espresará por $m.\frac{\overline{m-1}}{2}.\frac{\overline{m-2}}{3}.\frac{\overline{m-3}}{4}.\frac{\overline{m-4}}{5}$, por $m.\frac{\overline{m-1}}{2}.\frac{\overline{m-2}}{3}.\frac{\overline{m-3}}{4}.\frac{\overline{m-4}}{5}.\frac{\overline{m-5}}{6}$, y así prosiguiendo.

99 Inferamos, pues, de aquí, y de lo dicho (96), que los términos succesivos del binomio $x+a$ elevado á

la potencia m, ó de $(x+a)^m$ son
$x^m + max^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} +$ &c.

Cuya espresion manifiesta que el primer término de la serie que espresa esta potencia, es el primer término x del binomio levantado á la potencia m: que despues los esponentes de x ván disminuyendo una unidad, contando desde el segundo término que es el primero donde a se halla. En orden á los coeficientes m, $m.\frac{m-1}{2}$ &c. conviene reparar que el del segundo término es igual al esponente del primero: que el del tercero, que es $m.\frac{m-1}{2}$, es el coeficiente m del precedente multiplicado por $\frac{m-1}{2}$, esto es, por la mitad del esponente de x en el mismo término precedente. Igualmente, el coeficiente del quarto término que es $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$ no es otra cosa que el coeficiente $m.\frac{m-1}{2}$ del término precedente multiplicado por $\frac{m-2}{3}$, esto es, por el tercio del esponente de x en este mismo término precedente, y así prosiguiendo. De todas estas observaciones, que se vienen á los ojos solo con mirar la fórmula, inferirémos esta regla general: *El coeficiente de qualquiera de los términos se halla multiplicando el coeficiente del precedente por el esponente de* x *en el mismo término precedente, y dividiendo el producto por el número de los términos que preceden al término, cuyo coeficiente se busca.*

Formemos por esta regla la séptima potencia de $x+a$, para que sirva de egemplo. Tendremos $(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. Escribiendo desde luego x^7; multiplicando despues esta cantidad por 7, disminuyendo el esponente de una unidad, y multiplicando por a, de lo que resulta $7ax^6$.

Multiplico $7ax^6$ por $\frac{6}{2}$, disminuyo el esponente de x de una unidad, y aumento de otra el de a, y sale $21a^2x^5$ que será el tercer término.

Multiplico este tercer termino por $\frac{5}{3}$, disminuyo el esponente de x de una unidad, y aumento el de a de otra unidad, lo que dá $35a^3x^4$ que será el quarto término; y á este tenor se puede proseguir facilmente la operacion hasta concluirla.

Si en lugar de $x+a$ hubiera sido $x-a$ el binomio propuesto, los términos tendrian alternativamente los signos $+$ y $-$, empezando desde el primero; porque si en a^4, por egemplo, substituimos $-a$ en lugar de $+a$, no habrá en el signo variacion alguna (76); pero la habrá substituyendo $-a$ en una potencia impar de a.

La misma fórmula que acabamos de dár puede servir para elevar á una potencia propuesta, no solamente un binomio simple como $x+a$, sino tambien un binomio compuesto, qual sería x^2+a^2, ó x^2+a, ó x^3+a^3 &c. y para elevar tambien un binomio qualquiera, no solo á una potencia cuyo esponente fuese un número entero positivo, sino tambien á una potencia cuyo esponente fuese positivo ó negativo, entero ó fraccionario. Pero estos usos exîgen, para mayor comodidad, que la demos otra forma.

100 Volvamos, pues, á considerar la fórmula $(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.a^3x^{m-3} +$ &c.

Fundados en lo que digimos (92) podemos, en lugar de x^{m-1}, escribir $\frac{x^m}{x}$: en lugar de x^{m-2}, $\frac{x^m}{x^2}$; en lugar de x^{m-3}, $\frac{x^m}{x^3}$, y así prosiguiendo.

Podremos, pues, en virtud de este principio transformar nuestra fórmula en estotra: $(x+a)^m = x^m + \frac{max^m}{x} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{a^2\,x^m}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{a^3\,x^m}{x^3} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{a^4\,x^m}{x^4}$ &c.

Si atendemos ahora á que todos los términos tienen por factor comun x^m, podremos dar á la fórmula estotra forma: $(x+a)^m = x^m(1 + \frac{ma}{x} + m.\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3} +$ &c.) en la qual se considera que x^m multiplica todo lo que está dentro del paréntesis. De aquí inferimos la regla siguiente para formar con menos trabajo la série de los términos que componen la potencia m del binomio $x+a$.

101 Escríbanse en una primera línea, segun sigue, las cantidades

$$m,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m-3}{4},\ \frac{m-4}{5}\ \&c.$$

$$1 + m\frac{a}{x} + m.\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}\frac{a^4}{x^4}\ \&c.$$

Y habiendo escrito la unidad debajo, y en un lugar mas adelante ácia la izquierda, fórmese la série inferior segun esta ley.

Multiplíquese dicha unidad por el primer término de la serie superior, y por $\frac{a}{x}$, y saldrá el segundo término de la serie inferior.

Multiplíquese este segundo término por el segundo término de la serie superior, y tambien por $\frac{a}{x}$, saldrá el tercer término de la serie inferior.

Multiplíquese este tercer término por el tercero de la serie superior, y tambien por $\frac{a}{x}$, y resultará el quarto término de la serie inferior, y así prosiguiendo.

Júntense todos estos términos de la serie inferior: multiplíquese el total por x^m y saldrá el valor de $(x+a)^m$

102 Si en lugar de $x+a$, fuera x^2+a^2, ó x^3+a^3 ó &c. la cantidad propuesta; en vez de multiplicar succesivamente por $\frac{a}{x}$, se multiplicaria por $\frac{a^2}{x^2}$ en el primer caso: por $\frac{a^3}{x^3}$ en el segundo, y en general por el segundo término del binomio dividido por el primero, y se multiplicaria el total en el primer caso por x^2 elevado á la potencia m; y en el segundo por x^3 elevado á la potencia m; esto es, en general, por el primer término del binomio elevado á la potencia propuesta.

Finalmente, si el segundo término del binomio llevase el signo —, en lugar de multiplicar succesivamente por $\frac{a}{x}$, quando el binomio es $x+a$, ó por $\frac{a^2}{x^2}$, quando es x^2+a^2, se multiplicaria succesivamente por $-\frac{a}{x}$, ó por $-\frac{a^2}{x^2}$, y así prosiguiendo.

Supongamos, para hacer alguna aplicacion de esto, que se pide la sexta potencia de x^3+a^3: practicaré lo siguiente.

$$\begin{array}{ccccccc} & 6 & \frac{5}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 + \frac{6a^3}{x^3} & + \frac{15a^6}{x^6} & + \frac{20a^9}{x^9} & + \frac{15a^{12}}{x^{12}} & + \frac{6a^{15}}{x^{15}} & + \frac{a^{18}}{x^{18}}. & \end{array}$$

Quiero decir, que escribiré la serie $6, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}$ &c. que corresponde á m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$ &c. y pondré debajo la unidad, para primer término de la segunda serie: multiplicaré este primer término por el primer término 6 de la serie superior, y por $\frac{a^3}{x^3}$, y sacaré $\frac{6a^3}{x^3}$ para el segundo término. Multiplicaré $\frac{6a^3}{x^3}$ por el segundo término $\frac{5}{2}$ de la serie superior, y por $\frac{a^3}{x^3}$, y saldrá $\frac{15a^6}{x^6}$ para tercer témino, y así prosiguiendo. Finalmente multiplicaré el total de los términos formados segun esta ley, por x^3 elevado á la potencia 6: quiero decir (73) por x^{18}, y sacaré $x^{18} + \frac{6a^3x^{18}}{x^3} + \frac{15a^6x^{18}}{x^6} + \frac{20a^9x^{18}}{x^9} + \frac{15a^{12}x^{18}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}x^{18}}{x^{15}} + \frac{a^{18}x^{18}}{x^{18}}$, que se reduce á $x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12} + 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}$.

103 Si en lugar de un binomio hubiéramos de elevar un trinomio á una potencia propuesta: si tubiésemos, por egemplo, que elevar $a + b + c$ á la tercera potencia, haríamos $b + c = m$, y elevaríamos $a + m$ á la tercera potencia que, segun las reglas que acabamos de dár, sería $a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3$. Substituyendo en lugar de m, su valor $b + c$, tendríamos $a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3$.

Pero siendo las potencias $(b+c)$, $(b+c)^2$, $(b+c)^3$ potencias todas de binomio, se hallarán facilmente por las reglas precedentes; y no habrá mas que hacer sino multiplicarlas por $3a^2$, $3a$ y 1. Finalizando el cálculo hallaremos que la tercera potencia de $a+b+c$ es $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$.

104 Pero si paramos un poco la consideracion en la regla de la elevacion de los binomios, hallaremos un modo mas acomodado para formar una potencia de un polynomio qualquiera practicando la siguiente regla.

Supongamos que se haya de elevar el trinomio $a+b+c$ á la tercera potencia. Hágase $b+c=p$, con lo que será $a+p$ la cantidad que se habrá de elevar á la tercera potencia, y resultará

$$a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$$
$$\quad\quad 1 \quad\quad 2 \quad\quad 3$$

Escribo debajo de cada término de esta cantidad el esponente de p: multiplico cada término por el número correspondiente, transformando una p en b, saco

$$3a^2b + 6abp + 3bp^2$$
$$\quad\quad \tfrac{1}{2} \quad\quad \tfrac{2}{2}$$

Escribo debajo de esta cantidad la mitad del esponente de p, y multiplico cada término por el número correspondiente, transformando una p en b, y saco

$$3ab^2 + 3b^2p$$
$$\quad\quad \tfrac{1}{3}$$

Escribo debajo de cada término de esta cantidad el tercio del esponente de p: multiplico como antes, y mudo una p en b, y saco . . . . b^3

Finalmente junto todas estas quatro lineas mudando p en c, y sale $a^3+3a^2c+3ac^2+c^3+3a^2b+6abc+$

$3bc^2 + 3ab^2 + 3b^2c + b^3$, lo mismo que arriba.

Consiste, pues, la regla en multiplicar cada término de la primera linea por el esponente de p: cada término de la segunda por la mitad del esponente de p en dicha segunda linea: cada término de la tercera por el tercio del esponente que en ella tiene p, y así prosiguiendo, teniendo cuidado de transformar en cada linea, empezando desde la segunda, una p en b, y al fin de la operacion, todas las p se transformarán en c.

Esta regla se aplica del mismo modo á los quadrinomios, quintinomios &c.

De la Estraccion de las raices de las cantidades complexas.

105 Una vez que estamos enterados de lo que se ha de practicar para hallar todos los términos de que se compone una potencia propuesta de un binomio, sacaremos con facilidad el método para estraer una raiz sea el que fuere su grado, ora sea literal, ora sea numérica la cantidad cuya raiz se busca. Lo que digamos respecto de la raiz quinta, bastará para dár á entender como convendrá manejarse en los demás grados.

Segun la fórmula de las potencias de un binomio, la quinta potencia de $a + b$, es $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. De estos seis términos los dos primeros bastan para hallar la regla que buscamos.

El primero es la quinta potencia del primer término del binomio, y el quíntuplo de su quarta potencia multiplicado por el segundo término del mismo binomio forma el segundo término de la quinta potencia: luego para hallar el primer término de la raiz, es menester, despues de haber ordenado todos los términos de la potencia dada, sacar la raiz quinta del primer término de dicha potencia; y para sacar el segundo término de la raiz, se ha de dividir el segundo término de la cantidad propuesta por el quíntuplo de la quarta potencia de la raiz que hubiese resultado de la primera operacion. Con efecto, es evidente que la raiz quinta de a^5 es a, que es el primer término del binomio, cuya quinta potencia es la cantidad $a^5 + 5a^4b +$ &c; y es tambien evidente que $\frac{5a^4b}{5a^4}$ dá b que es el segundo término del mismo binomio. Pero como podria suceder que la cantidad propuesta no fuese una potencia perfecta del quinto grado; despues de haber hallado así el segundo término de la raiz, se deberá verificar esta raiz elevándola al quinto grado, y restando el resultado de la cantidad propuesta, como en el egemplo siguiente:

Se pide la raiz quinta de

$32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$	raiz
$-32a^5$	$2a + 3b$
resta $+ 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$	$80a^4$

Saco la raiz quinta de $32a^5$ que es $2a$, y escríbola á la raiz.

Elevo $2a$ á la quinta potencia, y escribo el producto $32a^5$, con signo contrario, debajo del primer término

$32a^5$ de la cantidad propuesta, y queda destruido.

Elevo la raiz $2a$ á la quarta potencia que es $16a^4$, y escribo su quíntuplo $80a^4$ debajo de la raiz $2a$, y servirá para dividir el primer término $240a^4b$ de la resta; hecha la division, saco el cociente $3b$ que escribo á la raiz, de modo que la raiz que buscamos es $2a + 3b$; pero para asegurarnos mas, elevaremos $2a + 3b$ á la quinta potencia, y hallaremos los mismos términos que hay en la cantidad propuesta: haciendo la sustraccion no resta nada; de donde inferiremos que la raiz cabal es $2a + 3b$.

Si hubiera de haber otro término mas en la raiz, quedaria una resta despues de esta primera operacion: consideraria $2a + 3b$ como una sola cantidad, con la qual practicaria para hallar el tercer término lo mismo que he practicado con $2a$ para hallar el segundo.

106 La regla es de todo punto la misma respecto de las cantidades numéricas: solo falta declarar cómo se podrá conocer lo que corresponde al primer término a^5, y lo que corresponde al término $5a^4b$.

Para manejarse en esta investigacion basta imaginar que en el binomio $a + b$, a espresa las decenas, y b las unidades; en cuyo supuesto es evidente que a^5 será centenas de millar, porque la quinta potencia de 10 es 100000: luego el primer término a^5, ó la cantidad cuya raiz quinta ha de ser el primer guarismo de la raiz que se busca, no puede estar en los cinco últimos guarismos de la derecha: se separarán, pues, estos cinco últimos guarismos; y dado caso que no queden á la izquierda sino cinco ó menos de cinco, se buscará su raiz quinta que será facil de hallar, pues no puede constar de mas de un guarismo.

Hallado el primer guarismo de la raiz, y restada su quinta potencia de la cantidad que sirvió para hallar esta raiz se bajarán al lado de la resta los cinco guarismos separados; y para distinguir la parte que se debe dividir por $5a^4$, esto es, por el quíntuplo de la quarta potencia de las decenas halladas, se deberán separar quatro guarismos á la derecha, y se dividirá solamente la parte restante ácia la izquierda; porque $5a^4b$ que es la parte que se debe dividir por $5a^4$, para sacar b, no puede estar en los quatro últimos guarismos; porque siendo el producto de $5a^4$ por b, ha de espresar por lo menos decenas de mil, pues a^4 las espresa.

Todo esto sentado, facil será manifestar que el método para sacar la raiz de una cantidad numérica es el mismo que hemos practicado antes acerca de una cantidad literal.

Supongamos que se pida la raiz quinta de

3802,04032	52 raiz
3125	
6770,4032	
3125	
380204032	
0	

Separo los cinco últimos guarismos 04032, y busco la raiz quinta de 3802, que no tendrá mas de un guarismo, por tener 3802 menos de cinco.

Elevo 5 que es la raiz de la quinta potencia mayor que hay en 3802 á la quinta potencia que es 3125: la resto de 3802: resta 677, á cuyo lado bajo los cinco guarismos que antes separé: del total separo quatro caracteres á la derecha, y divido la parte restante 6770 por el quíntuplo de la quarta potencia de la raiz hallada 5, esto es, por 5 veces 625, ó por 3125. Hallo el cociente 2 que escribo al lado del primer guarismo hallado 5. Para comprobar esta raiz 52 la elevo á la quinta potencia, y hallo el mismo número propuesto; de lo que infiero que 52 es exâctamente su raiz quinta.

Si quedase alguna resta y se quisiese aproxîmar mas la raiz, se añadirian cinco ceros y se proseguiria buscando el tercer guarismo, que seria una decimal, del mismo modo que se buscó el segundo.

En general, para sacar una raiz de un grado qualquiera m de una cantidad numérica, se debe dividir, yendo de la derecha ácia la izquierda en porciones de m guarismos cada una, y podrá ser que la última ácia la izquierda tenga menos. Se sacará la raiz del grado m de esta última porcion, cuya raiz nunca tendrá mas de un solo guarismo: al lado de la resta se bajará la porcion siguiente, separando $m - 1$ guarismos á la derecha, y se dividirá la parte restante ácia la izquierda por m veces la raiz hallada, despues de elevada á la potencia $m-1$, y así prosiguiendo. Fúndase esto en que los dos primeros términos de un binomio $a+b$ elevado á la potencia qualquiera m, son $a^m + ma^{m-1}b$, y en que si a espresa decenas, y b unidades, a^m no puede ser parte de los m últimos guarismos, y $ma^{m-1}b$ no puede serlo de los $m-1$ últimos.

Del modo de hallar por aproxîmacion la raiz de las potencias imperfectas de las cantidades literales.

107 Quando la cantidad complexa no es una potencia perfecta del grado cuya raiz se pide, no hay que esperar una raiz exacta: es preciso contentarse con acercarse á su verdadero valor quanto pueda conducir para resolver la cuestion que dá motivo á la estraccion. Se podria conseguir esta aproxîmacion por el método que acabamos de declarar acerca de las potencias perfectas, cuyo método daria una serie de términos fraccionarios, tales que iria decreciendo continuamente su valor, y podria ceñirse el calculador á un número limitado de términos despreciando los demás; pero esta operacion seria larga y penosa. Se puede llegar al mismo fin por un camino mucho mas corto, practicando la regla que dimos arriba (101) para elevar un binomio á una potencia propuesta. Para cuyo efecto conviene tener presente (83) que toda raiz se puede representar por una potencia fraccionaria. Pedir la raiz quadrada de $a+b$, ó valuar $\sqrt{a+b}$, es pedir que elevemos $a+b$ á la potencia $\frac{1}{2}$, pues (83) $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b}$.

Luego segun la regla dada (101), escribo la serie

$$\frac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \text{\&c.}$$

que se reduce á $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, &c, y poniendo 1 por primer término de la segunda serie, formo estotra

$$1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5}\ \text{\&c.}$$

Multiplicando el primer término 1 por el primer término $\frac{1}{2}$ de la primera serie, y por $\frac{b}{a}$, quiero decir, por el segundo término del binomio $a+b$ dividido por el primero, sale $\frac{1}{2}\frac{b}{a}$ que será el segundo término.

Formo del mismo modo el tercero, multiplicando este segundo por el segundo término $-\frac{1}{4}$ de la primera serie, y por $\frac{b}{a}$, de lo que resulta $-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ que será el tercer término.

Para sacar el quarto, multiplico este último por el tercer término $-\frac{1}{2}$ de la primera serie, y por $\frac{b}{a}$, y sale $+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}$ para quarto término, y así prosiguiendo.

Finalmente multiplico la totalidad de estos términos por el primer término del binomio elevado á la potencia $\frac{1}{2}$, y hallo que el valor de $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ ó de $\sqrt{a+b}$ es la cantidad siguiente: $a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5}\ \text{\&c.}\right)$ que es facil continuar quanto se tuviere por conveniente.

108 Manifestaremos el uso de estas aproximaciones, aplicando la fórmula para sacar por aproxîmacion la raiz quadrada de una cantidad numérica que no es un quadrado cabal. Supongamos que se me pida la raiz quadrada de 101.

Dividiré 101 en dos partes, de las quales una sea un quadrado, el mayor posible, por exemplo, la divido en estas dos partes 100 y 1: supongo que la primera es a, y la segunda b, de modo que supongo $a = 100$, y $b = 1$: por consiguiente $a^{\frac{1}{2}} = \overline{100}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$; y $\frac{b}{a} = \frac{1}{100} = 0,01$: luego la serie que espresa $\sqrt{a+b}$, esto es, en el caso actual, $\sqrt{101}$, se convertirá, substituyendo en lugar de $a^{\frac{1}{2}}$ y $\frac{b}{a}$, sus valores, en

$$10\left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} + \frac{(0,01)^3}{16} - \frac{5(0,01)^4}{128} + \frac{35(0,01)^5}{1280} \text{ \&c.}\right)$$

Supongamos que se quiera sacar esta raiz con diferencia de una diezmilésima no mas: en este caso bastará tomar los tres primeros términos, porque el quarto que es $\frac{(0,01)^3}{16}$ se reduce á $\frac{0,000001}{16}$, esto es, á 0,0000000625; y aunque se haya de multiplicar por 10 que debe multiplicar todos los términos de la serie, solo producirá ..... 0,000000626 que es mucho menor que una diezmilésima. Los siguientes términos son, aun con mas razon, mucho menores, pues estando continuamente multiplicados por 0,01 que es un quebrado, deben ir disminuyendo continuamente; porque quando se multiplica por un quebrado no se toma (I. 29) mas que una parte del multiplicando, pues el multiplicador no contiene la unidad entera.

Se reduce, pues, el valor de $\sqrt{101}$ á $10\left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8}\right)$, esto es, á $10\,(1 + 0,005 - 0,0000125)$, ó $10 \times 1,0049875$, ó 10,049875: quiero decir, á 10,0499 ciñéndole á diez milésimas.

Puede servir este metodo para qualesquiera raices y cantidades, como lo evidenciaremos, aplicándole para hallar el valor de $\sqrt[5]{(a^5-x^5)}$.

Transformo esta cantidad en $(a^5-x^5)^{\frac{1}{5}}$, y practicando lo propio que arriba, escribo

$$\frac{1}{5},\ \frac{\frac{1}{5}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{5}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{5}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{5}-4}{5},\ \&c.$$

$$\text{ó } \frac{1}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{7}{10},\ -\frac{19}{25},\ \&c.$$

Y escribiendo 1 por primer término de la segunda serie, formo esta segunda

$$1-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}-\frac{2}{25}\frac{x^{10}}{a^{10}}-\frac{6}{125}\frac{x^{15}}{a^{15}}-\frac{42}{1250}\frac{x^{20}}{a^{20}}-\frac{798}{31250}\frac{x^{25}}{a^{25}},\ \&c.$$

Multiplicando el primer término 1 por el primer término $\frac{1}{5}$ de la serie superior, y por $-\frac{x^5}{a^5}$, esto es, por el segundo término del binomio dividido por el primero, resultará $-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}$ que será el segundo término de la serie.

Para sacar el tercero, multiplico este por el segundo término $-\frac{2}{5}$ de la serie superior, y por $-\frac{x^5}{a^5}$, de donde resulta $\frac{-2x^{10}}{25a^{10}}$.

Calculando del mismo modo los siguientes hasta el sexto, y multiplicándolo todo por el primer término a^5 del binomio elevado á la potencia $\frac{1}{5}$, esto es (73), por $a^{5\times\frac{1}{5}}$ ó por a, saco que el valor aproximado de $\sqrt[5]{a^5-x^5}$ es la cantidad $a\left(1-\frac{x^5}{5a^5}-\frac{2x^{10}}{25a^{10}}-\frac{6x^{15}}{125a^{15}}-\frac{42x^{20}}{1250a^{20}},\&c.\right)$

109 Observemos acerca de estas series, y de las demás que se pueden formar del mismo modo, que siempre se debe tomar por primer término de la cantidad propuesta, el término mayor: por egemplo, en $\sqrt{a+b}$ hemos tomado arriba a por primer término; pero si b fuese mayor que a,

se hubiera debido tomar b por primer término. La razon es, que quando b es mayor que a la primera serie .... $a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\text{ \&c.}\right)$ es engañosa; porque siendo entónces $\frac{b}{a}$ mayor que la unidad, los términos siguientes que están continuamente multiplicados por $\frac{b}{a}$ ván siempre en aumento, de modo que no hay razon alguna para finalizar la operacion donde se quisiere, por los motivos que especificaremos en otro lugar. Pero si en este mismo caso se forma la serie tomando b por primer termino, tendremos $b^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a}{b}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}\text{ \&c.}\right)$, en la qual ván menguando los terminos, pues $\frac{1}{2}$ es mayor que $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ mayor que $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ &c.

110 Hemos visto (91) que toda fraccion algebráica se podia poner en la forma de entero, trasladando su denominador al numerador con un esponente negativo. Esta observacion nos proporciona un medio para reducir á serie toda fraccion, cuyo denominador sea complexo. Por egemplo, si tuviera $\frac{a^2}{a^2-x^2}$, en lugar de esta cantidad, escribiría $a^2\times(a^2-x^2)^{-1}$, y entónces elevaria a^2-x^2 á la potencia -1, segun la regla dada (101): quiero decir, que escribiría desde luego la serie -1, $\frac{-1-1}{2}$, $\frac{-1-2}{3}$, $\frac{-1-3}{4}$ &c. ó -1, -1, -1, -1 &c. y formaria la serie siguiente $1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}$ &c.

Multiplicando el primer termino 1 de esta segunda, por el primer termino -1 de la serie superior, y por $-\frac{x^2}{a^2}$, lo que dá $+\frac{x^2}{a^2}$: multiplicando este por el segundo termino -1 de la serie superior, y por $-\frac{x^2}{a^2}$; y así prosiguiendo. Hecho esto, multiplicaria el total por el primer termino a^2 elevado á la potencia -1, esto es (73) por $a^{2\times -1}$ ó a^{-2}, y hallaria que seria $a^{-2}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}\ \&c.\right)$ el valor de $(a^2-x^2)^{-1}$; luego para sacar $a^2(a^2-x^2)^{-1}$, no falta sino multiplicar por a^2; pero $a^{-2}\times a^2$ dá a^{2-2} ó a^0 que se reduce (91) á 1: luego tendremos $a^2(a^2-x^2)^{-1}=1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}$ &c.

El mismo camino seguiríamos para reducir á serie $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^3}$: consideraríamos esta cantidad como $a^2(a^2+x^2)^{-3}$. Igualmente en lugar de $\frac{a^2}{\sqrt[5]{(a^2+x^2)^3}}$, escribiríamos $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{5}}}$, y despues $a^2(a^2+x^2)^{-\frac{3}{5}}$, y así de las demás.

Aunque son seguros estos metodos, daremos en adelante otro fundado en la doctrina de las series, que dá los mismos resultados con mas brevedad.

De las Equaciones.

111 El arte que enseña metodos para resolver por el cálculo algebráico las cuestiones que se pueden proponer acerca de las cantidades, se llama *Analysis*, por cuyo motivo son conocidos entre los Matemáticos con el nombre de *Analystas* aquellos Escritores que de propósito se dedican á este ramo ó aplicacion del cálculo literal.

Toda resolucion algebráica de una cuestion suele parar en la espresion de la igualdad que hay entre dos cantidades; y para dar á conocer esta igualdad se separan las dos cantidades con el signo $=$, que segun digimos (I. 23) significa *igual* ó *es igual á*: así esta espresion $a=b$, se pronuncia diciendo *a igual b*, ó *a es igual á b*.

El conjunto de dos ó muchas cantidades separadas por el signo $=$, se llama una *equacion*. Todas las cantidades juntas que están á la izquierda del signo $=$, componen lo que llamaremos *el primer miembro* de la equacion; y el conjunto de las que están á la derecha del mismo signo, compone el *segundo miembro*. En la equacion $4x-3=2x+7$, $4x-3$ es el primer miembro, y $2x+7$ el segundo. Son de un uso inmenso las equaciones para la resolucion de las cuestiones que se pueden proponer acerca de las cantidades.

Toda cuestion que el Algebra puede resolver, incluye siempre esplícita ó implícitamente cierto número de condiciones, que son otros tantos medios para percibir las relaciones que hay entre las cantidades conocidas y las incógnitas que de ellas dependen. Estas relaciones se pueden siempre espresar conforme se verá en adelante, por equaciones en que las cantidades incógnitas y las cantidades conocidas se hallan combinadas unas con otras de un modo mas ó menos complicado, segun fuere mas ó menos dificultosa la cuestion.

112 Para la perfecta inteligencia de lo que acabamos de decir, conviene considerar que el fin del que intenta resolver una cuestion, se encamina á hallar alguna

cantidad que no conoce, cuyo fin logra, quando es posible, por medio de la relacion que tienen otras cantidades conocidas con la que busca; porque claro está que si nada conociera de lo que pertenece á la cantidad cuyo valor anda buscando, le seria imposible averiguarle. Es estilo comun de todos los calculadores espresar por las últimas letras u, x, y, z del abecedario las cantidades incógnitas y por las demás letras las cantidades conocidas ó dadas, que por esto llaman *datos*.

Y como en muchas cuestiones hay no solo cantidades conocidas é incógnitas, mas tambien cantidades que guardan constantemente un mismo valor, por cuyo motivo se llaman cantidades *constantes*; y cantidades cuyo valor varia á cada paso, por lo que se llaman cantidades *variables*; es otra práctica corriente entre los Matemáticos representar por las primeras letras a, b, c &c. las cantidades constantes, y por las últimas u, x &c. las cantidades variables.

No por esto se han de confundir las cantidades incógnitas con las variables, hay casos en que una cantidad variable deja de ser variable, y se queda incógnita, conforme manifestaremos en llegando la ocasion oportuna.

113 Son, pues, precisas tres cosas para resolver por Álgebra las cuestiones que se pueden proponer acerca de las cantidades: es preciso

1.º Enterarse por los términos ó la naturaleza de la cuestion de las relaciones que hay entre las cantidades conocidas y las incógnitas. Esto supone un tino que adquiere el entendimiento, como otros muchos, con la práctica; por lo que no se pueden dár en orden á esto reglas generales.

2.° Espresar cada una de estas relaciones por una equacion. Puede reducirse esta condicion á una sola regla que declararemos en adelante; pero es su aplicacion mas ó menos facil, segun la naturaleza de las cuestiones, la capacidad y el manejo del que intenta resolverlas.

3.° Resolver dicha equacion ó dichas equaciones, esto es, sacar por ellas el valor de las cantidades incógnitas. Sobre este último punto se pueden dar un número determinado de reglas que declararemos las primeras.

Como de las cuestiones cuya resolucion puede ocurrir, puede resultar equaciones mas ó menos compuestas, se han distribuido las equaciones en varias clases ó grados que se distinguen por el esponente de la cantidad ó de las cantidades incógnitas que en ellas hay. Llámase equacion de primer grado ó *linear* aquella cuya incógnita no llega mas que á la primera potencia; de donde es facil inferir que las equaciones de segundo grado serán todas aquellas en que ascendiere la incógnita á la segunda potencia: las de tercer grado &c. serán aquellas cuya incógnita estuviere elevada á la tercera potencia, &c.

De las Equaciones de primer grado con sola una incógnita.

114 Resolver una equacion es reducirla á otra en que la incógnita ó la letra que la representa, se halle sola

en el un miembro de la equacion, no habiendo en el otro sino cantidades conocidas.

Por egemplo, si ocurriese esta cuestion, *hallar un número cuyo quádruplo añadiéndole* 3, *sea igual á su triplo añadiéndole* 12. Si representamos dicho número por x, su quádruplo será $4x$, que añadido á 3 compone $4x+3$: por otra parte el triplo de este número x es $3x$, que sumado con 12 compone $3x+12$: una vez que $4x+3$ debe ser igual á $3x+12$, debe ser el número x tal que tengamos $4x+3=3x+12$: esta es la equacion que se ha de resolver para sacar el valor de x, ó hallar el número que x representa.

Pero es evidente que pues son iguales las dos cantidades separadas por el signo $=$, lo serán tambien aunque de cada una se reste $3x$, cuya operacion reducirá la equacion á $x+3=12$: finalmente serán todavia iguales estas dos cantidades, aunque de cada una se reste el mismo número 3, de lo que resulta $x=9$; y queda resuelta la cuestion, porque es evidente que es conocida x por ser igual á una cantidad conocida.

El fin que aquí llevamos es dár reglas para manejar la equacion en todos los casos, de manera que tenga, como en este egemplo, sola la incógnita en el un miembro, y solas cantidades conocidas en el otro. Si fuesen todas las cuestiones tan sencillas como la del egemplo propuesto, sería escusado acudir á las equaciones; pero no todas las cuestiones son tan fáciles; y por ahora solo procuramos dar á entender como queda resuelta la equacion, quando está sola la incógnita en el un miembro, y no hay sino cantidades conocidas en el otro.

115 Las reglas para resolver las equaciones que aquí consideramos, esto es, para reducirlas á que tengan en el un miembro la incógnita sola, se reducen á tres, porque puede estar la incógnita enredada, mezclada ó complicada con cantidades conocidas de tres modos distintos.

1.º Por adicion ó sustraccion, como en la equacion $x+3=5-x$. 2.º Por adicion, sustraccion y multiplicacion, como en la equacion $4x-6=2x+16$. 3.º Finalmente por adicion, sustraccion, multiplicacion, y division, como en la equacion $\frac{9}{5}x-4=\frac{2}{3}x+17$; ó solo por multiplicacion y division, ó por sola la division. Las reglas que facilitan desembarazar ó despejar la incógnita en estos diferentes casos son las siguientes.

116 *Para trasladar un término qualquiera del un miembro de la equacion al otro, se debe borrar dicho término en el miembro donde está para escribirle en el otro miembro con un signo contrario al que lleva en el miembro, en el qual se borra.* Conviene tener presente que quando un término no lleva signo alguno se supone que lleva el signo $+$.

Por egemplo, si en la equacion $4x+3=3x+12$ quiero traspasar el término $+3$ al segundo miembro, escribo $4x=3x+12-3$, y se desaparece del primer miembro el término 3; pero está en el segundo con el signo —, contrario al signo + que llevaba en el primer miembro.

Esta equacion reducida viene á ser $4x = 3x + 9$: si quisiésemos traspasar ahora el término $3x$ al primer miembro, escribiríamos $4x - 3x = 9$ que, despues de egecutada la sustraccion señalada, se reduce á $x = 9$.

Si en la equacion $5x - 7 = 21 - 4x$ quiero traspasar el término -7 al segundo miembro, escribiré $5x = 21 - 4x + 7$, que se reduce á $5x = 28 - 4x$: si quisiese traspasar despues $4x$, escribiré $5x + 4x = 28$, ó reduciendo $9x = 28$. Dentro de poco veremos cómo se concluye la resolucion de esta equacion.

Es muy facil de percibir la razon de esta regla. Ya que las cantidades que componen el primer miembro, son todas juntas iguales al conjunto de todas las que componen el segundo, es evidente que no se turba, quita ó destruye esta igualdad, añadiéndole ó quitándole al uno de los miembros un término qualquiera, con tal que se le añada ó quite al otro miembro el mismo término; pero quando se borra un término que lleva el signo +, se disminuye el miembro en que está; se debe, pues, disminuir el otro de la misma cantidad, esto es, se debe escribir en él la misma cantidad con el signo —. Al contrario, quando se borra un término que lleva el signo —, es evidente que se aumenta el miembro en que está; se debe, pues, aumentar el otro de la misma cantidad, esto es, se debe escribir en él la espresada cantidad con el signo +.

117 Se echa, pues, de ver que por esta regla se pueden traspasar de una vez á un mismo miembro todos los términos en que está la incógnita, que llamarémos *términos afectos de la incógnita*, y al otro todas las cantidades conocidas. Se escogerá primero en qué miembro se quiere que esten todos los términos afectos de la incógnita. Es arbitrario escoger el que se quiera: supondré que se quieran traspasar al primero. Se escribirá segunda vez la equacion, dejándoles á los términos afectos de la incógnita que se hallaren en el primer miembro, los signos que tenian. A continuacion de estos se escribirán los términos afectos de la incógnita que se hallaren en el segundo miembro, teniendo presente que se les debe mudar el signo. A continuacion de todos estos términos se escribirá el signo $=$, y se formará el segundo miembro, escribiendo primero las cantidades conocidas que habia en el segundo miembro, con los mismos signos que llevaban, y despues á continuacion de estas las cantidades conocidas que habia en el primer miembro, pero con signos contrarios á los que llevaban. Practicando estas reglas, la equacion $7x - 8 = 14 - 4x$, se transforma en $7x + 4x = 14 + 8$, ó en $11x = 22$. Asimismo la equacion $ax + bc - cx = ac - bx$ se transforma en $ax - cx + bx = ac - bc$.

118 Puede suceder que despues de practicada esta transposicion, y la reduccion correspondiente, las x que quedaren tengan el signo $-$: por egemplo, si tubiéramos $3x - 8 = 4x - 12$, traspasando todas las x al primer miem-

bro saldria $3x - 4x = -12 + 8$, que se reduce á $-x = -4$: en este caso no hay sino mudar los signos de ambos miembros, de lo que resulta en el caso actual $x = 4$. Con efecto, estaba igualmente á nuestro arbitrio trasladar las x al segundo miembro, de lo que hubiéramos sacado $-8 + 12 = 4x - 3x$, que se reduce á $4 = x$, lo mismo que antes se sacó.

119 Despues de pasados al un miembro todos los términos que contienen la incógnita, y al otro todas las cantidades conocidas: si no hubiese quebrado alguno en la equacion, bastará practicar la regla siguiente para sacar el valor de la incógnita. *Escríbase sola la incógnita en el un miembro, y désele por divisor al segundo miembro la cantidad que multiplicáre* x *en el primero.*

Por egemplo, en la equacion $7x - 8 = 14 - 4x$ que hemos considerado arriba, despues de la transposicion y reduccion hemos hallado $11x = 22$: para sacar x no hay mas que hacer sino escribir $x = \frac{22}{11}$, que se reduce á $x = 2$, esto es, escribir sola x en el primer miembro, y servirse de su multiplicador 11 para divisor del segundo miembro. Con efecto, quando en lugar de $11x$, escribo solo x, no escribo sino la undécima parte del primer miembro: es, pues, preciso para guardar la igualdad, no escribir sino la undécima parte del segundo miembro, esto es, dividirle por 11.

Si se propusiese la equacion $12x - 15 = 4x + 25$: despues de pasadas todas las x al un lado, y al otro todas las cantidades conocidas, saldrá $12x - 4x = 25 + 15$, ó reduciendo $8x = 40$. Para sacar ahora x, escribo $x = \frac{40}{8}$, que se reduce á $x = 5$. Porque quando en lugar de $8x$ escribo solo x, no escribo sino la octava parte del primer miembro: debo, pues, para mantener la igualdad, no escribir sino la octava parte del segundo miembro, esto es, escribir solo $\frac{40}{8}$.

Si las cantidades conocidas que multiplican la incógnita x, en lugar de ser números fuesen letras, no por esto variaria la regla: así en la equacion $ax = bc$, sacaremos x con escribir $x = \frac{bc}{a}$.

Si despues de hecho el traspaso hubiere muchos términos con la incógnita, se practicaria la misma regla: así, en la equacion $ax + bc - cx = ac - bx$ que hallamos arriba, sale, despues del traspaso, $ax - cx + bx = ac - bc$: para sacar x, bastará escribir $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$: quiero decir, que se habrá de escribir sola x en el un miembro, y dividir el segundo por la cantidad que multiplicaba x en el primero, cuya cantidad es en este caso $a - c + b$, pues la cantidad $ax - cx + bx$ es x multiplicada por todas las tres cantidades $a - c + b$.

120 Es, pues, manifiesto que quando, despues de hecha le transposicion, hay muchos términos afectos de x, es menester para sacar el valor de x, dividir el segundo término por el total de las cantidades que afectan x en el primero, tomando dichas cantidades con sus signos conforme están. Por egemplo, en la equacion $ax = bc - 2x$, la

transposicion nos dá $ax + 2x = bc$: y practicando la division, saldrá $x = \frac{bc}{a+2}$. Asimismo la equacion $x - ab = bc - ax$ dá por medio de la transposicion $x + ax = bc + ab$, y por consiguiente $x = \frac{bc + ab}{1+a}$; porque aquí conviene tener presente que el multiplicador (5) de x en el primer término de la cantidad $x + ax$ es 1 : de suerte que en $x + ax$, x está multiplicada por $1 + a$: con efecto en $x + ax$ cabe x una vez mas que en ax.

121 Si alguna cantidad fuese factor comun de todos los términos de la equacion, se la podria simplificar, dividiendo todos sus términos por dicho factor comun: por egemplo, si se me propusiese la equacion $15bb = 27ab + 6bx$, dividiria por $3b$ que es factor comun de todos los términos, y saldria $5b = 9a + 2x$ que transponiendo será $5b - 9a = 2x$; y finalmente dividiendo dará $\frac{5b-9a}{2} = x$, ó $x = \frac{5b-9a}{2}$.

122 Es segura la aplicacion de las reglas que acabamos de dar, aun quando los varios términos de la equacion tienen denominadores, con tal que estos denominadores no lleven la incógnita. Pero como es mas facil la aplicacion de estas reglas, quando no hay quebrados en la equacion, añadiremos una regla que enseña el modo de eliminar, esterminar ó quitar los denominadores.

123 *Para transformar una equacion que lleva denominadores, en otra que no tenga ninguno, se ha de multiplicar cada término que no llevare denominador, por el producto de todos los denominadores; y multiplicar el numerador*

de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás quebrados.

Supongamos que se me ofrezca resolver la equacion $\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7}$: multiplicaré el numerador $2x$ del quebrado $\frac{2x}{3}$ por 35, producto de los dos denominadores 5 y 7, de lo que resultará $70x$. Multiplicaré el término 4 que no lleva denominador por 105 producto de los tres denominadores 3, 5, 7, y saldrá 420. Multiplicaré el numerador $4x$ del quebrado $\frac{4x}{5}$, por 21 producto de los denominadores 3 y 7, y resultará $84x$. Multiplicaré 12 que no lleva denominador por el producto 105 de los tres denominadores y saldrá 1260. Finalmente multiplicaré el numerador $5x$ del quebrado $\frac{5x}{7}$ por 15, producto de los otros dos denominadores, de donde resultará $75x$: de suerte que la equacion propuesta será transformada en estotra $70x+420=84x+1260-75x$, de la qual se sacará x, aplicándola las dos reglas antecedentes. En virtud de la primera (116) se transformará esta equacion en $70x-84x+75x=1260-420$; ó haciendo la reduccion en $61x=840$; y en virtud de la segunda (119) $x=\frac{840}{61}$ que, despues de egecutada la division indicada, se reduce á $x=13\frac{47}{61}$.

Es facil percibir la razon de esta regla, teniendo presente lo dicho (I. 73) para reducir muchos quebrados á un mismo denominador. Porque si en la equacion propuesta $\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7}$, quisiésemos reducir á un mismo denominador los tres quebrados $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$, se deberian multiplicar sus numeradores por los mismos números que manda la regla actual, y daríamos á los nuevos numeradores que resultasen por denominador comun el producto de todos los denominadores: de suerte que la equacion propuesta quedaria transformada en estotra $\frac{70x}{105} + 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$, que en substancia es la misma, pues los nuevos quebrados (I. 70) son los mismos que los primeros. Si ahora quisiésemos reducir los enteros á quebrados, se deberian multiplicar (I. 68) estos enteros por el denominador del quebrado que les acompaña, esto es, en el caso actual, por 105 que resulta del producto de todos los denominadores que hay en la equacion: hecho esto, saldría $\frac{70x+420}{105} = \frac{84x+1260-75x}{105}$; pero es evidente que se puede sin turbar la igualdad, borrar en ambos miembros el denominador comun; pues si las dos cantidades son iguales, estando divididas por un mismo número, deben ser tambien iguales aun sin esta division: sale, pues, entónces $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, como antes.

124 Quando los varios términos que componen los miembros de la equacion son todos cantidades literales, no por esto varía la regla. Solo conviene tener presentes las reglas de la multiplicacion de las cantidades literales; así en la equacion $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$, multiplico el numerador ax por el producto cd de los otros dos denominadores, de donde saco $acdx$: multiplico el término $+ b$ por el producto bcd de todos los denominadores, y sale $+ b^2cd$. Multiplico

cx por bc, y sale bc^2x: finalmente multiplico ab por bd, y sale ab^2d: de suerte que se transforma la equacion en $acdx + b^2cd = bc^2x + ab^2d$, de la qual saco por transposicion $acdx - bc^2x = ab^2d - b^2cd$, y por division (120) $x = \frac{ab^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

125 Si fuesen complexos los denominadores, bastaria para no fatigar al entendimiento indicar al principio las operaciones, dejando el egecutarlas para lo último: por egemplo, si tuviera $\frac{ax}{a-b} + 4b = \frac{cx}{3a+b}$; escribiría $ax \times (3a+b) + 4b \times (a-b) \times (3a+b) = cx \times (a-b)$; egecutando las operaciones indicadas, saldria $3a^2x + abx + 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 = acx - bcx$; trasladando, $3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b$; y finalmente dividiendo (120) $x = \frac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + bc}$.

Aplicacion de los principios antecedentes para la resolucion de algunas cuestiones.

126 Las reglas que acabamos de declarar bastan para la resolucion de qualquiera cuestion del primer grado, una vez que está escrita ó trasladada en equacion. Para escribir en equacion una cuestion propuesta, se puede usar de la regla siguiente: *Represéntese la cantidad que se pide, ó las que se piden, cada una por una letra; y despues de haber examinado el estado de la cuestion, háganse por medio de los signos algebráicos, con estas cantidades y con las cantidades conocidas, las mismas operaciones y los mismos raciocinios que se harian si conociendo los valores de*

las incógnitas se intentase comprobarlos.

Es general esta regla, y encaminará siempre á las equaciones que puede suministrar la cuestion. Pero conviene enseñar su aplicacion con algunos egemplos.

Cuestion I. *Las edades juntas de un padre, y de su hijo componen* 100 *años: tiene el padre* 40 *años mas que su hijo: se pregunta quál es la edad de cada uno?*

Por poco que se atienda á la pregunta, se echa de ver que se reduce á esto la cuestion: *hallar dos cantidades cuya suma es* 100, *y de las quales la una tiene* 40 *mas que la otra.* Es facil percibir que una vez que sea conocida la una de las dos cantidades, lo será tambien la segunda, pues si fuese conocida la mayor, por egemplo, no habria mas que quitarla 40 para hallar la segunda.

Llamo, pues, la mayor x.

Ahora bien, si conociendo el valor de x le quisiese comprobar, le quitaria 40 para sacar el número menor: juntaria despues el mayor con el menor para ver si componen 100. Imitemos, pues, esta operacion.

El número mayor es x

El menor será, pues . . . . $x - 40$

La suma de estos dos números es $2x - 40$

Pero por las condiciones de la pregunta deben componer 100:

$$\text{luego } 2x - 40 = 100.$$

Se sacará x solo con practicar las reglas dadas (116 y 119). Pot la primera sacamos $2x = 100 + 40$, ó $2x = 140$: por la segunda sale $x = \frac{140}{2} = 70$: hallado el mayor número x, le quito 40 para sacar el menor, y hallo que este vale 30. Así las dos edades que se buscaban son 70 y 30.

Si se considera con algun cuidado el rumbo que hemos seguido para resolver esta cuestion, saldrá patente que los razonamientos que nos han guiado para conseguirlo, son independientes de los valores particulares de los números 100 y 40 que espresa la cuestion propuesta; y que, si en lugar de dichos números se hubiesen propuesto otros qualesquiera, hubiera sido preciso proceder del mismo modo. Así, si se propusiese la cuestion en estos términos generales: *La suma de dos números es* a: *su diferencia es* b: *¿quáles son estos dos números?*

Llamando el primero x
El menor será . . . . $x - b$

La suma de estos dos números es $2x - b$

Pero por la cuestion, deben los dos juntos componer la suma a: es, pues, preciso que $2x - b = a$.

Traspasando sale $2x = a + b$, y dividiendo, $x = \frac{a+b}{2}$ ó $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. Cuya espresion significa que para hallar el mayor de los dos números que se buscan, se debe tomar la mitad de a, y añadirla la mitad de b; de lo que se evidencia que si conozco la suma a y la diferencia b

de dos números incógnitos, formaré el mayor de estos dos números incógnitos tomando la mitad de la suma a, y añadiéndola la mitad de la diferencia b.

Ya que el menor de los dos números es $x - b$, será, pues, $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, ó reduciéndolo todo á solo un quebrado (43) será $\frac{a+b-2b}{2}$; esto es $\frac{a-b}{2}$ ó $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$: luego para hallar el menor se debe restar la mitad de b de la mitad de a: quiero decir, restar la mitad de la diferencia de la mitad de la suma.

Esta regla concuerda con la que dimos (I. 673). Todo lo dicho manifiesta, como representando de un modo general, esto es por letras, las cantidades conocidas que entran en las cuestiones, se consigue hallar reglas generales para la resolucion de las cuestiones de una misma especie.

Suelen parecer diferentes á primera vista cuestiones que despues de consideradas con alguna atencion se hallan ser unas mismas en sustancia, y no discrepar sino por los términos en que vienen propuestas. Por egemplo, si se nos propusiese esta cuestion:

Partir un número conocido, y representado por a *en dos partes, la una de las quales, sea menor ó mayor que la otra, de una cantidad conocida y representada por* b. Bien se echa de ver, que esta cuestion es la misma que la antecedente.

Cuestion II. *Partir el número 720 en tres partes tales que la segunda tenga 40 mas que la menor, y la mayor tenga 80 mas que dicha menor.*

Si supiera qual es la parte menor, para comprobarla la añadiria primero 40, de lo que saldria la segunda parte; despues la añadiria 80, y saldria la tercera parte: juntando todas estas tres partes seria preciso que su suma compusiese 720.

Llamemos, pues, x dicha parte menor, y procediendo del mismo modo diremos:

La parte menor es x

luego la segunda es . . . . $x+40$

y la mayor . . . . $x+80$

cuyas tres partes juntas componen. . $3x+120$

la cuestion pide que compongan . . 720

Es pues preciso que $3x+120=720$

Aplicando las reglas de arriba, saldrá $3x=720-120$, ó $3x=600$, y por consiguiente $x=200$: luego la segunda parte es 240, y la mayor 280; cuyas tres partes componen juntas 720.

Se echa tambien de ver en este egemplo, que aun quando los números propuestos, en lugar de ser 720, 40 y 80, hubiesen sido otros distintos, se hubiera podido llegar por el mismo camino á la resolucion de la cuestion: así, para resolver todas las cuestiones en que se trata de partir un número conocido a en tres partes, de tal calidad que lleve la mayor á la menor un exceso conocido y representado por b, y que la parte media lleve á la menor un exceso tambien conocido y representado por c; discurriendo del mismo modo

Llamaremos la menor x

la media será . . . . $x+c$

y la mayor . . . . $x+b$

Estas tres partes componen . . . . . . $3x+b+c$

Pero deben componer . . . . a

Es, pues, preciso que . . . . $3x+b+c=a.$

Luego traspasando $3x=a-b-c$, y dividiendo $x=\frac{a-b-c}{3}$.

Cuyo resultado está diciendo que para hallar la parte menor, se deben restar del número cuya division viene propuesta, ambos excesos, y tomar el tercio de la resta: hecho esto, se hallarán con facilidad las otras dos partes.

Por lo que, si se nos propusiese partir 642 en tres partes de modo que la media excediese á la menor en 75, y la mayor excediese á la menor en 87; sumaria las dos diferencias 75 y 87, saldria la suma 162: restando 162 de 642, restaria 480, cuyo tercio 160 seria la parte menor. Seria, pues, la una de las otras dos $160+75$, ó 235, y la otra $160+87$ ó 247.

Las dos cuestiones que hemos propuesto se pueden resolver sin el auxîlio del Álgebra; pero su sencillez contribuye para manifestar patentemente el modo de aplicar el principio que hemos dado para poner en equacion una cuestion qualquiera.

Cuestion III. *Partir un número conocido por egemplo* 14250 *en tres partes que sean entre sí como los números* 3, 5 *y* 11; *esto es, tales que sea la primera á la segun-*

da como 3 *á* 5, *y la primera sea á la tercera*:: 3 : 11.

Si conociese una de estas partes, pongo por caso la primera, la comprobaria de este modo.

Buscaria por una regla de tres (I. 203) un número que fuese á esta primera parte:: 5 : 3; esta seria la segunda parte. Buscaria igualmente otro número que fuese á la misma primera parte:: 11 : 3; este número seria la tercera parte: juntando estas tres partes deberian componer 14250. Sigamos, pues, este camino.

Sea la primera parte x

Para hallar la segunda, calcúlo el quarto término de esta proporcion $3 : 5 :: x$:

Será, pues, este quarto término ó la segunda parte $\frac{5x}{3}$.

Para hallar la tercera, calcúlo el quarto término de esta proporcion $3 : 11 :: x$:

Este quarto término ó la tercera parte será $\frac{11x}{3}$.

Estas tres partes juntas componen $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$ ó $x + \frac{16x}{3}$.

Pero segun viene propuesta la cuestion dichas tres partes han de componer 14250; es, pues, preciso que $x + \frac{16x}{3} = 14250$.

Para sacar el valor de x, elimino (123) el denomidador 3, y sale $3x + 16x = 42750$, ó $19x = 42750$: luego (119) dividiendo por 19, $x = \frac{42750}{19} = 2250$: la segunda parte, que es $\frac{5x}{3}$ será $\frac{5 \times 2250}{3}$, ó $\frac{11250}{3}$, ó 3750; y la tercera que es $\frac{11x}{3}$, será $\frac{11 \times 2250}{3}$ ó $\frac{24750}{3}$, ó 8250: estas tres partes juntas componen con efecto 14250: por otra parte los tres números 2250, 3750, 8250 son entre sí como los números 3, 5, 11, como es facil comprobarlo dividiendo los tres primeros por el mismo número 750, con lo que (I. 174) no se muda su razon.

Si en vez de ser 14250 el número cuya division viene propuesta, fuese otro número qualquiera; si fuese representado en general por a, y si los números proporcionales á las partes en que se le quiere dividir, en vez de ser 3, 5 y 11, fuesen en general tres números conocidos, y representados por las tres letras m, n, p, es evidente que para satisfacer á la pregunta no habria otra cosa que hacer sino imitar lo que antes se practicó para el caso particular propuesto.

Así, representando la primera parte por x,

Para hallar la segunda calcularia el quarto término de esta proporcion $m : n :: x :$

cuyo quarto término es $\frac{nx}{m}$.

Para hallar la tercera calcularia el quarto término de esta proporcion $m : p :: x :$;

cuyo quarto término, ó la tercera parte, seria $\frac{px}{m}$.

Las tres partes juntas serian $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, ó $x + \frac{nx+px}{m}$; y como deben componer a, es preciso que $x + \frac{nx+px}{m} = a$.

Esterminando el denominador sale $mx + nx + px = ma$, y por consiguiente (120) dividiendo $x = \frac{ma}{m+n+p}$; cuya espresion general nos acaba de manifestar quanto coadyuva el Álgebra para inventar reglas de cálculo.

Si quisiésemos calcular el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros fuesen $m + n + p : m :: a :$ es evidente (I. 183) que este quarto término seria $\frac{am}{m+n+p}$; y pues hallamos que x es espresada por la misma cantidad, inferirémos que para hallar x, se debe calcular el quarto término de una proporcion de la qual el primero es la suma de las partes proporcionales; el segundo, la primera de dichas partes; y el tercero es el número mismo que se quiere dividir; cuya regla es cabalmente la misma que dimos (I. 206).

Cuestion IV. *Se ha despachado desde Guadalajara á Barcelona un Correo que camina dos leguas por hora. Ocho horas despues de su partida, se ha despachado desde Madrid para Barcelona otro que anda tres leguas por hora. Se pregunta donde éste alcanzará al primero, suponiendo por otra parte que desde Madrid á Guadalajara hay* 10 *leguas.*

Si alguien me digera quántas leguas ha de andar el segundo Correo para alcanzar al primero, comprobaria este número del modo siguiente. Buscaria qué camino ha de andar el primero desde que el otro salió; y como en el mismo tiempo deben caminar á proporcion de su velocidad, esto es, á proporcion del número de leguas que andan por hora, hallaria lo que el primero ha andado en el espresado tiempo, calculando el quarto término de esta proporcion 3 : 2 :: el número de leguas andadas por el segundo, es el número de leguas que el primero habrá andado en el mismo tiempo. Hallado este quarto término, le añadiria el número de leguas que ha debido andar el primer Correo en las ocho horas que llevaba adelantadas, y finalmente las 10 leguas que hay desde Madrid á Guadalajara, que tambien llevaba adelantadas; y todo esto compondria el número de leguas que ha tenido que andar el segundo. Practiquemos, pues, todo esto, llamando x el número de leguas que andará el segundo Correo.

Para hallar el número de leguas que camina el primero mientras el segundo camina x, calcúlo el quarto término de esta proporcion $3 : 2 :: x$; este quarto término es $\frac{2x}{3}$; pero en 8 horas el mismo primer Correo ha andado 16 leguas, pues camina 2 leguas por hora; y pues hay 10 leguas desde Madrid á Guadalajara, si juntamos estas tres cantidades, tendremos $\frac{2x}{3} + 16 + 10$, ó $\frac{2x}{3} + 26$, cuya cantidad espresará el camino que habrá andado el segundo Correo quando alcanzáre al primero. Y como hemos supuesto, que entónces habrá andado x leguas, es preciso que $\frac{2x}{3} + 26 = x$.

Ya no falta sino hallar x en virtud de las reglas arriba dadas. Elímino, pues, el denominador 3, y sale (123) la equacion $2x + 78 = 3x$; trasladando todas las x al segundo miembro y reduciendo, sale $78 = x$; quiero decir que se encontrarán los dos Correos quando el segundo hubiere andado 78 leguas, ó que se encontrarán á 78 leguas de Madrid.

El que considerára con algun cuidado la cuestion que acabamos de resolver, echará de ver que aun quando se mudasen los números que espresa, no por esto variaría el modo de discurrir y operar. Representemos, pues, por a la distancia que hubiere entre los dos lugares de donde salen los Correos, que era 10 leguas en el caso propuesto: espresemos por b el número de horas que el primer Correo sale antes que el segundo; por c el numero de leguas que anda por hora el primero, y por d el número de leguas que anda por hora el segundo.

Si llamamos x el número de leguas que ha de caminar el segundo Correo para alcanzar al primero, constará tambien x de la distancia que hay entre los dos lugares de donde salen los Correos, del camino que puede andar el primero en el número b de horas, y finalmente del camino que andará el primero en todo el tiempo que camináre el segundo.

Para determinar este último camino, considero que caminando entónces ambos Correos el mismo tiempo, deben andar un camino proporcional á sus velocidades; como por el supuesto x espresa el camino que anda el segundo, hallaré el camino que en este tiempo andará el primero, calculando el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros serán $d : c :: x$; este quarto término será, pues, (I. 183) $\frac{c \times x}{d}$ ó $\frac{cx}{d}$. Pero ya que en virtud de la suposicion este primer Correo anda el número c de leguas por hora, habrá andado en el número b de horas, b veces mas leguas, esto es, 8 veces mas si b es 8, 30 veces si b vale treinta; en general, ha de caminar tantas veces mas, quantas unidades hay en $c \times b$ ó en bc; ha andado pues, una cantidad espresada por bc.

Juntemos ahora el número de leguas $\frac{cx}{d}$ con el número de leguas bc, y con el número de leguas a, y la suma $\frac{cx}{d} + bc + a$ será el camino que habrá andado el segundo; pero hemos supuesto que este camino era x: luego $x = \frac{cx}{d} + bc + a$.

Eliminando el denominador, sale $dx = cx + bcd + ad$; trasladando $dx - cx = bcd + ad$; dividiendo, sale finalmente (120) $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$ que satisface á todas las preguntas de esta especie, á lo menos mientras se supusiere que van los Correos ácia una misma parte, y que el Correo que anda menos sale antes que el segundo.

Para manifestar el uso de esta *fórmula* ó espresion general, volvamos al caso precedente, teniendo presente que entónces $a = 10$ leguas; $b = 8$ horas, $c = 2$ leguas, $d = 3$ leguas, y el valor general de $x = \frac{8 \times 2 \times 3 + 10 \times 3}{3 - 2}$, esto es $x = \frac{48 + 30}{1} = 78$, como antes.

Es, pues, tal el uso de estas resoluciones generales, ó fórmulas, que substituyendo en ellas en lugar de las letras los números que han de representar, y haciendo las operaciones que la disposicion y los signos de estas letras indican, se saca la resolucion de todas las cuestiones particulares de la misma especie.

Por egemplo, si se nos propusiera estotra cuestion: *La mano de las horas de un relox está á los 17 minutos, y la de* *los minutos señala 24 minutos, quiero decir que son $3^h\ 24'$, se pregunta á que número de horas y de minutos las dos manos estarán la una encima de la otra.*

Ya que la mano de las horas y la de los minutos caminan al mismo tiempo, la cantidad b que espresaba el número de horas que el un Correo salia antes que el otro, es aqui cero. El intervalo de los dos puntos de donde salen, es en este caso el camino que ha de andar la mano de los minutos para llegar desde la 24^a division del quadrante, á la decimaséptima, esto es, que $a = 53$ divisiones. Pero mientras la mano de los minutos anda las 60 divisiones, la de las horas no anda sino 5; tenemos, pues $c = 5$, $d = 60$. Y como $b = o$, quito de la fórmula $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ el término bcd ó $b \times cd$, porque cero multiplicado por lo que se quisiere, dá siempre cero. Tendré, pues, para el caso actual $x = \frac{ad}{d - c}$; y substituyendo en lugar de a, c, d sus valores, $x = \frac{53 \times 60}{60 - 5} = \frac{3180}{55} = 57\ \frac{45}{55} = 57\ \frac{9}{11}$; quiero decir que será menester que la mano de los minutos ande aun 57 divisiones y $\frac{9}{11}$. Así, ya que está en la 24^{ma} division, corresponderá á 81 divisiones y $\frac{9}{11}$; ó ya que 60 divisiones componen un todo, las dos manos estarán la una encima de la otra á los $21'\ \frac{9}{11}$ de la hora inmediata, esto es á las $4^h\ 21'\ \frac{9}{11}$.

La ventaja que llevan las resoluciones literales á las numéricas no consiste solo en que para cada cuestion particular, no hay sino substituir números en lugar de las letras que aquellas contienen; muchas veces por medio de ciertas preparaciones, llegan á tener estas resoluciones una espresion mas sencilla y facil de estamparse en la memoria. Por egemplo, la fórmula $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ que acabamos de hallar, está en este caso; como la cantidad d es factor comun de los dos términos del numerador, se puede escribir el valor de x de este modo $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$; y puesto en esta forma, se conoce al instante que el valor de x es el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros son $d - c : d :: a + bc$; pero el primero de estos tres términos espresa la diferencia de las velocidades de los dos Correos; el segundo d, señala la velocidad del segundo Correo; y el tercero $a + bc$, se compone del intervalo a que hay entre los dos lugares de donde salen, y de la cantidad bc ó $b \times c$ que espresa quántas leguas anda el primer Correo en el número de horas que lleva adelantadas; de suerte que $a + bc$ espresa toda la ventaja que le lleva el primero al segundo; se puede, pues, reducir la resolucion de la cuestion á esta operacion: Multiplíquese el camino que hace por hora el primero, por el número de horas que lleva adelantadas, y añadiendo el producto al intervalo que hay entre los dos lugares de donde salen, hágase esta regla de tres: La diferencia de las velocidades de los dos Correos es á la velocidad del segundo, como la suma de los dos números que se acaban de sumar, es á un quarto término; este espresará las leguas que ha de andar el segundo Correo para alcanzar al primero. Así en el primer egemplo arriba propuesto, como el primer Correo lleva 8 horas de ventaja, y camina dos leguas por hora, se han de añadir 16 leguas á 10 leguas, que son la distancia entre los dos lugares de donde salen, de lo que sacamos 26. Calculo, pues, el quarto término de esta proporcion $3-2 : 3 :: 26 :$ ó $1 : 3 :: 26 :$ este quarto término es 78, el mismo que sacamos antes.

Conviene reparar que es siempre una misma la regla, haya fracciones, ó no. Por exemplo, si caminando el primer Correo 7 leguas en 4 horas, y el segundo 13 en 5 horas; el primer Correo llevase la ventaja de 15 horas, y finalmente la distancia entre los dos lugares de donde salen fuesen 42 leguas; diria: Ya que el primer Correo anda 7 leguas en quatro horas, anda $\frac{7}{4}$ de legua por hora; del mismo modo el segundo andará $\frac{13}{5}$ de legua por hora; luego en las 15 horas que lleva de ventaja el primer Correo, debe andar, á razon de $\frac{7}{4}$ de legua por hora, 15 veces $\frac{7}{4}$ de legua ó $\frac{105}{4}$ de legua, que añadidos á 42 leguas, componen $42+\frac{105}{4}$ ó $\frac{273}{4}$. Calculo, pues, el quarto término de esta proporcion $\frac{13}{5}-\frac{7}{4} : \frac{13}{5} :: \frac{273}{4} :$ este quarto término será $\dfrac{\frac{13}{5}\times\frac{273}{4}}{\frac{13}{5}-\frac{7}{4}}$, ó $\dfrac{\frac{3549}{20}}{\frac{13}{5}-\frac{7}{4}}$, ó (reduciendo á un mismo denominador los dos quebrados inferiores) $\dfrac{\frac{3549}{20}}{\frac{52-35}{20}}$, ó $\dfrac{\frac{3549}{20}}{\frac{17}{20}}$, ó (I. 91) $\frac{3549}{20}\times\frac{20}{17}$, ó finalmente $\frac{3549}{17}$, porque con omitir el factor 20 que ha de multiplicar el númerador y el denominador, no se muda el quebrado. El valor de $\frac{3549}{17}$ es $208\frac{13}{17}$, que expresa el número de leguas que el segundo Correo tendria que andar.

Consideraciones acerca de las cantidades positivas y negativas.

127 Resolviendo de un modo general, conforme hemos enseñado, todas las cuestiones de una misma especie, se puede en muchas ocasiones hacer uso de las fórmulas generales que se sacan, para la resolucion de otras cuestiones cuyas condiciones sean de todo punto opuestas á las que se hubieren espresado en las primeras. Basta por lo comun mudar los signos de las cantidades de $+$ en $-$, ó de $-$ en $+$. Pero antes que declaremos cómo sirven para esto los signos, conviene considerarlos con otro respecto.

Las letras solamente representan el valor absoluto de las cantidades. Los signos $+$ y $-$ tampoco han representado hasta ahora mas que las operaciones de la adicion y de la sustraccion; pero tambien pueden representar en muchos casos lo que son unas cantidades respecto de otras.

Puedese considerar una misma cantidad con dos respectos del todo opuestos, ó como capaz de aumentar otra cantidad, ó como capaz de disminuirla. Quando dicha cantidad es representada por una sola letra ó un número, no podemos conocer con qual de estos dos respectos se la considera. Por exemplo, si suponemos que un hombre tenga tantos doblones como debe, podrá servir un mismo número para espresar la cantidad numérica de su haber y de sus deudas; pero este número, sea el que fuere, no nos manifestará la diferencia que hay entre el dinero que dicho hombre tiene y el que debe. El método mas natural para hacer perceptible esta diferencia, consiste en señalar las dos cantidades con un signo que avise el efecto que la una es capaz de producir en la otra; y como el efecto de las deudas es disminuir el haber, es natural señalar aquellas con el signo —. Fig.

Asimismo, si consideramos la linea recta como engendrada del movimiento de un punto *A*, que se mueve en una direccion perpendicular á la linea *BC*, se echa de ver que como el punto generador puede caminar, ó desde *A* ácia *D*, ó desde *A* ácia *E*, si representamos por *a* el camino *AD* ó *AE* que hubiese andado no queda bien determinada con esto la situacion de dicho punto. Para fijarla es preciso avisar con alguna señal si la cantidad *a* se ha de considerar á la derecha ó á la izquierda, para cuyo fin pueden servir los signos + y —. Porque si medimos el movimiento del punto *A* respecto de un punto *L* conocido y considerado como término fijo; quando el punto *A* se moviere ácia *D*, la linea que trazáre aumentará la *LA*; y quando se moviere ácia *E*, la linea que trazáre disminuirá la *LA*; es, pues, natural representar *AD* por + *a* ó *a*, y al contrario *AE* por — *a*. Haríamos al reves, si en lugar de considerar el movimiento del punto *A* respecto del punto *L*, se le considerára respecto del punto *O*. 1.

Tienen, pues, las cantidades negativas una exîstencia tan real como las positivas, y solo se diferencian de estas en que se toman en el cálculo de un modo enteramente opuesto.

Pueden hallarse, y se hallan con frecuencia mezcladas en los cálculos cantidades negativas con positivas, no solo por haberse egecutado algunas operaciones con la mira de restar unas cantidades de otras, sino tambien porque suele ser preciso espresar en el cálculo los diferentes respectos con que se consideran las cantidades.

128 Luego si despues de resuelta una cuestion saliese negativo el valor de la incógnita hallada por los métodos arriba declarados: por egemplo, si se llegase á un resultado como este $x = -3$, se debería inferir que á la cantidad representada por x, no la convienen las propiedades que se supusieron convenirla al hacer el cálculo, sino propiedades del todo opuestas. Por egemplo, si se me propusiera esta cuestion: *Hallar un número que sumado con* 15 *componga* 10, al instante conoceria evidentemente que es imposible esta cuestion; porque representando por x el número que se busca, tendria esta equacion $x + 15 = 10$, y por consiguiente en virtud de las reglas arriba dadas, $x = 10 - 15$, ó $x = -5$. Esta última conclusion me daria á conocer, que en lugar de considerar que x se ha de añadir á 15 para formar 10, es antes preciso restar x de 15 para el fin propuesto. Por lo mismo toda resolucion negativa es señal de que hay algun supuesto fal-

so en la proposicion de la cuestion; pero tambien enseña cómo se ha de enmendar, porque está diciendo que se debe tomar la cantidad que se busca, con propiedades enteramente opuestas á las que se la dieron al tiempo de proponer y resolver la cuestion.

129 Inferamos, pues, de aquí, que si despues de resuelta una cuestion en que se consideraban algunas de las cantidades que en ella se espresan con cierto respecto, se quisiere resolver la misma cuestion, considerando las mismas cantidades con respectos del todo opuestos, bastaría mudarlas el signo que actualmente llevan. Por egemplo, hemos resuelto generalmente la cuestion quarta en el supuesto de caminar los correos ácia una misma parte: si quisiera resolver todas las cuestiones que pueden proponerse en el caso de ir al encuentro el uno del otro, lo conseguiré con mudar el signo de c en el valor de x que hemos hallado $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$. Con efecto, yá que el primer correo viene al encuentro del segundo, en lugar de alejarse de él, acorta el camino que este ha de andar, y le disminuye en razon del camino c que anda por hora; deberé, pues, espresar que c, en lugar de añadir, disminuye: es, pues, preciso poner $-c$, en lugar de $+c$. De esto saldrá $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$; porque mudando el signo de c en el término $+bcd$, que es lo mismo que $+bd \times +c$, se deberá escribir $+bd \times -c$, que (24) viene á ser $-bcd$.

Confirmemos todo esto con un egemplo: supongamos que caminen los dos correos con direcciones contrarias, y que hayan salido de dos parages distantes cien leguas el uno del otro. Sale el primero siete horas antes que el segundo, caminando dos leguas por hora, y el segundo tres en el mismo tiempo. Si llamo x lo que este andará antes que se encuentren, advierto que x será igual á la diferencia entre la distancia total, y lo que hubiere andado el primer correo; pero este habrá andado lo que puede caminar en siete horas, y lo que camináre desde que hubiere salido el segundo: este último camino se determinará calculando el quarto término de esta proporcion $3 : 2 :: x :$, cuyo término será $\frac{2x}{3}$; y como en la siete horas que lleva de ventaja el primer correo, anda 14 leguas, pues anda dos por hora, habrá caminado en todo $14 + \frac{2x}{3}$: luego solo tiene que andar el segundo correo la cantidad $100 - 14 - \frac{2x}{3}$, ó $86 - \frac{2x}{3}$; y pues x representa lo que tenia que caminar, es preciso que $x = 86 - \frac{2}{3}x$; de cuya equacion se saca $3x = 258 - 2x$, ó $5x = 258$, ó finalmente $x = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5}$. Si en la fórmula $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$ que queremos aplicar á este caso, substituimos 100 en lugar de a, 7 en el de b, 3 en el de d, y 2 en el de c, tendremos $x = \frac{100 \times 3 - 7 \times 2 \times 3}{3 + 2} = \frac{300 - 42}{5} = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5}$: que es lo mismo sin discrepar en nada.

De las Equaciones de primer grado con muchas incógnitas.

130 El método que se debe seguir para espresar por una equacion una cuestion propuesta, siempre es el mismo, ora incluya sola una incógnita, ora incluya muchas. Pero

generalmente se deben formar tantas equaciones, quantas se pueden originar de las condiciones de la cuestion. Si todas estas condiciones son distintas é independientes unas de otras, y si cada una de ellas puede ser al mismo tiempo espresada por una equacion, no admite la cuestion mas de una solucion, si fueren de primer grado todas estas equaciones, y hubiere otras tantas incógnitas al mismo tiempo.

Pero si alguna de las condiciones se hallase esplícita ó implícitamente comprehendida en alguna de las otras, ó si fuese el número de las condiciones menor que el de las incógnitas, entónces habrá menos equaciones que incógnitas; y la cuestion admitirá una infinidad de resoluciones, á no ser que limíte su número alguna condicion particular, que no se pueda espresar por una equacion. Todo esto se aclarará con los egemplos.

Supondremos primero dos equaciones y dos incógnitas.

Las reglas que hemos sentado tocante á las equaciones con una incógnita, igualmente se aplican á las equaciones con muchas incógnitas; pero se las debe añadir la siguiente regla para las equaciones que tienen dos incógnitas.

131 *Tómese en cada equacion el valor de una misma incógnita, egecutando lo mismo que si se conociera todo lo demás: igualense estos dos valores, y resultará una equacion en que solo habrá la segunda incógnita que se determinará por las reglas precedentes. Hallada esta segunda incógnita, sub-*

titúyase su valor en uno de los dos valores que se hubieren tomado en la primera operacion, y saldrá el valor de la otra incógnita.

Por egemplo, si tubiera las dos equaciones $2x + y = 24$, $5x + 3y = 65$, sacaria de la primera, transponiendo, $2x = 24 - y$, y dividiendo, $x = \frac{24-y}{2}$. De la segunda sacaria, transponiendo, $5x = 65 - 3y$, y dividiendo $x = \frac{65-3y}{5}$.

Igualaria los dos valores de x, escribiendo $\frac{24-y}{2} = \frac{65-3y}{5}$, en cuya equacion no hay mas incógnita que y.

Para sacar el valor de y, elimino (123) los denominadores 2 y 5; y sale $120 - 5y = 130 - 6y$; transponiendo y reduciendo, saco $y = 10$.

Para hallar x, substituyo en lugar de y, su valor 10 en el primer valor de x arriba hallado, y tambien se podria substituir en el segundo. Esta substitucion me dá $x = \frac{24-10}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

132 Servirán de segundo egemplo las dos equaciones $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, y $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$.

Empiezo esterminando los denominadores (123) en cada una de las dos equaciones, lo que las transforma en estotras dos, $24x - 25y = 60$, y $8x + 9y = 228$. La transposicion transforma la primera de estas dos en $24x = 60 + 25y$, que por medio de la division dá $x = \frac{60+25y}{24}$. De la segunda saco, por transposicion, $8x = 228 - 9y$, y por division, $x = \frac{228-9y}{8}$.

Igualo los dos valores de x, escribiendo $\frac{60+25y}{24} =$

$\frac{228-9y}{8}$, cuya equacion no incluye mas incógnita que y.

Para sacar el valor de esta incógnita elimino los denominadores, y sale $480+200y=5472-216y$; transponiendo, saco $200y+216y=5472-480$, que se reduce á $416y=4992$; finalmente, dividiendo, hallo $y=\frac{4992}{416}=12$.

Para conocer x, pongo en lugar de y su valor 12 en uno de los dos valores de x, en el primero por egemplo; esto es, en $x=\frac{60+25y}{24}$ que, mediante esta substitucion, se transforma en $x=\frac{60+25\times12}{24}=\frac{60+300}{24}=\frac{360}{24}=15$.

133 Servirán de tercer exemplo las dos equaciones $\frac{2}{5}x=\frac{1}{4}x+\frac{3}{7}y-9$, y $\frac{4}{5}x-\frac{2}{7}y=\frac{1}{2}y-6$.

Eliminando los denominadores (123);

$$\text{Saco } 56x=35x+60y-1260.$$
$$\text{y } 56x-20y=35y-420.$$

De la primera sale, despues de egecutadas la transposicion y reduccion $21x=60y-1260$, y dividiendo sale $x=\frac{60y-1260}{21}$.

La segunda da por medio de la transposicion y reduccion $56x=55y-420$, y dividiendo saco $x=\frac{55y-420}{56}$.

Igualando estos dos valores de x, tengo $\frac{60y-1260}{21}=\frac{55y-420}{56}$.

Para sacar de esta equacion el valor de y, elimino los denominadores, y sale $3360y-70560=1155y-8820$; transponiendo y reduciendo saldrá $2205y=61740$; finalmente dividiendo saco $y=\frac{61740}{2205}=28$.

Para conocer el valor de x, substituyo en lugar de y

su valor 28, en la equacion arriba hallada $x=\frac{60y-1260}{21}$. de lo que resulta $x=\frac{60\times 28-1260}{21}=\frac{1680-1260}{21}=\frac{420}{21}=20$.

134 Lo mismo se practicaria si las equaciones fuesen literales. Asi, si ocurriesen las dos equaciones $ax+by=c$, y $dx+fy=e$, la primera daria, por transposicion, $ax=c-by$, y por division, $x=\frac{c-by}{a}$; del mismo modo la segunda daria por transposicion $dx=e-fy$, y dividiendo, $x=\frac{e-fy}{d}$. Igualando los dos valores de x, saldria $\frac{c-by}{a}=\frac{e-fy}{d}$; eliminando los divisores resultaria $cd-bdy=ae-afy$; transponiendo, $afy-bdy=ae-cd$; finalmente dividiendo, $y=\frac{ae-cd}{af-bd}$.

El valor de x se sacará substituyendo en lugar de y su valor $\frac{ae-cd}{af-bd}$ en el uno de los dos valores de x, por egemplo en $x=\frac{c-by}{a}$. De cuya substitucion resultará.....

$x=\frac{c-b\times\overline{\frac{ae-cd}{af-bd}}}{a}$ que viene á ser $x=\frac{c\frac{-abe+bcd}{af-bd}}{a}$.

ó (43) reduciendo c á quebrado $x=\frac{\frac{afc-bcd-abe+bcd}{af-bd}}{a}$,

ó $x=\frac{\frac{afc-abe}{af-bd}}{a}$, ó (49) $x=\frac{afc-abe}{aaf-abd}$, ó finalmente (32), $x=\frac{fc-be}{af-bd}$.

135 Hemos supuesto hasta aquí que las dos incógnitas se hallen ambas en cadaequaci on. Si no fuere así, no por esto variará el método: no habrá mas diferencia sino la de ser mas sencillos los cálculos. Por exemplo, si fuesen $5ax=3b$, y $cx+dy=e$ las dos equaciones propuestas, la primera daria $x=\frac{3b}{5a}$, y la segunda $x=\frac{e-dy}{c}$. Igua-

lando estos dos valores, saldrá $\frac{3b}{5a} = \frac{e-dy}{c}$, de donde se saca, echando los denominadores, traspasando y reduciendo $y = \frac{5ae-3bc}{5ad}$.

De las Equaciones de primer grado que incluyen tres ó mayor número de incógnitas.

136 Los que se hubieren enterado de lo que acabamos de decir, alcanzarán con facilidad lo que se deberá practicar quando fuere mayor el número de las incógnitas y de las equaciones.

Hablaremos siempre en el supuesto de que haya tantas equaciones como incógnitas. Si hubiese tres, *se tomará en cada una el valor de una misma incógnita, como si se conociera todo lo demás. Se igualará despues el primer valor con el segundo, y el primero con el tercero; ó si no, se igualará el primero con el segundo, y este con el tercero. De esto resultarán dos equaciones que solo incluirán dos incógnitas, y se practicará con ellas lo que hemos declarado en la regla antecedente* (131).

Sean, por egemplo, las tres equaciones

$$3x + 5y + 7z = 179$$
$$8x + 3y - 2z = 64$$
$$5x - y + 3z = 75$$

saco de la primera, transponiendo $3x = 179 - 5y - 7z$; y por division $x = \frac{179-5y-7z}{3}$.

La segunda dá por transposicion $8x = 64 - 3y + 2z$, y por division $x = \frac{64-3y+2z}{8}$.

Saco de la tercera por transposicion, $5x = 75 + y - 3z$, y dividiendo $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Igualando el primer valor de x con el segundo, tengo, $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Igualando del mismo modo el primero con el tercero, tengo $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Como no hay mas que dos incógnitas en estas equaciones, las aplico la regla dada (131) para las que solo tienen dos incógnitas. Echo desde luego los denominadores, de lo que saco las dos equaciones siguientes $1432 - 40y - 56z = 192 - 9y + 6z$, y $895 - 25y - 35z = 225 + 3y - 9z$.

Tomo en cada una de estas el valor de y; la primera me dá por transposicion y reduccion $1240 - 62z = 31y$, dividiendo $y = \frac{1240 - 62z}{31}$. La segunda me dá, transponiendo y reduciendo, $670 - 26z = 28y$, y dividiendo $y = \frac{670 - 26z}{28}$.

Igualo los dos valores de y, y tengo $\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}$, que incluye sola una incógnita. Para hallar su valor elimino los denominadores y tengo $34720 - 1736z = 20770 - 806z$; traspasando y reduciendo, sale $13950 = 930z$; finalmente dividiendo hallo $z = \frac{13950}{930} = \frac{1395}{93} = 15$.

Para sacar el valor de y, pongo, en lugar de z, su valor 15 en la equacion $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, que hallé poco ha, lo que dá $y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{1240 - 930}{31} = \frac{310}{31} = 10$.

Finalmente, para conocer el valor de x, pongo, en lugar de y, su valor 10, y en lugar de z, su valor 15, en uno de los tres valores de x arriba hallados, por egemplo en $x = \frac{179-5y-7z}{8}$, que con esto se transforma en $x = \frac{179-5\times10-7\times15}{3} = \frac{179-50-105}{3} = \frac{179-155}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

137 Si no entrasen á un tiempo todas las incógnitas en cada equacion, sería mas sencillo el cálculo, pero siempre se haria de un modo análogo.

Por egemplo, si fuesen las tres equaciones $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$; la primera daria $x = \frac{65-3y}{5}$; la segunda no daria valor alguno de x; y la tercera daria $x = \frac{57-4z}{3}$: no habria mas que hacer sino igualar estos dos valores de x, que dan $\frac{65-3y}{5} = \frac{57-4z}{3}$, cuya equacion ya no incluye x; y combinándola con la segunda equacion $2y - z = 11$, por las reglas de las equaciones con dos incógnitas, dará los valores de y, y z. Concluyendo el cálculo se hallará $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

138 Con esto se echa de ver que si hubiera mayor número de equaciones, la regla general seria la siguiente:

Tómese, en cada equacion, el valor de una misma incógnita; iguálese el uno de estos valores con cada uno de los otros y habrá una equacion y una incógnita menos. Manéjense estas nuevas equaciones como se acaban de manejar las primeras, y resultará tambien una equacion y una incógnita menos; continúese así hasta que por fin se consiga que haya sola una incógnita.

Aplicacion de las Reglas precedentes á la resolucion de algunas cuestiones que incluyen mas de una incógnita.

139 Cuestion I. *Tiene un hombre dos especies de moneda: siete piezas de la mayor especie, con doce piezas de la menor componen* 288rs. *y doce de la primera especie, con siete de la segunda componen* 358rs. *Se pregunta el valor de cada especie de moneda?*

Si conociera el valor de cada especie de piezas, multiplicando el de una pieza de la primera especie por 7, el valor de una pieza de la segunda especie por 12, y sumando los dos productos, seria la suma $= 288$rs. Si multiplicára el valor de una pieza de la primera especie por 12, el de una de la segunda por 7, y sumára uno con otro estos productos, sería la suma $= 358$rs. Esto supuesto, si represento por x el número de reales ó el valor de una pieza de la primera especie, y por y el de una de la segunda, podré discurrir del modo siguiente.

Ya que cada pieza de la primera especie vale x, las siete piezas valdrán 7 veces x, ó $7x$: por la misma razon 12 piezas de la segunda especie valdrán $12y$; es preciso, pues, que $7x + 12y = 288$.

Discurriendo del mismo modo respecto de la segunda condicion, hallaré que $12x + 7y = 358$. Solo resta hallar los valores de x é y. Tomo para este fin el valor de x en cada equacion. La primera me dá, despues de traspasar y dividir, $x = \frac{288 - 12y}{7}$; la segunda me dá $x = \frac{358 - 7y}{12}$;

igualo estos dos valores de x y saco la equacion $\frac{288-12y}{7} = \frac{358-7y}{12}$.

Para sacar de esta última equacion el valor de y, estermíno los denominadores (123) y resulta $3456 - 144y = 2506 - 49y$, ó trasponiendo y reduciendo $950 = 95y$, ó finalmente dividiendo, $y = \frac{950}{95} = 10$. Para hallar x, vuelvo al primer valor de x, es á saber $x = \frac{288-12y}{7}$, en el qual substituyo en lugar de y su valor 10, y hallo $x = \frac{288-12\times10}{7} = \frac{288-120}{7} = \frac{168}{7} = 24$; luego la pieza mayor era de 24^rs^. y la menor de 10. Con efecto, 7 piezas de 24^rs^. hacen 168^rs^. que con 12 piezas de 10^rs^. ó 120^rs^. componen los 288^rs^. Fuera de esto, 12 piezas de 24^rs^. ó 288^rs^. con 7 piezas de 10 ó 70^rs^. hacen 358^rs^.

Cuestion II. *Se ha mezclado cierta porcion de oro con cierta porcion de plata: forma toda la mezcla un volumen de 12 pulgadas cúbicas que pesa 100 onzas: una pulgada cúbica de oro pesa 12 $\frac{2}{3}$ onzas: una pulgada cúbica de plata pesa 6 $\frac{8}{9}$. Se pregunta ¿quál es la cantidad de oro, y quál la de plata que se han aligado?*

Si se conociera el número de pulgadas cúbicas de cada especie de metal, y se sumáran, sería su suma 12. Fuera de esto, tomando 12 $\frac{2}{3}$ onzas tantas veces, como pulgadas de oro cúbicas hay, esto es, multiplicando 12 $\frac{2}{3}$ por el número de pulgadas cúbicas de oro, se conoceria el peso del oro que entra en la mezcla; y multiplicando del mismo modo 6 $\frac{8}{9}$ onzas por el número de pulgadas cúbicas de plata, se conocería el peso de la plata; y sumando los dos productos compondrian las 100 onzas que son el peso del mixto.

Discurramos, pues, del mismo modo llamando x el número de las pulgadas cúbicas de oro, é y el de las pulgadas cúbicas de plata: es menester, pues que sea $x + y = 12$. Por otra parte, ya que cada pulgada cúbica de oro pesa $12\frac{2}{3}$ onzas ó $\frac{38}{3}$ de onza, un número x de pulgadas de oro pesará $\frac{38}{3} \times x$, ó $\frac{38x}{3}$. Por la misma razon, como cada pulgada cúbica de plata pesa $6\frac{8}{9}$ onzas ó $\frac{62}{9}$ de onza, un número y de pulgadas cúbicas de plata pesará $\frac{62}{9} \times y$, ó $\frac{62}{9}y$: luego el oro y la plata juntos pesarán $\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y$; y como deben pesar 100 onzas, será $\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y = 100$.

Para hallar los valores de x é y, echo los denominadores de esta última equacion, y sale $342x + 186y = 2700$. Saco de la primera equacion $x = 12 - y$, y de la última $x = \frac{2700 - 186y}{342}$: igualando estos dos valores, tendré $12 - y = \frac{2700 - 186y}{342}$.

Elimino, para conocer y, el denominador, y sale $4104 - 342y = 2700 - 186y$, traspasando y reduciendo $1404 = 156y$; y finalmente dividiendo $y = \frac{1404}{156} = 9$; y como hemos hallado $x = 12 - y$, tendremos, pues, $x = 3$, esto es, que se han mezclado 3 pulgadas de oro con 9 de plata, pues la suma compone con efecto 12 pulgadas cúbicas. Por otra parte tres pulgadas cúbicas, cada una de las quales pesa $12\frac{2}{3}$ onzas, hacen 38 onzas, y 9 pulgadas cúbicas, si pesa cada una $6\frac{8}{9}$ onzas, pesarán 62 onzas que juntas con las 38 componen 100.

Si tubiesen los dos metales mezclados gravedades específicas diferentes, y si el volumen, como tambien el peso total de la mezcla ó mixto, fuesen diferentes de lo que acabamos de suponer, no por esto dejariamos de seguir el mismo rumbo: así, para resolver en sola una todas las cuestiones de esta especie, supondremos en general que el número de las pulgadas cúbicas de las dos especies de metal sea . . . . a;

Sea el peso total de la mezcla expresado en onzas, b;

El de una pulgada cúbica del primer metal sea . . c;

Y el peso de una pulgada cúbica del segundo sea d, espresando c y d onzas.

Si llamamos x el número de pulgadas cúbicas del primer metal, é y el número de las pulgadas cúbicas del segundo, será la primera equacion

$$x + y = a$$

Por otra parte, ya que cada pulgada del primer metal pesa c onzas, una vez que hay x pulgadas cúbicas, la cantidad del primer metal pesará $c \times x$ ó cx. Por la misma razon pesará la cantidad del segundo metal dy: de modo que pesará el total $cx + dy$; y por haber supuesto que pesa b, sera $cx + dy = b$.

Sentado esto, la primera equacion dá $x = a - y$: la segunda $x = \frac{b - dy}{c}$: igualando estos dos valores, tendremos $a - y = \frac{b - dy}{c}$, y echando el denominador, $ac - cy = b - dy$; transponiendo y dividiendo, $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Para sacar el valor de x, se substituirá en la equacion

$x = a - y$, el valor de y que se acaba de hallar, y resultará $x = a + \frac{b-ac}{c-d}$; en cuyo valor es de reparar que estan mudados los signos del numerador de $\frac{ac-b}{c-d}$, porque se debe restar y de a (11). Se puede simplificar este valor de x, reduciéndolo todo á quebrado (43), de lo que resultará $x = \frac{ac-ad+b-ac}{c+d}$, ó reduciendo, $x = \frac{b-ad}{c-d}$. De los valores $x = \frac{b-ad}{c-d}$, é $y = \frac{ac-b}{c-d}$ que acabamos de hallar, podemos sacar una regla muy sencilla para resolver generalmente todas las cuestiones de esta especie.

Para sacar esta regla conviene tener presente 1.° que b denota el peso total de la mezcla: 2.° que espresando a el número total de las partes del mixto, y d el peso de una de las partes de la segunda especie, ad espresa lo que pesaria el volumen de la mezcla, si se compusiese solamente de la materia de la segunda especie. Y de hecho, si fuera todo el volumen de plata, por egemplo, se hallaria su peso total, multiplicando la pesantez d de una pulgada cúbica de plata por el número total a de las pulgadas cúbicas. Finalmente el denominador $c-d$ es la diferencia que hay entre las pesanteces ó gravedades específicas de los dos metales.

Si aplicamos al valor de y las consideraciones que acabamos de hacer acerca del valor de x, hallaremos que si se compusiera la mezcla solamente del primer metal, seria ac el peso del volumen de la mezcla. De donde se podrá inferir la siguiente regla:

Calcúlese lo que pesaria el volumen de la mezcla, si so-

lo se compusiera del segundo metal: réstese este peso del peso total actual de la mezcla, y divídase la resta por la diferencia de las pesanteces específicas de los dos metales: el cociente será el número de partes del primer metal que entra en la mezcla.

Al contrario, *para sacar el número de las partes del segundo metal*, *calcúlese lo que pesaria el volumen de la mezcla, si se compusiera enteramente del primer metal: de la cantidad que resultáre, réstese el peso total actual de la mezcla, y divídase la resta por la misma cantidad que arriba.*

Esta regla es cabalmente la que los Arisméticos llaman regla de Aligacion, y que en la Arismética dimos palabra de tratar en este lugar.

A esta misma cuestion se pueden reducir otras muchas que á primera vista no parece que sean de la misma especie. Tal es, por egemplo, esta: *componer* 522^{rs} *con* 42 *piezas, tales que las unas valgan* 24^{rs}, *y las otras* 6^{rs}; porque reflexîonando un poco, se advierte que esta cuestion es la misma que estotra: *un mixto compuesto de* 42 *pulgadas cúbicas de materia pesa* 522 *onzas: cada pulgada cúbica de la una de las dos materias que le componen pesa* 24 *onzas, y cada pulgada cúbica de la otra pesa* 6 *onzas.* Practicando la regla antecedente se hallará que son menester 15 piezas de á 24^{rs}, y 27 de á 6^{rs}.

De la misma regla se podria sacar tambien la resolucion de esta cuestion: *Un pie cúbico de agua de mar pesa* 74℔, *y un pie cúbico de agua de lluvia pesa* 70℔ *¿qué* *porcion se deberá mezclar de agua de mar y de agua de lluvia, para componer una agua cuyo pie cúbico pese* 73^{lb}?

Todo esto manifiesta quan util es habituarse temprano á representar de un modo general las cantidades conocidas que entran en las cuestiones, y á interpretar ó traducir los resultados algebraicos de las resoluciones de los problemas.

Cuestion III. *Tengo tres barras cada una de las quales se compone de oro, plata y cobre. En la primera es tal la aligacion, que pesando toda ella* 16 *onzas, hay* 7 *de oro,* 8 *de plata, y* 1 *de cobre: en la segunda, que tambien pesa* 16 *onzas, hay* 5 *de oro,* 7 *de plata, y* 4 *de cobre. La tercera pesa tambien* 16 *onzas, y hay* 2 *de oro,* 9 *de plata, y* 5 *de cobre. Quiero sacar con diferentes partes de estas tres aligaciones una quarta barra que en* 16 *onzas tenga* $4\frac{15}{16}$ *de oro,* $7\frac{10}{16}$ *de plata, y* $3\frac{7}{16}$ *de cobre.*

Llamaré x el número de onzas que he de tomar de la primera barra; y, el número de onzas que he de tomar de la segunda; y finalmente z, el número de onzas que he de tomar de la tercera.

Ya que en las 16 onzas de la primera hay 7 de oro, hallaré el oro que pueden contener x onzas de esta misma barra, calculando el quarto término de esta proporcion $16 : 7 :: x :$; este quarto termino será, $\frac{7x}{16}$; por el mismo camino hallaré que en las y onzas de la segunda barra habrá $\frac{5y}{16}$ de oro; y en z onzas de la tercera, $\frac{2z}{16}$. La suma de estas tres cantidades es $\frac{7x+5y+2z}{16}$; pero por los términos de la cuestion han de componer $4\frac{15}{16}$ ó $\frac{79}{16}$; luego $\frac{7x+5y+2z}{16} = \frac{79}{16}$.

Para cumplir con la segunda condicion, reparo que en x onzas de la primera barra, ha de haber necesariamente $\frac{8x}{16}$ onzas de plata, en y onzas de la segunda, $\frac{7y}{16}$ de plata: y finalmente en z onzas de la tercera $\frac{9z}{16}$, de plata. La suma de estas tres cantidades es $\frac{8x+7y+9z}{16}$, y como han de componer $7\frac{10}{16}$ ó $\frac{122}{16}$, tendremos $\frac{8x+7y+9z}{16} = \frac{122}{16}$.

Siguiendo el mismo rumbo llegaré á la equacion $\frac{x+4y+5z}{16} = \frac{55}{16}$, que desempeña la tercera condicion de la cuestion propuesta.

Por ser el número 16 divisor comun de los dos miembros de cada una de las tres equaciones que hemos hallado, se puede suprimir, y saldrán las tres equaciones siguientes $7x + 5y + 2z = 79$, $8x + 7y + 9z = 122$, $x + 4y + 5z = 55$. Sacando de cada una el valor de x, tendremos $x = \frac{79-5y-2z}{7}$, $x = \frac{122-7y-9z}{8}$, $x = 55 - 4y - 5z$: igualando succesivamente el primer valor de x con el segundo y el tercero (136), sacaré $\frac{79-5y-2z}{7} = \frac{122-7y-9z}{8}$, y $\frac{79-5y-2z}{7} = 55 - 4y - 5z$, cuyas equaciones solo tienen dos incógnitas, y se resolverán en virtud de lo dicho (131).

Para ponerlo en práctica, empiezo eliminando los divisores, y saco $632 - 40y - 16z = 854 - 49y - 63z$, y $79 - 5y - 2z = 385 - 28y - 35z$; ó pasando todas las y á un mismo lado y reduciendo, $9y = 222 - 47z$, y $23y = 306 - 33z$; la primera de estas equaciones dá $y = \frac{222-47z}{9}$, y la segunda, $y = \frac{306-33z}{23}$; igualando estos dos valores de y, tengo $\frac{222-47z}{9} = \frac{306-33z}{23}$; quitando los divisores, $5106 - 1081z = 2754 - 297z$; traspasando, $5106 - 2754 = 1081z - 297z$; reduciendo, $2352 = 784z$; y finalmente dividiendo, $z = \frac{2352}{784} = 3$.

Para sacar el valor de y, substituyo en el uno de los dos valores de y, arriba hallados, en lugar de z, su valor 3 que acabamos de sacar; substituyéndole, por egemplo, en $y = \frac{222-47z}{9}$, saco $y = \frac{222-141}{9} = \frac{81}{9} = 9$.

Finalmente para conocer x, substituyo en lugar de y, y de z, sus valores 9 y 3 en uno de los tres valores de x que hallé arriba: por egemplo en el último, es á saber en $x = 55 - 4y - 5z$, y se transforma este valor en $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$; y como saco $x = 4$, $y = 9$, y $z = 3$, he de tomar 4 onzas de la primera barra, 9 de la segunda y 3 de la tercera; y con esto entrarán en la nueva barra $4\frac{15}{16}$ onzas de oro; $7\frac{10}{16}$ de plata; y $3\frac{7}{16}$ de cobre.

Con efecto, ya que la primera barra contiene en 16 onzas 7 de oro, 8 de plata y 1 de cobre, es evidente que si solo se toman 4 onzas de esta barra, se tomarán $\frac{28}{16}$ onzas de oro, $\frac{32}{16}$ de plata, y $\frac{4}{16}$ de cobre. Por la misma razon, tomando 9 onzas de la segunda barra se tomarán $\frac{45}{16}$ de oro, $\frac{63}{16}$ de plata, y $\frac{36}{16}$ de cobre; y tomando de la tercera barra 3 onzas, se tomarán $\frac{6}{16}$ de oro, $\frac{27}{16}$ de plata, y $\frac{15}{16}$ de cobre.

Juntando las tres cantidades de cada especie de metal, que provienen de las tres barras, tendremos $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{19}$ ó $4\frac{15}{16}$, $7\frac{10}{16}$, y $3\frac{7}{16}$; cuyos números espresan respectivamente las cantidades de oro, plata y cobre que compondrán efectivamente la quarta barra.

De los casos en que son indeterminadas las cuestiones propuestas, aunque haya tantas Equaciones como incógnitas; y de los casos en que son imposibles las cuestiones.

140 Sucede algunas veces que, aunque haya tantas equaciones como incógnitas, se queda indeterminada la cuestion, de la qual se han originado dichas equaciones: quiero decir que admite entónces un número indefinito de resoluciones.

Ocurre este caso quando algunas de las condiciones, aunque parezcan diferentes, son en sustancia las mismas. Las equaciones que espresan estas condiciones son entónces ó multiplas las unas de las otras, ó, en general, algunas de ellas se componen de alguna ó algunas de las otras sumadas ó restadas, multiplicadas ó divididas por ciertos números. Por egemplo, una cuestion de la qual se originasen estas tres equaciones $5x + 3y + 2z = 17$, $8x + 2y + 4z = 20$, $18x + 8y + 8z = 54$, admitiria un número indefinito de resoluciones, bien que parece, en virtud de lo dicho arriba, que cada una de las tres incógnitas x, y y z no puede tener mas de un valor. De estas tres equaciones, la última se compone de la segunda sumada con el duplo de la primera. Pero claro está que se infiere necesariamente la tercera, una vez que se suponga que tienen lugar las dos primeras; que por consiguiente no espresa la tercera ninguna nueva condicion: luego el caso es el mismo que si solo hubiera las dos primeras equaciones. Veremos muy en breve, que quando no hay mas de dos equaciones y tres incógnitas, pueden convenirla á cada incógnita un número indefinito ó indeterminado de valores.

141 Como manifiesta siempre el cálculo estos casos, daremos á conocer las señas que suministra para conocerlos. Búsquense, por las reglas dadas, los valores de las incógnitas. Si alguna de las equaciones estubiere comprehendida en las otras, se llegará en el discurso del cálculo á una equacion *idéntica*, esto es, á una equacion que no solo tendrá los miembros iguales, sino tambien compuestos de términos iguales y semejantes. Entre las equaciones que se hubieren propuesto, habrá tantas inútiles como equaciones idénticas resultaren.

Por egemplo, si de cada una de las dos equaciones $6x+8y=12$, y $x+\frac{4}{3}y=2$, saco el valor de x, tendré $x=\frac{12-8y}{6}$, y $x=2-\frac{4}{3}y$: igualando estos dos valores, saldrá $\frac{12-8y}{6}=2-\frac{4}{3}y$, ó echando los denominadores, $36-24y=36-24y$ equacion idéntica, y que no puede dar á conocer el valor de y, porque despues de la transposicion y de la reduccion, sale esta equacion $o=o$.

De las tres equaciones arriba propuestas se saca $x=\frac{17-3y-2z}{5}$, $x=\frac{20-2y-4z}{8}$, y $x=\frac{54-8y-8z}{18}$; igualando sucesivamente el primero de estos valores con el segundo y con el tercero, resultará $\frac{17-3y-2z}{5}=\frac{20-2y-4z}{8}$, y $\frac{17-3y-2z}{5}$ $=\frac{54-8y-8z}{18}$; esterminando los denominadores, traspasando, reduciendo y dividiendo, dará la primera $y=\frac{36+4z}{14}$: la segunda $y=\frac{36+4z}{14}$; cuyos valores comparados dan la equacion idéntica $\frac{36+4z}{14}=\frac{36+4z}{14}$. No hay, pues, en este caso sino dos equaciones realmente distintas.

Pero si se ofreciesen las tres equaciones siguientes:

$$5x+3y+2z=24$$
$$\tfrac{25}{2}x+\tfrac{15}{2}y+5z=60$$
$$15x+9y+6z=72$$

La primera daria $x=\frac{24-3y-2z}{5}$: la segunda, despues de echados los denominadores, traspasado, reducido &c. daria $x=\frac{120-15y-10z}{25}$; y la tercera $x=\frac{72-9y-6z}{15}$. Igualando el primero de estos valores con el segundo y con el tercero, tendríamos $\frac{24-3y-2z}{5}=\frac{120-15y-10z}{25}$, y $\frac{24-3y-2z}{5}$ $=\frac{72-9y-6z}{15}$; y quitando los denominadores

$$600-75y-50z=600-75y-50z,$$
y $360-45y-30z=360-45y-30z$,

equaciones idénticas, y de las quales no se puede sacar ni y ni z, porque cada una de ellas se reduce á $o=o$.

Las cuestiones cuya resolucion viene á parar en semejantes resultados, aunque son indeterminadas no son imposibles. Daremos muy en breve un método para resolverlas.

142 Quando una cuestion de cuyas condiciones no resultan sino equaciones de primer grado, es imposible, se conoce al fin su imposibilidad, porque pára el cálculo en un absurdo, qual sería, por egemplo, esta equacion $4=3$.

Si ocurriesen, pongo por caso, estas dos equaciones

$$5x + 3y = 30$$
$$20x + 12y = 135$$

La primera daria $x = \frac{30-3y}{5}$, y la segunda $x = \frac{135-12y}{20}$: igualando estos dos valores, sale $\frac{30-3y}{5} = \frac{135-12y}{20}$; eliminando los denominadores se saca $600 - 60y = 675 - 60y$, que termina en el absurdo $600 = 675$: luego la cuestion de cuyas condiciones hubiesen resultado las dos equaciones $5x + 3y = 30$, y $20x + 12y = 135$, seria imposible y un absurdo.

143 Tambien se deduce de las resoluciones negativas una especie de imposibilidad en la cuestion; pero esta imposibilidad no es absoluta, es relativa, y solo pende del respecto con que se miran las cantidades: de modo que considerando estas cantidades con cierto respecto, son naturales estas resoluciones, y se deben admitir. Véase lo dicho (128).

De las Cuestiones ó Problemas indeterminados.

144 Llámase *Problema indeterminado* toda cuestion á la que se puede satisfacer de muchos modos, sin que sea posible determinar entre todos ellos qual es el que dá lugar á la cuestion. Las cuestiones de esta clase tienen siempre menos condiciones que incógnitas; y consideradas generalmente admiten una infinidad de resoluciones; pero tambien suele suceder que limiten el número de estas resoluciones algunas condiciones, que no pudiendo reducirse á

equaciones, no permiten determinar de un modo directo el número de las resoluciones que puede admitir la cuestion.

Si se propusiera esta cuestion: *Hallar dos números, cuya suma componga* 24; llamando x al uno de estos números, al otro y, tendrémos $x + y = 24$, de cuya equacion se saca $x = 24 - y$. Admite esta cuestion una infinidad de resoluciones, si se quiere que x é y representen indistintamente números enteros ó fraccionarios, positivos ó negativos; basta para resolverla substituir en lugar de y el número que se quisiere, y se inferirá el valor de x de la equacion $x = 24 - y$. Así, si suponemos succesivamente $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$ &c. tendremos $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$ &c. Pero si fuese condicion indispensable sacar el valor de x en números enteros y positivos, sería limitado el número de las resoluciones; porque para que x sea positiva, es menester que no sea y mayor que 24. Y pues solo se pedirian números enteros, es evidente que no admitiria la equacion mas que 25 resoluciones, incluyendo en ellas 0: de suerte, que suponiendo succesivamente $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ &c. tendremos $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, $x = 21$ &c.

145 Pero quando se espresa la condicion de que los números que se piden sean enteros y positivos, no siempre se percibe con facilidad, como en el egemplo antecedente, el modo de cumplir esta condicion: las siguientes cuestiones contribuirán para darlo á conocer.

Cuestion. I. *Se pregunta de quantos modos se pueden pagar* 542^{rs}. *dando piezas de* 17^{rs}. *y recibiendo en cambio piezas de á* 11^{rs}.

Represente x el número de las piezas de 17^{rs}. é y el de las piezas de 11^{rs}; dando x piezas de á 17^{rs}, se pagarán x veces 17 ó $17x$; recibiendo y piezas de á 11^{rs}, se recibirán $11y$; se habrán pagado por consiguiente $17x - 11y$; como son 542^{rs}. los que se han de pagar, tendremos $17x - 11y = 542$. Saquemos el valor de y, esto es, de la incógnita que lleva menor coeficiente, y tendrémos $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Como no hay mas equacion que esta, es evidente que substituyendo en lugar de x el número que se quisiere á arbitrio, se sacará un valor de y, que seguramente satisfará á la equacion; pero como por los términos en que viene propuesta la cuestion, se pide que x é y sean números enteros, para sacarlos directamente se practicará lo que vamos á declarar.

El valor de $y = \frac{17x - 542}{11}$ se reduce, haciendo la division quanto sea posible, á $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$: es pues preciso que $\frac{6x - 3}{11}$ sea un número entero; sea u este número entero, tendrémos $\frac{6x - 3}{11} = u$, y por consiguiente $6x - 3 = 11u$, y $x = \frac{11u + 3}{6}$; ó egecutando la division, $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; luego es menester que $\frac{5u + 3}{6}$ sea un número entero; sea t este número entero; tendremos $\frac{5u + 3}{6} = t$, y por consiguiente $5u + 3 = 6t$, y $u = \frac{6t - 3}{5} = t + \frac{t - 3}{5}$; ha de ser pues $\frac{t - 3}{5}$ un número entero; sea este número s, tendremos $\frac{t-3}{5}=s$, y por consiguiente $t=5s+3$. Aquí finaliza la operacion, porque es evidente que, substituyendo en lugar de s el número entero que se quisiere, será siempre t un número entero como lo pide la cuestion, una vez que no hay mas denominador.

Volvamos ahora á los valores de x, é y: ya que hemos hallado $u=\frac{6t-3}{5}$: escribiendo en lugar de t su valor $5s+3$, tendremos $u=\frac{30s+18-3}{5}=6s+3$: y como hallamos antes $x=\frac{11u+3}{6}$, poniendo en lugar de u su valor, saldrá $x=\frac{66s+33+3}{6}=11s+6$. Finalmente, ya que hallamos $y=\frac{17x-542}{11}$, substituyendo en lugar de x su valor, saldrá $y=\frac{187s+102-542}{11}=17s-40$; así los valores correspondientes de x, y de y, son $x=11s+6$, é $y=17s-40$ En el primero está á nuestro arbitrio poner en lugar de s el número entero que quisiésemos; pero en el segundo no podemos substituir en lugar de s ningun número menor que 3; porque no puede ser positivo, á no ser que $17s$ sea mayor que 40, ó que sea s mayor que $\frac{40}{17}$, esto es mayor que 2.

Admite, pues, esta cuestion una infinidad de resoluciones diferentes, que se hallarán poniendo en los valores de x y de y, en lugar de s, todos los números enteros positivos imaginables desde 3 hasta el infinito; así haciendo succesivamente $s=3$, $s=4$, $s=5$, $s=6$, $s=7$ &c. tendremos los correspondientes valores de x é y, como se sigue.

$$
\begin{array}{ll}
x=39 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & y=11 \\
=50 & =28 \\
=61 & =45 \\
=72 & =62 \\
=83 \text{ \&c.} & =79.
\end{array}
$$

Cada uno de los quales es tal, que dando el número de piezas de á 17^{rs} representado por x, y recibiendo el número correspondiente de piezas de á 11 r^{rs} que y representa, se pagarán 542^{rs}.

Cuestion II. *Componer* 741^{dob} *con* 41 *piezas de tres especies; es á saber, de á* 24, *de á* 19, *y de á* 10^{dob}.

Sean x, y, z los números de piezas de cada una de las tres especies: ya que en todo se piden 41 piezas, tendremos $1.°$ $x+y+z=41$.

2. Ya que cada pieza de la primera especie vale 24^{dob}, el número x de piezas valdrá x veces 24^{dob}, ó $24x$; por la misma razon valdran y piezas de la segunda especie $19y$, y z piezas de la tercera especie valdran $10z$; así los valores juntos de los tres números de piezas diferentes montarán $24x+19y+10z$; y como han de componer 741^{dob}, tendremos $24x+19y+10z=741$.

Tomo en cada una de estas equaciones el valor de una misma incógnita, sea la que fuere, el de x por egemplo, y saco $x=41-y-z$, y $x=\frac{741-19y-10z}{24}$: igualo estos dos valores, y saco $41-y-z=\frac{741-19y-10z}{24}$, ó quitando el denominador, $984-24y-24z=741-19y$

$-10z$; traspasando y reduciendo, sale $243 = 5y + 14z$.

Tomo ahora el valor de y que tiene menor coeficiente, y saco $y = \frac{243-14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3-4z}{5}$; pero como han de ser y, y z números enteros, es preciso que $\frac{3-4z}{5}$ sea un número entero. Sea, pues, t este número entero: tendremos $\frac{3-4z}{5} = t$, ó $3 - 4z = 5t$: luego $z = \frac{3-5t}{4} = -t + \frac{3-t}{4}$; ha de ser, pues, $\frac{3-t}{4}$ un número entero: sea u este número tendremos $\frac{3-t}{4} = u$, ó $3 - t = 4u$, y por consiguiente $t = 3 - 4u$.

Volvamos ahora á los valores de y, z y x. Ya que acabamos de sacar $z = \frac{3-5t}{4}$ saldrá, poniendo en lugar de t su valor, $z = \frac{3-15+20u}{4} = \frac{20u-12}{4} = 5u - 3$; y ya que hallamos $y = \frac{243-14z}{5}$; poniendo en lugar de z su valor, tendremos $y = \frac{243-70u+42}{5} = \frac{285-70u}{5} = 57 - 14u$.

Finalmente, ya que hallamos $x = 41 - y - z$, tendremos $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$. De suerte, que los valores correspondientes de x, y, z son $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$, y $z = 5u - 3$, en cuyos valores se puede poner en lugar de u el número entero que se quisiere, con tal que de esta substitucion resulten ser x, y, z números positivos; pero esta condicion trahe consigo estotras tres: 1.º que $9u$ sea mayor que 13, ó que u sea mayor que $\frac{13}{9}$ ó $1\frac{4}{9}$. 2.º que sea 57 mayor que $14u$, ó que sea u menor que $\frac{57}{14}$; esto es, menor que $4\frac{1}{14}$. 3.º Finalmente, que $5u$ sea mayor que 3, ó u mayor que $\frac{3}{5}$; y esto no puede dejar de ser cumpliendo la primera condicion, por lo que es muy limitado el número de las resoluciones, y se reduce á tres, que se hallan dando á u los valores 2, 3 y 4 que son los únicos que admite el estado de la cuestion. No se puede, pues, componer la suma de 741^{dob} con las 41 piezas de las tres especies propuestas, sino tomando los números de piezas puestas abajo, y que se hallan, poniendo en lugar de u los números 2, 3 y 4 succesivamente en cada uno de los valores de x, y y z.

x	y	z
5	29	7
14	15	12
23	1	17

En el discurso de las divisiones que se egecutan para reducir el valor de la indeterminada á un número entero, no hay necesidad de tomar el cociente antes menor que mayor que su verdadero valor. Algunas veces se abrevia con tomarle mayor.

Por egemplo, si se me ofreciese la equacion $19y = 52x + 139$, en lugar de inferir $y = 2x + 7 + \frac{14x+6}{19}$, tomando $2x$ por valor del cociente de $52x$ partido por 19, en números enteros; inferiria $y = 3x + 7 \frac{-5x+6}{19}$, tomando con preferencia por cociente $3x$, por ser este cociente mas próximo, y porque el sobrante $5x$, que llevo en cuenta dándole el signo —, tiene coeficiente menor, lo que no puede menos de abreviar el cálculo. Hago despues $\frac{-5x+6}{19} = u$; é infiero $x = \frac{6-19u}{5}$; y por la misma razon $x = 1 - 4u + \frac{1+u}{5}$; haciendo $\frac{1+u}{5} = t$, tengo finalmente $u = 5t - 1$; lo que finaliza la resolucion con mas prontitud que si hubiera tomado cada cociente menor que su valor verdadero. Si volvemos, como arriba, á los valores de x é y, sacaremos las dos equaciones $x = 5 - 19t$, é $y = 21 - 52t$, que con substituir en lugar de t todos los números negativos desde cero, darán todas las resoluciones positivas de la equacion.

De las Equaciones de segundo grado con sola una incógnita.

146 Llámanse *equaciones de segundo grado* aquellas en que la mas alta potencia de la incógnita es la misma incógnita multiplicada por sí misma ó levantada á su quadrado. Así, $5x^2 = 125$ es una equacion de segundo grado, porque en el término $5x^2$ está multiplicada por sí misma la cantidad x.

147 Quando no lleva la equacion mas potencia de la incógnita que el quadrado, es facil resolverla: basta desembarazar el quadrado de la incógnita de todo lo que le puede multiplicar ó dividir, ó de las cantidades que pueden hallarse combinadas con dicha potencia por via de adicion ó sustraccion. Lo que se consigue por las reglas dadas (116, 119 y 123): hecho esto, solo resta sacar la raiz quadrada de cada miembro. Por egemplo, de la equacion $5x^2 = 125$ infiero, dividiendo por 5, $x^2 = \frac{125}{5} = 25$, y sacando de cada miembro la raiz quadrada, $x = 5$: porque es evidente que, siendo iguales dos cantidades, lo serán tambien sus raices quadradas; y es tambien evi-

dente que x es la raiz quadrada de x^2 (58).

Igualmente, si se me propusiese la equacion $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$, quitaria los quebrados y saldria $25x^2 = 12x^2 + 105$; transponiendo, $25x^2 - 12x^2 = 105$; ó $13x^2 = 105$; dividiendo por 13, $x^2 = \frac{105}{13}$: luego $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

148 Hemos visto (24) que quando el multiplicando y el multiplicador tienen ambos el mismo signo, lleva siempre el producto el signo $+$. En virtud de esto, quando hay que sacar la raiz quadrada de una cantidad que lleva el signo $+$, se la debe dar indistintamente á la raiz quadrada el signo $+$ ó el signo $-$; y por consiguiente si sacamos la raiz quadrada de la precedente equacion $x^2 = 25$, podemos decir que es $+5$, y tambien que es -5; porque multiplicando por sí mismo cada uno de estos dos números, reproduce siempre $+25$: de suerte que la resolucion de la equacion $x^2 = 25$ se escribe así $x = \pm 5$; lo que se pronuncia diciendo *x igual mas ó menos* 5, y equivale á estas dos equaciones $x = +5$, y $x = -5$.

Por la misma razon la segunda equacion de arriba se escribiria $x = \pm\sqrt{\frac{105}{13}}$.

149 Quando hay que sacar la raiz quadrada de una cantidad que lleva el signo $-$, se cubre todo con el radical dándole el doble signo $\pm$. Así si tubiéramos $x^2 = -4$, escribiríamos $x = \pm\sqrt{-4}$; y aunque se pueda sacar la raiz quadrada de 4 que es 2, no se deberia poner $x = \pm 2$: es esencial en este caso atender al signo $-$ de la cantidad que está debajo del radical conforme declararemos en su lugar.

150 Quando una equacion pára en sacar la raiz quadrada de una cantidad negativa, se puede inferir que es imposible el problema de que provino dicha equacion. Con efecto, una cantidad negativa no puede tener raiz quadrada ni exacta ni aproximada; porque no hay cantidad alguna que multiplicada por sí misma pueda dar un producto negativo. Verdad es que -4, por egemplo, se puede considerar como formado de $+2\times-2$; pero teniendo signo diferente estas dos cantidades, no son una misma cantidad, y no es por consiguiente su producto un quadrado. Portanto, se propone un absurdo siempre que se propone sacar la raiz quadrada de una cantidad negativa: luego todo problema que paráre en esta operacion, será un problema imposible. Esta es la señal que manifiesta la imposibilidad de lascuestiones de segundo grado. Mas adelante pararemos un poco la consideracion en el orígen de las cantidades negativas consideradas como quadrados.

151 Basta lo que acabamos de decir para resolver las cuestiones desegundo grado, quando no hay mas potencias de x que su quadrado. Pero fuera del quadrado de la incógnita, puede haber, y hay comunmente la primer potencia de la incógnita multiplicada ó dividida por alguna cantidad conocida, como en esta equacion $x^2-4x=12$. Para lograr en este caso la resolucion de las equaciones de segundo grado, es preciso preparar el primer miembro de modo que venga á ser un quadrado perfecto, cuya preparacion supone tres cosas: 1.° que se hayan traspasado á un solo miembro todos los términos

afectos de x, y al otro todas las cantidades conocidas, cuya operacion se egecuta por lo dicho (116). 2.° que sea positivo el término en que se halla x^2: si llevase el signo —, se mudarian todos los signos de la equacion, y esto no alteraria la igualdad. 3.° que esté desembarazada la cantidad x^2 de todo multiplicador ó divisor: si no lo estuviera, se multiplicarian todos los demas términos de la equacion por el divisor de x^2, ó se dividirian por el multiplicador que la acompañáre. Por egemplo, si tuviera que resolver la equacion $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$. 1.° Pasaria todas las x al primer miembro, escribiendo el término x^2 el primero, y tendria $-\frac{3}{5}x^2 + 4x + 2x = 4$, ó $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$. 2.° mudaria los signos para que fuese x^2 positiva, y resultaria $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$. 3.° Multiplicaria por 5, y sacaria $3x^2 - 30x = -20$. Finalmente dividiria por 3, y tendria $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Como se puede reducir siempre que se quisiere á este estado una equacion qualquiera de segundo grado, aplicaremos á una equacion preparada de este modo lo que llevamos ánimo de declarar en órden al asunto que aquí tratamos.

152 Sentado esto, para resolver una equacion de segundo grado, se ha de practicar la regla siguiente:

Tómese la mitad de la cantidad conocida que multiplica x *en el segundo término: levántese al quadrado esta mitad, y añádase á cada miembro de la equacion este quadrado, cuya adicion no alterará la igualdad. El primer miem-*

bro será entónces un quadrado perfecto: sáquese de cada miembro la raiz quadrada, y antes de la del segundo miembro póngase el signo doble $\pm$; *estará reducida al primer grado la equacion.*

En quanto al modo de sacar la raiz quadrada del primer miembro, se sacará la del quadrado de la incógnita y la del quadrado añadido: juntaráse esta segunda con la primera con el signo que llevare el segundo término de la equacion.

Por egemplo, si se me ofreciera resolver la equacion $x^2 + 6x = 16$; tomaria la mitad de la cantidad conocida que multiplica la incógnita x en el segundo término: quadraria esta mitad, añadiria su quadrado 9 á cada miembro, y tendria $x^2 + 6x + 9 = 25$: yá no me faltaria sino sacar la raiz quadrada, y lo egecutaria tomando la raiz quadrada de x^2 que es x, despues, la de 9 que es 3; y como el segundo término de la equacion lleva el signo $+$, inferiria que $x + 3$ seria la raiz quadrada del primer miembro: la del segundo seria 5, ó (148) ± 5. Por consiguiente $x + 3 = \pm 5$. Para conocer x, solo restaría traspasar el número 3, y saldria $x = \pm 5 - 3$, cuyo resultado nos está diciendo que x tiene dos valores; es á saber, $x = + 5 - 3 = 2$, y $x = - 5 - 3 = - 8$. Muy en breve dirémos lo que significa este segundo valor.

Para percibir la razon de esta regla conviene tener presente (53) que el quadrado de una cantidad compuesta de dos términos se compone indispensablemente del quadrado del primer término, del duplo del primer término multiplicado por el segundo, y del quadrado del segundo.

Esto sentado, quando se trata de añadir á una cantidad tal como $x^2 + 6x$ lo que la falta para que sea un quadrado perfecto, es de advertir 1.° que contiene yá esta cantidad un quadrado x^2, que se puede considerar como el quadrado del primer término x de un binomio. 2.° que siempre se puede considerar $6x$ como el duplo de x multiplicada por otra cantidad. 3.° que estotra cantidad es precisamente la mitad de 6 multiplicador de x. Solo falta, pues, el quadrado de esta segunda cantidad, esto es, el quadrado de la mitad del multiplicador de x en el segundo término. Bien se echa de ver que es general este razonamiento, sea el que fuere el multiplicador de x.

Por lo que toca á la regla que damos al mismo tiempo para estraer la raiz quadrada del primer miembro, es tambien una consecuencia de lo dicho (53); porque como los dos quadrados estremos que hay en el quadrado de un binomio son los quadrados de los dos términos de la raiz, es evidente que todo se reduce á sacar separadamente las raices de estos dos quadrados para hallar dichos dos términos. Pero se le debe dár al segundo término de la raiz el mismo signo que lleváre el segundo término de la equacion; porque del mismo modo que manifiesta el cálculo que el quadrado de $a + b$ es $a^2 + 2ab + b^2$, manifiesta tambien que el quadrado de $a - b$ es $a^2 - 2ab + b^2$ (54).

Aplicacion de la Regla antecedente á la resolucion de algunas cuestiones de segundo grado.

153 Para poner en equacion una cuestion, sea el que fuere su grado, se debe practicar la regla que hemos dado (126).

Cuestion I. *Hallar un número tal que si á su quadrado se le añade* 8 *veces el mismo número, sea la suma* 33.

Si conociera este número, que llamaré x, es evidente que si á su quadrado x^2 le añadiera 8 veces el mismo número, esto es $8x$, la suma $x^2 + 8x$ seria 33; es menester, pues, que sea $x^2 + 8x = 33$.

Para resolver esta equacion añado á cada miembro el número 16 que es el quadrado de la mitad del número 8 que multiplica x en el segundo término, y saco $x^2 + 8x + 16 = 49$; de cuya equacion el primer miembro es un quadrado perfecto. Saco la raiz quadrada de cada miembro, observando la regla dada (152), y sale $x + 4 = \pm 7$; por consiguiente $x = \pm 7 - 4$, que dá estos dos valores de x, $x = + 7 - 4 = 3$, y $x = - 7 - 4 = - 11$.

El primero de estos dos valores satisface á la cuestion, pues 9 que es el quadrado de 3, añadido á 8 veces 3 ó 24, compone 33. Por lo que mira al segundo valor, como es negativo dá á entender que si en la cuestion se considerára x con un respecto del todo opuesto, la resolveria el número 11, quiero decir que el segundo valor de

x dará la respuesta á esta cuestion: *Hallar un número tal que si de su quadrado se resta* 8 *veces el mismo número, sea la resta* 33.

Es facil comprobarlo, porque el quadrado de 11 es 121, y 8 veces 11 hacen 88, que restados de 121, es la resta 33.

Para confirmar lo que digimos en órden á las cantidades negativas (128), es de observar que puesta en equacion esta segunda cuestion, dá $x^2 - 8x = 33$, que resuelta segun la regla, dá $x = \pm 7 + 4$, ó estos dos valores, $x = 11$, y $x = -3$, que son cabalmente contrarios á los de la primera cuestion.

154 Esto manifiesta que una equacion de segundo grado, con sola una incógnita, admite siempre dos resoluciones; porque los dos valores 11 y -3, substituidos en lugar de x en la equacion $x^2 - 8x = 33$, la resuelven igualmente; quiero decir que igualmente reducen el primer miembro á 33. Lo acabamos de comprobar con el número 11. En quanto á -3, su quadrado es $+9$; y 8 veces -3 son -24 que, restados de $+9$, dan $+9 + 24$ en virtud de lo dicho (11).

Pero se vé al mismo tiempo, que si toda equacion de segundo grado admite dos resoluciones, no siempre sucede lo mismo con la cuestion, de donde nació dicha equacion; porque en el caso presente el segundo valor -3 solo resuelve la cuestion contraria. Por lo demás, sucede á menudo que ambas resoluciones de la equacion resuelvan tan-bien la cuestion. Verémos un egemplo de esto en la tercera cuestion.

Cuestion II. *Se habian de repartir 175rs. entre cierto número de personas; faltan dos que no deben, por esta razon, entrar á la parte. Añade esta circunstancia 10rs. á las partes de cada uno de los presentes. Se pregunta ¿entre quantas personas se habia de repartir la suma propuesta?*

Si supiera qual era este número, dividiria 175 por dicho número, para saber quanto le hubiera tocado á cada uno de los particionarios, sino hubiese faltado ninguno al tiempo de la reparticion. Dividiria despues la suma propuesta por dicho número disminuido de 2, para conocer quanto le toca realmente á cada uno de los que entran á la parte; finalmente veria si quitando 10rs. del segundo cociente, saldria la resta igual al primero. Imitemos estas operaciones, llamando x el número que buscamos.

Si todas las personas entre quienes se han de repartir los 175rs. estubieran presentes, cada uno llevaria $\frac{175}{x}$; pero como faltan dos personas, cada parte será $\frac{175}{x-2}$; y como este número debe tener 10 mas que el primero, será $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Para resolver esta equacion, elimino los denominadores; y segun se previno arriba (125), escribo $175x - 10(x-2)x = 175 \times (x-2)$; haciendo despues las operaciones indicadas, tengo $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$; borrando en cada miembro $175x$, y mudando despues los signos (151) sale $10xx - 20x = 350$;

dividiendo finalmente por 10, queda $xx - 2x = 35$: á cuya equacion solo falta aplicar la regla dada (152). Tomo, pues, la mitad -1 del multiplicador -2 de x. Quadro esta mitad y sale $+1$ que añado á cada miembro, y sale $x^2 - 2x + 1 = 36$; sacando la raiz quadrada, tengo $x - 1 = \pm 6$, y por consiguiente $x = \pm 6 + 1$ que dá $x = 7$, y $x = -5$. El primer valor es el número que se busca, porque 175 dividido por 7 dá 25; y 175 dividido por $7 - 2$ ó 5 dá 35, que es mayor que 25 de 10.

En quanto al segundo valor, resolveria la cuestion en que se propusiese repartir 175rs, habiéndose agregado dos particionarios mas, y disminuyendo esta circunstancia de 10rs la parte que á cada uno le hubiera tocado si no hubiesen sobrevenido estos dos.

Cuestion III. *Compró un hombre un caballo que vendió al cabo de algun tiempo en 24 doblones. Perdió tanto por ciento en esta venta, como le habia costado el caballo. Se pregunta ¿en quanto le compró?*

Si alguien me digera lo que habia costado el caballo, comprobaria este número del modo siguiente: le restaria de 100, y haria esta regla de tres: si 100 se reducen al número que acaba de dar esta sustraccion, á quánto debe reducirse el número que busco? Hallado este quarto término, deberia ser igual á 24.

Llamémos x el número que se busca, esto es, el número de doblones que costó el caballo. Entónces ya que

100 se reducen á $100 - x$, hallaré á quánto debe reducirse x, haciendo esta regla de tres, $100 : 100 - x :: x :$ el quarto término será $\frac{(100-x)}{100}x$ (I. 183), ó $\frac{100x - xx}{100}$; como suponemos que se vendió el caballo en 24 doblones, es preciso que sea $\frac{100x - xx}{100} = 24$.

Para resolver esta equacion, echo el denominador y saco $100x - xx = 2400$, ó mudando los signos $xx - 100x = -2400$. Tomo, pues, (152) la mitad de -100 que es -50; levántola al quadrado, y saco $+2500$ que he de añadir á cada miembro. Se transforma con esto la equacion en $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100$; sacando la raiz quadrada, hallo $x - 50 = \pm 10$, y por consiguiente $x = 50 \pm 10$, que dá estos dos valores $x = 60$ y $x = 40$, cada uno de los quales resuelve la cuestion; de suerte que el precio del caballo igualmente puede haber sido de 60 ó de 40 doblones; no se puede determinar por los términos en que viene propuesta la cuestion quál de estos valores es el verdadero. Si se verifican estas dos resoluciones, se verá que en el supuesto de haber costado el caballo 60 doblones, se reducirán 100 á 40, y 60 se reducirán á 24. Y en el segundo caso se verá del mismo modo que, reduciéndose 100 á 60, 40 se reducirán á 24.

155 En las cuestiones antecedentes ha dado la equacion dos resoluciones, una positiva y otra negativa. De la última se han sacado dos positivas: tambien se pueden sacar dos negativas. Pero esto solo sucede quando viene

mal propuesta la cuestion, porque entónces indica cada una de estas dos resoluciones negativas (128), que se debe considerar la incógnita con un respecto del todo opuesto al que espresan los términos de la cuestion Por egemplo, si se propusiera esta cuestion: *Hallar un número tal que si se le añade á su quadrado* 9 *veces el mismo número, y aun el número* 50, *sea la suma* 30; puesta en equacion esta cuestion, daria $x^2 + 9x + 50 = 30$, que, practicando las reglas dadas arriba, llegaria á ser succesivamente $x^2 + 9x = -20$, $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$; sacando la raiz quadrada $x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$, que dá $x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, y $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$.

De donde infiero que se debe mudar la cuestion en estotra: *Hallar un número tal que si despues de haber añadido* 50 *á su quadrado, se resta de la suma* 9 *veces el mismo número que se pide, sea la resta* 30.

156 Todo lo dicho hasta ahora hace patente que no solo resuelve el Álgebra las cuestiones, sino que manifiesta al mismo tiempo si están bien ó mal propuestas, y tambien dá á conocer, si son imposibles. Ya hemos dicho arriba (150) con qué señas distingue el Álgebra las cuestiones que no admiten resolucion alguna. Si se quisiere un egemplo, no hay sino resolver la tercera cuestion, suponiendo veinte y seis doblones en lugar de veinte y quatro. Será la equacion $\frac{100x - xx}{100} = 26$ ó $100x - xx = 2600$, ó $xx - 100x = -2600$, que segun la regla (153), es $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2600 = -100$,

sacando la raiz quadrada, $x - 50 = \pm\sqrt{-100}$, y finalmente $x = 50 \pm \sqrt{-100}$; resultado absurdo, pues hemos visto (150) que es imposible la raiz quadrada de una cantidad negativa.

Cuestion IV. *Dos personas han formado una compañia para comerciar: la una ha puesto* 30$^{\text{dob}}$. *que han estado* 17 *meses en la compañia. La segunda ha puesto su caudal* 5 *meses despues; quiero decir que no ha estado en el fondo comun sino* 12 *meses. El caudal del segundo asociado que no conocemos, asciende, con la ganancia que le toca, á* 26 *doblones. La ganancia total ha sido* $18\frac{3}{4}^{\text{dob}}$; *se pregunta ¿quánto habia puesto el segundo, y quánto le cabe á cada uno de la ganancia?*

Redúcese la cuestion á hallar la puesta del segundo; porque despues será facil hallar la ganancia de cada uno. Llamemos esta puesta, ó el número de doblones que componen esta puesta, x. Ya que han estado los 30 doblones del primero 17 meses en el fondo comun, le han de dar el mismo producto, que darian 17 veces 30 doblones ó 510 doblones en un mes. Igualmente, ya que ha estado la puesta x del segundo 12 meses en la compañia, le ha de producir tanto como le producirian 12 veces x doblones ó $12x$ en un mes; de este modo se puede considerar la compañia como si hubiese durado solo un mes; pero suponiendo que hayan sido las puestas 510 y $12x$. Esto supuesto, para saber qual ha de ser la ganancia del segundo, se ha de (I. 206) calcular el quarto término de esta proporcion $510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x$.

Este quarto término será $\frac{12x \times 18\frac{3}{4}}{510+12x}$, que se reduce á $\frac{225x}{510+12x}$; pero segun se espresa en la cuestion, la ganancia del segundo y su accion x componen 26 doblones; luego $\frac{225x}{510+12x} + x = 26$.

Para resolver esta equacion, echemos el denominador y tendremos $225x + x(510 + 12x) = 26(510 + 12x)$, ó egecutando las multiplicaciones indicadas, $225x + 510x + 12xx = 13260 + 312x$. Transponiendo y reduciendo, sale $12xx + 423x = 13260$; dividiendo por 12, $x^2 + \frac{423}{12}x = \frac{13260}{12}$, que se reduce á $x^2 + \frac{141}{4} = 1105$. Tomando, pues, la mitad de $\frac{141}{4}$ que es $\frac{141}{8}$, levantándola al quadrado, y añadiéndola á cada miembro, tendremos $x^2 + \frac{141}{12}x + \frac{19881}{64} = \frac{19881}{64} + 1105 = \frac{90601}{64}$, reduciendo 1105 á quebrado. Sacando, pues, la raiz quadrada, tendremos $x + \frac{141}{8} = \pm\sqrt{\frac{90601}{64}} = \pm\frac{301}{8}$; luego $x = -\frac{141}{8} \pm \frac{301}{8}$, de cuyos dos valores solo resuelve la cuestion el valor $x = -\frac{141+301}{8} = \frac{160}{8} = 20$; eran pues 20 doblones la puesta del segundo asociado; por consiguiente era su ganancia 6, y la del primero $12\frac{3}{4}$ dob.

157 La misma es de todo punto la regla respecto de las equaciones literales. Si hubiera de resolver la equacion $abx - axx = b^2c$, conforme á lo que se dijo (151 y 152), transformaria esta equacion en $axx - abx = -b^2c$; despues en $xx - bx = \frac{-b^2c}{a}$; añadiria á cada miembro el quadrado de $-\frac{b}{2}$, esto es $+\frac{bb}{4}$, y tendria $xx - bx + \frac{bb}{4} =$

$\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}$; sacando la raiz quadrada, tengo $x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}}$, y finalmente $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}}$.

158 Quando es literal la equacion puede ofrecerse mas compuesta que las que hasta aquí hemos visto; pero siempre se la puede reducir á tres términos de este modo. Sea la equacion $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx$. Paso á un solo miembro todos los términos que tienen x, poniendo cuidado en escribir á continuacion los unos de los otros, todos los que llevan las mismas potencias de x, y sale $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$. Hecho esto, reparo que $ax^2 - bx^2$ es lo mismo que $(a-b) \times x^2$, ó $(a-b)x^2$: igualmente, $bcx + acx$ es lo propio que $(bc + ac)x$, de suerte que la equacion $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$ se puede escribir como sigue $(a-b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$; pero como son conocidas las cantidades a, b, c, se han de considerar $a - b$, $bc + ac$, y $a^2b - ab^2$ como cantidades enteramente conocidas: se puede, pues, para abreviar, representar por sola una letra cada una de estas cantidades, y suponer $a - b = m$, $bc + ac = n$, $a^2b - ab^2 = p$, y entónces está transformada la equacion en $mx^2 + nx = p$, que está en el caso de las antecedentes, y que resuelta por las mismas reglas, será succesivamente $x^2 + \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}$, despues $x + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$ (añadiendo el quadrado de la mitad de $\frac{n}{m}$, esto es de $\frac{n}{2m}$) sacando la raiz quadrada, $x + \frac{n}{2m} = \pm \sqrt{\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}}$, y finalmente $x = -\frac{n}{2m} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}}$

159 Es de advertir que solo se practican estas transformaciones quando seria muy complicado el cálculo que sin ellas habria que hacer; porque en este mismo egemplo, despues de haberla dado á la equacion propuesta la forma $(a-b)x^2+(bc+ac)x=a^2b-ab^2$, se la puede manejar sin mucho cálculo, como las precedentes, dividiendo primero por $a-b$, de donde sale $x^2+\frac{bc+ac}{a-b}x=\frac{a^2b-ab^2}{a-b}$: ahora se le debe añadir á cada miembro el quadrado de la mitad de $\frac{bc+ac}{a-b}$, esto es el quadrado de $\frac{bc+ac}{2a-2b}$; pero nos podemos contentar con indicarle de este modo $\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2$; así, tendremos $x^2+\frac{bc+ac}{a-b}x+\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2=\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+\frac{a^2b-ab^2}{a-b}$; sacando la raiz quadrada, tendremos $x+\frac{bc+ac}{2a-2b}=\pm\sqrt{\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+\frac{a^2b-ab^2}{a-b}}$, y finalmente $x=-\frac{bc-ac}{2a-2b}\pm\sqrt{\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+\frac{a^2b-ab^2}{a-b}}$.

160 Aunque se pueda, despues de sacado el valor de x, dejar el radical en el estado que está, hasta que se llegue á las aplicaciones numéricas; con todo, en muchas ocasiones puede ser útil darle una forma mas sencilla, reduciendo al mismo denominador las dos partes que se hallan debajo de dicho radical. Para cuyo fin es de observar, que muchas veces se las puede reducir al mismo denominador por un método mas sencillo que el de la regla general dada (45); y esto se consigue practicando las advertencias hechas (46): sirva de egemplo $\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}}$; para reducir á un mismo denominador las dos cantidades $\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}$, reparo que sus actuales denominadores tienen un

factor comun m, y que por consiguiente si multiplicase los dos términos del quebrado $\frac{p}{m}$, por $4m$, que es el segundo factor del primer denominador, tendria el mismo denominador que dicho primer quebrado; por lo que transformo $\sqrt{\frac{n}{4m^2}+\frac{p}{m}}$ en $\sqrt{\frac{n^2+4pm}{4m^2}}$; pero como el radical indica que se ha de sacar la raiz quadrada del quebrado, esto es (I. 147), la raiz del numerador y la del denominador, saco la del denominador, que es un quadrado, y tengo $\frac{\sqrt{n^2+4pm}}{2m}$; así, en la equacion de arriba donde hallamos $x=\frac{-n}{2m}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}}$, se puede transformar este valor de x en estotro, $x=\frac{-n}{2m}\pm\frac{\sqrt{n^2+4pm}}{2m}$, ó (por razon del denominador comun $2m$) en estotra $x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4pm}}{2m}$.

De las Equaciones con dos incógnitas quando pasan del primer grado.

161 Se dice de una equacion que no tiene mas que una incógnita, que es del *tercero*, *quarto*, *quinto &c. grado*, quando la potencia mas alta de la incógnita es la tercera, la quarta, la quinta &c.; pero ademas de esta potencia puede tambien incluir una equacion todas las potencias inferiores. Así, $x^3=8$, $x^3+5x^2=4$, $x^3+6x^2-9x=7$ son todas equaciones de tercer grado.

Pero una equacion de dos ó mayor número de incógnitas es de un grado superior al primero, no solo quando la una de dichas incógnitas pasa del primer grado, sino tambien quando estan multiplicadas unas por otras algunas de las diferentes incógnitas; y en general se regula el grado por la suma mayor á que pueden ascender los esponentes en un mismo término: la equacion $x^3 + y^3 = a^2b$ es del tercer grado: la equacion $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ es tambien del tercer grado, porque la suma de los esponentes de x y de y en el término x^2y es 3: en los demas términos son menores los esponentes.

162 Para resolver las cuestiones que paran en equaciones de muchas incógnitas, y pasan del primer grado, es menester reducir, conforme se egecuta con las del primer grado, dichas equaciones á una sola que no incluya mas de una incógnita.

Si hubiese dos equaciones y dos incógnitas, y en la una de las equaciones no pasase del primer grado la una de las incógnitas, *se tomará el valor de esta incógnita, como si fuera conocido todo lo demas: se substituirá este valor en la otra equacion: y resultará una nueva equacion que no tendrá mas que una incógnita.*

Por egemplo, si se me propusiera esta cuestion: *Hallar dos números cuya suma sea 12, y cuyo producto sea 35.* Representando estos dos números por x é y, tendria $x + y = 12$, y $xy = 35$.

De la primera saco $x = 12 - y$; substituyendo en la segunda este valor de x, tendré $(12 - y)y = 35$, ó $12y - yy = 35$, equacion de segundo grado que resuelta por las reglas dadas (151 y sig.) dará $y = 6 \pm 1$, esto es $y = 7$, ó $y = 5$; y ya que $x = 12 - y$, tendremos $x = 5$, ó $x = 7$, y significa que los dos números que se buscan, son 7 y 5, ó 5 y 7.

Si tuviera las equaciones $x + 3y = 6$, y $x^2 + y^2 = 12$, de la primera sacaria $x = 6 - 3y$; substituyendo en la segunda, tendria $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; haciendo la operacion indicada, sacaria $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 12$; ó pasándolo todo á un mismo miembro y reduciendo, $10y^2 - 36y + 24 = 0$, equacion del segundo grado, que se puede resolver por las reglas dadas (151 y sig.).

Supongamos que se nos propongan las dos equaciones $xy + y^2 = 5$, y $x^3 + x^2y = y^2 + 7$. La primera dá $x = \frac{5 - y^2}{y}$; substituyendo en la segunda, tendremos $\left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^3 + \left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^2 y = y^2 + 7$, ó $\frac{(5 - y^2)^3}{y^3} + \frac{(5 - y^2)^2}{y^2} y = y^2 + 7$. Para quitar los quebrados, basta multiplicar el segundo término por y, y el segundo miembro por y^3, de lo que resulta $(5 - y^2)^3 + (5 - y^2)^2 y^2 = y^5 + 7y^3$. Egecutando las operaciones indicadas, tenemos $125 - 75y^2 + 15y^4 - y^6 + 25y^2 - 10y^4 + y^6 = y^5 + 7y^3$; con pasarlo todo al primer miembro y reducirlo, sacaremos, despues de haber mudado los signos, $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, equacion en que no hay mas incógnita que y, bien que es de quinto grado.

163 Este último egemplo nos dá motivo de prevenir á los principiantes, que quando algunos factores son comunes á varios denominadores de la equacion, se pueden eliminar con mas facilidad que por la regla general estos de-

nominadores, indagando por qué cantidad se les deberia multiplicar para que llegasen á ser iguales. Esta advertencia es análoga á la que hicimos (46) con motivo de las fracciones. Por egemplo, si tuviera la equacion $\frac{cx}{ab} + \frac{dx}{ac} = e$, la transformaria en $\frac{c^2x + bdx}{abc} = e$, multiplicando los dos términos de la primera fraccion por c, y los dos términos de la segunda por b: hecho esto, quitaria el denominador, y resultaria $c^2x + bdx = abce$.

164 *Si en la una de las equaciones no pasa una de las incógnitas del segundo grado, tómese en esta el valor del quadrado de la incógnita menos elevada, y substitúyase en la otra en lugar del quadrado de la misma incógnita y de sus potencias, y prosígase substituyendo hasta que no se halle mas potencia de dicha incógnita que la del primer grado. Sáquese entónces de esta última equacion el valor de la misma incógnita, y substitúyase en la primera.*

Si tuviera, por egemplo, $x^2 + 3y^2 = 6x$, y $2x^3 - 3y^2 = 8$, tomaria en la primera el valor de x^2 que es $x^2 = 6x - 3y^2$; substituyéndole en la segunda, sacaria (ya que x^3 es lo mismo que $x^2 \times x$), $2(6x - 3y^2)x - 3y^2 = 8$, que se reduce á $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$; como queda todavia x^2 en esta, substituyo otra vez en su lugar el mismo valor de x^2 que saqué arriba, y sale $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$, en cuya equacion no llega x sino al primer grado.

Saco el valor de x, y sale $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$; substituyo este valor en la primera equacion $x^2 + 3y^2 = 6x$, y saco $\left(\frac{39y^2+8}{72-6y^2}\right)^2 + 3y^2 = 6\left(\frac{39y^2+8}{72-6y^2}\right)$, ó $\frac{(39y^2+8)^2}{(72-6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{234y^2+48}{72-6y^2}$, ó (163) $\frac{(39y+8)^2}{(72-6y^2)^2} + 3y^2 = \ldots\ldots \frac{(234y+48)(72-6y^2)}{(72-6y^2)^2}$, ó finalmente borrando el denominador comun $(39y^2+8)^2 + 3y^2(72-6y^2)^2 = \ldots\ldots (234y^2+48)(72-6y^2)$, equacion final en la qual solo hay que executar multiplicaciones y reducciones regulares.

De las Equaciones de dos términos.

165 Llamamos *Equaciones de dos términos* aquellas que no incluyen sino una sola potencia de la incógnita, porque siempre se pueden reducir á dos términos. Por egemplo, la equacion $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$ es una equacion de dos términos, porque si la escribimos en esta forma $(a+b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, echaremos de ver que siendo cantidades conocidas a y b, podremos reducir siempre $a+b$ á una sola cantidad, y $a^4b^2 - a^3b^3$ igualmente á otra cantidad sola; de modo que dicha equacion se puede representar por estotra $px^5 = q$. Estas equaciones se resuelven con grandísima facilidad; porque es evidente que despues de haber despojado la potencia de la incógnita por las mismas reglas que en las demas equaciones, solo resta sacar la raiz espresada por el esponente de la incógnita. Por egemplo, la equacion $px^5 = q$ se convertiria en $x^5 = \frac{q}{p}$; y sacando la raiz quinta, en $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

166 Quando el esponente es impar, no puede tener la incógnita mas que un valor real. Por egemplo, si tu-

biéramos esta equacion $x^5 = 1024$, tendríamos...... $x = \sqrt[5]{1024} = 4$; y es evidente que no puede haber mas que un número real el qual elevado á la quinta potencia, produzca 1024; luego &c.

Si el segundo miembro de la equacion tubiese el signo —, el valor de x tendria el signo —; porque — combinado por multiplicacion con —, un número impar de veces, dá —, pero quando el esponente es par, la incógnita tiene dos valores, el uno positivo y el otro negativo, que pueden ser ó ambos reales, ó ambos imaginarios. Serán ambos imaginarios quando el segundo miembro tubiere el signo —. Si tubieramos la equacion $x^4 = 625$, inferiríamos que $x = \sqrt[4]{625} = 5$; pero ya que de — multiplicado por —, un número par de veces, resulta lo mismo que multiplicando + por +, podrá ser -5 igualmente que $+5$ el valor de la incógnita. Así se deberá escribir $x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5$, del mismo modo que en las equaciones de segundo grado. Pero si hubiera sido $x^4 = -625$; hubieramos inferido que $x = \pm\sqrt[4]{-625}$; cuyos dos valores son imaginarios por no haber número alguno positivo ó negativo, que multiplicado por sí mismo un número par de veces, pueda producir una cantidad negativa. Supongamos que se nos ofrezca *buscar dos medios proporcionales entre* 5 *y* 625. Llamemos x é y las dos incógnitas; y tendremos $\div 5 : x : y : 625$, de donde nacen estas dos proporciones

$$5 : x :: x : y$$
$$x : y :: y : 625.$$

que con multiplicar los estremos y los medios, producen las dos equaciones siguientes: $5y = x^2$, y $625.x = y^2$. La primera dá $y = \frac{x^2}{5}$; substituyendo en la segunda, tenemos $625x = \frac{x^4}{25}$; dividiendo por x y multiplicando por 25, sacamos $x^3 = 15625$, y finalmente $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; luego $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

De las equaciones que se pueden resolver por el mismo método que las de segundo grado.

167 En estas equaciones no ha de haber mas que dos potencias diferentes de x, pero el esponente de la una de ellas ha de ser duplo del esponente de la otra; tales son las equaciones $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$, y se resuelven como las de segundo grado; despues de haber hecho positiva la potencia mas alta, si acaso no lo fuere, y de haberla desembarazado de las cantidades que la multiplican ó la dividen, se tomará la mitad de lo que multiplicáre la potencia inferior, cuya mitad se quadrará y añadirá á cada miembro, con lo que llegará á ser dicho primer miembro un quadrado perfecto. Finalmente se sacará la raiz quadrada de cada miembro, dándole á la del segundo el doble signo $\pm$. Y estará reducida la equacion á una de dos términos.

Por egemplo, si se me encargára *hallar dos números, de cuyos cubos sea la suma* 35, *y cuyo producto sea* 6; tendria estas dos equaciones $x^3 + y^3 = 35$, y $xy = 6$. De esta última saldria $y = \frac{6}{x}$, cuyo valor substituido en la primera, daria $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$. Quitando el denominador y transponiendo, resultaria $x^6 - 35x^3 = -216$. Tomaria, pues, la mitad de 35 que es $\frac{35}{2}$, añadiria su quadrado á cada miembro y sacaria $x^6 - 35x^3 + (\frac{35}{2})^2 = (\frac{35}{2})^2 - 216$; estrayendo la raiz quadrada, inferiria que $x^3 - \frac{35}{2} = \pm\sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}$; transponiendo, hallaria $x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}$, y finalmente sacando la raiz cúbica, $x = \sqrt[3]{\frac{35}{2} \pm \sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}}$; pero $(\frac{35}{2})^2 = \frac{1225}{4}$; y $(\frac{35}{2})^2 - 216 = \frac{1225-864}{4} = \frac{361}{4}$: luego ... $\sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216} = \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2}$: luego $x = \ldots$ $\sqrt[3]{\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2}}$, que dá estos dos valores $x = \sqrt[3]{\frac{35+19}{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$, y $x = \sqrt[3]{\frac{35-19}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; y yá que hallamos $y = \frac{6}{x}$, tendremos $y = 2$, é $y = 3$.

Quando el esponente mas alto es 4, ó un múltiplo de 4, puede haber hasta quatro raices reales.

Aplicacion del Algebra á las Progresiones Arismética y Geométrica.

Propiedades generales de las Progresiones Arisméticas.

168 Segun probamos en la Arismética (I. 213), un término qualquiera de una progresion arismética creciente se compone del primero, añadiéndole tantas veces la diferencia comun, quantos son los términos que hay antes de él.

Luego si representamos por a el primer término, por u el término que se considera: la diferencia comun ó la razon de la progresion por d; y finalmente por n el número total de los términos, espresará $n - 1$ el número de términos que precedan al término u; y la proposicion citada se podrá cifrar en esta equacion $u = a + (n - 1)\,d$ que resuelve la cuestion en que se pidiese el valor del último término u de una progresion arismética en el supuesto de ser conocida la razon d, el número n de los términos, y el valor a del primero.

Pero una vez que hay en esta equacion quatro cantidades, podrá servir para resolver quatro cuestiones generales. Con efecto

1.° Si tomamos a por incógnita, y buscamos su valor por las reglas dadas, resultará $a = u - (n - 1)\,d$, cuya espresion nos está diciendo, que hallaremos el primer término de una progresion arismética creciente, restando del último u la diferencia d tomada $n - 1$ veces: quiero decir, la diferencia tomada tantas veces menos una como términos hubiere en toda la progresion.

2° Si consideramos n como incógnita la equacion $u = a + (n - 1)\,d$, que no se distingue de $u = a + nd - d$, dá transponiendo, $nd = u - a + d$, y dividiendo $n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1$, cuyo valor nos enseña cómo podemos hallar el número de los términos de una progresion arismética, en el supuesto de que conozcamos el primer término a, el último u, y la razon d, restando el primero del último, dividiendo la resta por la razon d, y añadiéndole una unidad al cociente. Por egemplo, si sabemos que 5 es el primer término de una progresion, 37 el último, y 2 la diferencia, restaremos 5 de 37, y resultarán 32, que divididos por la diferencia 2, dará 16, á cuyo número añadiremos 1, y saldrá 17 que será el número de los términos de la progresion.

3.º Finalmente, si miramos d como incógnita en la equacion $u = a + (n - 1)d$, sacaremos transponiendo $(n - 1)d = u - a$, y dividiendo por $n - 1$, $d = \frac{u-a}{n-1}$, de cuyo resultado sacamos que para averiguar la diferencia que debe reynar en una progresion arismética, una vez que se conozca el primer término, el último, y el número de los términos, se debe restar el primero del último, y dividir la resta por el número de los términos menos uno.

Por medio, pues, de la sola equacion $u = a + (n - 1)d$, podemos sacar la resolucion de quatro cuestiones generales, ó podemos resolver esta que las comprehende todas quatro: *Dadas qualesquiera tres de estas quatro cosas, el primer término, el último, el número de los términos y la diferencia de una progresion arismética, hallar la quarta.*

169 Si se propusiese otra qualquiera propiedad general tambien de un modo general, nos proporcionará por los mismos medios la resolucion de tantas cuestiones diferentes como cantidades hubiere en la proposicion de dicha propiedad.

Por egemplo, una de las propiedades de las progresiones arisméticas es que *para sacar la suma de todos sus términos se han de sumar uno con otro el primero y último término, y multiplicar la suma por la mitad del número de los términos.*

Por egemplo, para saber la suma de los cien primeros términos de la progresion ÷ 1 . 3 . 5 . 7 &c. cuyo centésimo término es 199; añadiremos el primer término 1 al último 199, y multiplicaremos el resultado 200 por 50, mitad de 100 que es el número de los términos, y resultará 10000, que será la suma de los primeros cien números impares.

Esta propiedad, que demostramos yá en otro lugar (I. 499) para un caso particular, la demostraremos dentro de poco generalmente. Pero para no apartarnos del primer asunto, conservaremos las mismas denominaciones que antes: llamaremos s la suma de todos los términos, y sacaremos que la espresion algebraica de dicha propiedad es $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$.

Por medio de esta equacion podemos resolver esta cuestion general que abraza quatro: *Dadas tres de estas quatro cosas, el primer término, el último término, el número de los términos y la suma de todos los términos de una progresion arismética, hallar la quarta.*

Con efecto 1.° Dadas a, u, y n, la equacion dá inmediatamente el valor de s. 2.° Si fuesen dadas, a, u y s, hallaremos n eliminando el divisor 2, y sacaremos $2s = (a + u) \times n$ ó $(a + u) \times n = 2s$; y dividiendo por $a + u$, $n = \frac{2s}{a+u}$, cuya equacion dá el valor de n, pues suponemos conocidas las cantidades a, u y s. 3.° y 4.° Si fuesen dadas a, s y n, ó u, s, y n, y quisiésemos sacar u ó a, eliminando el divisor del segundo miembro de la equacion $s = (a+u)\times\frac{n}{2}$, sacaríamos $2s = (a+u)\times n$, y dividiendo por n, $a+u = \frac{2s}{n}$; y finalmente $u = \frac{2s}{n} - a$, que resuelve la primera cuestion, y $a = \frac{2s}{n} - u$ que resuelve la segunda.

Ahora demostraremos algebraicamente la propiedad de que hicimos memoria poco ha.

Es evidente que si seguimos el supuesto de que a sea el primer término, y d la diferencia, podemos dár á toda progresion arismética creciente esta forma $\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, a+4d \,.\, a+5d \,.\, a+6d$ &c. Imaginemos que debajo de la progresion escrita en esta forma se escriba otra vez, pero al revés, de modo que

$$\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, a+4d \,.\, a+5d \,.\, a+6d$$
$$\div a+6d \,.\, a+5d \,.\, a+4d \,.\, a+3d \,.\, a+2d \,.\, a+d \,.\, a.$$

Como son iguales estas dos progresiones, es evidente que la suma de los términos de la una de las dos es la mitad de las dos juntas: pero si ponemos cuidado, echaremos de ver que los dos términos correspondientes de la progresion escrita en esta última forma componen, y deben componer siempre una misma suma, y que esta suma es la que resulta de la adicion del primero y el último término de la primera progresion; luego hallaremos la suma de ambas progresiones sumando el primero y último término de la una, y tomando este resultado tantas veces como términos hay; luego para sacar la suma de sola una de las dos progresiones, se deberá sumar el primer término con el último, y tomar la suma un número de veces igual á la mitad de los términos que hubiere; quiero decir que se deberá multiplicar por la mitad del número de los términos.

170 Las ocho cuestiones generales que acabamos de resolver, se fundan, pues, solamente en dos principios, que son los que sentamos (168 y 169); y como su resolucion se concluye inmediatamente de las dos equaciones que son la espresion algebraica de estos dos principios, queda patente como se pueden sacar de un mismo principio por medio del Álgebra todas las verdades que incluye.

Aunque no son todas de igual utilidad estas propiedades, son no obstante mas á proposito, por ser tan sencillas, para manifestar el uso de las equaciones, por cuya razon proseguiremos declarando este uso, valiéndonos de las espresadas propiedades.

En quanto hemos espuesto hasta ahora, no hemos considerado mas de una equacion sola. Pero si hallásemos que dos ó un número mayor de equaciones que espresan propiedades diferentes de algunas cantidades, tienen algunas cantidades comunes, podríamos inferir todavia con grande facilidad otras muchas propiedades. Por egemplo las dos equaciones fundamentales de las progresiones arisméticas $u = a + (n - 1)d$, y $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, tienen comunes las tres cantidades a, u y n. Si tomamos sucesivamente en cada una de estas dos equaciones el valor de una qualquiera de estas tres cantidades, é igualámos despues estos dos valores, resultará una equacion nueva de la qual se habrá desaparecido dicha cantidad, y que espresará la relacion que tienen entre sí las otras quatro, independiente de la que se hubiere desaparecido. Por egemplo, si tomamos el valor de a en cada equacion, sacaremos estos dos valores $a = u - (n - 1)d$, y $a = \frac{2s}{n} - u$; é igualando, $u - (n - 1)d = \frac{2s}{n} - u$, de cuya equacion sacaremos como antes, considerando succesivamente como incógnitas u, n, d y s, otras quatro propiedades generales de las progresiones arisméticas. Por egemplo, considerando s como incógnita, sacaremos $s = \frac{2nu - n(n-1)d}{2}$, que nos abre camino para conocer la suma de una progresion arismética, por medio del último término, de la diferencia y del número de los términos, porque en el segundo miembro no hay mas de estas tres cantidades, y números conocidos.

Si en lugar de haber eliminado a, hubiéramos eliminado u ó n, hubiéramos sacados tambien en cada eliminacion una equacion nueva en que no habria mas que quatro de las cinco cantidades a, u, n, d, s, y considerando succesivamente como incógnita cada una de estas quatro cantidades, sacaríamos de cada equacion nueva otras quatro fórmulas, que son otras tantas espresiones diferentes de la cantidades a, u, n, d, s; de cuyas espresiones tiene cada una su utilidad particular, segun fueren las cantidades dadas en una cuestion perteneciente á las progresiones arisméticas. Por egemplo, si se me pidiera la suma de todos los términos de una progresion arismética en el supuesto de ser conocido el primer término, la diferencia y el número de los términos; como en este supuesto no seria dado el último término, eliminaria u, y sacaria una equacion en la qual no habria otras cantidades que a, n, d y s, y me daria por lo mismo á conocer con facilidad el valor de s.

De aquí inferiremos, que las dos equaciones $u = a + (n - 1)d$, y $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ resuelven quantas cuestiones se pueden proponer acerca de las progresiones arisméticas, con tal que se conozcan desde luego tres de las cinco cantidades a, u, n, d y s.

De la sumacion de las potencias de los términos de una progresion arismética qualquiera.

171 Sean a, b, c, d &c. muchos números que estén en progresion arismética y cuya diferencia sea r. Tendremos 1.° $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$.

2.° Elevando al quadrado tendremos:

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$
$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$
$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$
$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2$$

3.° y elevando al cubo tendremos;

$$b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$
$$c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$
$$d^3 = c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3$$
$$e^3 = d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3$$

Si sumamos ahora las equaciones de los quadrados unas con otras, y hacemos lo propio con las de los cubos, tendremos despues de borrados los términos iguales y semejantes que se hallan en miembros diferentes:

1.º $e^2 = a^2 + 2ar + 2br + 2cr + 2dr + 4r^2$, ó $e^2 = a^2 + 2r(a + b + c + d) + 4r^2$.

2.º Si sumamos tambien las equaciones de los cubos, saldrá despues de borradas las cantidades semejantes é iguales que se hallaren en miembros diferentes

$e^3 = a^3 + 3a^2r + 3b^2r + 3c^2r + 3d^2r + 3ar^2 + 3br^2 + 3cr^2 + 3dr^2 + 4r^3$: quiero decir $e^3 = a^3 + 3r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2(a + b + c + d) + 4r^3$.

Si tomáramos tambien las quartas potencias de las equaciones $b = a + r$, $c = b + r$ &c. las sumáramos y manejáramos del mismo modo, hallaríamos tambien la suma de los cubos. Lo mismo se practicaria para sacar la suma de las potencias mas altas.

Si los términos de la progresion fuesen los números naturales 1, 2, 3, &c. en este caso $r = 1$, $r^2 = 1$, y $4r^2 = 1 + 1 + 1 + 1$, $4r^3 = 1 + 1 + 1 + 1$, &c.

De cuyo supuesto inferiremos 1.º que el quadrado e^2 del último de muchos términos consecutivos de la serie de los números naturales es igual al quadrado a^2 del primero de dichos términos, mas dos veces la suma $a + b + c + d$ de los términos que preceden al último, mas el número $1 + 1 + 1 + 1$. 2.º El cubo e^3 del último de dichos términos es igual al cubo a^3 del primero, mas tres veces la suma de los quadrados de los términos antecedentes, mas tres veces la suma de estos mismos términos, mas su número.

3. Tambien inferiríamos que la quarta potencia e^4 del último término es igual á la quarta potencia del primero, mas quatro veces la suma de los cubos de los términos antecedentes, mas seis veces la suma de sus quadrados, mas quatro veces la suma de dichos mismos términos, mas su número &c.

Por consiguiente, si llamamos a un primer término qualquiera, u el último término, espresará $u - a$ el número de los términos que precedieren al último: luego si llamamos s la suma de todos los términos, s^2 la suma de sus quadrados, s^3 la suma de sus cubos &c. será $s - u$ la suma de todos los términos que hubiere antes del último: $s^2 - u^2$ la suma de sus quadrados: $s^3 - u^3$ la suma de sus cubos &c. Y la primera consecuencia que sacamos antes, estará espresada por esta fórmula $u^2 = a^2 + 2s - 2u + u - a$, ó reduciendo $u^2 = a^2 - a + 2s - u$. La segunda consecuencia será espresada por $u^3 = a^3 + 3s^2 - 3u^2 + 3s - 3u + u - a$, que se reduce á $u^3 = a^3 - a + 3s^2 - 3u^2 + 3s - 2u$. La espresion de la tercera será $u^4 = a^4 + 4s^3 - 4u^3 + 6s^2 - 6u^2 + 4s - 4u + u - a$, ó $u^4 = a^4 - a + 4s^3 - 4u^3 + 6s^2 - 6u^2 + 4s - 3u$ &c.

De la primera fórmula sacamos $s = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$. Substituyendo este valor en la segunda, saldrá $u^3 = a^3 + 3s^2 - \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}u - \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$, y por consiguiente $s^2 = \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$. Si substituimos los valores de s y s^2 en la tercera fórmula, y egecutamos despues la reduccion correspondiente, sacaremos $u^4 = a^4 + 4s^3 - 2u^3 - u^2 - 2a^3 + a^2$: luego $s^3 = \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2$.

172 Si el primer término de las series fuese 0 ó 1, seria $s = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u$; $s^2 = \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u$; y $s^3 = \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{4}u^2$.

Propiedades y usos de las Progresiones Geométricas.

173 Por un método análogo al que nos ha guiado para sumar las potencias de los términos de una progresion arismética, podríamos tambien hallar la suma de los términos de una progresion geométrica.

Supongamos que a, b, c, d, e &c. sean los términos consecutivos de una progresion geométrica creciente, cuya razon sea q. Ya que cada término contiene al que le precede un número q de veces, tendremos las equaciones siguientes $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$ &c. Luego sumando unas con otras estas equaciones, sacaremos $b + c + d + e = (a + b + c + d)\,q$, por donde sacamos que, en general, el primer miembro será siempre la suma de todos los términos menos el primero, y el segundo será siempre la razon q multiplicada por la suma de todos los términos menos el último. Luego si llamamos s la suma de todos los términos, y u el último de ellos, se transformará esta equacion en $s - a = (s - u)\,q$, ó $s - a = sq$

$-qu$; de donde se saca $qu - a = qs - s = (q-1)s$ y por consiguiente $s = \frac{qu-a}{q-1}$, por medio de cuya fórmula se sacará la suma s de todos los términos en el supuesto de ser conocidos el primer término a, y la razon q.

Tambien puede servir esta fórmula para las progresiones decrecientes; porque si se toma inversamente una progresion decreciente, resultará una progresion creciente, y no habrá mas variacion que la de decir *último término* en lugar de *primero*, y *primero* en lugar de *último.*

Si la progresion decreciente fuese continuada al infinito, es necesario introducir en el cálculo lo que espresa este supuesto, esto es, que el último término es infinitamente pequeño, en cuyo caso $qu - a = qu$, suponiendo que sea u el primer término. Muy en breve daremos la razon de esta regla.

174 Se echa, pues, de ver que *para sacar la suma de todos los términos de una progresion geométrica, se debe multiplicar el término mayor por la razon de la progresion, de cuyo producto se restará el término menor de la misma progresion, y la resta que saliere se dividirá por la razon disminuida de la unidad*: de suerte, que quando la progresion es decreciente al infinito, se reduce la operacion á multiplicar el término mayor por la razon, y dividir despues por la razon menos la unidad.

Así la suma de los términos de esta progresion $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$ &c. continuada al infinito es $\frac{\frac{1}{2}\times 2}{2-1}$ ó 1: lo mismo sucede con la suma de los términos de esta $\div \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81}$ &c. cuya razon considerando la progresion como creciente es 3, porque dividiendo $\frac{2}{3}$ por $\frac{2}{9}$, resulta 3. Con efecto la suma de los términos de esta progresion es $\frac{\frac{2}{3}\times 3}{3-1}$ que se reduce á 1. En general, toda progresion geométrica decreciente al infinito, en la qual el numerador constante de cada término es un número menor de una unidad que el denominador del primer término, vale 1. Porque esta progresion es en general $\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3} : \frac{n}{(n+1)^4}$ &c. cuya suma es $\frac{\frac{n}{n+1}\times(n+1)}{n+1-1}$ ó $\frac{n}{n}$ que vale 1:

175 Vimos en la Arismética (I. 219) que un término qualquiera de una progresion geométrica se componia del primero multiplicado por la razon elevada á una potencia de un grado igual al número de los términos que preceden al término que se considera. Luego si llamamos a el primer término, u un término qualquiera, q la razon, n el número de los términos, tendremos $u = aq^{n-1}$; y como en esta equacion hay quatro cantidades, se pueden sacar quatro fórmulas, que servirán para resolver esta cuestion general: *Dadas tres de estas quatro cosas, el primer término, el último, la razon y el número de los términos de una progresion geométrica, hallar la quarta.* Porque 1.° la equacion dá inmediatamente el valor de u. 2.° El de a se halla facilmente ser $a = \frac{u}{q^{n-1}}$; por lo que mira á q ha-

llaremos en virtud de lo dicho (165) $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Es de notar que en esta última equacion está cifrada la regla que dimos en la Arismética (I. 222) para insertar muchos medios proporcionales entre dos cantidades dadas. En el caso presente las cantidades son a y u; para sacar la razon q que debe reynar en la progresion, se echa de ver que es menester dividir la mayor u por la menor a, y sacar del cociente $\frac{u}{a}$ la raiz del grado $n-1$; pero siendo n el número total de los términos, $n-1$ es mayor de una unidad que el número de los medios. Todo esto concuerda exâctamente con el artículo citado.

Por lo que mira al modo de conocer n en la equacion $u = aq^{n-1}$, el Álgebra no suministra métodos por donde se pueda conseguir directamente; pero se puede resolver con suma facilidad, aunque sea indirectamente, valiéndonos de los logaritmos, conforme manifestaremos en otro lugar.

176 La equacion $s = \frac{qu-a}{q-1}$ dará tambien quatro equaciones que servirán para resolver esta cuestion general: *Dadas tres de estas quatro cosas, la suma, la razon, el primer término y el último de una progresion geométrica, hallar la quarta*; cuya resolucion es tan facil que seria pesadez detenernos en declararla.

Finalmente, si sacamos de la una de las dos equaciones $s = \frac{qu-a}{q-1}$, y $u = aq^{n-1}$ el valor de una misma cantidad a ó q ó u &c. y la substituimos en la otra, resultarán las demas equaciones conducentes para resolver la cuestion siguiente que es todavia mas general: *Dadas tres de* *estas cinco cosas, el primer término, el último, la razon, la suma y el número de los términos de una progresion geométrica, hallar cada una de las otras dos.*

Del Cero, del Infinito, y de las Cantidades Imaginarias.

177 Es tan extraño el paradero de algunos cálculos que pasa los límites de la humana comprehension. Quando encuentra un calculador resultados de esta naturaleza, lo mas acertado para él es rendirse á la evidencia de los principios que le han dirigido en su operacion, y no embarazarse en cavilaciones, buscando la razon del caso estraño con que tropieza. El que no se pagare de una demostracion, ninguna luz tiene que esperar por otro camino, mayormente si fuere tan poco seguro como lo son todos los que algunos han intentado abrir para averiguar lo que quieren llamar fundamentos metafisicos de los conocimientos humanos.

178 En los primeros elementos de la Matemática damos ya con cantidades, cuyo valor no es posible saber, siendo así que sabemos qual es el producto que resulta de su multiplicacion recíproca, y en qué razon estan las unas con las otras. No se puede hallar, por egemplo, número alguno que esprese cabal el valor de $\sqrt{50}$ ni el de $\sqrt{72}$; pero sabemos (69) que el producto de estas dos cantidades $=\sqrt{(3600)}=60$; y tambien sabemos que $\sqrt{50}:\sqrt{72}::5:6$. Porque $\sqrt{50}=\sqrt{(25\times2)}$, y $\sqrt{72}=\sqrt{(36\times2)}$, cuyas espresiones, con sacar la raiz del quadra-

do cabal que cada uno contiene, se reducen á $5\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}$: luego $\sqrt{50} : \sqrt{72} :: 5\sqrt{2} : 6\sqrt{2} :: 5 : 6$ (I. 174).

Tiene á la verdad todo esto visos de paradoja, y aun de incomprehensible; pero estriba en principios cuya certeza y enlace con las consecuencias que de ellos infiere la Matemática, estan demostrados con todo rigor. Mas estrañas parecen todavia, si cabe, algunas de las propiedades del cero que vamos á declarar.

179 Por decontado es evidente que no crece una cantidad por añadirla el cero, ni tampoco mengua porque se la quite; y que el producto de una cantidad por *o* es nada, pues el multiplicador *o* dá á entender que no se la toma ninguna vez á la expresada cantidad (I. 29).

180 Supongamos que exprese q el cociente de b partida por a, de modo que tengamos $\frac{b}{a} = q$. Si permaneciendo siempre b la misma cantidad, menguare a, el cociente q crecerá, pues quanto menor fuere un divisor, tanto mayor número de veces cabrá en un mismo dividendo, y los incrementos de q serán proporcionales á los decrementos de a; de modo que en llegando a á ser ilimitadamente pequeña, será q ilimitadamente grande. Por consiguiente quando llegare a á ser menor que qualquiera cantidad asignable, ó infinitamente pequeña, en cuyo caso la llamaremos cero, será q mayor que qualquiera cantidad asignable, ó infinitamente grande: tendremos, pues, entonces $\frac{b}{o} = q = \infty$, por ser ∞ la señal del infinito.

181 Supongamos ahora que sea x, x^2, x^3 &c. una progresion geométrica que continuada ácia atras seria x, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{xx}$ &c. esto es (31 y 91) x, x^0, x^{-1}, x^{-2} &c. cuyos exponentes van menguando una unidad, y forman la progresion arismética $1, 0, -1, -2$ &c. de modo que el término de la progresion en que x lleva el exponente 0 es 1, y será $x^0 = 1$ (31), sea x la cantidad que se quisiere, y por consiguiente si fuere $x = 0$, tambien será $0^0 = 1$; porque tambien 0^3, por egemplo, dividido por 0^3, ó $\frac{0^3}{0^3}$ que es $= 1$, es $0^{3-3} = 0^0$.

182 Una vez que es tanto menor un quebrado quanto mayor es su denominador respecto de un mismo numerador, se sigue que si fuese 1 el numerador del quebrado, sus potencias expresarán una cantidad tanto menor, quanto mayor fuere su grado; pues claro está que $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{(2)^2}$, $\frac{1}{(2)^2}$ es mayor que $\frac{1}{(2)^3}$ &c. Por consiguiente si en la progresion $\div x : x^2 : x^3$ &c. Suponemos x pequeña mas de lo que cabe en la imaginacion, cada término de esta progresion será mayor que el término inmediato que se le siguiere, mas de lo que se puede concebir. Y si x fuere 0, en la progresion $\div \frac{1}{0} : 0^0 : 0^1 : 0^2$ &c. será $\frac{1}{0}$ infinito, o es nada. Luego el término 0^0 medio geométrico entre el infinito y la no nada, será una cantidad finita, pues será $0^0 \times 0^0 = \frac{1}{0} \times 0$, $0^{20} = 1$, ó $0^0 = 1$, que es una cantidad finita.

183 Ya que $1 - 1 = -1 + 1 = 0$, y $\frac{a}{0} = \infty$,

tambien será $\frac{a}{1-1} = \frac{a}{-1+1} = \infty$. Si egecutamos la division que esta espresion representa, y la suponemos continuada al infinito, el cociente que encierra $\frac{a}{1-} = a + a + a \ldots\ldots + \frac{a}{1-1}$, y el de $\frac{a}{-1+1} = -a - a - a \ldots\ldots + \frac{a}{-1+1}$. Luego lo mismo es $\frac{a}{1-1}$ que $\frac{a}{1-1} + a + a + a$, y lo mismo es $\frac{a}{-1+1}$ que $\frac{a}{-1+1} - a - a - a$. Por consiguiente *una cantidad infinita no crece ni mengua por añadirla ó quitarla cantidades finitas*: *luego quando una cantidad complexa tuviere algun término infinito y otros finitos, podrán estos omitirse, sin que por esto se altere el valor de la espresada cantidad.*

184 Es evidente que quando una cantidad, x por egemplo, es infinita, son tambien infinitas todas sus potencias y todas sus raices. Pero estos infinitos componen varios grados ó distintas órdenes, segun varían los grados de sus esponentes. Quando x es infinita su quadrado xx que es el producto del infinito multiplicado por el infinito, ó el infinito tomado una infinidad de veces, *es infinitamente infinito*, ó *infinito de segunda orden.* El cubo xxx que es el quadrado xx multiplicado por el infinito x, *es infinito de tercera orden*, y así prosiguiendo. Estas órdenes del infinito son las órdenes *potenciales.*

Hay tambien las órdenes *radicales*. Aunque $x^{\frac{1}{2}}$ ó $\sqrt{x}$ sea infinita, pues no hay cantidad finita alguna que la sea igual por el supuesto, es no obstante infinitamente menor que x, pues es media proporcional entre x y la unidad, entre el infinito y el finito. Y $x^{\frac{1}{3}}$ ó $\sqrt[3]{x}$, tambien infinita, es infinitamente menor que $x^{\frac{1}{2}}$.

Las potencias cuyo esponente es negativo, y la raiz infinita, son cantidades infinitamente pequeñas. Por egemplo x^{-1} que es $\frac{1}{x}$, es infinitamente pequeña (182), y x^{-2}, ó $\frac{1}{xx}$ es todavia infinitamente menor, pues es un infinitamente pequeño dividido por el infinito x, ó una infinitésima parte de un infinitamente pequeño. Por la misma razon es x^{-3} de una orden todavia inferior &c. Pero $x^{-\frac{1}{2}}$ ó $\frac{1}{\sqrt{x}}$, bien que infinitamente pequeña, pues suponemos x infinita, es infinitamente menos pequeña que x^{-1}; porque $x^{-\frac{1}{2}}$ ó $\frac{1}{\sqrt{x}}$ es media proporcional entre 1 y x^{-1}, ó entre 1 y $\frac{1}{x}$.

185 En el supuesto de ser x infinitamente pequeña, todas sus potencias, y todas sus raices de un esponente positivo son tambien infinitamente pequeñas; pero guardando la misma graduacion y distincion de ordenes que el infinito, de suerte que de las dos potencias de una misma raiz infinitamente pequeña, la que mayor esponente llevare será infinitamente menor que la otra. Quando x es infinitamente pequeña, será xx todavia infinitamente menor, ó un infinitamente pequeño de segunda orden, xxx de tercera orden. Porque 1, x, xx, xxx &c. son cantidades proporcionales: de modo que siendo 1 infinitamente mayor que x será x infinitamente mayor que xx &c.

Hay tambien órdenes radicales de infinitamente pequeños. Una vez que $\sqrt{x}$ es media proporcional entre el finito 1 y el infinitamente pequeño x, es infinitamente pequeña, pero lo es infinitamente menos que x. Y $x^{\frac{1}{3}}$ que tambien es infinitamente pequeña, lo es infinitamente menos que $\sqrt{x}$ ó $x^{\frac{1}{2}}$. Porque $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{6}}$ es á $x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{6}}$, como el finito 1 al infinitamente pequeño $x^{\frac{1}{6}}$.

Pero siendo infinitamente pequeña la raiz x, las raices ó potencias de un esponente negativo serán infinitas. Así, x^{-1} ó $\frac{1}{x}$ será un infinito de primera orden, porque el finito 1 contiene una infinidad de veces al infinitamente pequeño x. Y $x^{-2} = \frac{1}{xx}$ que es el infinito $\frac{1}{x}$ multiplicado por sí mismo, es el infinito del infinito ó el infinito de segunda orden &c. Pero $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es un infinito radical.

186 Acerca de todo lo dicho hasta aquí hemos de hacer una prevencion que dará muchísima luz para la cabal inteligencia de toda esta doctrina, que no podemos menos de confesar que es sumamente sutil; y es, que considerando este punto con algun cuidado, se echa de ver que la idea del infinito no es mas que una nocion abstracta. Si concibo una estension finita qualquiera, y despues prescindo ó hago abstraccion de los límites en que está circunscripta, tendré idea de la estension infinita. Solo por este camino, y no por otro alguno podemos concebir un número infinito, una duracion infinita &c.

Esta definicion manifiesta quan vaga é imperfecta es para nosotros la nocion del infinito. No es mas, hablando con propiedad, que la nocion del *indefinito*, llamando con este nombre una cantidad vaga, á la qual no señalamos límites; y no, como se puede entender y lo entienden muchos en otro sentido, una cantidad que concebimos limitada, pero sin fijar ó determinar sus límites de un modo preciso.

La misma nocion manifiesta tambien que el infinito, conforme le considera la Matemática, es en la realidad el límite del finito, esto es el término ácia el qual se encamina el finito sin alcanzarle jamás, pero al qual podemos suponer que se vá acercando mas y mas, bien que nunca le llega á alcanzar. Este es el verdadero concepto que tienen formado los Matemáticos de la cantidad infinita, conforme lo aclara el egemplo siguiente.

187 Quando probamos (174) que esta serie de números $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ &c. continuada al infinito $= 1$, quisimos probar que el número 1 es el límite de la suma de la espresada serie, esto es, que quantos mas términos tomáremos de dicha serie, tanto mas la suma de dichos términos se acercará á valer 1, á cuyo valor *podrá acercarse quanto se quisiere*. Esta última condicion es indispensable para que salga cabal la idea que corresponde á la voz límite. Porque el número 2, por egemplo, no es el límite de la suma de la espresada serie; pues aunque tomando en dicha serie mas y mas términos, la suma se acerca realmente al número 2, pues se irá continuamente acercando á 1, no podrá sin embargo acercarse quanto se quisiere al número 2, porque la suma de dicha progresion nunca pasa de 1.

Asimismo, quando decimos que la suma de esta serie 2, 4, 8, 16 &c. ó de otra qualquiera serie, cuyos términos van creciendo es infinita, queremos decir que quantos mas términos tomásemos de dicha serie, tanto mayor suma compondrán; y que podremos tomar tantos términos, que su suma podrá ser igual á un número tan grande como se quisiere.

Esta es la idea que nos hemos de formar del infinito, á lo menos respecto del uso que de él se hace en la Matemática; cuya idea es sencilla y clara, y ataja todas las sofisterias de la cavilacion.

A nosotros no nos toca escudriñar si hay en la naturaleza visible cantidades infinitas actualmente existentes; si el espacio es realmente infinito, y si la duracion es infinita: si en una porcion finita de materia hay un número realmente infinito de partecillas. Nada de esto tiene que ver con el infinito de los Matemáticos, que no es otra cosa, segun digimos poco ha, que el límite de las cantidades finitas; de cuyo límite no tiene precision el Matemático de suponer la existencia real: basta que nunca le llegue á alcanzar el finito.

Los Matemáticos no niegan la existencia del infinito actual; pero tampoco suponen, ni lo necesitan, el infinito como realmente existente. Esta consideracion sola basta para apear muchísimas dificultades que se han propuesto contra el infinito matemático, y acabar de declarar lo que deciamos arriba (180).

188 Hemos dicho que hay infinitos mayores los unos que los otros; que el quadrado de un número infinito, por egemplo, es infinitamente mayor que dicho número: no queremos dar á entender con estas espresiones que concebimos como existente, pues no le necesitamos, un número infinito. La idea del infinito no es para nosotros mas que una idea abstracta, que solo espresa un límite intelectual, al qual ningun número finito puede llegar.

Podemos esplicar con claridad qué cosa entendemos por infinitos de segunda y tercera orden, sin embarazarnos en esplicaciones metafísicas que todo lo enredan. Quando decimos, por egemplo, que si llega á ser infinita la linea A, la linea B, que pende de la primera, es infinita de segunda orden; queremos decir que la razon entre la segunda linea y la primera (suponiéndolas ambas finitas) es tanto mayor quanto mayor fuere la primera; y que podemos suponer dicha razon mayor que qualquiera número finito y *asignable*.

Si digéramos que la segunda linea es infinita de tercera orden, quisiéramos dár á entender, hablando con claridad, que el producto de la segunda linea por una linea finita qualquiera, es tanto mayor respecto del quadrado de la segunda, quanto mayor fuere la primera; y que la razon entre los dos productos puede ser mayor que qualquiera razon finita.

Quando decimos que un círculo es un polygono de una infinidad de lados, queremos decir que el círculo es el *límite* de los polygonos que se la pueden inscribir y circunscribir, esto es, que quantos mas lados tubieren dichos polygonos, tanto mas se acercarán á confundirse con el círculo, del qual se puede suponer que discrepan tan poco como se quisiere, con aumentar á arbitrio al número de los lados del polygono.

Todo lo dicho hasta ahora esplica con claridad y precision las espresiones que hablan del infinito. Estas espresiones tan comunes en la Geometría superior son, como otras muchas de que usa, tales, que atendiendo al sentido metafisico que presentan, parecen poco exactas; pero solo deben considerarse como modos abreviados de hablar inventados para hacer perceptible una verdad que no se podria ni esplicar ni proponer exactamente sino con muchas palabras.

189 Aunque, segun llevamos dicho (150) no puede haber quadrado alguno negativo, y es por consiguiente imposible sacar la raiz quadrada de una cantidad negativa, se encuentran no obstante en muchos cálculos espresiones, qual seria esta $\sqrt{-a}$, que incluyen esta imposibilidad; y lo que podrá parecer mas estraño, las introducen de intento en algunas operaciones los calculadores con el fin de abreviar los cálculos, y descubrir por su medio verdades de suma importancia.

El cálculo de estas cantidades, conocidas con el nombre de *imposibles* é *imaginarias*, no tiene dificultad alguna por lo que mira al modo de hallar su suma, ó su diferencia, ora se resten ó sumen unas con otras, ora se sumen ó resten de cantidades de su misma especie, se egecutan la adicion ó la sustraccion con las imaginarias del mismo modo que con las cantidades reales, segun manifestarémos muy en breve. Solo prevenimos, que el total que representa la suma de cantidades imaginarias y cantidades reales es por precision imaginario, pues incluye imaginarias. No mudan á la verdad de naturaleza las cantidades reales, que son parte de la espresada suma ó diferencia; solamente la espresion total es imaginaria.

Algun mas cuidado pide la multiplicacion de las imaginarias; pero antes de declarar el modo de egecutarla, bueno será que discurramos un rato acerca del origen de estas cantidades.

190 Es natural que un resultado imposible provenga de un supuesto tambien imposible. Supongamos, pues, que considerando $aa + bb$ como un producto originado de la multiplicacion de a y b, queramos hallar las cantidades que han de afectar las raices a y b de los quadrados, cuya suma compone el producto supuesto, para que dicho producto sea con efecto $aa + bb$.

Llamarémos A y B las indeterminadas que han de afectar las raices a y b de los quadrados, para que el producto sea $aa + bb$, y supondrémos que los factores son $a + Ab$, y $aB + b$. El producto de estos dos factores ha de ser igual á $aa + bb$, en virtud de los supuestos sobre que caminamos. Luego $aaB + ab\,AB + ab + Abb = aa + bb$.

Si comparamos los términos de esta equacion, y suponemos $aaB = aa$, tendrémos $B = 1$; y si suponemos $Abb = bb$, tambien tendrémos $A = 1$. De donde hemos de inferir que si las cantidades A y B son posibles, tendrémos $A = B$, y por consiguiente $AB = AA = BB$. Como en la suma $aa + bb$ falta la cantidad ab, podemos suponer $ab = 0$, y por tanto $ab + abAB = 0$, ó $ab + AAab = 0$, ó $ab + BBab = 0$; quiero decir que tendrémos $AA + 1 = 0$, ó $BB + 1 = 0$, esto es $AA = -1$, y $BB = -1$, consecuencia imposible, pues hemos visto antes que AA ó $BB = 1$. Luego no pueden los factores tener la forma supuesta: luego la cantidad propuesta no puede resolverse en factores; ó, lo que es lo propio no puede ser el producto de las especies a y b de qualquiera modo que se combinen. No obstante, si intentamos resolver la equacion $AA + 1 = 0$ á pesar de que encierra un absurdo conforme hemos visto poco há, tendrémos $AA = -1$, y sacando las raices $A = \pm\sqrt{-1}$. Por el mismo camino hallarémos $B = \pm\sqrt{-1}$. Esta espresion es una imaginaria: no es una cantidad real, sino un symbolo de un supuesto absurdo, en el qual se considera como producto de dos cantidades una espresion que no lo es.

Pueden ser, conforme veremos en algunas ocasiones, de algun uso estos symbolos, y por lo mismo tiene cuenta introducirlos en los cálculos, y entónces los factores imaginarios de $aa + bb$ serán $a + b\sqrt{-1}$, y $a - b\sqrt{-1}$, ó $b + a\sqrt{-1}$, y $b - a\sqrt{-1}$, ó $-a + b\sqrt{-1}$, y $-a - b\sqrt{-1}$.

191 Pero aunque esté demostrado que $aa + bb$ no puede ser el producto de las cantidades a y b, se puede preguntar si se podria sacar la misma suma de quadrados de otra combinacion de las cantidades $a + b$ y $a - b$. Para averiguarlo levantaré cada una de estas cantidades al quadrado: sacaré $aa + 2ab + bb$, y $aa - 2ab + bb$. Si sumo uno con otro estos dos quadrados, y tomo la mitad de su suma, saldrá $aa + bb$: luego tambien queda probado que la suma propuesta de quadrados no es el producto de las cantidades $a + b$ y $a - b$, sino la semisuma de sus quadrados.

192 Todo esto sentado, la suma de $\sqrt{-a^2}$, y $-3\sqrt{-a^2}$ es $-2\sqrt{-a^2}$: la suma de $-\sqrt{-x^2}$, y $\sqrt{-y^2}$ es $-\sqrt{-x^2} + \sqrt{-y^2}$; la suma de $b + \sqrt{-a^2}$, y $b - \sqrt{-a^2}$ es $2b$.

193 Si quisiésemos restar $\sqrt{-a^2}$ de $-3\sqrt{-a^2}$, la diferencia sería $-4\sqrt{-a^2}$; $b + \sqrt{-x^2}$ restado de $c + \sqrt{-x^2}$ dá $c - b$.

194 Las raices $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-c}$ se multiplican del mismo modo que las demás (69). Pero se pueden cometer algunas equivocaciones en el modo de escribir los productos por razon del signo que han de llevar. El egemplo siguiente enseñará el modo de precaverlos. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ es $-\sqrt{ab}$. Porque $\sqrt{-a}$ es lo mismo que $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, y $\sqrt{-b}$ lo mismo que $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$. Será, pues,

$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$, ó $\sqrt{ab} \times \sqrt{(-1)^2}$ que se reduce á $-\sqrt{ab}$, pues $\sqrt{(-1)^2} = -1$ (69).

195 Es muy del caso no confundir $\sqrt{(-a)^2}$ con $\sqrt{-aa}$: la primera cantidad es $\sqrt{(-a \times -a)}$, y la otra es $\sqrt{(-a \times +a)}$. En orden á esto es menester hacer una advertencia muy importante. Ya que $-a \times -a$ dá $+a^2$, cuya raiz es (148) $\pm a$, parece que $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ deberia dár $\pm a$; siendo así que segun decimos dá solo $-a$.

Es muy facil dár la razon de esta diferencia. Quando se me pregunta quál es la raiz de a^2, hago bien en decir que es $+a$ igualmente que $-a$, porque la pregunta no determina si se considera a^2 como formado de $+a \times +a$, ó de $-a \times -a$; pero quando se me pregunta quál es el valor de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, bien que en virtud de las reglas se reduce esta cantidad á $\sqrt{+a^2}$, no la puedo señalar otra raiz que $-a$, porque la misma pregunta determina que a^2 proviene entónces de $-a \times -a$, y por consiguiente su raiz ha de ser $-a$.

196 Quando ocurra dividir $\sqrt{-bc}$ por $\sqrt{-c}$, se dividirá $\sqrt{bc} \times \sqrt{-1}$ por $\sqrt{c} \times \sqrt{-1}$, el cociente será $1.\sqrt{b}$ ó $\sqrt{b}$.

197 Antes de pasar á otro asunto harémos acerca de las imaginarias algunas consideraciones que á su tiempo nos serán de alguna utilidad.

1.° Las raices quadradas de a son indistintamente $\sqrt{a}$

y $-\sqrt{a}$, porque $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{aa} = a$, y $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = +\sqrt{aa} = a$; el producto de $\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -\sqrt{aa} = -a$, y $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, ó $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = a$.

2.° Por lo mismo las raices quadradas de $-a$, serán las dos cantidades imaginarias $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$; porque $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a)^2} = -a$, y $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +\sqrt{(-a)^2} = +-a = -a$; y el producto de $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -\sqrt{(-a)^2} = --a = +a$. Por donde se echa de ver que *de la multiplicacion de dos cantidades imaginarias puede resultar un producto real.*

198 En la multiplicacion de las imaginarias por otras cantidades de su misma especie no se desaparece el signo radical, sino quando se multiplican de dos en dos las que tienen una misma cantidad debajo del signo; asi $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -a$; pero $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -\sqrt{[(-a)^2 \times -a]} = --a\sqrt{-a} = a\sqrt{-a}$: $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = \sqrt{a^4} = aa$; pero $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -\sqrt{(a^4 \times -a)} = -aa\sqrt{-a}$ &c. Asimismo, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$; pero $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b^2} = ab$, y $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^3 b^2} = ab\sqrt{a}$. De donde hemos de inferir que *una cantidad real no puede representar el producto de cantidades imaginarias, sino en el caso de que se haya multiplicado un número par de imaginarias.*

Si uno de los términos de un polynomio fuese un radical imaginario, podrá desaparecerse el radical con tal que se multiplique el polynomio por otro que no se diferencie de él sino en que lleve su radical un signo contrario. Por egemplo, si multiplicamos $a - \sqrt{-b}$ por $a + \sqrt{-b}$, resultará el producto $a^2 + b^2$ en que no hay ninguna cantidad imaginaria, porque el producto de a por $-\sqrt{-b}$, le destruye el producto de a por $+\sqrt{-b}$; pero el producto $(a - \sqrt{-b}) \times (a - \sqrt{-b}) = a^2 - 2a\sqrt{-b} - b$ lleva un radical imaginario. Por consiguiente el quadrado de un binomio que tenga un radical imaginario, será tambien imaginario, pues la suma, ó la diferencia de radicales imaginarios (192 y 193) es una cantidad imaginaria. Pero si ambos términos del binomio fuesen imaginarios, el quadrado no tendrá imaginaria ninguna, porque la cantidad radical que lleváre será por precision positiva. Por egemplo $(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})^2 = -a + 2\sqrt{ab} - b$, como lo verificará facilmente el que hiciere el cálculo, en cuya expresion es positiva la cantidad que está debajo del radical, y debe serlo, porque el duplo del producto de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ ha de ser $2\sqrt{+ab}$ ó $2\sqrt{ab}$.

Fig.

Aplicacion del Algebra á la Geometría.

De la construccion ó resolucion geométrica de las equaciones determinadas de primero y segundo grado.

199 Resolver ó construir geométricamente una equacion, es hallar en lineas los valores de la incógnita. Todo el artificio en que estriba este ramo de la aplicacion del Algebra á la Geometría se reduce al conocimiento de ciertas operaciones fundamentales, á las quales se refieren despues todas las otras. Darémos, pues, á conocer las primeras, y concluido esto, manifestarémos cómo nos pueden dirigir en la práctica de las demas.

Para construir la expresion $x = a + b - c$; tira-
2. ríamos una linea recta DC, y desde uno de sus puntos A tomaríamos $AB = a$, y $BC = b$ ácia el extremo C. Finalmente tomaríamos desde C ácia D ó A la porcion $CE = c$, que sería negativa (127) respecto de AB y BC, y sería $AE = AB + BC - CE = a + b - c = x$.

200 Si hubiéramos de construir la expresion $x =$
3. $\frac{ab}{c}$, en la qual a, b, c representan lineas conocidas; tiraríamos dos lineas indefinitas AZ, AX, que formen un ángulo qualquiera. Sobre la una AX de dichas lineas tomaríamos una parte AB igual á la linea que representa c; tomaríamos despues otra parte AD igual á qualquiera de las dos lineas a y b, á a, por egemplo; despues sobre la

otra linea AZ tomaríamos una parte AC igual á la línea b. Juntaríamos los estremos B y C de la primera y de la tercera tirando la linea BC. Tiraríamos por el estremo D de la segunda, la linea DE paralela á BC; y la parte AE que determinaria sobre AZ, seria el valor de $x = \frac{ab}{c}$; porque las paralelas DE y BC dan (I. 451) esta proporcion $AB : AD :: AC : AE$, esto es, $c : a :: b : AE$; luego (I. 183) $AE = x = \frac{ab}{c}$. Por consiguiente se reduce la operacion á hallar una quarta proporcional á las tres lineas dadas c, a, b.

Se sigue, pues, que si se ofreciera construir $x = \frac{aa}{c}$, seria este caso el mismo que el primero; no habria mas diferencia sino la de ser iguales las lineas a y b.

Para construir $x = \frac{ab + bd}{c + d}$, repararémos que esta cantidad es la misma que $\frac{(a+d)b}{c+d}$. Considerando, pues, $a + d$ como una sola linea, representada por m, y $c + d$ tambien como una sola linea n, se reducirá la equacion á $x = \frac{mb}{n}$, que ya sabemos cómo se construye.

Si fuese $x = \frac{aa - bb}{c}$, consideraríamos que siendo $aa - bb$ lo mismo que $(a + b) \times (a - b)$, pues $(a + b) \times (a - b) = aa - bb$, podríamos dár á $\frac{aa - bb}{c}$ esta forma .... $\frac{(a+b)(a-b)}{c}$, y buscaríamos una quarta proporcional á c, $a + b$ y $a - b$.

Si la cantidad que se ha de construir fuere $x = \frac{abc}{de}$, la escribiríamos así $x = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; y despues de construida $\frac{ab}{d}$, conforme hemos enseñado, llamaríamos m la linea que hubiese resultado de esta construccion; con lo que $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$

se reduciria á $\frac{mc}{c}$, que ya hemos dicho como se construye.

Se echa, pues, de ver que para construir $x = \frac{a^2b}{c^2}$, escribiríamos $x = \frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$ construiríamos $\frac{a^2}{c}$, y representando su valor por m, construiríamos $\frac{mb}{c}$.

De lo dicho se echa de ver que todo el artificio está en resolver la cantidad propuesta en porciones que tengan cada una la forma $\frac{ab}{c}$ ó $\frac{a^2}{c}$; y aunque ocurren casos en que puede parecer dificultosa esta resolucion, sin embargo se llega á conseguir con facilidad haciendo uso de las transformaciones.

Por egemplo, si hubiese de construir $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$, supondria á arbitrio $b^3 = a^2 m$, y $c^2 = an$; con esto se transformaria $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$ en $\frac{a^3 + a^2 m}{a^2 + an}$, que se reduce á $\frac{a^2 + am}{a + n}$, ó $\frac{(a + m)\,a}{a + n}$, cuya cantidad es facil de construir despues de lo dicho, siendo conocidas m y n, cuyos valores sacarémos de las equaciones $b^3 = a^2 m$, y $c^2 = an$, que dán $m = \frac{b^3}{a^2}$, y $n = \frac{c^2}{a}$, que ya sabemos construir.

Por consiguiente siempre que la cantidad fuere racional, esto es, siempre que no tubieren radicales, quando el número de las dimensiones del numerador no excediere sino de una unidad al número de las dimensiones del denominador, se reducirá siempre su construccion á buscar una quarta proporcional á tres lineas dadas: se presentan algunas veces las cantidades en una forma que inutiliza al parecer el socorro de las transformaciones; esto sucede quando no es *homogenea* la cantidad, esto es, quando cada uno de los términos del numerador, ó del denominador no se compone de un mismo número de factores: por egemplo, quando la cantidad es $\frac{a^3+b}{c^2+d}$. Pero es de advertir, que jamas se llega á resultados de esta naturaleza, sino quando en el discurso de un cálculo se ha supuesto, con la mira de simplificarle, alguna de las cantidades igual á la unidad. Por egemplo, si en $\frac{a^3+b^2c}{a^2+c^2}$, supongo $b=1$, resultará $\frac{a^3+c}{a^2+c^2}$.

Pero como el que se empeña en construir una cantidad ha de conocer indispensablemente los elementos de que se vale para la construccion, siempre sabrá quál es la cantidad que habrá supuesto igual á la unidad, y podrá restituirla á su lugar siempre que conviniere. En esto no puede haber tropiezo alguno; porque debiendo ser siempre el mismo en cada término del numerador y del denominador el número de las dimensiones, bien que puede no ser el mismo en el numerador que en el denominador; se restituirá en cada término una potencia de la línea que se hubiese tomado por unidad del grado que fuese menester para completar el número de las dimensiones. Así, si tuviera que construir $x=\frac{a^3+b+c^2}{a+b^2}$, supondria que d es la linea que se ha tomado por unidad, y escribiria $\frac{a^3+bd^2+c^2d}{ad+b^2}$, que construiria haciendo $b^2=dm$, $c^2=dn$, y $a^3=d^2p$, lo que la transformaria en $\frac{d^2p+bd^2+d^2n}{ad+dm}$, ó $\frac{dp+bd+nd}{a+n}$, ó $\frac{(p+b+n)d}{a+m}$, cantidad facil de construir, una vez que esten construidos, por lo declarado antes, los valores de m, n, p; es á saber $m=\frac{b^2}{d}$, $n=\frac{c^2}{d}$, $p=\frac{a^3}{d^2}$.

En todo lo dicho hemos supuesto que el número de los factores, ó el número de las dimensiones de cada término del numerador no exceda sino de una unidad al de las dimensiones del denominador. Puede ser mayor de dos y aun de tres; pero no mas, á no ser que se haya supuesto alguna linea igual á la unidad, ó que alguno de los factores represente números.

201 Quando el número de las dimensiones del numerador de la cantidad propuesta es mayor de dos unidades que el número de las dimensiones del denominador, la cantidad expresa una superficie cuya construccion se puede reducir siempre á la de un paralelogramo, y tambien de un quadrado. Por egemplo, si tubieramos que construir la cantidad $\frac{a^3+a^2b}{a+c}$, la considerariamos como $a \times \frac{a^2+ab}{a+c}$; pero $\frac{a^2+ab}{a+c}$ se construye con facilidad por lo dicho antes, considerándola como $a \times \frac{a+b}{a+c}$. Llamemos, pues, m la linea que sale de esta construccion: entonces $a \times \frac{a^2+ab}{a+c}$ será $a \times m$; pero si hacemos que represente a la altura, y m la base de un paralelogramo, espresará $a \times m$ la superficie de este paralelogramo; luego recíprocamente esta superficie representará $a \times m$, ó $\frac{a^3+a^2b}{a+c}$.

A una construccion semejante reduciremos la cantidad $\frac{a^3+bc^2+d^3}{a+c}$, haciendo $bc = am$, y $d^2 = an$, porque estos supuestos la transformarán en $\frac{a^3+amc+and}{a+c}$, que es lo mismo que $a\left(\frac{a^2+mc+nd}{a+c}\right)$ en cuya cantidad el factor $\frac{a^2+mc+nd}{a+c}$ se refiere á las construcciones precedentes, del mismo modo que los valores de m, y de n. Si despues de hallado el valor de este factor, le represento por p, no habrá mas que construir $a \times p$; esto es, hacer un paralelogramo cuya altura sea a y la base p. Fig.

202 Finalmente, si el número de las dimensiones del numerador fuese tres unidades mayor que las dimensiones del denominador, en tal caso la cantidad espresará un sólido cuya construccion siempre se puede reducir á la de un paralelipipedo. Por egemplo, si tubiera que construir $x = \frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$, consideraría que esta cantidad es la misma que $ab \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; y si despues de construida $\frac{a^2 + ab}{a + c}$, por lo dicho antes, represento por m la linea que hubiere dado esta construccion, se reducirá la cuestion á construir $ab \times m$; pero ab representa, segun acabamos de ver, un paralelogramo; luego si se concibe un paralelipipedo cuya base sea este paralelogramo, y cuya altura sea la linea m, la solidez de este paralelipipedo representará $ab \times m$, esto es, $\frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$.

203 Lo que acabamos de decir basta para construir qualquiera cantidad racional; veamos ahora cómo se han de construir las cantidades radicales de segundo grado.

Para construir $x = \sqrt{ab}$, se tirará una linea indefinita AB en la qual se tomarán, á continuacion la una de la otra, la parte CA igual á la linea a, y la parte BC igual á la linea b; sobre toda la AB como diametro se trazará un semicírculo que corte en D la perpendicular CD levantada sobre AB en el punto C; será CD el valor de $\sqrt{ab}$; cuya construccion manifiesta que para conocer el valor de $\sqrt{ab}$, se debe tomar (I. 475) una media propor- 4 cional entre las dos cantidades representadas por a y b, con efecto, sabemos (I. 474) que $AC : CD :: CD : CB$, ó $a : CD :: CD : b$; luego multiplicando los estremos y los medios, tendrémos $\overline{CD}^2 = ab$, y por consiguiente $CD = x = \sqrt{ab}$.

Esto manifiesta lo que deberíamos hacer para transformar en un quadrado una superficie qualquiera, un paralelogramo, por egemplo, cuya altura sea a, y la base b. Llamarémos x el lado del quadrado que se busca, y tendrémos $x^2 = ab$, y por consiguiente $x = \sqrt{ab}$: tomarémos, pues, una media proporcional entre la base y la altura. Si la superficie dada fuese un triángulo, que segun hemos visto (I. 491) es la mitad de un paralelogramo de la misma base y altura que él, tomarémos una media proporcional entre la base y la mitad de la altura, ó entre la altura y la mitad de la base.

Si se tratase de un círculo, tomarémos una media proporcional entre el radio y la semicircunferencia; y si fuese la superficie una figura rectilinea qualquiera, como sabemos (I. 900) que se puede reducir á un triángulo, la reduciremos facilmente á quadrado, tomando una media proporcional entre la base y la mitad de la altura de dicho triángulo.

Pero si no estubiese construida la figura, y solo tubiéramos la espresion algebraica de su superficie por medio de alguna de sus dimensiones, en tal caso se construirá como las cantidades que vamos á considerar.

Si tubiéramos $x = \sqrt{3ab + b^2}$, consideraríamos que esta cantidad es la misma que $\sqrt{(3a+b) \times b}$; tomaríamos, pues, una media proporcional entre $3a + b$ y b. Fig.

Si fuese $x = \sqrt{aa - bb}$, consideraremós que el segundo miembro es $\sqrt{(a+b) \times (a-b)}$, y tomarémos una media proporcional entre $a + b$, y $a - b$. Si $x = \sqrt{a + bc}$, se hará $bc = am$, y tendremos $\sqrt{a^2 + am}$ ó $\sqrt{(a+m) \times a}$; tomarémos, pues, una media proporcional entre $a + m$ y a, despues de habér hallado el valor de m por las reglas arriba dadas.

Para construir $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, podríamos hacer tambien $b^2 = am$, y construir $\sqrt{a^2 + am}$, por lo dicho poco há. Pero la propiedad del triángulo rectángulo (I. 517) nos suministra una construccion mas sencilla, y es la siguiente. Tírese una linea AB igual á la linea a, y en su estremo A levántese una perpendicular AC igual á la linea b: tírese despues BC; esta linea será el valor de ... 5. $\sqrt{a^2 + b^2}$. Con efecto yá que el triángulo CAB es rectángulo, tenemos (I. 517) $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = a^2 + b^2$: luego $BC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tambien se puede construir $\sqrt{a^2 - b^2}$, por medio del triángulo rectángulo, siguiendo un rumbo distinto del de antes; á cuyo fin se tirará una linea AB igual á a; sobre 6. AB como diámetro se describirá el semicírculo ABC: se tirará desde el punto A una cuerda $AC = b$: se tirará finalmente BC que será el valor de $\sqrt{a^2 - b^2}$: porque siendo rectángulo el triángulo ABC (I. 518) tenemos $\overline{AB}^2$

Fig. $= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$: luego $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = a^2 - b^2$: luego $BC = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Tambien se podria construir $\sqrt{a^2 + bc}$ por un método distinto del que propusimos antes. Se haría $bc = m^2$, y se construiria $\sqrt{a^2 + m^2}$, como acabamos de decir. Pero primero se habria de determinar m tomando una media proporcional entre b y c, segun lo indica la equacion $bc = m^2$ que dá $m = \sqrt{bc}$.

Aunque hubiese mas de dos términos debajo del radical, tambien se reduciria la construccion á algunos de los métodos precedentes por medio de las transformaciones. Por egemplo, si tuviera $x = \sqrt{a^2 + bc + ef}$, haria $bc = am$, $ef = an$, y tendria $\sqrt{a^2 + am + an}$ ó ...... $\sqrt{(a + m + n) \times a}$, que construirá tomando una media proporcional entre a y $a + m + n$, despues de haber construido los valores de m y de n, es á saber $m = \frac{bc}{a}$; $n = \frac{ef}{a}$. Podria hacer tambien $bc = m^2$, $ef = n^2$, y tendria entonces que construir $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2}$. Pero quando el radical incluye asi una serie de quadrados positivos, por egemplo, $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2}$ &c. se hará $\sqrt{a^2 + m^2} = h$; .... $\sqrt{h^2 + n^2} = i$; $\sqrt{i^2 + p^2} = k$; y así prosiguiendo; y como cada una de estas cantidades está determinada por la precedente, la última dará el valor de $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2}$. Para construir estas cantidades por un método muy sencillo, se considerará sucesivamente cada hypotenusa como
7. un lado: por egemplo, despues de tomado $AB = a$, y levantada la perpendicular $AC = m$, y tirada BC que será

b, se levantará en el punto C, sobre BC la perpendicular $CD = n$; y habiendo tirado BD que será i, en su estremo D se levantará sobre BD la perpendicular $DE = p$, y BE será k ó $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2)}$.

Si fuesen negativos algunos de estos quadrados, se añadirá á lo que acabamos de decir, lo que hemos dicho para construir $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Finalmente, si ocurriese construir una cantidad de esta forma $\frac{a\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(d+e)}}$ se la transformaria en $\frac{a\sqrt{((b+c)(d+e))}}{d+e}$, multiplicando ambos términos por $\sqrt{(d+e)}$; buscando entónces una media proporcional entre $b+c$ y $d+e$, y llamándola m, tendríamos que construir $\frac{am}{d+e}$.

Hemos de prevenir que quantas reglas hemos dado en esta materia no son mas que reglas generales: en muchas ocasiones se pueden construir las cantidades por métodos mas sencillos, que todos se fundan en los mismos principios que hemos sentado. Sácanse estos métodos mas sencillos de algunas consideraciones particulares y propias á cada cuestion, y por consiguiente no se pueden determinar sino á medida que las mismas cuestiones abren camino para ello. Nos contentarémos con observar, antes de pasar á otro asunto, que aunque la construccion de las cantidades radicales de que acabamos de tratar, se reduce á tomar quartas proporcionales y medias proporcionales, y á formar triángulos rectángulos, sin embargo se pueden practicar en algunos casos construcciones mas ó menos sencillas y elegantes, segun el método por el qual se

Fig. buscan estas medias proporcionales; por cuyo motivo enseñarémos aquí otros dos modos de hallar una media proporcional entre dos lineas dadas.

El primero consiste en trazar sobre la mayor *AB* de
6. las dos lineas dadas un semicírculo *ACB*; y tomando una parte *AD* igual á la segunda, se levantará la perpendicular *CD*, y se tirará la cuerda *AC* que será media proporcional entre *AB* y *AD*; porque tirando *CB*, el triángulo *ACB* es rectángulo (I. 376), y por consiguiente *AC* es media proporcional entre la hypotenusa *AB* y el segmento *AD* (I. 463).

Para hallar por otro método una media proporcional
8. entre dos lineas dadas; se tirará una linea *AB* igual á la mayor de las dos, en la qual se tomará una parte *AC* igual á la menor: se describirá sobre la parte restante *BC* un semicírculo *CDB*, al qual se tirará la tangente *AD* que será (I. 477) media proporcional entre *AB* y *AC*.

Se echa, pues, de ver que las cantidades racionales se pueden siempre construir por medio de lineas rectas, y que las cantidades radicales de segundo grado se pueden construir siempre con el círculo y la linea recta juntos.

Por lo que mira á las cantidades radicales de grados superiores, estriba su construccion en la combinacion de varias lineas curvas, sobre cuyo asunto dirémos lo bastante en otro lugar. Por ahora nos detendrémos en la resolucion de cuestiones que paran en la construccion de cantidades racionales ó de radicales del segundo grado.

Resolucion de algunas cuestiones de Geometría, y consideraciones importantes acerca de esta materia.

204 El principio que propusimos (126) para representar las cuestiones por una equacion, se aplica igualmente á las cuestiones de Geometría. En estas tambien conviene representar lo que se busca por un signo particular, y discurrir despues por medio de este signo y de los que representan las demas cantidades, como si todo fuera conocido, y lo quisieramos comprobar. Este método de resolver las cuestiones se llama *Analysis* ó método *Analytico.* Para discurrir conforme pide esta comprobacion, es indispensable conocer por lo menos algunas propiedades de la cantidad que se busca. Es, pues, evidente que para poder traducir las cuestiones de Geometría en equacion, se han de tener presentes las proposiciones demostradas en la Geometría. En la mayor parte de las cuestiones numéricas basta las mas veces, para aplicar este principio, traducir en lengua algebráica la proposicion de la cuestion; pero en la aplicacion del Álgebra á la Geometría es preciso muchas veces socorrerse de otros medios que procuraremos dar á conocer á medida que nos fuesemos internando en el asunto. Pero podemos decir generalmente desde ahora, que no siempre es necesario, para verificar una cantidad, indagar si corresponde inmediatamente á las condiciones de la cuestion: esta verificacion se hace muchas veces con mayor facilidad, indagando si esta cantidad tiene ciertas pro-

Fig. piedades que estan necesariamente enlazadas con las condiciones de la cuestion. Hecha esta prevencion, de la qual se nos ofrecerá hacer uso, pasamos á los egemplos que en esta materia siempre son mas perceptibles que los preceptos generales.

9. 205 Cuestion I. *Describir un quadrado* ABCD *en un triángulo dado* EHI.

Por *triángulo dado* entendemos un triángulo, del qual todo es conocido, como los lados, los ángulos, la altura &c.

Considerando la cuestion con algun cuidado, se echa de ver que se reduce á hallar en la altura EF un punto G, por el qual tirando AB paralela á HI, sea esta linea $AB = GF$: mirada á esta luz la cuestion, se presenta naturalmente su resolucion: no hay mas que determinar la espresion algebráica de AB y la de GF, é igualarlas despues.

Llamemos, pues, a la altura conocida EF; b, la base conocida HI; y x, la linea incógnita $GF = AB$. EG será en estos supuestos $a - x$.

Pero ya que AB es paralela á HI, serán semejantes los triángulos EHF, EAG, y tendremos (I. 466) $EF : EG :: EH : EA$, y por ser tambien semejantes EHI, EAB será $EH : EA :: HI : AB$; luego $EF : EG :: HI : AB$; de donde sacaremos con substituir en lugar de las lineas sus valores literales $a : a - x :: b : AB = \frac{ab - bx}{a} = x$; de donde sacaremos por las reglas dadas (116 y 120) $x = \frac{ab}{a+b}$.

Para construir esta cantidad, es menester, conformán-

donos con lo que digimos (200), hallar una quarta Fig.
proporcional á $a+b$, b y a, y lo conseguiremos por este camino. Llevaremos desde F á O una linea $FO=a+b$, esto es, igual á $EF+HI$, y tiraremos EO: tomando despues $FM=HI=b$, tiraremos paralelamente á EO la linea MG que encontrará EF en G, y determinará GF que es el valor de x; porque los triángulos semejantes EFO, GFM, dan $FO:FM::FE:FG$, ó $a+b:b::a:FG$; será, pues, $FG=\frac{ab}{a+b}$.

Quando el ángulo EIH fuese agudo, será la resolucion qual la hemos sacado. Si fuese recto, el lado BC del quadrado, se confundirá con BI. Finalmente, si fuere ob- 10.
tuso, el quadrado $ABCD$, no estará inscripto en el triángulo, porque estará en parte fuera de él. Lo mismo digo del ángulo EHI.

206 Question II. *Conociendo la longitud de la linea* BC, *y los ángulos* B *y* C, *que forman con ella las dos li-* 11.
neas BA *y* CA, *determinar la altura* AD, *á que se encuentran estas dos últimas lineas.*

Sirven los ángulos en los cálculos algebráicos por medio de las mismas lineas de que se hace uso en la Trigonometría, que son los senos, las tangentes, &c. Así quando decimos que es dado un ángulo C, por egemplo, queremos decir, que es dado ó conocido el valor de su seno ó de su tangente. Sentado esto, llamemos $BC=a$, $AD=y$, r el radio, y m la tangente del ángulo ACD. En el triángulo rectángulo ADC, tendremos (I. 665) $CD:DA::$ el

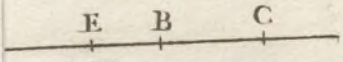
Fig. radio es á la tangente del ángulo ACD, ó $CD : y :: r : m$:
11. luego (I. 183) $CD = \frac{ry}{m}$. Por el mismo camino hallaremos, si llamamos n la tangente de ABD, $BD : y :: r : n$; luego $BD = \frac{ry}{n}$; pero $BD + DC = BC = a$; luego $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$. De donde sale $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

Podemos simplificar esta espresion, introduciendo en lugar de las tangentes m y n de los dos ángulos C y B, sus cotangentes, que llamaremos p y q; para cuyo fin recordaremos que (I. 651) tang: $R :: R$: cot; en virtud de esta proposicion tendremos $m : r :: r : p$; y $n : r :: r : q$; de donde se saca $m = \frac{r^2}{p}$, y $n = \frac{r^2}{q}$; substituyendo en lugar de m y n, estos valores en el de y, tendremos $y = \ldots$

$$\frac{\frac{ar^4}{pq}}{\frac{r^3}{q} + \frac{r^3}{p}} = \frac{\frac{ar^4}{pq}}{\frac{pr^3 + qr^3}{pq}} = \frac{ar^4}{pq} \times \frac{pq}{pr^3 + qr^3} = \frac{ar}{p+q}.$$

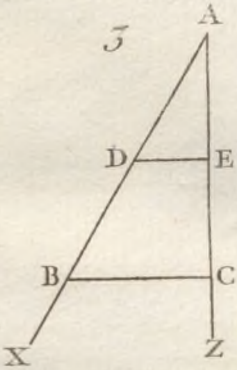
207 Esto manifiesta que quando valiéndose de algunas de las cantidades que se pueden considerar como dadas, no sale un resultado tan sencillo como se desea, no es necesario volver á empezar de nuevo el cálculo para indagar, si valiéndose de otros datos, se podria llegar á un resultado menos complicado. Basta hallar equaciones que espresen las razones de los datos que sirvieron primero, con los que se quiere introducir. En la última cuestion nos hemos valido de las equaciones $m = \frac{r^2}{p}$, $n = \frac{r^2}{q}$ para espresar m y n; y con solo egecutar algunas substituciones hemos sacado un resultado dependiente de p y q.

208 Cuestion III. *Conociendo los tres lados de un trián-*

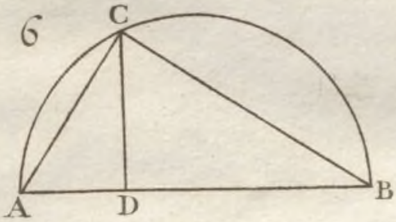


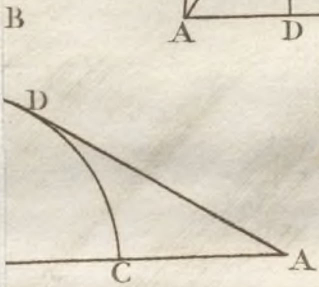
2

3

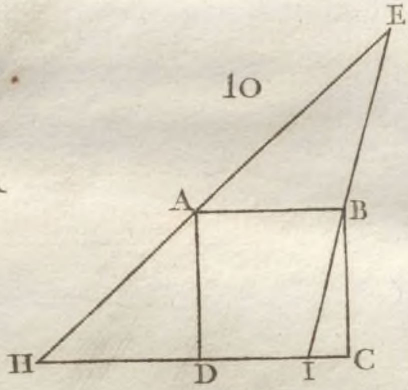


6

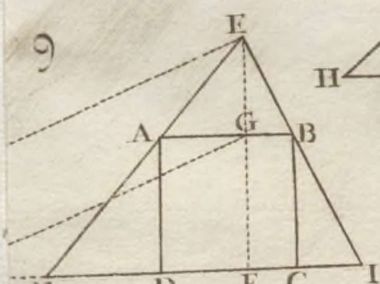


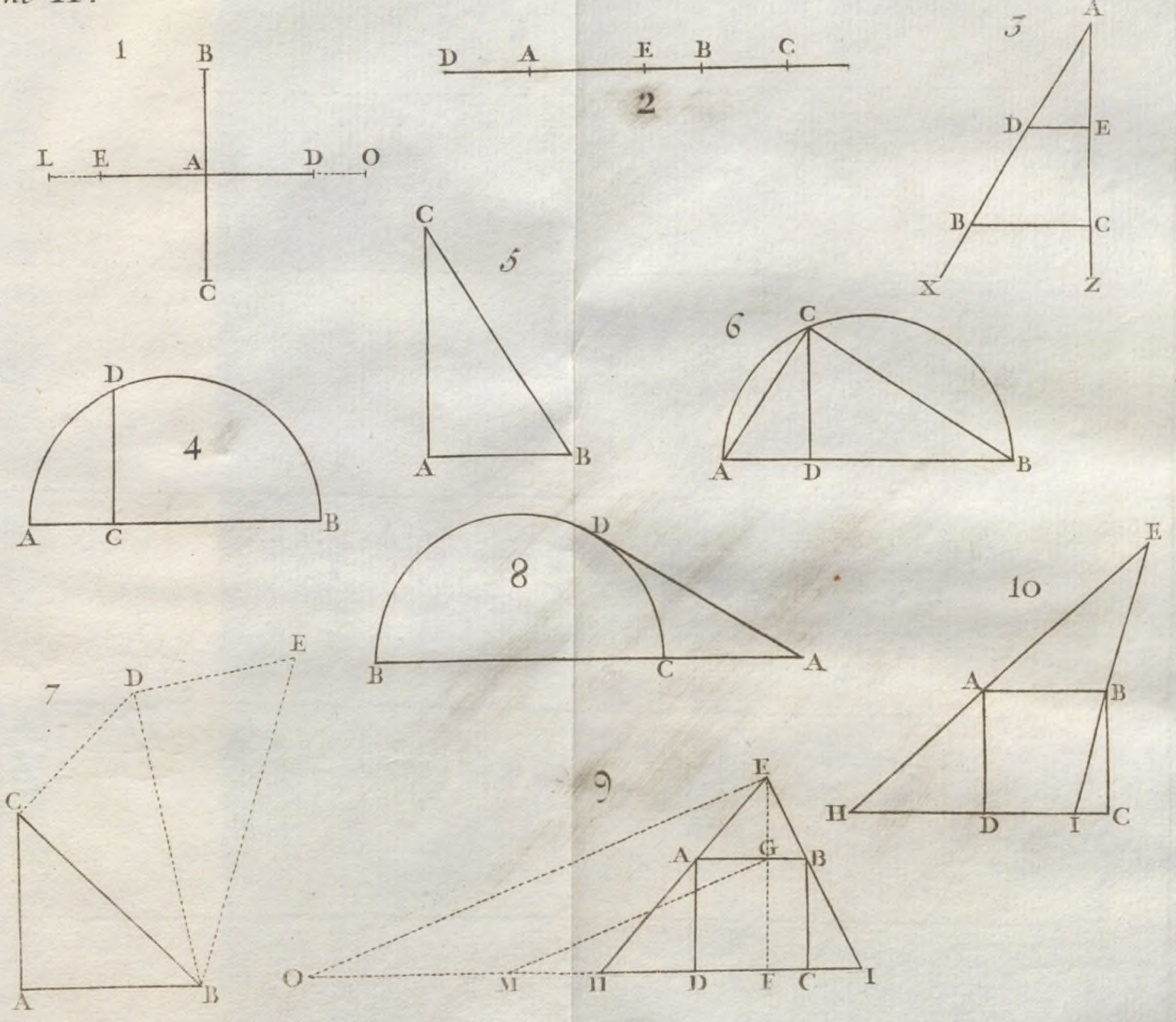


10



9




1
B
L E A D O
C
D A E B C
2
3
A
D E
B C
X Z
5
C
A B
6
C
A D B
4
D
A C B
8
D
B C A
10
E
A B
H D I C
7
E
D
C
A B
9
E
A G B
O M H D F C I

gulo ABC *hallar los segmentos* AD *y* DC *formados por la per pendicular* BD, *y hallar tambien la misma perpendicular* BD. Fig. 12.

Esta cuestion nos abre camino para enseñar á un tiempo el modo de traducir en equacion las cuestiones de Geometría, y como egecutando diferentes preparaciones, se pueden inventar nuevas proposiciones.

Si conociera cada una de estas lineas las verificaria del modo siguiente. Sumaria el quadrado de BD con el quadrado de CD, para ver si la suma era igual al quadrado de BC conforme debe ser; pues el triángulo BDC es rectángulo (I. 517). Sumaria tambien el quadrado de AD con el quadrado de BD, para ver si la suma era igual al quadrado de AB.

Imitemos, pues, esta verificacion, para cuyo fin llamaremos BD, y; CD, x; $BC = a$; $AB = b$; $AC = c$. En virtud de estos supuestos AD que es $= AC - CD$, será $= c - x$. Tendremos, pues, $xx + yy = aa$, y $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Como xx é yy no tienen en cada equacion mas coeficiente que la unidad, resto la segunda equacion de la primera, y saco sobre la marcha $2cx - cc = aa - bb$, ó $x = \frac{aa - bb + cc}{2c} = \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c$, que podemos escribir así $x = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c$.

Esta espresion de x da á entender, conforme digimos (200), que para hallar su valor se debe buscar una quarta proporcional á c, $a + b$ y $a - b$; y despues de hallada se sumará su mitad con $\frac{1}{2}c$, esto es, con la mitad del

Fig. lado AC: cuya operacion concuerda enteramente con lo
12. que digimos (I. 674).

Pero se pueden inferir otras muchas consecuencias de estas equaciones, y nos detendremos en deducir algunas, á fin de que se acostumbren los principiantes á leer en una equacion todo lo que en ella está cifrado.

209 I. La equacion $2cx - cc = aa - bb$, es lo mismo que $c.(2x - c) = (a + b)(a - b)$. Y como el producto de los dos primeros factores es igual al producto de los dos últimos, podemos considerar los dos primeros como los estremos, y los dos últimos como los medios de una proporcion, y tendremos $c : a + b :: a - b : 2x - c$; pero $2x - c$ es x menos $c - x$; luego si substituimos en lugar de estas letras las lineas que representan, sacaremos $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$, cuya proporcion es la misma que sacamos en otro lugar (I. 674).

210 II. Si desde el punto C como centro, y con un radio $= BC$, trazamos el arco BO, y tiramos la cuerda BIO, tendremos $(BD)^2 + (DO)^2 = (BO)^2$, pero $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$; luego $(BO)^2 = yy + aa - 2ax + xx$; pero ya hallamos antes $yy + xx = aa$: luego $(BO)^2 = 2aa - 2ax = 2a(a - x)$. Substituyendo, pues, en lugar de x su valor $\frac{aa - bb + cc}{2c}$, sacaremos $(BO)^2 = 2a\left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right) = 2a\left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) = \frac{a}{c} \times \left(bb - (c - a)^2\right)$; porque $2ac - aa - cc = -(aa - 2ac + cc) = -(c - a)^2$; pero si consideramos $c - a$ como una sola cantidad, $bb - (c - a)^2$ es lo mismo que $(b + c - a)(b - c + a)$; luego $(BO)^2 =$

$\frac{a}{c}(b+c-a)(b-c+a)$, á cuya espresion se la puede dár estotra forma $(BO)^2 = \frac{a}{c}(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)$; luego si llamamos $2s$ la suma de los tres lados, tendremos $(BO)^2 = \frac{a}{c}(2s-2a)(2s-2c) = 4\frac{a}{c}(s-a)(s-c)$. Si desde el punto C se baja á la OB la perpendicular CI, tendremos (I. 664) en el triángulo rectángulo CIO, esta proporcion $CO : OI :: R : \text{sen } OCI$; esto es, $a : \frac{1}{2}BO :: R : \text{sen } OCI$; luego $\frac{1}{2}BO = \frac{a \text{ sen } OCI}{R}$, ó $BO = \frac{2a \text{ sen } OCI}{R}$; y por consiguiente $(BO)^2 = \frac{4a^2 (\text{sen } OCI)^2}{R^2}$, y si igualamos estos dos valores de $(BO)^2$, resultará ...... $\frac{4a^2}{R^2}(\text{sen } OCI)^2 = \frac{4a}{c}(s-a)(s-c)$, ó dividiendo por $4a$, y eliminando los denominadores, $ac(\text{sen } OCI)^2 = R^2(s-a)(s-c)$, de donde se infiere esta proporcion $ac : (s-a)(s-c) :: R^2 : (\text{sen } OCI)^2$, de esta resolucion se podia sacar otro método para resolver una cuestion de Trigonometría que resolvimos en su lugar (I. 675). Fig. 12.

211 III. La equacion $yy + xx = aa$ dá $yy = aa - xx = (a+x)(a-x)$; luego si substituimos en lugar de x su valor, tendremos $yy = \left(a + \frac{aa+bb-cc}{2c}\right) \times \left(a + \frac{bb-aa-cc}{2c}\right) = \left(\frac{2ac+aa+cc-bb}{2c}\right) \times \left(\frac{2ac-aa-cc+bb}{2c}\right) = \left(\frac{(a+c)^2-bb}{2c}\right) \times \left(\frac{bb-(c-a)^2}{2c}\right) = \left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right) \times \left(\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{2c}\right)$; luego $4ccyy = (a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b-c+a)$ ó $4ccyy = (a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)$. Luego si llamamos $2s$ la suma $a+b+c$ de los tres lados, tendremos $4ccyy = 2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)$, ó $4ccyy = 16s.(s-a)(s-b)(s-c)$: dividiendo

Fig. por 16, reduciendo y sacando la raiz quadrada, $\frac{cy}{2} = \sqrt{[s.(s-a)(s-b)(s-c)]}$. Pero $\frac{cy}{2}$ ó $\frac{AC \times BD}{2}$ es la superficie del triángulo ABC: luego para sacar la superficie de un triángulo por medio de sus tres lados, se restará sucesivamente de la semisuma cada uno de los tres lados, se multiplicarán una por otra las tres restas, y por la semisuma, y se sacará finalmente la raiz quadrada del producto.

212 IV. La equacion $2cx - cc = aa - bb$, dá $bb = aa + cc - 2cx$; pero si la perpendicular cayera fuera del triángulo, y representáramos las lineas por las mismas
13. letras que hasta aquí, tendríamos $yy + xx = aa$, é $yy + cc + 2cx + xx = bb$, porque AD que era $c - x$, es en este caso $c + x$. Luego si restamos la primera equacion de la segunda tendremos $cc + 2cx = bb - aa$, ó $c(c + 2x) = (b + a)(b - a)$, de la qual sacaremos $c : b + a :: b - a : c + 2x$; pero como $c + 2x$ es $x + c + x$, será por lo mismo $CD + AD$; luego $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD$, que es la segunda parte de la proposicion que demostramos en otro tratado (I. 674).

213 V. La misma equacion $cc + 2cx = bb - aa$,
12. dá $bb = aa + cc + 2cx$; comparando esta equacion con estotra $bb = aa + cc - 2cx$ que corresponde á la fig. 12, se echa de ver que el quadrado bb del lado AB opuesto al ángulo agudo C, vale menos que la suma $aa + cc$ de los quadrados de los otros dos lados, pues vale dicha suma disminuida de $2cx$.

13. Al contrario, el quadrado bb del lado AB opuesto al

ángulo obtuso vale $aa + cc + 2cx$, esto es, mas de la su- Fig.
ma de los quadrados de los otros dos lados. Podrán pues servir estas dos observaciones para averiguar quando se hubieren de calcular los ángulos de un triángulo por medio de los lados, si el ángulo que se busca ha de ser agudo ú obtuso.

214 VI. Las dos equaciones $bb = aa + cc - 2cx$, y $bb = aa + cc + 2cx$, confirman lo que llevamos dicho acerca de las cantidades negativas. Es evidente que segun
cayga la perpendicular BD dentro ó fuera del triángulo, 12.
coge el segmento CD de la derecha á la izquierda, ó de 13.
la izquierda á la derecha: y que en dichas equaciones el término $2cx$ tiene con efecto signos contrarios. Luego recíprocamente, qualesquiera cálculos que se egecuten con el uno de dichos triángulos, se sabrán los que se habrán de egecutar en los casos análogos con el segundo; bastará dar signos contrarios á las partes que se hallaren en lados distintos, en una misma linea; pero en lo que digimos antes, así respecto del cálculo del uno de los ángulos, como respecto del de la superficie, no se halla el segmento CD; luego ambas proposiciones se aplican indistintamente á qualesquiera triángulos rectilineos.

215 Aunque son mas los recursos y mayor la facilidad para poner las cuestiones de Geometría en equacion, segun se conocen mas propiedades de las lineas; sin embargo, como el Algebra por sí misma suministra los medios de hallar estas propiedades, el número de las pro-

Fig. posiciones verdaderamente necesarias es bastante limitado. Estas dos proposiciones que los *triángulos semejantes tienen sus lados homólogos proporcionales*, *y que en un triángulo rectángulo la suma de los quadrados de los dos lados del ángulo recto es igual al quadrado de la hypotenusa*, estas dos proposiciones, digo, son el fundamento de la aplicacion del Algebra á la Geometría. Pero se pueden aplicar de muy distintos modos estas proposiciones segun varía la naturaleza de las cuestiones. En la última cuestion era facil adivinar cómo se habian de aplicar. Pero en las consecuencias que de su resolucion hemos inferido para el cálculo del ángulo por medio de los tres lados, no era fa-
12. cil que ocurriese al pensamiento trazar el arco *BO* con la mira de calcular la cuerda *BO*, y de valerse de su mitad *OI* para calcular el seno del ángulo *OCI*. Lo propio sucede en otras muchas cuestiones. En algunas, todo consiste en prolongar algunas lineas hasta que encuentren otras: en otros casos estriba el acierto ó la elegancia ó limpieza de la resolucion en tirar lineas paralelas á otra linea dada, ó que formen con ella un ángulo dado. En una palabra, la aplicacion del Algebra á la Geometría, como otra qualquier materia, pide en el Analysta cierto discernimiento en la eleccion y aplicacion de los medios. Pero como este discernimiento se adquiere en gran parte con el uso, aplicarémos estas observaciones á diversos egemplos.

216 Cuestion IV. *Desde un punto* A, *cuya situacion*
14. *conocemos respecto de las dos lineas* HD *y* DI *que forman*

una con otra un ángulo HDI, *tirar una linea recta* AEG, Fig.
de modo que el triángulo interceptado EDG *tenga una superficie dada, esto es, una superficie igual á la de un quadrado* cc. 14.

Tirémos desde el punto A la linea AB paralela á DH, y la linea AC perpendicular á DG prolongada: desde el punto E donde la linea AEG ha de cortar la DH, concibamos la perpendicular EF. Si conociéramas EF y DG, multiplicandolas una por otra, y tomando la mitad del producto, conociéramos la superficie del triángulo EDG, que deberia ser igual á cc.

Supongamos, pues, $DG = x$; por lo que toca á EF, veamos si se puede determinar su valor así por medio de x, como por las circunstancias que espresa la cuestion.

Ya que, segun suponemos, es conocida la situacion del punto A, ó es dado de posicion el punto A, debemos considerar como conocida la distancia BD á que pasa la paralela AB, y la distancia AC que hay entre el punto A, y la linea DG prolongada. Si llamamos, pues, BD a, y AC, b, los triángulos ABG y EDG darán $BG : DG :: AG : EG$; y los triángulos semejantes ACG, EFG darán $AG : EG :: AC : EF$; luego $BG : DG :: AC : EF$; esto es $a + x : x :: b : EF$; luego $EF = \frac{bx}{a+x}$; y como la superficie del triángulo EDG debe ser igual al quadrado cc, es preciso que $EF \times \frac{DG}{2}$, ó $\frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc$, esto es que $\frac{bxx}{2a+2x} = cc$, ó quitando el denominador, $bxx = 2acc + 2ccx$.

Esta equacion resuelta por las reglas de las equaciones

Fig. de segundo grado, dá estos valores $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} \pm \frac{2acc}{b}\right)}$; de los quales el que lleva el signo —, no sirve para el caso propuesto.

Para construir el primero, le darémos esta forma . . . $x = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}}$. Sentado esto, en un punto qualquiera C de una linea indefinita PQ, levanto la per-
15. pendicular $AC = b$, y tomo en CA y CP las lineas CO, CM iguales, cada una al lado c del quadrado dado: tirando AM, la tiro por el punto O la paralela ON que determina CN, que es el valor de $\frac{cc}{b}$, yá que los triángulos semejantes ACM, OCN dán $AC : OC :: CM : CN$, esto es $b : c :: c : CN$; luego $CN = \frac{cc}{b}$, en virtud de esto el valor de x llega á ser $x = CN + \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$; pero $\sqrt{(CN + 2a) \times CN}$ espresa (203) una media proporcional entre CN y $CN + 2a$: luego todo está en determinar esta media proporcional, y juntarla con CN. Para cuyo fin en la CN prolongada tomo $CQ = 2a$; y sobre toda la linea NQ, describo el semicírculo NVQ, al qual la CA encuentra en V: llevo la cuerda NV desde N á P, y será CP el valor de x; porque NV (I. 463) es media proporcional entre NC y NQ, esto es, entre CN y $CN + 2a$: luego NV ó $PN = \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$; luego $CP = CN + PN = CN + \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$
14. $= x$; se llevará, pues, CP desde D á G, y tendremos el punto G, y si por este punto y el punto A tiramos AG, tendremos el triángulo EDG igual al quadrado cc.

217 Para averiguar qué cosa significa el segundo valor de x; es á saber $x = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}}$, repararémos que como no especifica la cuestion si se trata del ángulo EDG, ó de su igual $E'DG'$ formado por la prolongacion de las lineas GD, ED; y como son unas mismas las cantidades dadas para este y para el otro, esta segunda resolucion corresponderá á la cuestion en que se tratase de hacer en el ángulo $E'DG'$ lo mismo que hemos hecho en el ángulo EDG. Con efecto, si llamamos DG', x, y guardamos las demás denominaciones, los triángulos ABG', $E'DG'$, semejantes por razon de las paralelas AB y DE', dán $BG' : DG' :: AG' : G'E'$; y bajando la perpendicular $E'F'$, los triángulos semejantes ACG', $E'F'G'$ darán $AG' : G'E' :: AC : F'E'$; luego $BG' : DG' :: AC : F'E'$; esto es $a - x : x :: b : F'E'$; luego $F'E' = \frac{bx}{a-x}$; y como la superficie del triángulo $G'E'D$ debe ser igual al quadrado cc, es menester que $\frac{bx}{a-x} \times \frac{x}{2} = cc$, de donde sale $bxx = 2acc - 2ccx$, y por consiguiente $x = \frac{-cc}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}}$, valores de x, que son precisamente los mismos que los del caso precedente, sin mas diferencia que la de llevar signos contrarios; y así debe ser por haberse tomado en el último caso la cantidad x al otro lado del punto D, respecto de lo que se practicó en el caso primero. Cuyo resultado es una nueva confirmacion de lo que hemos dicho varias veces; es á saber, que las cantidades negativas se han de tomar en una direccion contraria á la de las cantidades positivas.

Fig. 14.

Fig. La construccion que hemos propuesto para el caso precedente, sirve tambien para este, con sola la diferencia de
15. llevar NV desde N á K ácia Q: entónces el valor de x que en el caso precedente era CP, será CK en este. Con efecto, el valor de x, que conviene al caso actual es $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}}$, ó $x = -\frac{cc}{b} + \ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt{\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \times \frac{cc}{b}}$, esto es $x = -CN + \ldots\ldots\ldots \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$; y una vez que $NV = \ldots\ldots \sqrt{(CN + 2a) \times CN}$, tenemos $x = -CN + NV = -CN + NK = CK$, y por esto se llevará CK
14. desde D á G'; y estará determinado el punto G', por el qual, y por el punto A, tirando $AG'E'$, tendremos el triángulo $G'DE'$ igual al quadrado cc: esta es la segunda resolucion de la cuestion.

218 Hemos supuesto que el punto A estaba mas alto
14. que la linea BG: si estuviera debajo, la cantidad b, ó la linea
16. AC seria negativa, y los dos primeros valores de x serian por consiguiente $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}}$, ó $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}}$, que manifiestan que no es posible el problema, sino quando $2a$ es menor que $\frac{cc}{b}$; porque quando es mayor, la cantidad que está debajo del radical es negativa, y por consiguiente (150) los valores de x son imaginarios ó absurdos. Quando $2a$ es menor que $\frac{cc}{b}$, los dos valores de x son negativos, y entónces es imposible el problema, respecto del ángulo HDI; pero tienen dos re-

soluciones respecto de su igual $E'DG'$. Para sacar estas dos Fig.
resoluciones se deben construir los dos valores $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}}$ del modo siguiente. Despues de determinado, como arriba, el valor CN de $\frac{cc}{b}$, tomarémos NQ 17.
$= 2a$, y trazando sobre NQ como diámetro, el semicírculo NVQ se le tirará la tangente CV: se llevará despues CV desde C á P ácia N, y desde C á K á la parte opuesta: serán NP y NK los dos valores de x: se llevarán desde D 16.
á G, y desde D á G', y tirando por el punto A, y por los puntos G y G' las dos restas EG, $E'G'$, cada uno de los dos triángulos EDG, $E'DG'$ será igual al quadrado cc. En quanto á lo que hemos dicho que NP y NK serán los dos 17.
valores de x, lo probarémos facilmente, porque (I. 477) siendo CV media proporcional entre CN y CQ, es $= \sqrt{CQ \times CN}$, ó (poniendo en lugar de estas lineas sus valores) CV ó CP ó $CK = \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}}$; luego $NP = CN - CP = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}}$, y $NK = CN + CK = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}}$, cuyas dos cantidades son las mismas que los valores de x, con mudarlas los signos; luego estas mismas cantidades llevadas 16.
desde D á G serán los valores de x.

219 Si el punto A estubiese dentro del mismo ángulo HDI, caeria entónces BD á la parte opuesta á la par- 18.
te donde caía primitivamente: a seria negativa, y los dos valores primitivos de x vendrian á ser $x = \frac{cc}{b} \pm \ldots\ldots$

Fig. $\sqrt{\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}}$, que son los mismos que los que acabamos de construir, sin mas diferencia que la de los signos. Se echa, pues, de ver que entónces se debe construir como
17. se hizo en la fig. 17, pero llevando los valores NP y NK
18. de x desde D ácia I: y los dos triángulos DEG, $DE'G'$ resolverán la cuestion.

220 Finalmente, si el punto A estubiese debajo de
19. BD, pero dentro del ángulo BDE', a y b serian ambas negativas, y tendríamos $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}}$ que llevan precisamente signos contrarios á los que llevan los valores que hemos hallado de x. Se egecutará, pues, la mis-
15. ma construccion. En este caso será CK el valor positivo de x, y CP su valor negativo; se llevará el primero des-
19. de D á G ácia B, y el segundo á la parte opuesta, esto es, desde D á G'.

Nos hemos detenido en individualizar los diferentes casos de esta resolucion para manifestar como los comprehende todos una sola equacion; como de ella se infieren todos solo con mudar los signos; como de la contrariedad de los signos se indician las situaciones contrarias de las lineas, y recíprocamente. Nos falta todavia especificar algunos usos de esta misma resolucion.

221 Si el asunto de la cuestion fuera *desde un pun-*
20. *to dado* A *fuera de un triángulo ó en un triángulo dado* DHI, *tirar una linea* AF *que divida este triángulo en dos partes* DEF, EFIH *que tengan una con otra una razon conocida y es-*

presada por la razon de m *á* n, se sacaria su resolucion de Fig.
la precedente. Porque una vez que el triángulo *DHI* es dado, y sabemos qué parte debe ser del triángulo *DHI* el triángulo *DEF*, si buscamos el quarto término de esta proporcion $m+n:m::$ la superficie del triángulo *DHI* es á un quarto término, este quarto término será la superficie que corresponde al triángulo *DEF*. Pero siempre se puede hallar un quadrado cc igual á esta superficie (203); redúcese, pues, la cuestion á tirar por el punto *A* una linea *AEF*, que forme con los dos lados *DH*, *DI* un triángulo *DEF* igual al quadrado cc; quiero decir, que está reducida á la cuestion precedente.

222 Tambien se echa de ver que se reduciria á la misma cuestion la que se dirigiese á dividir una figura rectilinea qualquiera por una linea tirada desde un punto qualquiera *A*, en dos partes *BCFE*, *EFDHK* que fuesen entre sí en una razon dada. Con efecto, por ser conocida, segun se supone, la figura *BCDHK*, se conocen todos sus ángulos y todos sus lados; se conocerá, pues, con facilidad el triángulo *BLC* formado por los dos lados *KB* y *DC* prolongados, pues conocemos en este triángulo el lado *BC* y los dos ángulos *LBC*, *LCB*, suplementos de los ángulos conocidos *CBK* y *BCF*; por lo que, hemos de considerar como conocida la superficie del triángulo *LBC*; y como la de *EBCF* debe ser una porcion determinada de la superficie total, será tambien conocida: se reduce, pues, la cuestion á tirar una linea *AEF* que forme en el ángulo

21.

Fig. *KLD* un triángulo igual á un quadrado conocido. Finalmente, esto manifiesta tambien lo que se habria de egecutar para dividir la misma figura en un número mayor de partes, cuyas razones fuesen dadas.

223 Es muy del caso prevenir, y lo probarémos con algunos egemplos, que si algunas de las cantidades dadas que hay en la equacion que sirve para resolver la cuestion, son tales que mudando sus signos en signos contrarios, no varía la equacion; ó que si de mudar la posicion de la linea ó de las lineas que se buscan en la figura, no resulta mudanza alguna de posicion ni de cantidad en las lineas dadas, entónces se hallará siempre entre los diferentes valores de x uno que resolverá el caso al qual correspondiere esta variacion. Por egemplo, en la cuestion que acabamos de resolver hemos visto que el uno de los valores de
14. x resolvia directamente el caso en que la linea *AEG* hubiese de atravesar el ángulo *HDI* conforme se supuso al tiempo de hacer el cálculo; pero tambien hemos visto que el segundo valor de x resolvía el caso en que se tratase, no del ángulo *HDI*, sino de su opuesto al vértice. La razon de esto consiste en que siendo unas mismas en ambos casos las cantidades dadas; y habiendo de girar el discurso por los mismos rumbos, no puede dejar de salir la misma equacion: luego la misma equacion debe dar las dos resoluciones. Se verán egemplos de esto en la resolucion de las cuestiones siguientes.

22. 224 Cuestion V. *Desde un punto dado* A *fuera de*

un círculo BDEC *tirar una linea recta* AE, *de modo que su* Fig.
parte DE *interceptada dentro del círculo, sea igual á una li-* 22.
nea dada.

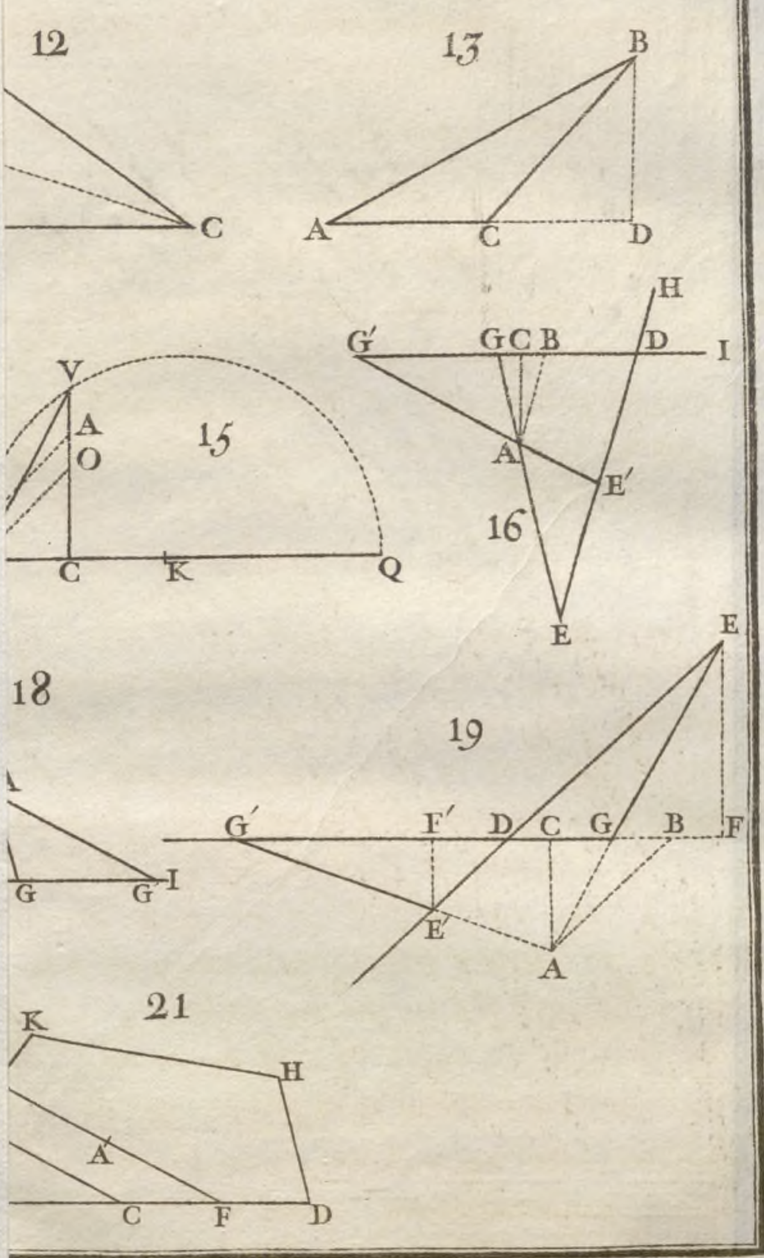
Yá que es dado el círculo *BDEC*, su diámetro se puede considerar como conocido; y como el punto *A* es dado, si tiramos por el centro *O* la recta *AOC*, considerarémos como conocida la linea *AB*, y por consiguiente la linea *AC*. Para saber como debemos tirar la linea *AE*, solo falta saber quánto ha de coger *AD*, para que su prolongacion *DE* sea igual á la linea dada. Llamo, pues, *AD*, x; la linea conocida *AB*, a; la linea conocida *AC*, b; finalmente llamo c la linea á la qual debe ser igual *DE*. Sentado esto,

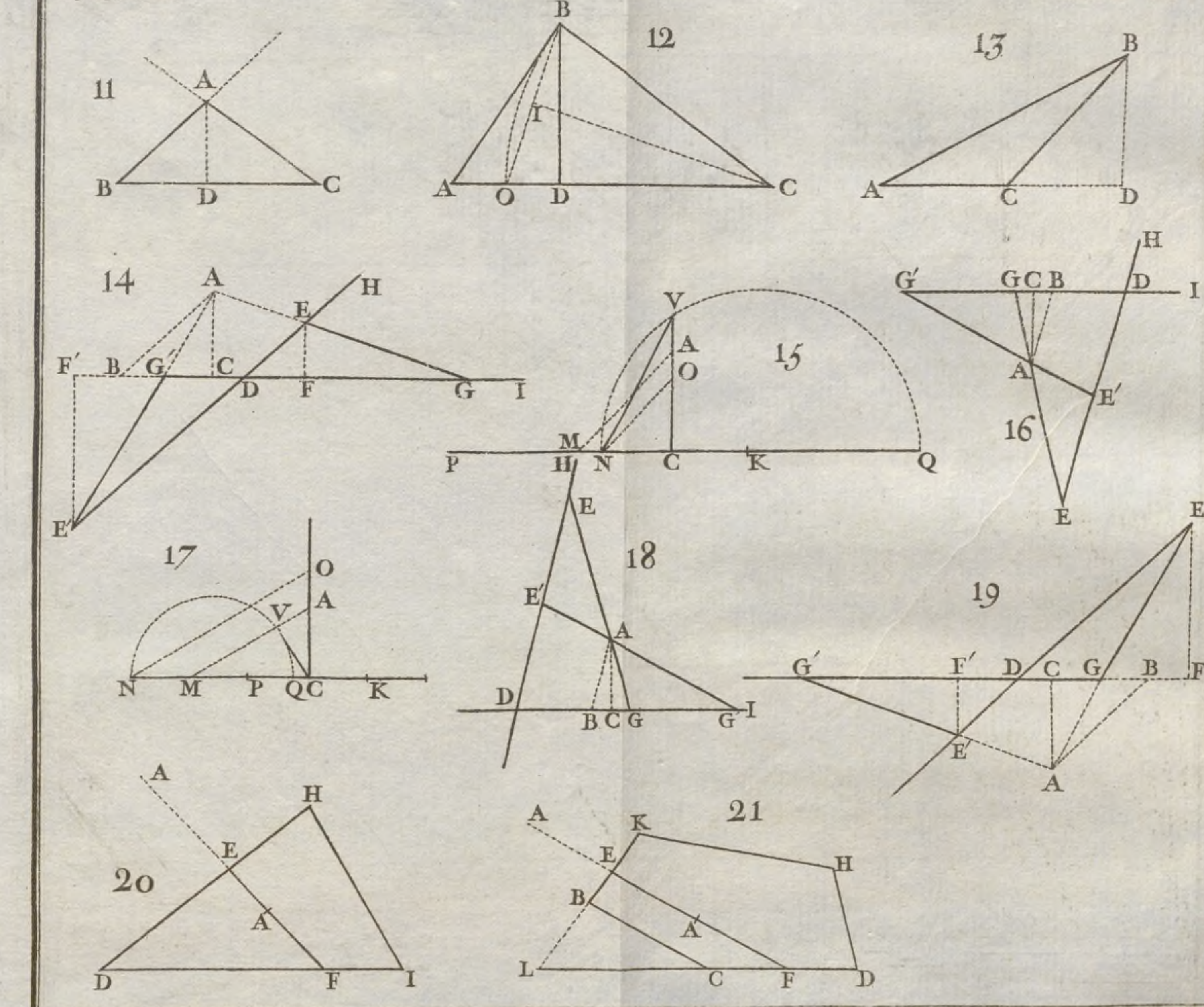
Por ser la figura *BDEC* un círculo, las secantes *AC*, *AE* (I. 476) deben ser recíprocamente proporcionales á sus partes esteriores: tendrémos, pues, *AC* : *AE* : : *AD* : *AB*, esto es, en virtud de las denominaciones precedentes $b : x + c :: x : a$; luego multiplicando los estremos y los medios, tendrémos $xx + cx = ab$, equacion de segundo grado, cuya resolucion dá $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$, siendo el primer valor $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$ el único que resuelve la cuestion como viene propuesta.

Para acabar la resolucion es menester construir esta cantidad, cuyo fin se puede conseguir sin valerse de las transformaciones que propusimos (200). Con esta mira se tirará desde el punto *A* la tangente *AT* que (I. 477)

Fig. siendo media proporcional entre AB y AC, dará $(AT)^2 = ab$: el valor de x será, pues, $x = -\frac{1}{2}c + \ldots \sqrt{\frac{1}{4}cc + (AT)^2}$: tírese el radio TO que será perpendicular á AT (I. 346): si se toma, pues, $TI = \frac{1}{2}c$, y se tira AI, tendrémos $AI = \sqrt{\frac{1}{4}cc + (AT)^2}$: luego para sacar x, no hay mas que llevar TI desde I á R, y describir desde el punto A como centro, y con el radio AR, el arco RD que determinará el punto D que buscamos; porque AD ó AR será igual á $AI - IR = AI - TI = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + (AT)^2} - \frac{1}{2}c = x$.

Para averiguar qué cosa significa el segundo valor, $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$, hemos de considerar, que pues es todo negativo, se ha de dirigir ácia una direccion opuesta á la de AD. Veamos, pues, qual será la cuestion en que esto se verifique, siendo unas mismas las cantidades, y siguiendo el mismo rumbo. Reparo desde luego que el supuesto de ser a y b negativas, no causa mudanza alguna en la equacion $xx + cx = ab$: luego yá que el círculo $BDEC$ seria entonces $B'D'E'C'$, que está á la izquierda en la misma situacion que el otro á la derecha, se sigue que en esta misma equación está tambien cifrado este caso, al qual corresponde el segundo valor de x, esto es, $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$, que resuelve la misma cuestion; y esta es la causa por que si en la construccion precedente llevamos IT desde I á R


12
C
13
B
A
C
D
H
G′
G C B
D
I
V
A
O
15
A
E′
16
C
K
Q
E
E
18
19
A
G′
F′
D
C
G
B
F
G
G
I
E′
A
21
K
H
A′
C
F
D


11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

sobre AI prolongada, y despues desde el punto A como Fig.
centro, y con un radio igual á AR', describimos un arco que corte en E' la circunferencia $B'D'E'C'$, el punto E' será tal que la parte interceptada $E'D'$ será igual á c: con efecto, siendo igual AE' á $AR' = AI' + IR'$, valdrá $\sqrt{\frac{1}{4}c^2 + (\overline{AT})^2} + \frac{1}{2}c$: quiero decir, que será igual al segundo valor de x, mudándole los signos; pero ya que llevamos esta cantidad al lado opuesto á aquel, ácia el qual se supuso que se dirigia x, se sigue que AE' es verdaderamente el segundo valor de x.

Es de notar, que como son iguales los dos círculos, y estan situados del mismo modo, las dos resoluciones pueden pertenecer ambas á un mismo círculo, de suerte, que si se describe desde el punto A como centro, y con el radio AR', el arco $R'E$, la linea AE resolverá tambien la cuestion. Con efecto, se echa de ver que el punto E determinado de este modo, está en la prolongacion de la linea AD determinada por la primera construccion. Pero de las dos resoluciones distintas que suministra el Álgebra, la primera cae á la derecha del punto A, y pertenece al punto D de la circunferencia convexa: la segunda cae á la izquierda, y pertenece al punto E' de la circunferencia cóncava.

225 Cuestion VI. Supongamos ahora que se nos ofrezca *hallar sobre la direccion de la linea dada* AB *un punto* C, *tal que su distancia al punto* A *sea media proporcional* 23.
entre su distancia al punto B *y la linea entera* AB.

Fig. Llamarémos a la linea dada AB: x, la distancia AC que buscamos: en estos supuestos, BC será $a-x$; y como
23. AB: AC:: AC: CB, ó $a:x::x:a-x$, resultará despues de multiplicados los estremos y los medios que $xx = aa-ax$, ó $xx+ax=aa$, equacion de segundo grado, cuya resolucion dá $x=-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa+aa}$.

Para construir el primer valor $x=-\frac{1}{2}a+\ldots\ldots \sqrt{\frac{1}{4}aa+aa}$, es menester, segun digimos (203), levantar en el punto B la perpendicular $BD=\frac{1}{2}a$, y despues de tirada AD tendrémos $AD=\sqrt{(BD)^2+(AB)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}aa+aa}$: solo falta, pues, restar de esta linea la cantidad $\frac{1}{2}a$, y lo egecutaremos con llevar DB desde D á O: entonces AO valdrá $\sqrt{\frac{1}{4}aa+aa}-\frac{1}{2}a$, esto es, será igual á x: llevaremos, pues, AO desde A á C, ácia B, y el punto C donde rematáre, será el punto que se busca.

Por lo que toca al segundo valor de x, es á saber $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+aa}$, si llevamos BD desde D á O' sobre la prolongacion de AD; AO' valdrá $\frac{1}{2}a+\ldots\ldots \sqrt{\frac{1}{4}aa+aa}$; y como el valor de x es esta misma cantidad tomada negativamente, llevarémos AO' desde A á C' sobre AB prolongada por el lado opuesto á aquel ácia el qual se supuso en la resolucion, que x se dirigia, y tendrémos un segundo punto C' que será tambien tal que su distancia al punto A será media proporcional entre su distancia al punto *B* y la linea entera *AB*. Fig.

Prevendrémos de paso que el asunto de esta cuestion *es cortar una linea dada* AB *en media y estrema razon*: la construccion que hemos dado es tambien la misma que dimos (I. 478). Es de reparar que por medio del Álgebra se halla la construccion, siendo así que en la Geometría supusimos que estaba hallada, y no hicimos mas que domostrarla.

226 Si paramos un poco la consideracion en lo que hemos practicado para resolver las cuestiones precedentes, veremos que siempre se ha tomado por incógnita una linea, que una vez conocida, sirviera para determinar todas las demas, sin apartarse de las condiciones de la cuestion. Este cuidado es esencial; pero pide algun pulso la eleccion de esta linea: suelen ser muchas en bastantes casos las lineas en que concurre la circunstancia de que de su determinacion penda la de todas las demas; y entre ellas hay algunas que encaminan á equaciones mas complicadas las unas que las otras. La regla siguiente servirá de guia.

227 *Si entre las lineas ó cantidades que tomándolas cada una por incógnita, podrian servir para determinar todas las demas cantidades, se encuentran dos que sirvan igualmente, de modo que se pueda presumir que la una ó la otra encaminaria á la misma equacion (con la diferencia de los signos + ó —); entonces será acertado no valerse de ninguna de las dos, y tomar por incógnita otra cantidad que dependa igualmente de la una y de la otra de dichas dos can-*

Fig. *tidades*; por egemplo, será bueno tomar por incógnita su semisuma ó su semidiferencia, ó una media proporcional entre ellas, ó &c. Por este medio se sacará siempre una equacion mas sencilla que si se buscára la una ó la otra.

En la cuestion que resolvimos (224) hallamos un egemplo de lo que decimos. No habia en dicha cuestion circunstancia alguna que determinase si se habia de tomar
22. por incógnita AD ó AE: tomando AD por la incógnita x, AE hubiera sido $x+c$; y tomando AE por la incógnita x, AD hubiera sido $x-c$, y en quanto á lo demas el cálculo seria el mismo en ambos casos, de modo que la equacion no se diferenciaria sino en los signos. Por esta razon en lugar de tomar una de las dos por incógnita, tomo su semisuma y la llamo x: como las condiciones de la cuestion determinan su diferencia DE que es $=c$, tendremos (I. 673) $AE=x+\frac{1}{2}c$, y $AD=x-\frac{1}{2}c$; y fundados en el mismo principio que nos guió en la primera resolucion, sacaremos la equacion $(x+\frac{1}{2}c)(x-\frac{1}{2}c)=ab$, ó $xx-\frac{1}{4}cc=ab$, que es mas sencilla, y da $x=\sqrt{\frac{1}{4}cc+ab}$. De donde es fácil inferir que AE que es $x+\frac{1}{2}c$, será $=\frac{1}{2}c+\sqrt{\frac{1}{4}cc+ab}$, y $AD=-\frac{1}{2}c+\sqrt{\frac{1}{4}cc+ab}$, como arriba (224).

La cuestion siguiente nos suministrará muchos egemplos de la aplicacion del mismo principio.

228 Cuestion VII. *Desde un punto* D, *situado dentro*
24. *del ángulo recto* IAE, *é igualmente distante de los dos la-*

dos IA *y* AE, *tirar una linea recta* DB *de modo que la parte* CB *comprehendida en el ángulo recto* EAB *sea igual á una linea dada.* Fig.

Despues de bajadas las perpendiculares DE, DI, puedo tomar indistintamente por incógnita CE ó AB, AC ó IB, CD ó BD. Si tomo, por egemplo, por incógnita CE, llamaré CE, x; y representando por a cada una de las dos lineas iguales DE, DI, que se han de considerar como conocidas; llamando ademas de esto c la linea dada á la qual debe ser igual BC, tendré $AC = AE - CE = a - x$; y los triángulos semejantes DEC, CAB me darán el valor de AB por medio de esta proporcion: $CE : DE :: AC : AB$; esto es, $x : a :: a - x : AB$; de donde se saca $AB = \frac{aa - ax}{x}$. Pero por la propiedad del triángulo rectángulo (I. 517) tenemos $(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2$: substituyendo en lugar de estas lineas sus valores algebráicos, tendrémos $(a - x)^2 + (\frac{aa - ax}{x})^2 = cc$, ó $aa - 2ax + xx + \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{xx} = cc$, ó despues de eliminado el denominador, transponiendo y reduciendo, $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$; equacion de quarto grado, que no es, ni con mucho, la mas sencilla que se pueda sacar para la resolucion de la cuestion propuesta.

Si en vez de tomar CE por incógnita, tomásemos IB, en este supuesto llamaríamos IB, x, é imitando la resolucion precedente, sacaríamos una equacion que no se diferenciaría de la que acabamos de hallar, sino en que en vez de $a - x$, tendríamos $x - a$, quiero decir, que sería ab-

Fig. solutamente la misma, pues estas cantidades están elevadas al quadrado en la equacion. La equacion que resultaría si
24. se tomase AB por incógnita, no se diferenciaria sino en los signos de la que saldria tomando por incógnita AC. Por lo que mira á DB y DC, la equacion en que una de ellas fuese la incógnita, no se diferenciará sino en los signos de la equacion que tubiese por incógnita la otra: luego no se debe tomar ninguna de estas lineas.

Pero si tomamos por incógnita la suma de las dos lineas DB y DC, y representamos esta suma por $2x$, tendremos (I. 673) $DB = x + \frac{1}{2}c$, y $DC = x - \frac{1}{2}c$; pero las paralelas DI y CA nos dán, para hallar AB y AC, las dos proporciones siguientes $DC : CB :: IA$ ó $DE : AB$, y $DB : CB :: DI : AC$; esto es, $x - \frac{1}{2}c : c :: a : AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$, y $x + \frac{1}{2}c : c :: a : AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$: luego yá que el triángulo rectángulo CAB dá $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, tendremos $\frac{a^2 c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2 c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc$; ó quitando las fracciones, y dividiendo por cc, $a^2 (x + \frac{1}{2}c)^2 + a^2 (x - \frac{1}{2}c)^2 = (x + \frac{1}{2}c)^2 (x - \frac{1}{2}c)^2$; haciendo las operaciones indicadas, transponiendo y reduciendo, sacaremos $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, cuya equacion es á la verdad del quarto grado, pero es mas facil de resolver que la precedente, pues se resuelve (167) por el método de las de segundo grado.

Llegaríamos á equaciones todavia mas sencillas si introdugéramos en el cálculo dos incógnitas, de las quales Fig. fuese la una la suma de las dos lineas AB y AC, y la otra su diferencia, esto es, si hiciéramos $AB + AC = 2x$, $AB - AC = 2y$, de cuyo supuesto resultaria $AB = x + y$, y $AC = x - y$. El triángulo rectángulo ABC daría $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, y los triángulos semejantes ABC, IBD darian (I. 459) $AB : AC :: IB : ID$, de donde se sacarian las dos equaciones necesarias para determinar x é y; de la una sacaríamos el valor de xx que, substituido en la otra, daria para hallar y una equacion de segundo grado.

Volvamos á nuestra equacion. En virtud de lo que se enseñó (167), tendremos $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)\, x^2 + (\frac{1}{4}cc + aa)^2 = (\frac{1}{4}cc + aa)^2 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4 = aacc + a^4$; sacando la raiz quadrada, $x^2 - (\frac{1}{4}cc + aa) = \pm \sqrt{aacc + a^4}$, y por consiguiente $x^2 = \frac{1}{4}cc + aa \pm \ldots \sqrt{aacc + a^4}$; sacando otra vez la raiz quadrada tendremos finalmente $x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + a^2 \pm \sqrt{(a^2c^2 + a^4)}}$, ó $x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + aa \pm a\sqrt{(cc + aa)}}$.

De los quatro valores de x que dá la doble combinacion de los dos signos $\pm$, solo hay uno que pertenezca á la cuestion, conforme viene propuesta, este valor es $x = + \sqrt{\frac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{(cc + aa)}}$. El valor $x = \ldots\ldots + \sqrt{\frac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{(cc + aa)}}$ resuelve la cuestion para el caso en que se pidiera que la linea CB estubiese en el mismo ángulo que el punto D (*Véase la fig.* 25), en cuyo 25.

Fig. caso no representa x la semisuma, sino la semidiferencia
25. de las dos lineas BD y DC, conforme lo probarémos facilmente, llamando $2x$ esta diferencia, y resolviendo el problema del mismo modo que arriba; porque tendremos $DB = \frac{1}{2}c + x$, $CD = \frac{1}{2}c - x$, y las paralelas DI y CA darán $DB : CB :: DI : CA$, y $DC : CB :: AI : AB$, ó $\frac{1}{2}c + x : c :: a : CA$, y $\frac{1}{2}c - x : c :: a : AB$; luego $CA = \frac{ac}{\frac{1}{2}c + x}$, y $AB = \frac{ac}{\frac{1}{2}c - x}$: luego por causa del triángulo rectángulo CAB tendremos $\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c + x)^2} + \frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c - x)^2} = c^2$, ó practicando las mismas operaciones que arriba, $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, equacion de todo punto la misma que la que acabamos de hallar para la
24. suma de las dos lineas BD y CD: luego una vez que sirve la misma equacion para ambos casos, la una de las raices debe dár la suma, y la otra debe dár la diferencia; pero se echa de ver facilmente, que las dos que se deben tomar son las que acabamos de indicar; porque siendo totalmente negativas las otras dos raices, no pueden pertenecer sino á casos del todo opuestos á los que hemos considerado en cada resolucion.

Por lo que mira á estotras dos raices, se hallarán los casos á que pertenecen, observando que no hay circunstancia alguna que determine en la cuestion presente, ó á
24. lo menos en la equacion, si el punto D está, conforme supusimos al principio, debajo de AI y á la izquierda de AE;

ó si, al contrario, está mas arriba de la primera linea y á la de- Fig.
recha de la segunda, como se vé aquí respecto de $A'I'$ y de $A'E'$; pero como en este caso estará la cantidad a en lados opuestos á aquellos en que estaba al principio, será negativa: luego sacarémos la resolucion que corresponde á este caso con substituir $-a$ en lugar de $+a$ en la equacion $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2$ &c. que hallamos arriba; pero como no resulta de esta substitucion mudanza alguna en la equacion, se sigue que esta misma equacion debe resolver tambien estos dos nuevos casos. Luego los otros dos valores de x son, el uno la suma de las dos lineas DB', 24.
DC', y el otro, su diferencia. Y con efecto se echa de ver 25.
que en esta nueva posicion los puntos B y C están á lados opuestos á aquellos en que estaban primero; y que por consiguiente así la suma como la diferencia de las dos lineas DB', DC' han de ser negativas, y tales las dá con efecto la equacion.

Para construir la resolucion que acabamos de hallar, tomarémos sobre EA prolongada la parte $AN = c$, y ti- 24.
rando IN, llevarémos esta última sobre DI prolongada 25.
desde I á K; sobre DK como diámetro, describiremos el semicírculo KLD, al qual encuentra en L la AI prolongada. Desde el medio H de AN tirarémos IH y la llevarémos desde I á M, y será LM el primer valor de x: en la fig. 25 24.
trazarémos desde el punto L como centro, y con un radio 25.
igual á IH, un arco pequeño que corte IK en M, y IM será el segundo valor de x; y pues tenemos $BD = x + \frac{1}{2}c$, ten-

Fig. dremos $BD = LM + AH$ en la fig. 24, y $BD = IM$
24. $+ AH$ en la fig. 25; por consiguiente solo restará tra-
25. zar desde el punto D como centro, y con el radio BD que acabamos de determinar, un arco que corte IA prolongada en algun punto B; la recta DB será la que se pide. Con efecto, el triángulo rectángulo IAN dá IN ó $IK =$
24. $\sqrt{(IA)^2 + (AN)^2} = \sqrt{aa + cc}$, y por ser LI media
25. proporcional entre DI y IK, tenemos $(IL)^2 = DI \times IK = a\sqrt{aa + cc}$; pero el triángulo rectángulo IAH dá $IH = \sqrt{(IA)^2 + (AH)^2} = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc}$, y el trián-
24. gulo rectángulo LIM dá $LM = \sqrt{(MI)^2 + (IL)^2}$
25. $= \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{(aa + cc)}} = x$ y IM ..... $= \sqrt{(LM)^2 - (IL)^2} = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa + cc)}} = x$.

Acerca de este último valor hemos de prevenir que
25. la construccion que acabamos de dár, supone que IH sea mayor que LI, ó por lo menos igual. Si fuere menor sería imposible la cuestion en este caso, y tambien lo dá á conocer el Álgebra: porque en el valor $x = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa + cc)}}$, si $aa + \frac{1}{4}cc$ que es $(IH)^2$ es menor que $a\sqrt{(aa + cc)}$ que es $(IL)^2$, la cantidad que coge el primer radical, será negativa, y por consiguiente será imaginario el valor de x.

Con tomar por incógnita la suma de las dos lineas
24. DB y DC en la fig. 24, ó su diferencia fig. 25, hemos lle-
25. gado á una equacion mas sencilla que si hubiéramos con-

siderado como incógnita *CE*, ó *AC*, ó *AB*, ó *IB* porque Fig. la relacion de las lineas *DB* y *DC* con las lineas *IB* y *AB* es semejante á la que las mismas lineas *DB* y *DC* tienen con las lineas *AC* y *CE*; quiero decir que pueden determinarse por operaciones semejantes, valiéndose de *IB* y *AB*, ó *AC* y *CE*. En general, como la equacion debe incluir todas las diferentes relaciones que la cantidad que se busca puede tener con aquellas de quienes pende, esta equacion será siempre tanto mas sencilla, quantas menos relaciones diferentes tubiere con las demás la cantidad que se eligiere por incógnita. Lo harémos patente en estotra solucion de la misma cuestion.

229 Yá que el ángulo *CAB* es recto, si imaginamos 26.
que sobre *CB* como diámetro se describe un círculo, pasará por el punto *A*: tírese la linea *DA* que prolongada encuentra la circunferencia en *M*; se echará de ver entónces que pues son iguales las lineas *DI* y *DE*, el ángulo *DAI* ó su igual *BAM* será de 45 grados, y por ser la medida de este último la mitad del arco *MB*, este arco *MB* será de 90°; luego si se tira el radio *LM*, el triángulo *DLM* será rectángulo, y por consiguiente bajando sobre *DM* la perpendicular *LN*, el lado *LM* (I. 463) será medio proporcional entre *DM* y *MN*, ó entre *DM* y *AN*, porque la perpendicular *LN* hace que sea *AN* $=$ *NM* (I. 349). De aquí es facil sacar una resolucion muy sencilla, tomando *AN* por incógnita.

Llamémos x esta linea *AN*, y d la linea *DA* que

Fig. consideramos como conocida. Entónces DM será $d + 2x$. y pues tenemos, segun hemos visto poco há, $DM : LM :: LM : MN$, tendremos $d + 2x : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, y por consiguiente $dx + 2xx = \frac{1}{8}cc$, ó $xx + \frac{1}{2}dx = \frac{1}{8}cc$ cuya equacion dá $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{\frac{1}{16}dd + \frac{1}{8}cc}$.

Para construir esta cantidad la doy esta forma: $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc}$. Tomo en los lados AO, AI del ángulo recto IAO, las partes Am, An iguales cada una á $\frac{1}{4}c$; y concluyendo el quadrado $Ampn$, tiro la diagonal Ap que será perpendicular á DA é igual á..... $\sqrt{\frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc}$: tomo en la AD la parte Ar igual á $\frac{1}{4}d$, ó á $\frac{1}{4}AD$; y tirando pr saco $pr = \sqrt{(Ar)^2 + (Ap)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc}$: no hay, pues, mas que hacer, para sacar el primer valor de x, sino restar de pr la cantidad $\frac{1}{4}d$, lo que se egecutará trazando desde el punto r como centro, y con el radio rp un arco que corte DM en N, y será AN el primer valor de x: de modo que si levantamos en el punto N la perpendicular NL, y la cortamos en L por un arco trazado desde el punto A como centro, y con el radio $\frac{1}{2}c$, determinarémos el punto L; y si por este punto, y el punto D se tira DCB, estará concluida la resolucion.

Por lo que toca al segundo valor de x, es á saber $x = -\frac{1}{4}d - \sqrt{\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc}$, le sacarémos con llevar rp desde r á N', porque siendo entonces AN' igual á $Ar + rN'$, valdrá $\frac{1}{4}d + \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc)}$, esto es, será igual al segundo valor de x mudando los signos; y co-

mo cae á un lado opuesto al primero, será, atendiéndolo Fig.
todo, el verdadero valor de x en este segundo caso. Levantaremos, pues, tambien en el punto N' la perpendicular $N'L'$, y haremos que la corte en L' un arco trazado igualmente desde el punto A como centro, y con un radio $= \frac{1}{2}c$; tirando entonces por el punto L', y por el punto D la recta $B'L'D$, tendremos la segunda resolucion que admite la cuestion. Lo probaremos con suma facilidad aplicando al pie de la letra á la fig. 27 lo que digimos de la fig. 26 al prin- 27.
cipio de esta resolucion; se verá que llamando AN ó MN, 26.
x, sin mudar las demas denominaciones, tendremos $DM : ML :: ML : MN$, esto es, $2x - d : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, y por consiguiente $2xx - dx = \frac{1}{4}cc$, de donde se saca $x = \frac{1}{4}d \pm \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc)}$, de cuyos dos valores el uno es precisamente el mismo de que tratamos: no hay mas diferencia que la precisa de los signos.

Pero sobre esto tenemos que prevenir una cosa muy importante. Puede suceder que el arco que se quiera trazar desde el punto A como centro, y con el radio $\frac{1}{2}c$, no encuentre la perpendicular $N'L'$, porque la cantidad $\frac{1}{2}c$ pue- 26.
de ser menor que AN'. Hemos dicho á la verdad que quando las equaciones de segundo grado son imposibles, lo dá á conocer el Álgebra; pero en la equacion $x = -\frac{1}{4}d - \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc)}$, nada manifiesta los casos en que puede haber esta imposibilidad; porque es necesariamente positivo todo lo que está debajo del radical.

Es preciso apear esta dificultad. No hay duda en que

Fig. quando una cuestion espresada algebráicamente fuere imposible, el Álgebra manifestará su imposibilidad; pero para esto es indispensable que esprese el Álgebra todo lo que supone la cuestion, sea explícita ó implícitamente, cuya circunstancia no concurre en el caso actual. Con efecto, la cuestion supone tácitamente que los tres puntos *D*, *A*, *L* no esten en una misma linea recta, cuya condicion no hemos espresado algebráicamente: solo hemos espresado que *LM* era media proporcional entre *DM* y *NM*. Esta propiedad pertenece en realidad al triángulo rectángulo; pero puede tambien verificarse quando se han supuesto en linea recta los tres puntos *D*, *A*, *L*. Con efecto es evidente que se puede proponer un calculador esta cuestion: *Averiguar*
28. *qué intervalo se deberia dejar en la direccion* DL *entre las dos rectas* DA *y* ML *de longitud conocida, para que* ML *sea media proporcional entre* DM *y* MN, *estando el punto* N *en medio de* AM.

De esta cuestion resultará cabalmente, como es facil comprobarlo, la misma equacion que arriba, cuya equacion da dos resoluciones, la una para el caso en que los dos puntos *A* y *M* estan entre *D* y *L*; y la otra para el caso contrario. No es, pues, de estrañar, que quando es imposible la primera cuestion (en uno de sus casos por lo menos) no lo manifieste el Álgebra; pues debe dar la resolucion de esta segunda cuestion que siempre es posible.

230 Esto nos obliga á distinguir las cuestiones en *concretas* y *abstractas*. Por cuestiones concretas entende-

mos las cuestiones de la naturaleza de la penúltima, en las Fig.
quales lo que se busca está especificado ó particularizado por alguna condicion, alguna propiedad ó alguna construccion particular que la equacion no espresa. Las cuestiones abstractas, al contrario, serán aquellas en que se consideran las cantidades únicamente como cantidades, y espresa la equacion todo lo que incluye la cuestion, como en la última que hemos propuesto. Estas pueden tener siempre tantas resoluciones positivas ó negativas, quantas resoluciones reales tiene la equacion; pero el número de las resoluciones de una cuestion concreta es muchas veces menor que el número de las resoluciones, aun positivas, de la equacion, conforme lo evidenciará la cuestion siguiente.

231 Cuestion VIII. *Supongamos que* ABED *repre-* 29.
sente una esfera engendrada por la rotacion del semicírculo ABE *al rededor del diámetro* AE. *El sector* ABC *engendra en este movimiento un sector esférico que se compone de un segmento esférico engendrado por la rotacion del semisegmento* ABP, *y de un cono engendrado por el triángulo rectángulo* BPC. *Supongamos que se pregunte dónde serán iguales entre sí el segmento esférico y el cono.*

Para resolver esta cuestion es menester tener presente (I. 613 y 605) que el sector esférico es igual al producto de la superficie del casquete *BAD* por el tercio del radio *AC*. Pero la superficie del casquete (I. 581) se saca multiplicando la circunferencia *ABED* por la altura *AP* del

Fig. mismo casquete. Luego si representamos por la razon $r : c$ la razon del radio de un círculo á su circunferencia, y llamamos AC, a; AP, x, sacaremos la circunferencia $ABED$ por medio de la proporcion siguiente $r : c :: a : ABDE$, que será por consiguiente $\frac{ca}{r}$: luego la superficie del casquete será $\frac{cax}{r}$, y por lo mismo la solidez del sector será $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3}a$ ó $\frac{caax}{3r}$.

La solidez del cono se sacará multiplicando la superficie del círculo que le sirve de base, esto es, la superficie del círculo cuyo radio es BP, por el tercio de la altura CP; pero ya que $CP = CA - AP = a - x$, y que $CB = a$, tendrémos en el triángulo rectángulo BPC, $BP = \sqrt{((CB)^2 - (PC)^2)} = \sqrt{(aa - aa + 2ax - xx)} = \sqrt{(2ax - xx)}$, y como para sacar la superficie del círculo, cuyo radio es BP, se debe multiplicar su circunferencia por la mitad del radio, y para sacar esta circunferencia es menester calcular el quarto término de esta proporcion $r : c :: \sqrt{(2ax - xx)}$: á un quarto término que será $\frac{c\sqrt{(2ax - xx)}}{r}$; multiplicando, pues, por la mitad del radio $\sqrt{(2ax - xx)}$, sacaremos que $\frac{c.(2ax - xx)}{2r}$ es la superficie de la base del cono; multiplicando esta superficie por el tercio de la altura CP, esto es por $\frac{a-x}{3}$, tendremos $\frac{c.\overline{2ax - xx}}{2r} \times \frac{a - x}{3}$ que será la solidez del cono. Como para que sea el cono igual al segmento, es preciso que el sector que es la suma de los dos, sea duplo del uno ú del otro, se sigue que $\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax - xx}{2r} \times \frac{a-x}{3}$, ó $\frac{caax}{3r} =$

$\frac{c.\overline{2ax-xx}.\overline{a-x}}{3r}$, suprimiendo 2, factor comun del nu- Fig.
merador y del denominador. Esta es la equacion que resolverá la cuestion, y la podemos simplificar suprimiendo $3r$ que es divisor comun, y cx que es multiplicador comun de los dos miembros, tendremos entonces $aa = \overline{2a-x}.\overline{a-x}$, ó $xx - 3ax = -aa$; de donde se saca, por las reglas dadas (151 y 152), $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; pero de estas dos resoluciones solo sirve $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, por ser evidente que si $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ valiere mas que $2a$, esto es mas que el diámetro, no podrá convenir á la esfera la resolucion que espresa.

Si quisiésemos construir el valor $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, le daremos esta forma $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{9}{4}aa - aa\right)}$; y tomando $AM = \frac{3}{2}a$, describiremos sobre AM como diá- 29.
metro el semicírculo AOM, y tirando la cuerda $AO = a$, tiraremos OM para llevarla desde M á P ácia A; el punto P donde rematare, determinará la altura AP ó x. Con efecto, por causa del triángulo rectángulo AOM, tenemos OM ó $PM = \sqrt{\left((AM)^2 - (AO)^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}aa - aa\right)}$; luego $AP = AM - PM = \frac{3}{2}a - \sqrt{\left(\frac{9}{4}aa - aa\right)} = x$.

Por lo que mira al segundo valor $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, de ningun modo pertenece, segun acabamos de decir, á la cuestion presente; pero corresponde igualmente que el primero, á estotra cuestion abstracta que está cifrada en la equacion $xx - 3ax = -aa$, ó $3ax - xx = aa$. *Estando dividida la linea conocida* AN *en tres partes iguales* 30.

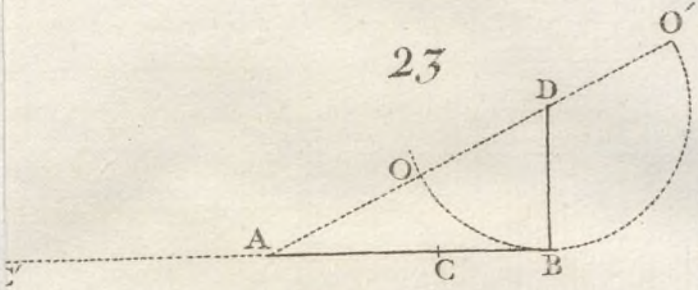
en los puntos B *y* D, *hallar en la direccion de esta linea un punto* P, *tal que la parte* AD *sea media proporcional entre las distancias del punto* P *á los estremos* A *y* N. Porque si llamamos a el tercio AD de la linea conocida AN, y AP, x, tendremos $PN = 3a - x$; y las condiciones de la cuestion darán esta proporcion $x : a :: a : 3a - x$, de donde se sacará esta equacion $3ax - xx = aa$, cuyas dos raices son $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, como arriba; se sacarán tambien ambas de la misma construccion, solo que para la segunda, quiero decir, para $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, llevarémos MO desde M á P' ácia N, y entonces AP y AP' serán los dos valores de x.

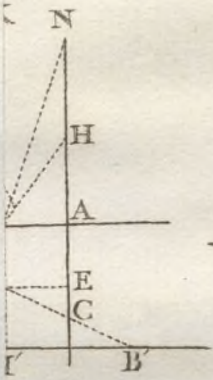
Otras aplicaciones del Álgebra á varios asuntos.

232 Para resolver la última cuestion nos ha sido preciso calcular la espresion algebráica de un sector esférico, y del cono que es parte de él. Los cuerpos que hemos considerado en la Geometría, ocurren frecuentemente en muchas cuestiones, y particularmente en las cuestiones Físico-Matemáticas, cuyo asunto es aplicar las Matemáticas á la Física. Es, pues, del caso hacerse familiares las espresiones algebráicas que los representan ya en todo ya en parte.

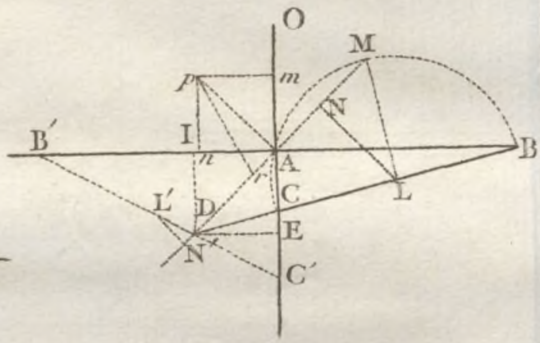
No solo nos será muy provechoso en adelante este conocimiento; sino que tambien hará patente quan socorrida es el Álgebra para la comparacion de dichos cuerpos unos con otros, y la medida de todos los que con ellos se puedan comparar.

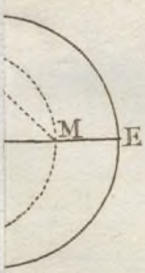
23



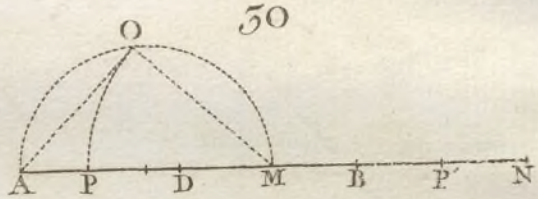


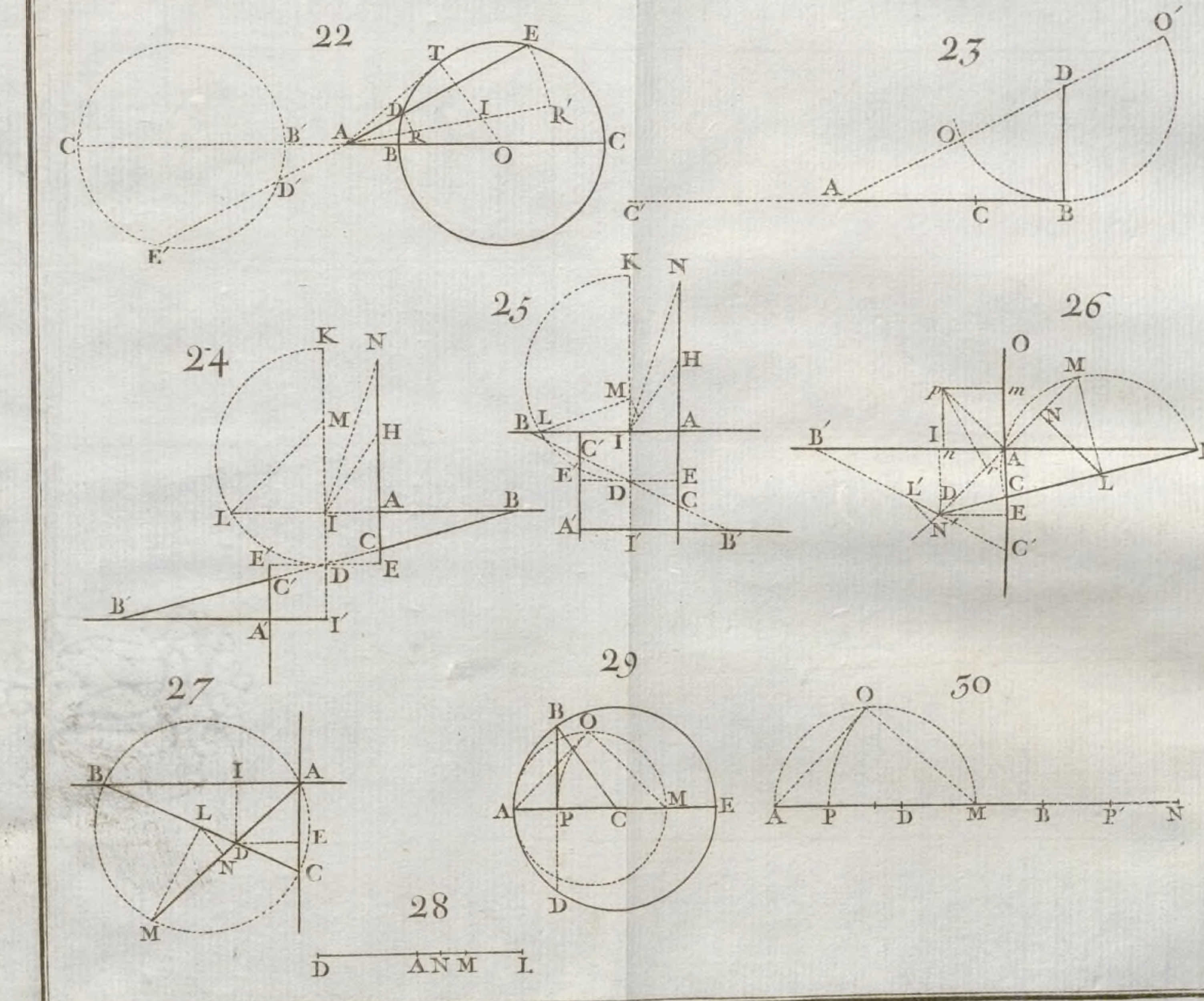
26





30




22
23
24
25
26
27
28
29
30

Si representamos en general por $r : c$ la razon del radio á la circunferencia de un círculo (I. 504); la circunferencia de otro círculo qualquiera cuyo radio sea A, será $\frac{cA}{r}$, y su superficie $\frac{cA}{r} \times \frac{1}{2} A$ ó $\frac{cA^2}{2r}$.

Se infiere de esta espresion que las superficies de los círculos crecen como los quadrados de sus radios; porque siendo siempre $\frac{c}{2r}$ del mismo valor, no crece la cantidad $\frac{cA^2}{2r}$ sino á proporcion de lo que crece A^2.

Si fuere H la altura de un cilindro de cuya base represente A el radio, espresará (I. 600) $\frac{cA^2}{2r} \times H$ su solidez; por la misma razon será $\frac{ca^2}{2r} \times h$ la espresion de la solidez de otro cilindro, en el supuesto de que sea h su altura, y a el radio de su base: de suerte que las solideces de estos dos cilindros serán entre sí $:: \frac{cA^2}{2r} \times H : \frac{ca^2}{2r} \times h$, ó $:: A^2H : a^2h$, con suprimir el factor comun $\frac{c}{2r}$; quiero decir que las solideces de los cilindros son como los productos de sus alturas por los quadrados de los radios de sus bases. Si las alturas fueren proporcionales á los radios de las bases, entonces $H : h :: A : a$, y por consiguiente $h = \frac{Ha}{A}$; y la razon $A^2H : a^2h$ será $A^2H : \frac{a^3H}{A}$, ó despues de suprimido el factor comun H, multiplicado por A, y eliminado el denominador A, será $A^3 : a^3$; quiero decir que en semejante caso las solideces son como los cubos de los radios de las bases.

En general, las superficies, segun vimos en la Geometría, penden del producto de dos dimensiones, y los sólidos del producto de tres dimensiones; por lo que, si cada dimension del uno de dos sólidos, ó de la una de dos superficies que se comparan, fuere á cada dimension de la otra en la misma razon, las dos superficies serán entre sí como los quadrados, y los sólidos serán como los cubos de dos dimensiones homólogas. Poniendo la proposicion en términos mas generales todavia, podremos decir que si dos cantidades qualesquiera de la misma naturaleza están espresadas por el producto de quantos factores se quisiere, y si cada factor de la una fuere á cada factor de la otra, en una misma razon, las dos cantidades seran entre sí como un factor homólogo de cada una, elevado á una potencia de un grado igual al número de los factores. Por egemplo, si una cantidad está espresada por $ABCD$, y otra por $abcd$, en cuyo caso las dos cantidades son la una á la otra :: $ABCD : abcd$, si fuere $A : a :: B : b :: C : c :: D : d$, de las proporciones que dan estas razones se sacará $b = \frac{aB}{A}$, $c = \frac{aC}{A}$, $d = \frac{aD}{A}$, y por consiguiente la razon $ABCD : abcd$ será $ABCD : \frac{a^4BCD}{A^3}$ ó $A : \frac{a^4}{A^3}$, ó $A^4 : a^4$.

Lo mismo sucederia aun quando no fuesen monomias las espresiones de estas dos cantidades; si fuesen espresadas, por egemplo, la una por $AB + CD$, y la otra por $ab + cd$, en el caso de ser las dimensiones de la primera proporcionales á las dimensiones de la segunda, serian estas cantidades la una á la otra :: $A^2 : a^2$; porque como suponemos que $A : a :: B : b :: C : c :: D : d$, tendremos $b = \frac{aB}{A}$, $c = \frac{aC}{A}$, $d = \frac{aD}{A}$, y por consiguiente la razon $AB + CD : ab + cd$ se transformará en $AB + CD : \frac{a^2B}{A} + \frac{a^2CD}{A^2}$, ó $AB + CD : \frac{a^2 AB + a^2 CD}{A^2}$, ó $A^2 (AB + CD) : a^2 (AB + CD)$, ó finalmente $A^2 : a^2$.

La última observacion demuestra de un modo general que las superficies de las figuras semejantes son como los quadrados de dos de sus dimensiones homólogas, y las solideces de los sólidos semejantes como los cubos de las mismas dimensiones; porque sean las que fueren dichas figuras, ó dichos sólidos, las primeras pueden siempre considerarse como compuestas de triángulos semejantes, cuyas alturas y bases son proporcionales en cada figura; y los sólidos pueden considerarse como compuestos de pirámides semejantes, cuyas tres dimensiones son tambien proporcionales.

Esto manifiesta quan facil es comparar las cantidades una vez que se ha sacado su espresion algebráica, no solo quando estas cantidades son de la misma especie, sino tambien quando son de especie diferente, como un cono y una esfera, un prisma y un cilindro; la única circunstancia precisa es que sean de la misma naturaleza, esto es, ó ambas sólidos, ó ambas superficies, &c.

233 Propusimos (I. 607) lo que se debia egecutar para hallar la solidez de una pirámide truncada ó de un cono truncado. Si llamamos H la altura de la pirámide entera, y h la altura de la pirámide quitada: S la superficie de la base inferior, y s la de la base superior, tendrémos (I. 554) $S : s :: H^2 : h^2$; y por consiguiente $h^2 = \frac{H^2 s}{S}$, ó $h = H\sqrt{\frac{s}{S}}$. Si llamamos k la altura del trozo,

tendrémos $k = H - h$, y por consiguiente $k = H - H\sqrt{\frac{s}{S}}$, ó $k = \frac{H\sqrt{S} - H\sqrt{s}}{\sqrt{S}}$; de donde sacarémos $H = \frac{k\sqrt{S}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$; pero la solidez de la pirámide total es $S \times \frac{H}{3}$, y la de la pirámide quitada es $s \times \frac{h}{3}$, ó (poniendo en lugar de h su valor que hallamos poco há) $s \times \frac{H}{3} \sqrt{\frac{s}{S}}$: luego la solidez del trozo será $\frac{HS}{3} - \frac{Hs\sqrt{s}}{3\sqrt{S}}$, ó $\frac{H}{3}.\left(S - \frac{s\sqrt{s}}{\sqrt{S}}\right)$, ó finalmente $\frac{H}{3}.\left(\frac{S\sqrt{S}-s\sqrt{s}}{\sqrt{S}}\right)$: pongamos, pues, en lugar de H su valor recien hallado, y tendrémos $\frac{k\sqrt{S}}{3(\sqrt{S}-\sqrt{s})} \times \frac{(S\sqrt{S}-s\sqrt{s})}{\sqrt{S}}$, que se reduce á $\frac{k}{3}\left(\frac{S\sqrt{S}-s\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right)$, ó dividiendo por $\sqrt{S} - \sqrt{s}$, se reduce á $\frac{k}{3}(S + \sqrt{Ss} + s)$, cuya espresion nos está diciendo, que toda pirámide, ó todo cono truncado se compone de tres pirámides de la misma altura, y de las quales la una tiene por base la base inferior del trozo, la otra la base superior s, y la tercera una media proporcional $\sqrt{Ss}$ entre la base inferior S y la superior s; porque para sacar la solidez de estas tres pirámides, bastaria, una vez que son de la misma altura, tomar la suma $S + \sqrt{Ss} + s$ de las tres bases, y multiplicarla por el tercio $\frac{k}{3}$ de la altura comun, y sacaríamos la misma cantidad que acabamos de hallar.

234 Si a representa el radio de una esfera, será $\frac{ca^2}{2r}$ la superficie de su círculo máximo: $\frac{4ca^2}{2r}$ ó $\frac{2ca^2}{r}$ será la superficie de la misma esfera, y por consiguiente $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3}a$, ó $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ será su solidez (I. 578 y 608).

Si llamamos x la altura de un segmento qualquiera, será, segun vimos en la resolucion de la última cuestion, $\frac{caax}{3r}$ la solidez del sector, y $\frac{c}{2r} \times \overline{2ax - xx} \times \frac{a-x}{3}$ la del cono que es parte de él: luego la del segmento (I. 616) será $\frac{caax}{3r} - \frac{c}{2r} . \overline{2ax - xx} . \frac{a - x}{3} = \frac{c}{3r} \left(aax - \frac{\overline{2ax - xx}}{2} \times \overline{a - x} \right)$ $= \frac{c}{3r} \times \frac{2aax - 2aax + axx + 2axx - x^3}{2} = \frac{c}{3r} . \frac{3axx - x^3}{2} = \frac{cx^2}{2r} \times$ $(a - \frac{1}{3} x)$; de donde inferirémos que la solidez del segmento es igual al círculo cuyo radio fuere la altura de dicho segmento, multiplicado por el radio menos el tercio de la misma altura.

Una vez conocidas las espresiones algebráicas de las cantidades, es facil resolver muchas cuestiones que se pueden proponer acerca de las mismas cantidades. Por egemplo, si se preguntase quál habria de ser la altura de un cono para que fuese igual en solidez á una esfera dada, siendo el radio de su base igual al radio de la esfera; llamaríamos h dicha altura, y a el radio de su base, y espresaría $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3}$ la solidez de dicho cono; y como debe ser igual á la esfera cuyo radio es tambien a, tendrémos $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$, de donde se saca $h = 4a$, despues de borrado en cada miembro el factor comun $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2}{3}$.

Este valor de h manifiesta que la altura ha de ser dupla del diámetro de la esfera, y con efecto debe ser así; porque como es la esfera (I. 610) los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto debe ser el duplo de un cono de una misma base y altura que el cilindro, esto es, igual á un cono de la misma base y de una altura dupla.

De la resolucion de las equaciones superiores.

235 La resolucion de las equaciones de un grado superior al segundo ha dado á la verdad mucho que hacer

á los Calculadores; pero no han dejado de ocurrirles acerca de ellas algunas consideraciones generales, que pueden manifestar su naturaleza, y facilitar en muchos casos particulares su resolucion.

Como habian reparado que las equaciones del primer grado no tenian mas que una raiz, que las del segundo tenian dos, se inclinaron á creer que las equaciones del tercer grado tendrian tres raices, y así de las demás. Y para confirmar esta sospecha, ó por mejor decir para averiguar con evidencia si era cierto que tubiese una equacion tantas raices como grados, se empeñaron en resolver las cuestiones al reves; quiero decir que en vez de buscar las raices de una equacion, buscaron quál sería la equacion cuyas raices fuesen cantidades dadas. Se viene á los ojos que esta cuestion es mucho mas facil de resolver que la primera.

236 Antes que enseñemos el camino que en esto han seguido los mas diestros Analystas, hemos de prevenir que se destruirán mutuamente los términos de una equacion si se pasan todos á un solo miembro, con lo que se la puede dar tal forma á una equacion qualquiera, que será cero su segundo miembro. Si tubiéramos, por egemplo, $x^2 + a^2 = 2ax$, podríamos inferir que $x^2 + a^2 - 2ax = 0$. Estando escrita de este modo la equacion, podemos considerar el primer miembro como el producto de $x - a$ por $x - a$; y como este primer miembro se reduce á cero, es preciso que $x = a$, ó, lo que es lo propio, que $x - a = 0$.

237 Pero como la cantidad $x^2 - 2ax + aa$ es un quadrado perfecto, no puede el uno de sus factores ser igual á cero, sin que lo sea tambien el otro: en lugar de que si la cantidad propuesta hubiera sido $x^2 - ax - bx + ab = 0$, hubiera bastado que el uno de sus factores $x - a$, ó $x - b$ hubiese sido cero para que lo fuera el primer miembro. Suponerlos ambos iguales á cero, sería un supuesto contrario á la exactitud, pues sería lo propio que mirar a y b como indispensablemente iguales.

238 Es pues el primer miembro de una equacion *trasladada* el producto de muchos factores iguales ó desiguales entre sí: quando son todos iguales, todos se reducen á cero, y quando son desiguales basta que solo el uno de ellos sea igual á cero.

239 Sentado todo esto, supongamos que se nos pregunte, por egemplo, ¿qual será la equacion en que el valor de x podrá ser ó 2, ó 3, ó 5? Bastará para responder á esta pregunta formar estas tres equaciones lineares $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$, y multiplicando la primera por la segunda, y su producto por la tercera, saldrá $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, en la qual podemos suponer indistintamente $x = 2$, ó $= 3$, ó $= 5$. Es patente que con substituir en la equacion $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, cada uno de estos valores en lugar de x, quedará resuelta dicha equacion, ó lo que viene á ser lo mismo, se desvanecerán todos sus términos; porque como la espresada equacion se puede reducir á es-

ta forma $(x - 2).(x - 3).(x - 5) = 0$, el supuesto de hacer igual á cero qualquiera de sus partes, ha de causar que se desaparezcan, porqué las multiplica todas. Es así que el supuesto de $x = 2$, ó $= 3$, ó $= 5$, hace que sea cero la una de las tres partes $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$; luego &c.

240 Manifiesta todo esto como puede una equacion tener tantas raices como grados: para tratar este punto con mas generalidad, supondremos que sean a, b, c, d las raices de una equacion, y por consiguiente que $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$ sean las equaciones lineares que forman la equacion, cuyas raices son dichas cantidades. Si multiplicamos unas por otras todas estas equaciones, resultará el producto siguiente, que ya sacamos en otro lugar (94), bien que con una mira algo distinta de la que llevamos ahora.

$$\begin{array}{lllll} x^4 & - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\ & - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ & - cx^3 & + bcx^2 & - acdx & \\ & - dx^3 & + adx^2 & - bcdx & \\ & & + bdx^2 & & \\ & & + cdx^2 & & \end{array}$$

que representa la equacion en la qual puede tener x á un tiempo los valores dados a, b, c, d.

241 Acerca de esta equacion haremos las consideraciones siguientes, que pueden aplicarse generalmente á las equaciones de todos los grados.

El primer término de la equacion es la incógnita sin coeficiente levantada á la potencia cuyo grado es igual al número de las raices.

El segundo término contiene la incógnita levantada á una potencia inferior de un grado con un coeficiente igual á la suma de las raices.

En el tercer término está la incógnita levantada á una potencia inferior de dos grados, y lleva por coeficiente la suma de todos los productos que se pueden formar con todas las raices, multiplicándolas de dos en dos.

En el quarto término está la incógnita levantada á una potencia inferior de tres grados, con un coeficiente igual á la suma de los productos que se pueden formar con todas las raices multiplicándolas de tres en tres.

Lo mismo sucederá respectivamente en los demás términos hasta el último, en que no habrá potencia alguna de x, y solo se compondrá del producto de todas las raices multiplicadas las unas por las otras. Estas son las cosas que en muchos casos han guiado á los calculadores, sea para hallar las raices de las equaciones, en cuya resolucion se hallaban empeñados, sea para conocer á lo menos algunas de sus propiedades.

242 De estas consideraciones han inferido, por egemplo, 1.° que quando una equacion carece de segundo término, como la equacion $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 7x - 3 = 0$, ha de tener por precision raices positivas y raices negativas, y que la suma de las unas ha de ser igual á la

suma de las otras; porque á no ser así, no se hubieran destruido mutuamente para hacer que se desapareciese el segundo término. Por consiguiente, una equacion de tercer grado, que careciese de segundo término, tendrá indispensablemente ó una raiz negativa igual á las dos positivas, ó una raiz positiva igual á las dos negativas.

243 2.º Que quando entre los factores de una equacion trasladada no hubiere ninguno imaginario, y tuviesen sus términos alternativamente signos diferentes, todas las raices de dicha equacion serán positivas. Si todos los términos llevaren el signo $+$, todas las raices serán negativas. En general, habrá tantas raices positivas, quantas mudanzas de signo haya de un término al siguiente; y tantas raices negativas quantas veces de seguida se hallare un mismo signo. Pero esta regla no se verifica quando tiene la equacion raices imaginarias.

244 3.º Que una equacion que careciere de último término, tendrá por lo menos una raiz igual á cero.

Supondrémos en todas las consideraciones que hiciéremos acerca de las equaciones, que no llevan ninguna cantidad irracional.

245 Pero se echa de ver que no se verificarán en ninguna equacion las propiedades espresadas si no estubieren todos sus términos en un mismo miembro, á cuya condicion deberá juntarse la de estár ordenados todos los términos por la incógnita, y de no llevar esta cantidad en el primer término otro coeficiente que la unidad.

Si faltáre en la equacion alguna de las potencias de x se considerarán los demás términos en el mismo lugar que ocuparian si no faltase potencia alguna de x. Por egemplo, en la equacion $x^5 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$, el término $3x^3$ es el tercer término, aunque falta el segundo; y el término $4x$ es el quinto, bien que falta el quarto. Si quisiéramos, pues, aplicar á esta equacion las consideraciones de antes (241 y 242), diríamos que la suma de las cinco raices es nula; esto es, que tiene indefectiblemente raices positivas, y raices negativas, y que la suma de las unas es igual á la suma de las otras. Diríamos tambien que la suma de todos los productos que se pueden formar con multiplicar todas las raices de dos en dos es igual á -3: que la suma de todos los productos, que se pueden formar con multiplicar todas las raices de tres en tres, es 0: que la suma de todos los productos que resultan de multiplicar todas las raices de quatro en quatro, es $+4$; y finalmente que el producto de todas las raices es -5.

Método para transformar las equaciones, y quitarlas su segundo término.

246 Del modo con que hemos visto que se forman las equaciones se pueden sacar, y sacarémos muy en breve algunos métodos para conseguir su resolucion. Y como para lograr con menos fatiga este intento suele conducir en muchas ocasiones transformar una equacion propuesta en otra en que concurran ciertas circunstancias determinadas, es del caso declarar, antes de pasar adelante, el modo de egecutar

algunas de estas transformaciones, y concluirémos manifestando como se elimina ó quita el segundo término de una equacion, que es una de las preparaciones mas importantes que conducen para su resolucion.

247 Quando lleva alguna equacion coeficientes fraccionarios como esta $x^3 + \frac{h}{a}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{f}{g} = 0$, es muy util hacer que se desaparezcan todos; para cuyo fin se supone $x = \frac{y}{m}$, siendo y una nueva incógnita, y m una cantidad que determinarán las mismas condiciones de la cuestion. Si se substituye $\frac{y}{m}$ en lugar de x en la equacion propuesta, se transformará $\frac{y^3}{m^3} + \frac{by^2}{am^2} + \frac{cy}{dm} + \frac{f}{g} = 0$, ó $y^3 + \frac{bmy^2}{a} + \frac{cm^2y}{d} + \frac{fm^3}{g} = 0$, en cuya última equacion no habrá coeficiente alguno fraccionario si m fuere divisible por a, por d, y por g. Pero el producto de las tres cantidades a, d, g es siempre divisible por cada una de ellas: luego con substituir en lugar de m, y las diferentes potencias de m que hay en la equacion despues de transformada, el producto adg, y sus potencias semejantes, se eliminarán facilísimamente sus coeficientes fraccionarios. Egecutando estas substituciones sacarémos $y^3 + \frac{badgy^2}{a} + \frac{ca^2d^2g^2y}{d} + \frac{fa^3d^3g^3}{g} = 0$, que se reduce á $y^3 + bdgy^2 + ca^2dg^2y + fa^3d^3g^2 = 0$, en la qual no hay ningun coeficiente fraccionario. Una vez halladas las raices de esta equacion, se sacarán facilmente las de $x^3 + \frac{h}{a}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{f}{g} = 0$, dividiendo las raices de la primera por m cuyo valor yá estará determinado.

248 Con la mira de manifestar como se elimina el segundo término de una equacion, supondrémos que la pro-

puesta sea la equacion general $x^m \pm ax^{m-1} \pm bx^{m-2} \pm$ &c. ....$P = 0$. Supondrémos despues $x = y + f$, siendo y otra incógnita, y f una indeterminada, cuyo valor determinarémos como conviene para el fin que llevamos. De este último supuesto resultará substituyendo en la equacion general, en lugar de x, la cantidad $y + f$

$$\left.\begin{array}{l} y^m + my^{m-1}f + \frac{m.\overline{m-1}}{2}y^{m-2}f^2 + \&c. \ldots P \\ \pm ay^{m-1} \pm \overline{m-1}.\, ay^{m-2}f \pm \&c. \\ \qquad \pm by^{m-2} \qquad \pm \&c. \end{array}\right\} = 0$$

De cuya equacion se desaparecerá el segundo término si fuese $my^{m-1}f \pm ay^{m-1} = 0$. Por consiguiente es preciso que despues de haber dividido por y^{m-1}, y traspasado tengamos $f = \mp \frac{a}{m}$. De donde sacamos, que en general, para eliminar el segundo término de una equacion qualquiera, todo el artificio se reduce á suponer su incógnita igual á otra incógnita menos ó mas el coeficiente del segundo término de la misma equacion, dividido por el número que espresa su grado. Si el segundo término de la propuesta fuese positivo, el valor de f será $-\frac{a}{m}$; y si fuese negativo, el valor de f será $+\frac{a}{m}$.

Por el mismo camino averiguaríamos lo que se ha de practicar para eliminar el tercer término de la propuesta. Para cuyo fin igualaríamos á cero la cantidad $\frac{m.\overline{m-1}}{2}y^{m-2}f^2 \pm \overline{m-1}.\, ay^{m-2}f \pm by^{m-2}$ que es el tercer término de la transformada general $y^m \pm my^{m-1}f \pm$ &c. Dividiendo todo por y^{m-2} resultará $\frac{m.\overline{m-1}}{2}f^2 \pm \overline{m-1}.\, af \pm b$: multiplicando por 2, y trasladando el último término, saldrá $m.\overline{m-1}\,.\,f^2 \pm \overline{2m-2}\,.\,af = \mp 2b$: si dividimos todo por $m.\overline{m-1}$, y consideramos que $2m-2$ dividido por $m-1=2$, sacarémos $f^2 \pm \frac{2a}{m} f = \mp \frac{2b}{m\,.\,\overline{m-1}}$. Cuya equacion, resuelta conforme enseñamos (152), dará $f = \mp \frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{m^2} \mp \frac{2b}{m\,.\,\overline{m-1}}\right)}$.

Pero como la substitucion de este valor de f en la equacion $x = y + f$ introduciría radicales en la transformada, mejor será no eliminar mas que el segundo término. Saldria todavia mas complicado el cálculo si se intentase eliminar por este método el término quarto, quinto, &c.

Resolucion de las Equaciones por el método de los divisores.

249 De la propiedad que tiene el último término de qualquiera equacion de ser el producto de todas sus raices, se ha sacado un método para hallar las que son comensurables. Con efecto, si despues de hallados todos los divisores del último término, se egecuta la division de la equacion por la incógnita $+$, ó $-$ alguno de dichos divisores, y sale exacta la division, se consigue un factor de la equacion, y por consiguiente una de sus raices. Si dividiéramos, por egemplo, la equacion $x^4 - ax^3 +$ &c. (240) por $x-a$, saldria el cociente $x^3 - bx^2 +$ &c. el qual dividido despues por $x-b$, dará el cociente $x^2 -$ &c. y así prosiguiendo hasta hallar todos los divisores de la equacion $x^4 - ax^3 +$ &c.

Si quisiésemos hallar los de la equacion $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$, empezaríamos buscando por el método que darémos dentro de poco, todos los divisores de 21 que son 1, 3, 7, 21. Dividiríamos despues la equacion por $x+1$; y como esta division no se puede egecutar, es señal de que $x+1$ no es uno de los factores de la equacion propuesta. Probaríamos despues la division por $x-1$, sacaríamos que $x-1$ es uno de los factores que buscamos, porque divide la equacion sin resta alguna. Calculando así á tientas, hallaríamos que $x-3$ y $x+7$ son los otros dos factores, de donde inferiríamos que las raices son 1, 3 y -7: de suerte que con substituir qualquiera de estos tres valores en la equacion, se conseguiria que su primer miembro fuese cero.

La práctica de este método no ha sido muy penosa en este egemplo, porque como tiene 21 pocos divisores, hemos tenido pocas pruebas que hacer. Pero quando son muchos los divisores del último término, es muy cansado este método, por lo que han buscado con mucho empeño los calculadores un espediente para escusar las divisiones inútiles. Vamos á declarar el que han hallado luego que hayamos enseñado el modo de sacar todos los divisores de una cantidad, sea numérica, sea algebráica.

250 *Para hallar todos los divisores de una cantidad numérica, se la dividirá por todos los números primeros mientras saliere un cociente cabal: se procurará dividir todavia este primer cociente por alguno de los números primeros, mientras saliere un cociente cabal ó sin resta, el qual se procurará dividir por los mismos números, hasta hallar un*

cociente que sea la unidad; esto es, hasta que no se halle finalmente otro divisor mas pequeño que el último cociente. Despues de escritos todos los divisores que hubieren servido, se multiplicarán de dos en dos, despues de tres en tres, de quatro en quatro &c. y los productos que salieren formarán con dichos divisores todos los divisores del número propuesto.

Busquemos, con el fin de dár un egemplo, todos los divisores del número 630: le divido por 2; sale el cociente 315, que no puedo dividir cabalmente por 2: puedo dividirle por 3, y saco el segundo cociente 105. Este se puede dividir todavia por 3, y sale el tercer cociente 35 que no se puede dividir ni por 2, ni por 3: puede dividirse por 5, y sale el quarto cociente 7, que no se puede dividir ni por 2, ni por 3, ni por 5, sino por 7, y sale el último cociente 1. Son, pues, los divisores que han servido 2, 3, 3, 5, 7.

Multiplicados

de dos en dos	de tres en tres	de quatro en quatro
$2 \times 3 = 6$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$
$2 \times 5 = 10$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$
$2 \times 7 = 14$	$2 \times 3 \times 7 = 42$	$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$3 \times 3 = 9$	$2 \times 5 \times 7 = 70$	$3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$
$3 \times 5 = 15$	$3 \times 3 \times 5 = 45$	
$3 \times 7 = 21$	$3 \times 3 \times 7 = 63$	
$5 \times 7 = 35$	$3 \times 5 \times 7 = 105$	

de cinco en cinco

$$2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$$

Luego todos los divisores que buscamos son 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 70, 90, 105, 126, 210, 315, 630.

Una vez que el número propuesto es igual al producto de los cinco divisores $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$, es evidente que en dicho número están comprehendidos todos los productos posibles, de dos, tres ó quatro &c. de dichos divisores.

Lo mismo se practica para hallar todos los divisores de una cantidad literal. Supongamos que se me pidan todos los divisores de $b^3d + bbdd$. Divido desde luego por b, y saco el primer cociente $bbd + bdd$: vuelvo á dividir por b, y saco el segundo cociente $bd + dd$: divídole por $b + d$, y saco el tercer cociente d: divídole por d, y saco el último cociente 1. Los divisores que me han servido son b, b, $b + d$, d. Multiplícolos de dos en dos, y saco

$$bb,\ bb + bd,\ bd,\ bd + dd$$

de tres en tres $b^3 + bbd$, $bbd + bdd$, bbd

de quatro en quatro $b^3d + bbdd$.

Luego todos los divisores de la cantidad propuesta son 1, b, $b + d$, d, bb, bbd, bd, $bb + bd$, $bd + dd$, $b^3 + bbd$, $bbd + bdd$, $b^3d + bbdd$.

251. Insertarémos tambien en este lugar el método de hallar la cantidad menor que puedan dividir dos cantidades propuestas a y b.

Si fuesen primeras estas cantidades la una respecto de la otra, su producto ab será la cantidad menor que se pueda dividir por a y b.

Porque no puede haber otra cantidad, c por egemplo, menor que ab cuyos divisores sean a y b. Sea $\frac{c}{a} = m$, y $\frac{c}{b} = n$, será $am = c = bn$, de donde sale $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$; pero como a y b son primeros segun suponemos, será $\frac{a}{b}$ un quebrado reducido á sus menores términos. Luego será a un divisor de n, y menor que n; por lo mismo será b menor que m. Por consiguiente, si en $am = bn = c$ ponemos b en lugar de m, y a en lugar de n, resultará ab y ba, cada uno menor que am y bn, esto es, menor que c. Luego será c mayor que ab contra el supuesto.

En esto se funda el método de hallar la cantidad menor que puedan dividir dos cantidades dadas A y B. Si A y B fuesen cantidades primeras la una respecto de la otra, su producto será, segun acabamos de probar, la cantidad menor que A y B puedan dividir.

252 Si A y B no fuesen primeras, se buscará su mayor divisor comun, que llamarémos m; se las partira cada una por este mayor comun divisor; y suponiendo que sea $\frac{A}{m} = a$, $\frac{B}{m} = b$, tendremos $A = am$, $B = bm$, y sacaremos $\frac{A}{B} = \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$. Finalmente multiplicarémos A por b y B por a; saldra $Ab = aB$, y cada uno de estos dos productos iguales será la menor cantidad que A y B puedan dividir.

Si quisiésemos aplicar la regla para averiguar qual es el número menor que se pueda partir por 30 y 36, buscaríamos su mayor comun divisor $=6$; dividiríamos por 6 cada uno de los dos números propuestos: sacaríamos los cocientes 5 y 6, y escribiríamos de este modo los dos quebrados iguales $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$. Finalmente, multiplicaríamos en cruz 30 por 6, y 36 por 5, y cada uno de los dos productos iguales 180 y 180 seria el número que buscábamos.

Para hallar la menor cantidad que se pueda dividir por a^2b y ad, divídolas por su mayor comun divisor a; saco los cocientes ab y d, escribo $\frac{a^2b}{ad}=\frac{ab}{d}$: multiplico en cruz y saco que a^2bd es la cantidad que busco.

Si se me pregunta qual es la menor cantidad que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, y $(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$ puedan dividir; las dividiria por su mayor divisor comun $a+b$; y despues de hallados los cocientes $a+b$ y $a-b$ escribiria $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{a-b}$, y egecutando la multiplicacion en cruz, sacaria que $a^3+a^2b-ab^2-b^3$ es la cantidad que busco.

Para manifestar la razon de esta práctica, llamarémos A y B las dos cantidades propuestas, d su mayor comun divisor; y supondremos $\frac{A}{d}=a$, $\frac{B}{d}=b$: todo esto supuesto, probarémos facilísimamente que Ab ó su igual aB es la menor cantidad que A y B puedan dividir. Porque si otra cantidad, C por egemplo, menor que las espresadas, fuese divisible por A y B, sea $\frac{C}{A}=m$, $\frac{C}{B}=n$, seria $C=Am=Bn$; luego $\frac{A}{B}=\frac{n}{m}=\frac{a}{b}$. Pero como la razon $\frac{a}{b}$ está reducida á sus menores términos, a será un divisor de n, y b lo será de m; luego a es menor que n, y b menor que m. Por consiguiente si en $C = Am = Bn$, escribimos a en lugar de n y b en lugar de m, resultará C mayor que Ab y que aB. Luego &c.

253 Sentado esto, declaremos el espediente que han discurrido los Calculadores para abreviar el método de resolver las equaciones por medio de los factores del último término.

Supongamos que uno de los divisores del último término sea a, el qual añadido á x forme el factor $x + a$ de una equacion qualquiera. Es constante que si en dicha equacion suponemos succesivamente $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ &c. las cantidades en que estas diferentes substituciones transformarán el primer miembro, serán succesivamente divisibles por $1 + a$, por a, por $-1 + a$ &c. en las quales se transformará el factor $x + a$.

Pero $1 + a$, a, $-1 + a$ están en progresion arismética; luego ninguno de los divisores del último término, al qual queda reducida la equacion por el supuesto de $x = 0$, puede ser el número que buscamos a, á no ser que sea medio proporcional arismético entre otros divisores de los números que resultaren, el uno del supuesto $x = 1$, el otro del supuesto $x = -1$. Y como la diferencia de esta progresion es 1, es preciso que el divisor correspondiente al supuesto $x = 0$, sea de una unidad mayor que el divisor correspondiente al supuesto $x = -1$, y menor de una unidad que el divisor correspondiente al supuesto $x = 1$.

Si entre los divisores del número en que transforma la equacion el supuesto de $x = 0$, hubiere muchos en que concurran las condiciones que acabamos de espresar, será menester hacer $x = 2$, y se buscarán entre los divisores del número que dá este supuesto, los que fuesen una unidad mayores que los que resultaron del supuesto $x = 1$; y así prosiguiendo. En virtud de esta condicion será facil distinguir los factores que dividirán exactamente la equacion. Se percibe, sin que lo prevengamos, que cada uno de los divisores del último termino se ha de probar succesivamente con el signo $+$ y con el signo $-$.

Aplicarémos este método para buscar los divisores comensurables de la equacion $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$. Supondrémos desde luego $x = 1$, cuyo supuesto reduce el primer miembro á 6; el supuesto de $x = 0$ le reduce á 10; y el supuesto de $x = -1$ le reduce á 20. Buscarémos todos los divisores de 6, 10 y 20. Mirarémos despues si entre los divisores de 10 hay algunos que tomados con $+$ ó con $-$ sean una unidad mayores que alguno de los divisores del número 20, y una unidad menores que alguno de los divisores del número 6. Concurren estas condiciones en $+2$ y $+5$, porque 3 y 6 divisores del número 6 son una unidad mayores que 2 y 5 divisores de 10, y estos son una unidad mayores que 1 y 4 divisores de 20. Para mayor claridad podremos escribir como sigue, los supuestos, los resultados, los divisores y las progresiones.

Sup.	Result.	Divisores.	Progr.	
$x = 1$	6	1 . 2 . 3 . 6	3	6
$x = 0$	10	1 . 2 . 5 . 10	2	5
$x = -1$	20	1 . 2 . 4 . 5 . 10 . 20	1	4

Manifiestan estas dos progresiones que seria inutil probar la division de la equacion propuesta por otro factor que $x + 2$ ó $x + 5$; pero no declaran si estos dos factores harán cabal la division. Solo probándolos se podrá conocer, ó, por mejor decir, se averiguará haciendo un nuevo supuesto, por egemplo, $x = 2$ del qual resulta 14. De aqui infiero que como 4 habria de ser uno de los términos de la progresion 1, 2, 3, si la prosiguiéramos, seria preciso que fuese 4 uno de los divisores de 14; y como esto no puede ser, tampoco puede ser $x + 2$ uno de los factores de la equacion propuesta. Como 7 seria uno de los términos de la progresion 4, 5, 6, si la continuáramos, y 14 es divisible por 7, estoy seguro de que si tiene la equacion propuesta algun factor comensurable, no es otro que $x + 5$. Divídola, pues, por $x + 5$, y sale cabal la division. El cociente $x^2 + 2x + 2$ no es mas que del segundo grado y sus dos factores imaginarios $x = 1 \pm \sqrt{-1}$ se sacan sobre la marcha con resolver la equacion $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Con la mira de hacer aun mas perceptible el método, le aplicarémos á la equacion $x^4 - x^3 - 16x^2 + 55x - 75 = 0$. Supondrémos $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, y escribirémos como antes todos los divisores de los resultados 36, 75 y 144 que dán estos supuestos.

Supuest.	Result.	Divisores.	Progres.			
$x = 1$	36	1 . 2 . 3 . 4 . 6 . 9 . 12 . 18 . 36	4	-2	6	-4
$x = 0$	75	1 . 3 . 5 . 15 . 25 . 75	3	-3	5	-5
$x = -1$	144	1 . 2 . 3 . 4 . 6 . 8 . 9 . 12 . 16 . 18 . 24 . 36 . 48 . 72 . 144	2	-4	4	-6

Buscarémos despues entre los divisores de 75 los que son una unidad mayores que alguno de los divisores de 144, y una unidad menores que alguno de los divisores de 36. Esta circunstancia se halla en los números 3 y 5 tomándolos así con $+$ como con $-$, de donde resultan quatro progresiones.

Como el último término de la equacion propuesta no pasa de -75, no puede ser el producto de los quatro números hallados; por consiguiente no todos pueden servir, y conviene averiguar quales son los que se han de desechar. A cuyo fin supondrémos $x = 2$; y por no ser divisible el resultado 21 por 5, conforme pediria la primera progresion, inferirémos que $x + 3$ no es uno de los factores que busco.

Para comprobar las otras tres progresiones, supondremos $x = -2$, y saldrá el resultado 225. Pero 225 no es divisible por 7, como sería preciso para proseguir la quarta progresion $-4, -5, -6$: luego tampoco sirve $x - 5$. Pero 225 es divisible por 5 y por 3, conforme requieren la segunda y tercera progresion; luego los únicos factores que se pueden probar son $x - 3$ y $x + 5$.

Pruebo el primero, sale bien la division, y dá el cociente $x^3 + 2x^2 - 10x + 25$. Le divido por el segundo: sale tambien cabal la division, y el cociente $x^2 - 3x + 5$ no tiene mas factores comensurables.

Por estos egemplos se echa de ver con qué facilidad se hallan los factores lineares de una equacion numérica quando los tiene. El método es facil, y aunque se practica algo á tientas, no deja de ser apreciable por las pruebas inútiles que ahorra.

254 Contra este método puede ofrecerse un reparo que es muy del caso satisfacer. Si la raiz de la equacion, ó el segundo término de su factor linear fuese un quebrado, y no un número entero, parece que seria casi imposible hallar así á tientas su valor, porque el último término puede ser dividido por una infinidad de fracciones.

Pero quando en una equacion no hay quebrado alguno, no hay tampoco fraccion alguna que pueda ser el valor de la incógnita. Sea, por egemplo, la equacion $xx + ax + b = 0$, en la qual suponemos que ni a ni b son quebrados. Supongamos que sea $\frac{m}{n}$ el valor de x; substituyéndole en lugar de x en la equacion, tendremos $\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} + b = 0$; luego $\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} = -b$; por consiguiente $\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n}$, ó $\left(\frac{m}{n} + a\right)$. $\frac{m}{n}$ ha de ser un número entero, pues suponemos que b lo es; luego $\frac{m}{n} + a$ ha de ser n, ó multiplo de n. Si fuese, pongo por caso, fn, tendremos, practicando la substitucion correspondiente, $\frac{m}{n} = fn - a$; pero esta última cantidad es un número entero; luego lo será tambien $\frac{m}{n}$, contra lo que hemos supuesto. Se puede aplicar este razonamiento á qualquiera equacion, sea el qué fuere su grado.

255 Como puede suceder que una equacion propuesta, si pasare del segundo grado, no se pueda resolver sino en factores del segundo, dirémos de paso como se pueden hallar.

Si representamos por $xx + bx + c = 0$ el divisor de dos dimensiones de una cantidad dada, es evidente que con hacer succesivamente $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$ en la equacion, las cantidades en que se transformará, serán divisibles succesivamente por $4 + 2b + c$, por $1 + b + c$, por c, por $1 - b + c$, y por $4 - 2b + c$, en que se transforma entónces el divisor $x^2 + bx + c$. Habrá, pues, entre los divisores del resultado que proviniere del supuesto $x = 2$, un número que representará $4 + 2b + c$, y si de cada uno de estos divisores tomándolos con $+$ y con $-$ se resta 4, alguna de las restas representará $2b + c$.

Habra tambien entre los divisores del resultado que diere $x = 1$, un número que representará $1 + b + c$. Luego si de todos estos divisores, tomándolos con $+$ y con $-$, se restáre la unidad, se hallará entre las restas la cantidad $b + c$.

Entre los divisores del último término de la equacion, al qual la reduce el supuesto $x = 0$, habrá un número que representará c.

Entre los divisores del resultado que diere el supuesto $x = -1$. se hallará $-b+c$, despues de restada la unidad de cada uno de dichos divisores. Finalmente se hallará $4-2b+c$ en la serie de los divisores del resultado procedente del supuesto $x=-2$; y si de cada uno de estos divisores, tomándolos con $+$ y con $-$ se restare 4, alguna de las restas representará $-2b+c$.

Es de observar que $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$ forman una progresion arismética, y que por consiguiente en las series de los números que representan $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$ no se deberán tomar sino proporcionales arisméticos. El que correspondiere al supuesto $x=0$, representará c: el que correspondiere á $x=1$, será $b+c$: luego si se restare el que representa c del que representa $b+c$, saldrá el valor de b, y por lo mismo quedará determinado el factor $xx+bx+c$.

En la aplicacion de este método podrán tambien ocurrir progresiones inutiles. Pero luego se conocerán con hacer un nuevo supuesto de $x=3$ ó -3 porque si de todos los divisores positivos y negativos del nuevo resultado se restare 9, habrá de haber entre las restas números á proposito para proseguir las progresiones que se hubieren de admitir.

Es del caso prevenir, que la cantidad que se ha de restar cada vez de los divisores es el quadrado del valor correspondiente de x. Despues de todo lo dicho queda bastante declarado el método; pero le harán aun mas perceptible los dos egemplos siguientes.

Supongamos que se me pregunte si la equacion $x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = 0$ tiene factores comensurables del segundo grado?

Escribo los supuestos en una primera columna: los resultados en la que se la sigue, en la tercera los divisores, en la quarta los quadrados, en la quinta las restas, en la última las progresiones.

Sup.	Res.	Divis.	Q.	Rest.	Progres.			
$x = 2$	15	1,3,5,15	4	$-19, -9, -7, -5, -3, -1, +1, +11$	-3	1	-5	11
$x = 1$	9	1,3,9	1	$-10, -4, -2, -0, +2, +8$	-4	0	-2	8
$x = 0$	5	1,5	0	$-5, -1, +1, +5$	-5	-1	$+1$	5
$x = -1$	15	1,3,5,15	1	$-16, -6, -4, -2, -0, +2, +4, +14$	-6	-2	4	2
$x = -2$	33	1,3,11,33	4	$-37, -15, -7, -5, -3, -1, +7, +29$	-7	-3	7	-1

La columna de las restas se forma, segun llevamos dicho, restando de todos los divisores correspondientes, tomándolos con + y con −, el quadrado del valor correspondiente de x. La primera línea, por egemplo, se forma con decir $-15 - 4 = -19$; $-5 - 4 = -9$; $-3 - 4 = -7$; $-1 - 4 = -5$. Estas son todas las restas de los divisores de 15 tomándolos con −. Para sacarlas quando se toman dichos divisores con +, basta decir $+1 - 4 = -3$, $+3 - 4 = -1$; $+5 - 4 = +1$; $+15 - 4 = +11$. Las líneas siguientes se forman del mismo modo: no hay mas cantidad que varíe en cada una sino la que se ha de restar.

Comparemos ahora las restas de la tercera línea, que corresponde á $x = 0$, con las restas de las líneas superior é inferior, con el fin de hallar progresiones. Veo desde luego que -5 es medio proporcional entre -4 y -3, que están arriba, y -6 y -7 que están en las dos últimas líneas. Escribo la primera progresion, y comparo sucesivamente -5 con todos los demas números superiores é inferiores, para ver si hay otra progresion, y no hallo ninguna mas.

Comparo -1, que tampoco dá mas de una progresion, cuya diferencia es 1. Comparo despues $+1$, que dá otra, cuya diferencia es 3. Comparo finalmente $+5$ que da la quarta. Pero se viene á los ojos, que no sirven todas estas quatro progresiones, pues no es mas que 5 (241) el último término de la equacion.

Para ver si puedo desechar alguna, supongo $x = 3$, y saco el resultado 23, cuyos divisores son 1 y 23. Si resto de estos divisores, tomándolos con $+$ y con $-$, el quadrado de 3, hallo estas quatro restas -32, -10, -8, $+14$, entre las quales faltan -2 y $+2$, que son indispensables para continuar las dos primeras progresiones, que por lo mismo se han de desechar.

Por lo que toca á las dos últimas, se echa de ver que se pueden proseguir con -8, y con $+14$. Por cuyo motivo tomo en la penúltima el término $+1$, que corresponde á $x = 0$, para que represente c, y el término -2, que corresponde á $x = 1$, para que represente $b + c$. De donde infiero que $b = -3$, y que por consiguiente el primer factor que he de probar es $x^2 - 3x + 1$.

Pruébole con efecto: sale cabal la division, y saco el cociente $x^2 + 3x + 5$. Son, pues, los dos factores de la equacion propuesta $x^2 - 3x + 1$ y $x^2 + 3x + 5$, que se podrán resolver, si se quisiere, por el método de las equaciones del segundo grado.

Si se me pidieran los factores comensurables de segundo grado de la equacion $x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 8x - 2 = 0$, supondria desde luego $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, y buscaria todos los divisores de los resultados 30, 15, 2, 3 y 78: lo demas lo dará á entender la esplicacion siguiente.

Sup.	Res.	Divis.	Q.
$x = 2$	30	1 . 2 . 3 . 5 . 6 . 10 . 15 . 30	4
$x = 1$	15	1 . 3 . 5 . 15 .	1
$x = 0$	2	1 . 2 .	0
$x = -1$	3	1 . 3 .	1
$x = -2$	78	1 . 2 . 3 . 6 . 13 . 26 . 39 . 78	4

Restas.	Progres.		
−34. −19. −14. −10. −9. −7. −6. −5. −3. −2. −1. +1. +2. +6. +11. +26	−6	+2	6
−16. −6. −4. −2. −0. +2. +4. +14.	−4	0	4
−2. −1. +1. +2.	−2	−2	2
−4. −2. 0. +2.	0	−4	0
−82. −43. −30. −17. −10. −7. −6. −5. −3. −2. −1. +2. +9. +22. +35. +74	+2	−6	−2

Si supongo $x = 3$, veré que de las tres progresiones que da este egemplo, he de desechar las dos últimas; porque como el resultado 37 no tiene mas divisores que 1 y 37, hallaré que restando 9 de dichos divisores, tomándolos positiva y negativamente, las restas -46, -10, -8, $+28$, no permiten que se prosiga mas progresion que la primera, de la qual será -8 un término.

Saco, pues, que -2 representará c, y -4 representará $b + c$: luego $b = -2$. Por consiguiente, si tiene la equacion propuesta algun divisor comensurable de dos dimensiones, no puede ser otro que $x^2 - 2x - 2$: probó la division, y sale el cociente cabal $x^3 + 3x + 1$.

256 Con igual facilidad se aplica á las equaciones literales el método que hemos declarado para hallar los factores racionales de las equaciones numéricas. Para cuya aplicacion supondrémos primero que no contiene la equacion propuesta mas letras que x y a; pero de conformidad que en cada término sea una misma la suma de los esponentes de a y x.

Supondrémos despues $a = 1$, y buscarémos los factores racionales de la equacion que de este supuesto resultare. Si fueren lineares, se multiplicará su segundo término por a: si fueren del segundo grado, se multiplicará su segundo término por a, el tercero por aa, y resultarán los factores que se buscan.

Sea la equacion propuesta $x^3 + 4ax^2 - 17a^2x - 12a^3 = 0$. Si suponemos $a = 1$, resultará la equacion numérica $x^3 + 4x^2 - 17x - 12 = 0$, de la qual hallarémos por el método de los divisores que $x - 3$ es un factor linear: luego será $x - 3a$ un factor linear de la equacion literal propuesta.

Si la propuesta fuese $2x^5 + 5ax^4 - 3a^2x^3 - 8a^3x^2 - 20a^4x + 12a^5 = 0$, del supuesto $a = 1$ sacarémos $2x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 20x + 12 = 0$, de la qual $2x^2 + 5x - 3$ es un factor de dos dimensiones; y por consiguiente será $2x^2 + 5ax - 3aa$ un factor de dos dimensiones de la equacion propuesta.

257 Aunque se podrian hallar por el mismo camino los factores lineares y de dos dimensiones de las equaciones que ademas de x tienen las cantidades a y b, se puede no obstante seguir respecto de estas equaciones un camino mucho mas breve.

Se indagará primero si la equacion tiene factores en que no haya mas cantidades que a y x. Y como en este supuesto b no ha de estar en el factor, se podrá egecutar igualmente la division, aunque $b = 0$; la equacion que quedare tendrá el mismo factor, el qual será tambien un divisor así de la resta, como de toda la cantidad, esto es, de los términos borrados. Por lo que, si se buscare el mayor comun divisor de las dos cantidades, se hallará el factor que se busca compuesto de dos letras, sea el que fuere su grado.

Propongámonos buscar por este camino un factor de la equacion $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + ab^2x + a^4 + a^2b^2 = 0$, cuyo factor no ha de tener mas cantidades que x y a. La quitarémos todos los términos en que está b, esto es, $abbx + a^2b^2$, y quedarán los términos $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4$. Buscarémos un divisor comun de las dos cantidades: saldrá $x + a$, que será por consiguiente un factor de la propuesta.

Si se buscase un factor de $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - abx^3 + abbx^2 + 2a^2bx^2 - 4a^3x^2 - 2a^2b^2x - 2a^3bx + 2a^3b^2 = 0$, se separarian los términos en que está b, y quedaria dividida la propuesta en las dos cantidades ...

$(A) - abx^3 + abbx^2 + 2a^2bx^2 - 2a^2b^2x - 2a^3bx + 2a^3b^2$ y $(B) x^5 - 4ax^4 + 6a^2x^3 - 4a^3x^2$, de las quales se buscaria el divisor comun. Despues de dividida la cantidad (A) por b, se separarán los términos en que quedare b, y estará dividida en las dos partes $(C)\ abx^2 - 2a^2bx + 2a^3b$ y $(D) - ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x$. El mismo divisor comun de las cantidades A y B, lo será tambien de las dos C y D; el divisor comun de estas es $x^2 - 2ax + 2aa$, pruebo si divide tambien la cantidad A, y como la divide cabalmente, es con efecto $x^2 - 2ax + 2aa$ un factor de la equacion propuesta.

258 Consideremos ahora una equacion en que esten las tres letras x, a, b, tal que no tenga factor alguno de solas dos letras, sea porque nunca le tuvo, ó por habérsele quitado ya. Representaré su factor linear compuesto de tres letras por $mx + na + pb$; en cuya cantidad si hacemos sucesivamente a, x, $b = 0$ el factor se transformará en estos tres $mx + pb$, $na + pb$, $mx + na$. Reparo que en estos factores se halla dos veces un mismo término; porque si atiendo al primero, el término mx se halla tambien en el tercero, y pb en el segundo, y que su suma es dupla de todo el divisor. Se viene por otra parte á los ojos que las tres cantidades $mx + pb$, $na + pb$, $mx + na$ dividen la equacion propuesta, con tal que en ella se supongan sucesivamente iguales á cero a, x y b. Por lo que se sacarán los divisores lineares de dicha equacion, haciendo sucesivamente a, x, b iguales á cero, escribiendo las tres

cantidades distintas compuestas de solas dos letras, que resultaren de estos tres supuestos. Entre estas se escogerán dos en que concurra la condicion espresada, de que cada uno de sus términos se halle en las otras dos. En hallando divisores en que concurran estas circunstancias, la mitad de su suma será el factor linear de la equacion propuesta. Si para hallar tres divisores de dos letras en que se verifiquen las condiciones mencionadas, fuere menester mudar los signos de ambos términos de alguno de ellos, será indispensable egecutarlo, porque una cantidad que divide otra, la dividirá tambien aunque se la muden los signos.

Apliquemos todo lo que vá declarado para hallar un divisor linear de tres letras de la equacion $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10ab^2 - 6b^3 = 0$.

Sup.	Result.	Divis.	Divis.
$x = 0$	$10abb - 6b^3$	$5a - 3b$, $10a - 6b$	$5a - 3b$
$a = 0$	$2x^3 - 3bx^2 + 4b^2x - 6b^3$	$2x - 3b$	$2x - 3b$
$b = 0$	$2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$	$2x + 5a$	$2x + 5a$

En la primera columna escribo los supuestos, en la segunda los resultados, en la tercera todos sus divisores de dos letras, y en la última los tres divisores en que concurre la condicion espresada de que los términos de cada uno se hallen en los otros dos. Sumo unos con otros estos tres divisores: tomo la mitad de la suma, y saco $2x + 5a - 3b$, que es el factor de la propuesta, pues la divide cabalmente, y sale de la division el cociente $x^2 + ax + 2bb$.

Si fuese la propuesta $8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12abbx + 9a^2b^2 + 15ab^3 = 0$.

Escribiré en la primera columna los supuestos, en la segunda los resultados, en la tercera todos sus divisores de dos dimensiones, conforme sigue

Sup.	Result.	Divis.	Div. buenos
$x = 0$	$9a^2b^2 + 15ab^3$	$3a + 5b,\ 9a + 15b$	$-3a-5$
$a = 0$	$8x^4 - 10bx^3$	$4x - 5b,\ 8x - 10b$	$4x-5$
$b = 0$	$8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$	$4x - 3a,\ 2x + a$	$4x-3$

Si al primero de los divisores de dos letras le mudo los signos, resultarán tres en que concurren las condiciones necesarias, y los escribo en la quarta columna. La cantidad $4x - 3a - 5b$ que es la mitad de la suma de estos tres divisores, es un factor de la equacion propuesta, y egecutando la division saldrá el cociente $2x^3 + ax^2 - 3abb$.

259 Para hallar los divisores de dos dimensiones, se practicará con muy poca diferencia lo propio que acabamos de declarar acerca de los divisores de una dimension. Supongamos que el factor que busco sea $mx^2 + nax + pbx + qa^2 + rab + sb^2$, el qual si suponemos sucesivamente x, a, $b = 0$ se convertirá en estos tres

$$qa^2 + rab + sb^2$$
$$mx^2 + pbx + sb^2$$
$$mx^2 + nax + qa^2$$

que sin duda alguna dividirán la propuesta, si en ella supusiéremos sucesivamente x, a, $b = 0$. Acerca de estos divisores conviene considerar que los que contienen los quadrados de las letras x, a, b están repetidos, y que no se hallan mas de una vez los que contienen un rectángulo de dos de dichas letras. Por cuyo motivo en los tres divisores de dos letras que se escogieren, será preciso que se verifique la condicion de que esten repetidos los quadrados y que nunca lo esten los rectángulos. En hallándolos con esta circunstancia, se tomará la mitad de la suma de los quadrados, y la suma entera de los rectángulos, y la cantidad que resultare será el factor que se busca.

Supongamos que se me pida un factor de dos letras y de dos dimensiones de la equacion $x^4 - 3ax^3 - a^2x^2 + abx^2 - b^2x^2 + 3a^3x - 3ab^2x - a^3b - ab^3 = 0$.

Sup.	Result.	Divis. de dos dim.	Divis. buenos.	
$x = 0$	$-a^3b - ab^3$	ab, $aa + bb$	ab	$-a^2 - b^2$
$a = 0$	$x^4 - b^2x^2$	x^2, $x^2 - b^2$	x^2	$x^2 - b^2$
$b = 0$	$x^4 - 3ax^3 - a^2x^2 + 3a^3x$	$x^2 - 3ax$, $x^2 - a^2$	$x^2 - 3ax$	$x^2 - a^2$

En la primera columna escribo los supuestos, en la segunda los resultados, en la tercera sus divisores de dos dimensiones, en la quarta y quinta columna los divisores en que concurren las condiciones espresadas. Si de estos se toma la mitad de la suma de los quadrados, y la suma entera de los rectángulos, resultarán los dos factores $xx - 3ax + ab$, $xx - aa - bb$, que si se multiplican uno por otro darán la equacion propuesta.

Es de advertir que el rectángulo ab que es el uno de los tres primeros factores, puede ser positivo y negativo, y solo con probar la division se podrá averiguar qué signo ha de llevar. Si se dividiera la equacion propuesta por $xx - 3ax - ab$, no se podria egecutar la division: luego no puede ser esta cantidad un factor de la propuesta. Como se puede egecutar por $xx - 3ax + ab$ infiero que este es el factor que se buscaba.

Resolucion de las equaciones por qualesquiera factores.

260 Hemos dado hasta aquí métodos para resolver las equaciones en sus factores racionales: resta enseñar ahora el camino que se debe seguir para hallar sus factores, sea la que fuere su naturaleza. Tiene á la verdad el método que vamos á proponer el mismo vicio que los antecedentes, de practicarse á tientas; pero no podemos omitirle atendida su generalidad, porque se aplica á las equaciones de qualesquiera grados; bien que nosotros nos ceñirémos á muy pocos egemplos.

Supongamos que la equacion, cuyos factores he de buscar, sea $x^4 + ax^3 + aax^2 - a^2bx - a^3b = 0$.

$$ - abx^2$$

Como es del quarto grado, supondré que resulta de la multiplicacion de estas dos equaciones $xx + mx + p = 0$, $xx + nx + q = 0$, que llamamos equaciones indeterminadas, por serlo n, p, m, q, que hemos de determinar para substituir despues sus valores en su lugar. El producto de las dos equaciones indeterminadas es

$$\begin{aligned} x^4 + mx^3 &+ px^2 + npx + pq = 0 \\ + nx^3 &+ mnx^2 + mqx \\ &+ qx^2 \end{aligned}$$

que por el supuesto que hago de resultar tambien la propuesta de la multiplicacion de las dos equaciones indeterminadas, ha de ser la misma que la propuesta, y habrá por consiguiente igualdad entre cada término de la propuesta y su correspondiente en el producto que acabo de sacar.

Comparo, pues, estos términos correspondientes, y de la comparacion de los segundos saco $n = a - m$: de la de los últimos sale $q = -\frac{a^3 b}{p}$, y la comparacion de los quartos me dá $mq + np = -a^2 b$. Substituyo en esta los valores de n y q, con la mira de sacar la siguiente equacion en m y p, $m = \frac{ap^2 + a^2 bp}{pp + a^3 b}$. La equacion $q = -\frac{a^3 b}{p}$ me está diciendo que p es un divisor del término $a^3 b$. Buscaré, pues, todos los divisores de dos dimensiones de esta cantidad, despreciando los de una ó tres dimensiones, porque son del segundo grado las equaciones indeterminadas. Estos divisores son $\pm ab$, $\pm aa$, $\pm a\sqrt{ab}$. Pruebo el primero, y hago $p = ab$, cuyo valor dará $m = \frac{2ab}{a+b}$. Así una de las dos equaciones indeterminadas será $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = 0$, que no divide cabalmente la propuesta; de donde infiero, que es inútil el divisor que he escogido. Pruebo, pues, otro, pongo por caso $-ab$, haciendo $p = -ab$, de lo que resulta $m = 0$: luego la equacion indeterminada será $xx - ab = 0$. Esta divide con efecto la equacion propuesta, y sale el cociente $xx + ax + aa$; de lo que infiero que se resuelve la propuesta en estas dos $xx - ab = 0$, y $xx + ax + aa = 0$. Si hubiera tomado $p = aa$, hubiera hallado $m = a$, y se hubiera transformado la equacion indeterminada en $xx + ax + aa = 0$, y dividiendo por ella la propuesta, hubiera sacado $xx - ab = 0$.

Si despues de probados todos los divisores no se pudiese egecutar por ninguno de ellos la division, sería señal de que no sería *reductible* la propuesta, á lo menos por este método.

Hay un camino para ahorrar divisiones inútiles en la práctica de este método, y se reduce á buscar los valores de m, n, q por medio del valor de a; cuyos valores se substituirán en las dos indeterminadas, se multiplicarán estas una por otra, y si resultáre la propuesta, se habrá logrado el intento; sino, será indispensable probar otros divisores.

De la comparacion de los terceros términos resulta la equacion $p + mn + q = aa - ab$, de la qual no hemos hecho uso alguno, y podrá servir para hacer con mas brevedad esta comparacion. Si de substituir en esta equacion los valores de p, m, n, q resultáre una equacion idéntica; esto es, cuyos dos miembros se compongan de unos mismos términos con los mismos signos, conducirán para la resolucion de la propuesta: sino, no.

Busquemos los factores de la equacion $x^4 + 2bx^3 + bbx^2 - a^3b = 0$. Compararémos todos sus términos con los del producto de las dos equaciones indeterminadas de arriba, cada uno con el que le corresponde en la propuesta, y saldrán quatro equaciones $m + n = 2b$, $p + mn + q = bb$, $mq + np = 0$, $pq = -a^3b$. De la primera sale $n = 2b - m$: de la última, $q = \frac{-a^3b}{p}$. Substitúyanse estos valores de n y q en la tercera; saldrá $\frac{-a^3b}{p}m + 2bp - mp = 0$; esto es, $m = \frac{2bpp}{a^3b+pp}$. Como la equacion $q = \frac{-a^3b}{p}$ nos está diciendo que p es un divisor de $-a^3b$, buscarémos todos los divisores de segunda órden de esta cantidad, que son $\pm a^2$, $\pm ab$, $\pm a\sqrt{ba}$. Con hacer la prueba de los dos primeros se saca que ambos son inútiles, porque no sale idéntica la segunda equacion. Haciendo la prueba con $a\sqrt{ab}$; y suponiendo $p = a\sqrt{ab}$, sale $m = b$. La equacion $q = -\frac{a^3b}{p}$ será $q = -\frac{a^3b}{a\sqrt{ab}} = -\frac{a^3b}{\sqrt{a^3b}} = -\frac{\sqrt{a^3b} \times \sqrt{a^3b}}{\sqrt{a^3b}} = -\sqrt{a^3b} = -a\sqrt{ab}$; substituyendo este valor en la equacion $p + mn + q = bb$, y tambien en lugar de mn la cantidad que dén los valores hallados de m y n, resultará finalmente $a\sqrt{ab} + bb - a\sqrt{ab} = bb$: luego estos valores dán la resolucion de la propuesta. Por consiguiente las equaciones indeterminadas serán $xx + bx + a\sqrt{ab} = 0$, $xx + bx - a\sqrt{ab} = 0$; y se hubieran sacado las mismas con hacer $p = -a\sqrt{ab}$. Con efecto la multiplicacion de estas dos equaciones dá la propuesta.

261 Aunque se puede aplicar este método á las equaciones de grados superiores, es no obstante respecto de estas mucho mas dificultosa su aplicacion, por ser mucho mayor el número de los términos. Si quisiéramos probarle en una equacion de octavo grado, para resolverla en dos de quarto grado, habria quatro indeterminadas en cada equacion indeterminada, y sería indispensable resolver, para llegar al fin propuesto, equaciones del tercer grado que en algunas ocasiones no se manejan con facilidad.

Harémos no obstante, antes de pasar á otro asunto, una prevencion que podrá dirigir á los que tubieren deseos de egercitarse en esta investigacion.

Así como para hallar los factores de las equaciones de quarto grado hemos tomado dos equaciones indeterminadas del segundo grado, si se nos ofreciere buscar los de una equacion de quinto grado, tomaríamos dos indeterminadas, la una del segundo y la otra del tercer grado, porque el producto de estas dos siempre dará una equacion de quinto grado.

Si fuese la propuesta de sesto grado, no hay duda en que se podrian tomar tres indeterminadas, cada una del segundo grado; porque puede resolverse en ciertos casos una equacion de sesto grado en tres del segundo. Sin embargo, mejor será tomar dos indeterminadas la una del segundo grado y la otra del quarto, y despues se podrá resolver esta última en dos factores de segundo grado.

Método para resolver las Equaciones quando no se pueden hallar sus factores.

262 Ocurren muchas equaciones que por ninguno de los métodos hasta aqui declarados se pueden resolver en sus factores así lineares como de grados superiores; por lo que se han hallado los Analystas en la precision de buscar otro camino por donde llegar á la resolucion de las equaciones en que paran por lo comun todos sus cálculos. Como no es ni puede ser mi ánimo escribir un tratado de

propósito de Análysis, me ceñiré á la resolucion de las equaciones de tercero y quarto grado, enseñando primero, como es razon, el camino por donde se llega á la resolucion de las primeras, ya por ser menos elevado su grado, ya porque han puesto los Analystas las cosas en términos de que se reduce á resolver una equacion de tercer grado la tarea en que empeña la resolucion de las del quarto grado.

Resolucion de las Equaciones de tercer grado.

263 Es sumamente sencillo el principio en que se funda el método que vamos á declarar: consiste en suponer que una raiz qualquiera de una cantidad propuesta está multiplicada por una raiz semejante de la unidad, pues la cantidad misma está siempre multiplicada por la misma unidad. Por consiguiente, si tubiere la unidad tres raices cúbicas, por egemplo, la raiz cúbica de una cantidad propuesta tendrá tres espresiones, cada una de las quales será la raiz cúbica de dicha cantidad multiplicada por una de las tres raices cúbicas de la unidad. Pero probarémos con muchísima facilidad que son tres con efecto las raices cúbicas de la unidad, y que la una es real, siendo imaginarias las otras dos. Porque si suponemos $x = 1$, y levantamos ambos miembros al cubo, resultará $x^3 = 1$, ó $x^3 - 1 = 0$, cuyas raices espresarán las tres raices cúbicas de la unidad. Sé desde luego que 1 es una raiz de $x^3 - 1 = 0$, y que por lo mismo puedo dividir (249) $x^3 - 1 = 0$ por $x - 1$: y egecutando la division, sa-

le el cociente $x^2 + x + 1 = 0$, de cuya resolucion saco los dos valores $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, que me están diciendo que las otras raices cúbicas de la unidad son imaginarias.

264 Sentado este principio, vamos á resolver una equacion de tercer grado; y para que sea mas manejable, supondrémos que carezca de segundo término, pues si acaso le tuviere, se podrá eliminar practicando lo dicho arriba (248). Representarémos toda equacion de tercer grado destituida de segundo término por esta equacion general $x^3 + px + q = 0$, en la qual pueden ser p y q cantidades dadas, positivas ó negativas. Supongo tambien $x = m + n$; levántolo todo á la tercera potencia, y saco $x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = m^3 + 3mn(m+n) + n^3$. En lugar del binomio $m + n$ substituyo su igual x; paso todos los términos á un lado, y saco $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$ que es, como se vé, una equacion de tercer grado destituida de segundo término. Comparo la equacion hallada con la propuesta, y sale $-3mn = p$, $-m^3 - n^3 = q$. De la primera saco $-n = \frac{p}{3m}$, y $-n^3 = \frac{p^3}{27m^3}$. Substituyendo este valor de $-n^3$ en la segunda, saldrá $-m^3 + \frac{p^3}{27m^3} = q$. Multiplícolo todo por m^3; sale $-m^6 + \frac{p^3}{27} = m^3q$: traslado $-m^6$, y saco $m^6 + qm^3 = \frac{p^3}{27}$. Resuelvo finalmente esta equacion por el método (167) de las del segundo grado, y saco $m^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$, y $m = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$ y por el mismo camino hallaríamos $n = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$.

Como toda raiz tercera puede tener tres valores (263) nos valdremos para espresarlos de las tres raices cúbicas de la unidad, con cuyo artificio sacaremos los siguientes valores de m:

$$\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}$$
$$\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Valores de n

$$\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}$$
$$\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Aunque estos valores se pueden combinar de nueve maneras, no se han de admitir sino aquellos que, multiplicados unos por otros, dán la cantidad p que, segun hemos visto, $=-3mn$. Siguiendo este camino hallaremos que las raices de la equacion general propuesta $x^3+px+q=0$ son

$$x=\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}$$
$$x=\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$x=\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

No le quedará duda alguna acerca de esto al que considerare que las nueve raices que pueden resultar de las nueve combinaciones de los valores de m y n, pertenecen á una equacion del grado noveno; y como esta se puede resolver en tres del tercer grado (261), se sigue, que tres de las nueve combinaciones han de ser las raices de la equacion propuesta de tercer grado. Entre las nueve combinaciones hemos escogido aquellas en que los valores de m y n, multiplicados unos por otros, producen la cantidad p, porque el término $+ px$ de la propuesta corresponde al término $- 3mnx$ de la equacion general, de donde resulta $- 3mn = p$; y que los valores que cumplen con esta condicion, son los que dán las raices de la equacion propuesta.

265 Si consideramos con cuidado los tres valores de x que acabamos de hallar, sacaremos 1.º que si p fuere positiva, la cantidad $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ será siempre positiva, porque $\frac{1}{4}q^2$ que es el quadrado de $\frac{1}{2}q$, ha de ser positivo, aun quando fuese q negativa. 2.º que en el supuesto de ser p negativa, será igualmente positiva la cantidad $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, si fuese $\frac{1}{4}q^2$ mayor que $\frac{1}{27}p^3$. En estos dos casos los dos últimos valores de x serán imaginarios, porque los dos radicales cúbicos serán cantidades reales y desiguales; cuyos productos por las cantidades $\sqrt{-3}$ y $-\sqrt{-3}$ que llevan signos contrarios, no se destruirán mútuamente; por lo que habrá de quedar alguna cantidad imaginaria en cada uno de los espresados valores de x. Por consiguiente, no habrá en los dos casos mencionados mas valor real de x que el primero.

3.º Pero en el caso de ser p negativa, y $\frac{1}{27}p^3$ mayor que $\frac{1}{4}q^2$, será indispensablemente negativa la cantidad $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, y será por consiguiente imaginaria la cantidad $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, en que transforma $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ el supuesto de ser p negativa. No obstante, siempre serán reales en este caso los tres valores de x.

Para demostrarlo nos valdremos de lo dicho (99), y á fin de que sea menos embarazoso el cálculo, supondremos $\frac{1}{2}q = f$; $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = g$. Será, pues, $m = \ldots\ldots$ $\sqrt[3]{(-f + \sqrt{g})} = (-f + \sqrt{g})^{\frac{1}{3}}$, y $n = \sqrt[3]{(-f - \sqrt{g})}$ será $(-f - \sqrt{g})^{\frac{1}{3}}$. Si levantamos estas cantidades á las potencias que manifiestan sus esponentes, tendremos

$$m = -f^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}\sqrt{g} - \tfrac{1}{9}f^{-\frac{5}{3}}g - \tfrac{5}{81}f^{-\frac{8}{3}}g\sqrt{g} + \tfrac{10}{243}f^{-\frac{11}{3}}g^2 + \&c.$$
$$n = -f^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}\sqrt{g} - \tfrac{1}{9}f^{-\frac{5}{3}}g + \tfrac{5}{81}f^{-\frac{8}{3}}g\sqrt{g} + \tfrac{10}{243}f^{-\frac{11}{3}}g^2 - \&c.$$

.... En cuyas dos series es de reparar que los términos en que está $\sqrt{g}$, llevan signos contrarios, llevando todos los demás unos mismos signos. Por consiguiente, su suma siempre será

$$-2f^{\frac{1}{3}} - \tfrac{2}{9}f^{-\frac{5}{3}}g + \tfrac{20}{243}f^{-\frac{11}{3}}g^2 \&c.$$

en que no hay cantidad alguna imaginaria sea g positiva ó negativa, por haberse desaparecido $\sqrt{g}$. Por consiguiente es siempre real la primera raiz de las equaciones de tercer grado, cuya espresion es $m + n$.

Por lo que mira á la segunda raiz, cuya espresion es $m.\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + n.\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ que despues de egecutadas las multiplicaciones indicadas, se transforma en $\frac{-m+m\sqrt{-3}}{2} - \frac{n-n\sqrt{-3}}{2} = \frac{-m-n}{2} + \frac{(m-n)\sqrt{-3}}{2}$: la primera de las dos cantidades de que consta, esto es $\frac{-m-n}{2}$, es siempre real, segun acabamos de probar. Para sacar la otra cantidad $\frac{(m-n)\sqrt{-3}}{2}$, se restará la segunda serie de la primera, se partirá por 2 la diferencia, y resultará $\frac{m-n}{2} = \frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}\sqrt{g}$,

$-\frac{5}{81}f^{-\frac{1}{3}}g\sqrt{g}$ &c. en cuya cantidad no hay término alguno de los que no llevan $\sqrt{g}$, y están todos aquellos en que está. Luego $\left(\frac{m-n}{2}\right)\sqrt{-3}$ será real ó imaginaria, conforme el producto de $\sqrt{g}$ por $\sqrt{-3}$ fuere real ó imaginario; cuyo producto será imaginario si g fuere positiva, y será real, si fuere g negativa. Por consiguiente, la segunda raiz $m.\frac{(-1+\sqrt{-3})}{2} + n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ será tambien real quando g fuese negativa, esto es, quando $\frac{1}{27}p^3$ fuese mayor que $\frac{1}{4}q^2$; y será imaginaria quando fuere g positiva, ó $\frac{1}{4}q^2$ mayor que $\frac{1}{27}p^3$. Con igual facilidad probaríamos lo mismo respecto de la tercera raiz, cuya espresion es.... $m.\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + n.\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$.

266 El caso en que son reales las tres raices de una equacion de tercer grado, ha dado muchísimo que hacer á todos los calculadores, entre los quales se ha hecho famoso con el nombre de *caso irreductible*, por no haber podido hallar hasta ahora, á pesar de todos sus esfuerzos, otro modo de espresarlas algebráicamente sin imaginarias sino es por aproxîmacion.

Supongamos ahora que se nos ofrezca sacar las tres raices de la equacion $y^3 - 3y^2 + 12y - 4 = 0$. Empezaremos eliminando el segundo término, substituyendo en la propuesta $x + 1$ y sus potencias en lugar de y y sus potencias, y resultará la transformada $x^3 + 9x + 6 = 0$ que carece de segundo término.

La comparacion de la transformada con la equacion general $x^3 + px + q = 0$ dá $p = 9$; $q = 6$; $\frac{1}{3}p = 3$

$\frac{1}{27}p^3 = 27$; $\frac{1}{2}q = 3$; $\frac{1}{4}q^2 = 9$. Por ser positiva la cantidad que $= p$, se infiere que de las tres raices de la equacion sola una es real (265), y se sacará con egecutar en
$$\sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}$$
las substituciones correspondientes que dán $x = \sqrt[3]{(3 - \sqrt[3]{9})} = \sqrt[3]{(3(1 - \sqrt[3]{3}))}$. Luego $x + 1$ ó $y = 1 + \sqrt[3]{3(1 - \sqrt[3]{3})}$; este es el valor real de y; seria fácil sacar los dos valores imaginarios.

Si la equacion cuyas raices se han de sacar, fuese $x^3 - 3x - 18 = 0$, seria $p = -3$; $q = -18$; $\frac{1}{3}p = -1$; $\frac{1}{27}p^3 = -1$; $\frac{1}{2}q = -9$; $\frac{1}{4}q^2 = 81$. Aunque p es negativa, es tal no obstante que $\frac{1}{27}p^3$ es menor que $\frac{1}{4}q^2$; por consiguiente, tiene la propuesta una raiz real y dos imaginarias (265). La real se halla ser, despues de egecutadas las substituciones correspondientes, $x = \sqrt[3]{(9 + 4\sqrt{5})} + \sqrt[3]{(9 - 4\sqrt{5})}$.

Resolucion de las Equaciones de quarto grado.

267 Quando ocurriere resolver una equacion de quarto grado, se la despojará de su segundo término, con cuya preparacion podremos suponer que $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ representa generalmente qualquiera equacion de quarto grado. Podremos tambien considerar la propuesta como formada de la multiplicacion de estas dos equaciones de segundo grado $x^2 + gx + m = 0$, $x^2 - gx + n = 0$, cuyo segundo término es uno mismo sin mas diferencia que la de los signos que suponemos contrarios, á fin de que com-

ponga su producto una equacion de quarto grado despojada de segundo término. Multiplicando, pues, una por otra estas dos equaciones, sale

$$\begin{aligned} x^4 + nx^2 &+ gnx + mn = 0 \\ - g^2x^2 &- mgx \\ + mx^2 & \end{aligned}$$

cuyos términos comparados con los de $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ dán $p = n - g^2 + m$, $q = (n - m)g$, $r = mn$. De la primera de estas tres equaciones sacaremos $n + m = p + g^2$, y de la segunda $n - m = \frac{q}{g}$; luego sumando estas dos últimas saldrá $2n = p + g^2 + \frac{q}{g}$, y $n = \frac{p+g^2}{2} + \frac{q}{2g}$; y restando la segunda de la primera sacaremos $2m = p + g^2 - \frac{q}{g}$, y $m = \frac{p+g^2}{2} - \frac{q}{2g}$. Multiplicando el valor de m por el de n, sacaremos el último término de la transformada que ha de ser igual al último término de la equacion general. Tendremos pues $m \times n = \left(\frac{p+g^2}{2} + \frac{q}{2g}\right) \times \left(\frac{p+g^2}{2} - \frac{q}{2g}\right) = \frac{(p+g^2)^2}{4} - \frac{q^2}{4g^2} = r$, de cuya espresion sacaremos

$$\begin{aligned} g^6 + 2pg^4 + p^2g^2 - q^2 = 0 \\ - 4rg^2 \qquad\quad \end{aligned}$$

equacion de sexto grado al parecer, pero que en la realidad no es mas que del tercer grado, como se puede verificar haciendo $g^2 = u$. Esta equacion se llama la *reducida*, porque á la resolucion de esta se reduce la de la equacion $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

268 Una vez que el último término q^2 de esta equacion lleva el signo $-$, es indispensable que g^2 tenga por lo menos un valor positivo; porque en este caso no puede

provenir la equacion sino de la multiplicacion de tres factores como $(g^2 - l) . (g^2 - m) . (g^2 - n)$, ó de tres factores como $(g^2 + l) . (g^2 + m) . (g^2 - n)$ porque solo en uno de estos dos supuestos podrá llevar el último término el signo $-$. Habrá, pues, por lo menos un factor de esta forma $g^2 - n$; luego $g^2 = n$, quiero decir que g tendrá por lo menos un valor positivo. Luego ya que esta última equacion dá $g = \pm \sqrt{n}$, tendrá g por lo menos dos valores reales.

Con efecto, si en las equaciones $x^2 + gx + m = 0$, y $x^2 - gx + n = 0$ substituimos en lugar de m y n sus valores antes hallados, y resolvemos despues las transformadas que resultaren, dará la primera $x = -\frac{1}{2}g \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2g})}$, y la segunda dará $x = \frac{1}{2}g \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2g})}$. Juntando estas dos fórmulas tendremos $x = \pm \frac{1}{2}g \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2g})}$, de cuya espresion sacaremos los quatro valores de x que buscamos, en los quales no habrá mas que substituir el valor de g que diere la reducida.

$$x = \frac{1}{2}g + \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2g})}$$
$$x = \frac{1}{2}g - \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2g})}$$
$$x = -\frac{1}{2}g + \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2g})}$$
$$x = -\frac{1}{2}g - \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2g})}$$

269 Supongamos ahora para abreviar $a = \frac{1}{2}g$, $b = \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2g})}$, $c = \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2g})}$, y tendremos $x = a + b$, $x = a - b$, $x = -a + c$, $x = -a - c$, ó trasladando $x - a - b = 0$, $x - a$

$+b=0$, $x+a-c=0$, $x+a+c=0$. Si multiplicamos unas por otras estas equaciones sacaremos

$$\begin{aligned} x^4 - 2a^2x^2 &+ 2ac^2x + a^4 = 0 \\ - b^2x^2 &- 2ab^2x - a^2b^2 \\ - c^2x^2 &\qquad\quad - a^2c^2 \\ &\qquad\quad + b^2c^2 \end{aligned}$$

cuya equacion es cabalmente la misma que $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, y dá $p = -2a^2 - b^2 - c^2$, $q = 2ac^2 - 2ab^2$, $r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$. Si substituimos estos valores de p, q, r en la reducida, se transformará en

$$\begin{aligned} g^6 - 4a^2g^4 &+ 8a^2b^2g^2 + 8a^2b^2c^2 = 0 \\ - 2b^2g^4 &+ 8a^2c^2g^2 - 4a^2b^4 \\ - 2c^2g^4 &+ b^4g^2 \quad - 4a^2c^4 \\ &- 2b^2c^2g^2 \\ &+ c^4g^2 \end{aligned}$$

Los tres factores de esta equacion son $g^2 - 4a^2$, $g^2 - b^2 - 2bc - c^2$, $g^2 - b^2 + 2bc - c^2$, y manifiestan que $g^2 = (2a)^2$; $g^2 = (b+c)^2$, $g^2 = (b-c)^2$. De donde inferiremos

1.° Que quando alguna de las dos cantidades b ó c fuese imaginaria, será imaginaria la cantidad $b^2 \pm 2bc + c^2$, porque contiene el producto bc que ha de ser imaginario (189). Luego en este caso no tendrá la reducida, considerada como equacion de tercer grado, mas raiz real que $4a^2$. Pero en el caso de ser imaginaria sola una de las dos cantidades b ó c, tiene la propuesta $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ dos raices imaginarias, es á saber $a+b$, y $a-b$, si fuere b imaginaria, y dos raices reales que son

$-a+c$, y $-a-c$, y al reves si fuese c la sola imaginaria; por consiguiente quando la reducida considerada como equacion de tercer grado no tubiere mas que una raiz real, la propuesta tendrá dos raices reales y dos imaginarias.

270 2.° Si b y c fuesen ambas reales, lo serán tambien las tres raices de la reducida, porque no puede menos de ser $(b \pm c)^2$ una cantidad real quando lo son b y c. Tambien serán reales las tres raices de la reducida, considerada como del tercer grado aun quando b y c fuesen ambas imaginarias, porque $(b\sqrt{-1} \pm c\sqrt{-1})^2$ es una cantidad real (198), y por consiguiente se hallará la reducida en el caso irreductible en ambos supuestos. Y como en el supuesto de ser b y c ambas reales, son reales las quatro raices de la propuesta, y son todas quatro imaginarias en el supuesto de serlo b y c, resulta que quando las tres raices de la reducida fuesen todas reales, pueden las quatro de la propuesta ser ó todas reales ó todas imaginarias.

Serán todas reales si fuesen todas positivas las tres raices de la reducida. Porque si $4a^2$, $b^2+2bc+c^2$, $b^2-2bc+c^2$ fuesen cantidades positivas, serán reales sus raices quadradas $2a$, $b+c$, $b-c$. Sea, pues, $2a=M$; $b+c=N$; $b-c=P$; la suma de las dos últimas equaciones es $2b=N+P$, su diferencia es $2c=N-P$; luego $2a+2b=M+N+P$, $2a-2b=M-N-P$; $-2a+2c=N-M-P$; $-2a-2c=P-M-N$; y como el primer miembro de cada una de las quatro últimas equaciones es igual á $2x$ (269), será tambien $2x$, y por consiguiente x una cantidad real, y serán reales las quatro raices de la propuesta.

Pero quando sola una de las raices de la reducida es positiva, las quatro raices de la propuesta son todas imaginarias. Supongamos que la única raiz positiva de la reducida sea $g^2 - 4a^2$; las raices quadradas $b + c$, $b - c$ de las cantidades $a^2 + 2bc + c^2$, $a^2 - 2bc + c^2$ que suponemos negativas, serán por lo mismo imaginarias, y será $b + c = N\sqrt{-1}$, $b - c = P\sqrt{-1}$; tendremos, pues, en el caso actual $2a = M$, $b + c = N\sqrt{-1}$, $b - c = P\sqrt{-1}$; la suma de las dos últimas equaciones nos dá $b = \frac{1}{2}P\sqrt{-1} + \frac{1}{2}N\sqrt{-1}$; y restando la tercera de la segunda, sacaremos $c = \frac{1}{2}N\sqrt{-1} - \frac{1}{2}P\sqrt{-1}$; luego una vez que en cada una de las raices de la propuesta está ó b ó c (269), los quatro valores de x serán imaginarios (189).

Si supusiéramos que la raiz positiva de la reducida es qualquiera de las otras dos, la cantidad $2a$ seria imaginaria, y por consiguiente los quatro valores de x que todos llevan la cantidad a, serian todos quatro imaginarios. Luego en el caso de ser reales las tres raices de la reducida, la resolucion de la equacion del quarto grado tiene el mismo tropiezo que la del tercer grado en el caso irreductible.

Apliquemos el método que acabamos de declarar á la resolucion de algunas equaciones, y supongamos que se nos ofrezca sacar las raices de esta equacion $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$. Será, pues, $p = -3$; $q = -42$; $r = -40$; y substituyendo estos valores en la reducida quedará transformada en $g^6 - 6g^4 + 169g^2 - 1764 = 0$. Considerando esta equacion como si fuese del tercer grado, y resolviéndola en este supuesto, haremos $g^2 = u + 2$ para eliminar su segundo término (248), y la equacion que nos tocará resolver será $u^3 + 157u - 1442 = 0$; y como esta no tiene mas que una raiz real, inferiremos que tiene la propuesta dos raices reales y dos imaginarias. Para hallarlas, empiezo resolviendo la equacion $u^3 + 157u - 1442 = 0$, y saco $u = 7$. Luego $\pm\sqrt{u+2}$ ó $g = \pm 3$. La substitucion del uno de estos dos valores en la fórmula general $x = \pm \frac{1}{2} g \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4} g^2 - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2g}\right)}$ dá los quatro valores siguientes $x = 4$, $x = -1$, $x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-31}$.

Si hubiéramos de sacar las raices de $x^4 + 3x^2 + 2x - 5 = 0$, seria $p = 3$; $q = 2$; $r = -5$, y la reducida se transformaria en $g^6 + 6g^4 + 29g^2 - 4 = 0$, y la suposicion de $g^2 = u - 2$ la transformaria en $u^3 + 17u - 46 = 0$, cuya equacion no tiene mas que una raiz real, y me está diciendo por lo mismo que la propuesta no tiene sino dos raices reales, siendo imaginarias las otras dos.

Busco, pues, estas raices resolviendo esta equacion

$u^3 + 17u - 46 = 0$ por medio de la fórmula general del tercer grado, cuya fórmula dá $u = \sqrt[3]{(23 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}})} + \sqrt[3]{(23 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}})}$. Luego $\pm\sqrt{u-2}$, ó $g = \pm\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(23 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}})} + \sqrt[3]{(23 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}})}]}$ Si substituimos este valor de g en la fórmula general $x = \pm\frac{1}{2}g \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2g})}$, sacaremos que las quatro raices de la propuesta son

$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(23 + \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})} + \sqrt[3]{(23 - \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}]}$$
$$\pm\sqrt{[-1 - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(23 + \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})} - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(23 - \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}]} \pm \frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(23 + \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})} + \sqrt[3]{(23 + \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}]}}$$

Se me pregunta ¿quáles son las quatro raices reales de la equacion $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$. La comparo, para responder á la pregunta, con la equacion general $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, y saco que $p = -25$, $q = 60$, $r = -36$, y substituyendo se transforma la reducida en $g^6 - 50g^4 + 769g^2 - 3600 = 0$. Hago $g^2 = \frac{u+50}{3}$, y no $g^2 = u + \frac{50}{3}$ para huir de los quebrados. Resuelvo esta transformada, y saco que sus raices son $u = 25$, $u = -2$, $u = -23$: luego $\pm\sqrt{(\frac{u+50}{3})}$ ó $g = \pm 5$, ó ± 4, ó ± 3. Despues de substituido qualquiera de estos tres valores de g en la fórmula $x = \pm\frac{1}{2}g \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2g})}$, hallo que las quatro raices de la propuesta son $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$, $x = -6$.

En este egemplo hay una circunstancia particular, en la qual hemos de parar un rato la consideracion, y es que g tiene seis valores distintos. Esto proviene de que pudiendo considerar una equacion del quarto grado como el producto de quatro factores del primero $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$, $(x+d)$ es divisible por seis factores del segundo grado, que son $(x+a)(x+b)$; $(x+a)(x+c)$; $(x+a)(x+d)$; $(x+b)(x+c)$; $(x+b)(x+d)$; $(x+c)(x+d)$. Y como tienen un segundo término cuyo coeficiente está generalmente representado por g, es evidente que g ha de tener seis valores diferentes.

Pero como la propuesta carece de segundo término, es indispensable que si el uno de los valores de g es m, el otro sea $-m$. Luego $g^2 - m^2$ ha de ser uno de los factores de la reducida: luego si los otros quatro valores de g son h, $-h$, i, $-i$, serán $g^2 - h^2$, y $g^2 - i^2$ factores de la reducida. Por consiguiente no solo ha de ser del sexto grado, sino que no puede tener y no tiene con efecto sino potencias pares.

Si quisiéramos hallar las quatro raices de la equacion $x^4 - 20x^2 - 12x + 13 = 0$; seria $p = -20$, $q = -12$, $r = 13$, y la reducida $g^6 - 40g^4 + 348g^2 - 144 = 0$. Haríamos $g^2 = \frac{u+40}{3}$, y resultaria la transformada $u^3 - 1668\,u - 6608 = 0$, cuyas raices son $u = -4$; $u = 2 \pm 6\sqrt{46}$. Substituyendo estos valores de u en la equacion $g = \pm\sqrt{\left(\frac{u+40}{3}\right)}$, saldrá $g = \pm 2\sqrt{3}$, $g = \pm\sqrt{(14 \pm 2\sqrt{46})}$, y substituyendo qualquiera de estos valores de g, pongo por caso el primero, en la fórmula $x = \pm \frac{1}{2} g \pm$ &c. sacaremos $x = \sqrt{3} + \sqrt{(7 + \sqrt{3})}$, $x = \sqrt{3} - \sqrt{(7 + \sqrt{3})}$, $x = -\sqrt{3} + \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$, $x = -\sqrt{3} - \sqrt{(7 - \sqrt{3})}$.

Resolucion de las Equaciones por aproximacion.

271 Todo calculador que se empeña en la resolucion de una equacion ha de llevar la mira de sacar cabales los valores de la incógnita; y si acaso tropieza con alguna equacion que deje burlados los métodos directos que hemos declarado para conseguirlo, es preciso que se contente con hallarlos por aproximacion. Es, pues, del caso dár un recurso para salir de este apuro.

272 El método que con este fin vamos á proponer supone que se haya sacado primero un valor de la incógnita, que no discrepe del verdadero sino de una décima parte. Para sacar este primer valor conviene considerar, que si de substituir dos números distintos en la equacion en lugar de x, resultan dos cantidades tales que la una sea positiva y la otra negativa, habrá indispensablemente una de las raices de la equacion entre los dos números, de cuya substitucion hubieren salido los dos resultados de signo contrario. Si suponemos, por egemplo, que teniendo x distintos valores, a represente el menor valor de x, y b el valor inmediatamente mayor, de suerte que $x - a$, y $x - b$ sean dos factores de la equacion, se viene á los ojos, que si en lugar de x substituimos un número positivo menor que a,

$x - a$, será negativa; y si substituimos un número positivo mayor que a, pero menor que b, $x - a$ será positiva, y el producto de los demás factores llevará el mismo signo que en el primer caso: luego yá que solo el factor $x - a$ muda entónces de signo, el producto total mudará sin duda alguna de signo. Lo propio probaríamos si el factor menor en vez de ser $x - a$ fuese $x + a$, en cuyo caso se deberian substituir números negativos.

273 Sentado esto, propongámonos hallar por aproximacion las raíces de la equacion $x^3 - 5x + 6 = 0$. Substituiremos sucesivamente en lugar de x muchos números positivos y negativos, hasta encontrar con dos, cuya substitucion sucesiva dé dos resultados de signos contrarios, entre los quales inferiremos que ha de estar el valor de x: de suerte, que si dichos dos números no discreparen el uno del otro sino de la décima parte, ó de menos de la décima parte del uno de ellos, tendremos el valor aproximado que buscamos con tomar el uno de los dos, ó un número intermedio. Si acaso discreparen mas, practicaríamos lo siguiente.

Substituiremos en la equacion $x^3 - 5x + 6 = 0$ los números 0, 1, 2, 3, 4 &c. Y como al instante hallaremos que todos dán resultados positivos, y los darán al infinito, substituiremos los números 0, -1, -2, -3, -4 &c. y sacaremos los resultados siguientes.

Subst.	Result.
0	$+$ 6
$-$ 1	$+$ 10
$-$ 2	$+$ 8
$-$ 3	$-$ 6

Páro la consideracion en los dos últimos, é infiero que la una de las raices está entre -2 y -3. Pero como la diferencia 1 de estos dos números es mayor que la décima parte de cada uno de ellos, tomo un medio entre los dos; quiero decir; que tomo la mitad $-2,5$ de su suma -5. Substituyo $-2,5$ en lugar de x en la equacion, y saco $+2,875$, esto es, una cantidad positiva; infiero, pues, que está la raiz entre $-2,5$ y -3.

Tomo un número medio entre $-2,5$ y -3; esto es, $-2,7$, despreciando las cantidades menores que las décimas. Substituyo $-2,7$ en la equacion en lugar de x; saco el resultado $-0,183$, que es una cantidad negativa. Luego ya que $-2,5$ dió un resultado positivo, y le da negativo $-2,7$, está el valor de x entre $-2,5$ y $-2,7$, cuyos números no discrepan mas que de $0,2$ que es una cantidad menor que la décima parte de cada uno de ellos: luego el valor de x será (tomando un número medio entre ellos) $-2,6$ con diferencia de menos de una décima.

Despues de hallado un número que no discrepa de x de una décima del valor de dicha cantidad, supongo x igual á dicho número mas una nueva incógnita z: quiero decir, que en el caso actual supongo $x=-2,6+z$, y substituyo esta cantidad en lugar de x en la equacion. Pero como z es quando mas una décima de la cantidad $-2,6$, será por lo mismo su quadrado la centésima parte del quadrado de dicho número: su cubo la milésima parte, quando mas, del cubo del mismo número; y así prosiguiendo. Omitiré en esta substitucion todas las potencias de z superiores á la primera (182); y por escusar cálculos inútiles, desecharé, al tiempo de escribir el cubo de $-2,6+z$, y sus demas potencias, si las hubiere, todos los términos que diere la regla dada (99), excepto los dos primeros.

Para substituir con órden, escribo como se sigue:

$$x^3 = (-2,6+z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z;$$
$$-5x = -5(-2,6+z) = -5(-2,6) - 5z;$$
$$+6 = +6.$$

Junto todas las cantidades, y saco que el resultado de la substitucion es $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$; de donde saco con egecutar las operaciones indicadas y las reducciones correspondientes, $15,28z + 1,424 = 0$, y despues $z = -\frac{1,424}{15,28}$, cuyo valor reducido á decimales dá $z = -0,09$; en cuya reduccion no prosigo el cálculo sino hasta un guarismo significativo no mas. En general, basta proseguirle hasta tantos guarismos significativos, entrando en estos el primero que se halla, quantos lugares hay entre este, y el primer guarismo del primer valor aproximado de x. En el caso actual entre 9, que es el primer guarismo significativo del cociente 0,09 y 2, que es el primer guarismo de 2, 6 que es el primer valor aproximado de x, no hay mas que un lugar: quiero decir, que entre el lugar de las centésimas que ocupa 9 en 0,09, y el lugar de los enteros que ocupa 2 en 2, 6, no hay mas que un lugar intermedio, que es el de las décimas: por este motivo no paso del primer guarismo significativo 9.

El valor de x, es á saber $x = -2,6 + z$, será por consiguiente $x = -2,6 - 0,09$, esto es $x = -2,69$.

Para acercarme todavia mas al valor de x, hago $x = -2,69 + t$, y tendré

$$x^3 = (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 t,$$
$$-5x = -5(-2,69) - 5t$$
$$+6 = +6$$

de donde sacaré, despues de egecutadas todas las operaciones, $-0,015109 + 16,7083t = 0$, y $t = \frac{0,015109}{16,7083}$, cuyo valor se reduce á $t = 0,000904$.

Luego el valor de x, esto es, $x = -2,69 + t$, viene á ser $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Si quisiéramos llevar mas adelante la aproximacion, supondríamos $x = -2,689096 + u$, y se practicaria lo propio que hasta aquí.

Si se me ofreciese practicar el método que estoy declarando con la equacion $x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0$, seguiria el mismo rumbo que en el primer egemplo, y hallaria que el valor de x aproximado con diferencia de menos de una décima es 2, 3. Supondria, pues, $x = 2,3 + z$, y por medio de la substitucion sacaria

$$x^4 = (2,3)^4 + 4(2,3)^3 \cdot z,$$
$$-4x^3 = -4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 \cdot z,$$
$$-3x = -3(2,3) - 3z,$$
$$+27 = +27.$$

De cuya espresion sacaré, despues de egecutadas todas las reducciones, $-0,5839 - 17,812z = 0$, y por consiguiente $z = -\frac{0,5839}{17,812} = -0,03$; y no paso de las centésimas por la misma razon que antes. Es, pues, el valor de $x = 2,3 - 0,03 = 2,27$.

Con la mira de acercarme todavía mas al valor de x, supondré $x = 2,27 + t$, y con substituir sacaré

$$x^4 = (2,27)^4 + 4(2,27)^3 \cdot t,$$
$$-4x^3 = -4(2,27)^3 - 12(2,27)^2 \cdot t,$$
$$-3x = -3(2,27) - 3t,$$
$$+27 = +27.$$

Egecutaré todas las reducciones, y sacaré $-0,04595359 - 18,046468\,t = 0$, de donde sale $t = -\frac{0,04595359}{18,046468} = -0,0025$, y por consiguiente $x = 2,2675$.

Hay sin embargo algunos casos en que no hay valor alguno real, sea positivo, sea negativo, que substituido en lugar de x dé dos resultados de signo contrario. Esto puede suceder 1.° quando son imaginarias todas las raices de la equacion. 2.° Quando estas raices son iguales de dos en dos, de quatro en quatro &c. 3.° Quando son en parte imaginarias, y en parte iguales de dos en dos &c.

Por egemplo, una equacion cuyos quatro factores fuesen $x-a$, $x-a$, $x-b$, $x-b$, esto es, la equacion

$(x-a)^2 \times (x-b)^2 = 0$, jamás mudará de signo, aunque se ponga en lugar de x el valor que se quisiere, sea positivo, sea negativo. Porque el quadrado de $x - a$ será siempre positivo, ora sea $x - a$ positivo, ora sea negativo. Lo propio digo de $x - b$.

Por lo que mira al caso en que son imaginarias todas las raices, es evidente que no hay ningunos números reales que substituidos en lugar de x, puedan dar dos resultados de signos contrarios. Porque si hubiera dos números con esta circunstancia, se hallaria el valor de x entre dichos dos números reales, y seria por consiguiente real contra lo que suponemos.

De las Raices imaginarias de las Equaciones.

274 De lo que digimos (198) acerca de las cantidades imaginarias resulta 1.º que las raices imaginarias, que puede haber en una equacion, son siempre en número par.

2.º Que las raices imaginarias que resultan de la resolucion de una equacion tienen de dos en dos la misma cantidad debajo del signo radical, y solo se diferencian en los signos + y —.

3.º Que toda equacion de grado impar tiene por lo menos una raiz real.

4.º Que toda equacion de grado par, cuyo último término es negativo, tiene por lo menos dos raices reales; porque el producto real de los radicales imaginarios, que en este caso son términos de los dos polynomios multiplicados uno por otro, no puede ménos de ser una cantidad positiva (198).

Lo demás que sobre este asunto falta declarar, se hallará en el tomo quarto de este Curso.

De las Raices iguales de las Equaciones.

275 Para *sacar las raices iguales que puede haber en una equacion*, se ha de multiplicar cada término por el esponente que en él llevare x: se disminuirá este esponente de una unidad, y resultará otra equacion: se buscará despues el mayor divisor comun de esta última equacion y de la propuesta: contendrá este divisor las raices iguales de la propuesta; pero levantadas á un grado una unidad menor.

Por egemplo, la equacion

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 &+ a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b = 0 \\ - 2bx^3 &+ 4abx^2 - 2ab^2x \\ &+ b^2x^2 \end{aligned}$$

es el producto de $(x - a)$ por $(x - b)^2$.

Si se multiplica cada término por el esponente de x, y se le quita á este esponente una unidad, y se tiene presente que el esponente de x en el último término es cero (31) saldrá

$$\begin{aligned} 4x^3 - 6ax^2 &+ 2a^2x - 2a^2b = 0 \\ - 6bx^2 &+ 8abx - 2ab^2 \\ &+ 2b^2x \end{aligned}$$

de cuya equacion y de la propuesta el mayor divisor comun es $x^2 - ax + ab$, que es $(x - a) . (x - b)$, cuyo pro-
$- bx$
ducto consta de los mismos factores que $(x - a)^2 \times (x - b)^2$, pero con la diferencia de que en el divisor comun son de una potencia inferior de un grado.

Para percibir la razon de esta regla conviene tener presente, que segun hemos probado en otro lugar (99) $(x + b)^m = x^m + m \,.\, x^{m-1} b + m . \frac{m-1}{2} . x^{m-2} b^2 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . x^{m-3} b^3$ &c.

Si imaginamos que se ha multiplicado cada término del segundo miembro por el esponente de x, y que á este esponente se le ha quitado una unidad, resultará
$mx^{m-1} + m . \overline{m-1} . x^{m-2} b + m . \frac{m-1}{2} . \overline{m-2} . x^{m-3} b^2 + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \overline{m-3} . x^{m-4} b^3$ &c.
cuya cantidad es la misma que $m \left(x^{m-1} + \overline{m-1} . x^{m-2} b + \overline{m-1} . \frac{m-2}{2} x^{m-3} b^2 + \overline{m-1} . \frac{m-2}{2} . \frac{m-3}{3} . x^{m-4} b^3 \text{ \&c.}\right)$
esto es la misma cabalmente (99) que $m (x + b)^{m-1}$. Por consiguiente, quando se multiplica cada uno de los términos que componen la potencia m del binomio $x + b$, por el esponente que lleva x en cada uno de ellos, el producto que resulta es cabalmente la potencia inmediatamente inferior, multiplicada por el esponente de la potencia actual. Luego queda probada la regla para el caso en que son iguales todas las raices.

Supongamos ahora que despues de elevado cada uno de los factores del producto $(x + b)^m \times (x + d)^n$ á la potencia que señala su esponente, multipliquemos uno por otro los dos resultados: si se multiplica despues cada término por el esponente que en él llevase x, dará el cálculo un resultado que será lo propio que $m(x+b)^{m-1}\times(x+d)^n + n(x+b)^m \times(x+d)^{n-1}$, de cuya cantidad y de $(x+b)^m\times(x+d)^n$ el comun divisor es $(x+b)^{m-1}\times(x+d)^{n-1}$; y así prosiguiendo sea el que fuere el número de los factores $x+b$, $x+d$ &c.

Método para sacar las raices de las cantidades que son en parte racionales y en parte incomensurables.

276 En la práctica de los métodos que llevamos declarados para resolver las equaciones hemos encontrado resultados de esta forma $\sqrt[m]{\left[-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right]}$ que nada manifiestan á no ser que se reduzcan, quando se puede conseguir, á otra espresion mas sencilla que no lleve mas que una cantidad racional con un radical de segundo grado. Es, pues, indispensable declarar cómo se ha de egecutar esta reduccion.

Consideraremos primero el caso en que $m=2$, quiero decir que buscaremos la raiz quadrada de las cantidades que son en parte racionales y en parte radicales.

Representaremos por $P+\sqrt{Q}$ dichas cantidades y por $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ su raiz. Si no hubiese mas que un radical en la raiz que buscamos, la una de las dos cantidades $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ será por precision comensurable.

Tendremos, pues, en virtud de lo supuesto $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}$

$= \sqrt{m} + \sqrt{n}$, de donde sacarémos, elevando ambos miembros al quadrado, $m + n + 2\sqrt{mn} = P + \sqrt{Q}$. Es muy natural suponer la parte racional del primer miembro igual á la parte racional del segundo, y egecutándolo sacarémos $m + n = P$, y de la comparacion de las dos cantidades irracionales una con otra saldrá $2\sqrt{mn} = \sqrt{Q}$; elevando al quadrado $m + n = P$, y $2\sqrt{mn} = \sqrt{Q}$, saco $m^2 + 2mn + n^2 = P^2$ y $4mn = Q$; resto la segunda de estas equaciones de la primera y sale $m^2 - 2mn + n^2 = P^2 - Q$: de cuya espresion infiero que serán m y n commensurables si el valor $P^2 - Q$ fuese un quadrado, pues $m^2 - 2mn + n^2$ es un quadrado. Saco, pues, la raiz quadrada y hallo $m - n = \sqrt{(P^2 - Q)}$. Ya hallamos poco há $m + n = P$: si sumo una con otra las dos últimas equaciones, sacaré $2m = P + \sqrt{(P^2 - Q)}$ y $m = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 - Q)}$; si resto las mismas equaciones la una de la otra, sacaré $2n = P - \sqrt{(P^2 - Q)}$ y $n = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 - Q)}$. Luego $\sqrt{(P + \sqrt{Q})} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 - Q)}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 - Q)}\right)}$. Pero aunque en cada uno de los dos términos del segundo miembro haya dos radicales, no habrá en la realidad sino uno quando $\sqrt{(P + \sqrt{Q})}$ fuese reductible, porque en este caso $P^2 - Q$ será un quadrado, por lo que hemos visto poco há.

Supongamos que se me pregunte quál es el valor de $\sqrt{(7 + \sqrt{48})}$. Consideraré que en este caso $P = 7$, y $\sqrt{Q} = \sqrt{48}$, y por consiguiente $Q = 48$: luego $P^2 - Q = 49 - 48 = 1$, y $\sqrt{(P^2 - Q)} = \sqrt{1} = 1$. Egecutando las substituciones correspondientes en la fórmula que hemos hallado, sacaremos $\sqrt{(7+\sqrt{48})}=\sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}+\sqrt{(\frac{7}{2}-\frac{1}{2})}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$.

Si la cantidad cuya raiz se me pide fuese $4+2\sqrt{3}$, pasaría 2 debajo del signo (62), y saldría $4+\sqrt{12}$, en cuyo supuesto $4=P$, $\sqrt{12}=\sqrt{Q}$, y por consiguiente $Q=12$. Egecutando las substituciones, hallaré que $\sqrt{(\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)})}=\sqrt{3}$ y $\sqrt{(\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)})}=1$; de donde infiero que $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$ ó $-1-\sqrt{3}$.

Si hubiese de sacar la raiz de $8+2\sqrt{15}$, sería $P=8$, $Q=60$, y por consiguiente $\sqrt{[\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}]}=\sqrt{5}$, y $\sqrt{[\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}]}=\sqrt{3}$. Luego $\sqrt{(8+2\sqrt{15})}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, ó $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$. De donde se sigue que $\sqrt{(4-2\sqrt{3})}=1-\sqrt{3}$, ó $\sqrt{3}-1$; y que $\sqrt{(8-2\sqrt{15})}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$, ó $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. En general, $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}=\sqrt{[\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}]}$, ó $\sqrt{[\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}]}$.

277 La misma fórmula podrá servir para sacar la raiz de una cantidad en parte real, y en parte imaginaria, qual sería $-1+2\sqrt{-2}$. Porque comparándola con $P+\sqrt{Q}$ sacaremos $P=-1$, $Q=-8$, y haciendo las substituciones saldrá $\sqrt{(\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)})}=\sqrt{(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})}$ y $\sqrt{(\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)})}=\sqrt{(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2})}$, y por consiguiente $\sqrt{(-1+2\sqrt{-2})}=1+\sqrt{-2}$, ó $-1-\sqrt{-2}$.

278 Suelen encontrarse cantidades imaginarias monomias, que tienen raices binomias: esta singularidad se halla en la cantidad $2\sqrt{-1}$, cuya raiz es $1+\sqrt{-1}$. Para sacar esta especie de raices, se practicará lo propio que en los egemplos antecedentes. Supongamos que en el supuesto de ser p una cantidad real qualquiera, hayamos de sacar la raiz de $p\sqrt{-1}$. Supondrémos $\sqrt{p\sqrt{-1}} = m + n\sqrt{-1}$, y quadrando, será $p\sqrt{-1} = m^2 - n^2 + 2mn\sqrt{-1}$. Como el primer miembro de esta equacion es todo imaginario, será $m^2 - n^2 = 0$, que dá $m = n$. Será, pues, $p\sqrt{-1} = 2mn\sqrt{-1}$, que dividiendo todo por $\sqrt{-1}$ dá $p = 2mn$. Y como hemos hallado poco ha $m = n$, será $p = 2m$, y $n = \sqrt{\frac{p}{2}}$. Substituyendo este valor de n en lugar de m en $m + n\sqrt{-1}$ que suponemos ser la raiz de $p\sqrt{-1}$, será $\sqrt{p\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{p}{2}} + \sqrt{\frac{p}{2}} \times \sqrt{-1} = (1+\sqrt{-1}) \times \sqrt{\frac{p}{2}}$.

279 Busquemos ahora la raiz cúbica de $P + \sqrt{Q}$, que representarémos por $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z}$. Tomamos $x + \sqrt{y}$ y no $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, porque en el cubo del último binomio no habria término alguno comensurable; y tomamos tambien $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z}$, porque el cubo de este binomio tiene una cantidad comensurable, igualmente que el cubo de $x + \sqrt{y}$, y porque será de mucha utilidad la indeterminada.

Tendremos, pues, $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(P + \sqrt{Q})}$; y por lo mismo $(x - \sqrt{y})\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(P - \sqrt{Q})}$. Si multiplicamos una por otra estas dos equaciones, resultará $(x^2 - y)\sqrt[3]{zz} = \sqrt[3]{(P^2 - Q)}$, ó $x^2 - y = \frac{\sqrt[3]{(P^2 - Q)}}{\sqrt[3]{z^2}}$

Si multiplicamos el numerador y el denominador del último miembro cada uno por $\sqrt[3]{z}$, se transformará en $\frac{\sqrt[3]{((P^2 - Q)z)}}{\sqrt[3]{z^3}}$ que se reduce á $\frac{\sqrt[3]{[(P^2 - Q)z]}}{z}$: luego $x^2 - y = \frac{\sqrt[3]{[(P^2 - Q)z]}}{z}$.

Por consiguiente si $x^2 - y$ fuese comensurable, en cuyo caso se podrá sacar la raiz cúbica cabal de la cantidad propuesta $P + \sqrt{Q}$, será preciso que sea tambien comensurable la cantidad $\frac{\sqrt[3]{[(P^2 - Q)z]}}{z}$. Para que esto se verifique es indispensable que $(P^2 - Q)z$ sea un cubo perfecto; será, pues, preciso que $z = 1$ quando $P^2 - Q$ fuere un cubo perfecto; y si $(P^2 - Q)$ no fuere un cubo perfecto, harémos que lo sea, dándole á z el valor que para esto fuere menester.

Supongamos para abreviar $\frac{\sqrt[3]{((P^2 - Q)z)}}{z} = a$; tendrémos $x^2 - y = a$; y como elevando al cubo la equacion $(x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(P + Q)}$ dá $x^3 z + 3xyz + 3x^2 z\sqrt{y} + yz\sqrt{y} = P + \sqrt{Q}$, y de la equacion $x^2 - y = a$ sacamos $y = x^2 - a$, se echa de ver 1.° que $x^3 z + 3xyz = P$, y $x^3 + 3xy = \frac{P}{z}$. 2.° que si en la última equacion substituimos en lugar de y su valor sacado de $y = x^2 - a$, saldrá $4x^3 - 3ax = \frac{P}{z}$, y $4x^3 - 4ax - \frac{P}{z} = 0$.

Queda, pues, reducida la dificultad á buscar los divisores comensurables de esta última equacion, y los tendrá por precision si tuviese $P+\sqrt{Q}$ una raiz cúbica cabal. Con esto se sabrá el valor de x, el qual determinará al instante el de y; y como z es conocida, lo será tambien la raiz cúbica que se busca.

Busquemos en vista de todo esto la raiz cúbica de $10+6\sqrt{3}$. En este caso tenemos $P=10$, $Q=108$. Luego $P^2-Q=-8$, que es un cubo perfecto: luego $z=1$, $a=-2$, y la equacion $4x^3-3ax-\frac{P}{z}$ será $4x^3+6x-10=0$. Pero como $x-1$ es un divisor comensurable de esta equacion, por consiguiente $x=1$, y $y=x^2-a=3$, y $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$.

Si se nos pidiera la raiz cúbica de $8+4\sqrt{5}$, sería $P=8$, $Q=80$: luego $P^2-Q=-16$, que no es un cubo. Harémos que lo sea suponiendo $z=4$, de cuyo supuesto sacarémos que $\frac{\sqrt[3]{((P^2-Q)z)}}{z}=-1=a=x^2-y$. En este caso la equacion $4x^3-3ax-\frac{P}{z}=0$ se transforma en esta $4x^3+3x-2=0$, cuyo divisor $2x-1$ dá $x=\frac{1}{2}$, y por consiguiente $y=\frac{5}{4}$, y la raiz que se pidió será $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}$.

280 Por el mismo camino hallaríamos las raices cúbicas de las cantidades que son en parte comensurables, y en parte imaginarias. Sea, por egemplo, la cantidad $-10+9\sqrt{-3}$ que dá $P=-10$, $Q=-243$, y $P^2-Q=343$, que es un cubo perfecto: luego $z=1$, y $a=\sqrt[3]{343}=7$, $y=x^2-7$, y $4x^3-21x+10=0$.

De esta última equacion sacamos $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{5}{2}$ (263), y por consiguiente $y = -3$, $y = -\frac{27}{4}$, $y = -\frac{3}{4}$. Luego las tres raices cúbicas de $-10 + 9\sqrt{-3}$ son $2 + \sqrt{-3}$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Si la cantidad cuya raiz cúbica se busca fuese $-11 - 2\sqrt{-1}$, en cuyo supuesto $P = -11$, $Q = -4$, $P^2 - Q = 125$, $z = 1$, $a = 5$, y $4x^3 - 15x + 11 = 0$. De la última equacion sacarémos $x = 1$, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$. Luego $y = -4$, $y = -\frac{7}{4} \mp \sqrt{3}$. Luego $\sqrt[3]{(-11 - 2\sqrt{-1})} = 1 + 2\sqrt{-1}$, ó $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3} + \sqrt{(-\frac{7}{4} \mp \sqrt{3})}$.

De las Series.

281 Es tal la naturaleza de algunas cantidades que no es posible hallar espresion alguna finita que represente su valor, y solo podemos espresarle por una infinidad ó serie de términos, que ván saliendo de la operacion misma en que nos empeña el intento de averiguarle. En la Arismética tropezamos con estas espresiones infinitas, y tales son los números que resultan quando sacamos por aproximacion (I. 125) el cociente de una division que no puede salir cabal, ó la raiz de una potencia imperfecta (I. 145 y 161); tales son tambien algunas espresiones algebráicas (37, 99, 107 &c.) que se han originado de algunos cálculos que se nos ha ofrecido egecutar en este mismo tratado. Antes que nos empeñemos en decla-

rar los principios mas fundamentales de la doctrina de las series, hemos de esplicar algunas voces de que haremos muchísimo uso en adelante.

282 Llamamos *funcion* de una cantidad variable x toda espresion analytica, sea la que fuere, compuesta de dicha cantidad y de constantes. Por consiguiente toda espresion analytica en que hubiere muchas cantidades constantes, y sola la variable x, será una funcion de esta variable. Así $a + 3x$, $ax - 4xx$ son funciones de x. Y como puede una variable hallarse mezclada con constantes por adicion, sustraccion, multiplicacion &c. es mucha la variedad de funciones que puede haber de una misma variable.

Es evidente que si en lugar de la variable se substituyesen en su funcion valores determinados, tendrá sucesivamente la misma funcion diferentes valores. De donde sacamos una regla indefectible para distinguir las funciones verdaderas de las que no son mas que aparentes. Si una espresion analytica, compuesta de constantes, y de sola una variable x, no muda de valor con darle diferentes valores á las variables, no será funcion de dicha variable, y será en realidad una cantidad constante. Así x^0, 1^x, $\frac{aa - ax}{a - x}$ no son funciones de x sino en la apariencia, porque guardan siempre un mismo valor, qualquiera cantidad que se substituya en lugar de x.

283 En la materia que vamos á tratar se hace tambien mencion con frecuencia de diferencias primeras, segundas, terceras &c. de algunas progresiones que en ella se

consideran. Importa, pues, saber sacar estas diferencias, cuya operacion es sumamente sencilla.

Supongamos que sean A, B, C, D, E, &c. los términos de una progresion ó serie. Para hallar sus diferencias primeras, resto el primer término A del segundo B, el segundo B del tercero C, el tercero C del quarto D &c. y las restas $B - A$, $C - B$, $D - C$, $E - D$ serán las diferencias primeras.

Si resto la primera diferencia $B - A$ de la segunda $C - B$, la segunda $C - B$ de la tercera $D - C$ &c. las restas serán las segundas diferencias. Si restamos la primera de las segundas diferencias de la segunda, la segunda de la tercera &c. las restas serán las diferencias terceras, y prosiguiendo á este tenor se sacarán las diferencias de grado superior, conforme representa la tabla siguiente.

Serie.	Pr. dif.	Seg. dif.	Terc. dif.	Quart. dif.
A	$B-A$	$C-2B+A$	$D-3C+3B-A$	$E-4D+6C-4B+A$
B	$C-B$	$D-2C+B$	$E-3D+3C-B$	
C	$D-C$	$E-2D+C$		
D	$E-D$			
E				

284 Quando van siendo menores los términos de una serie á medida que crece su número, se acerca mas y mas al valor de la cantidad que representa; pues los términos que restaria sacar para proseguir la serie, serán mas despreciables. Así quando buscamos por aproximacion el va-

lor de este quebrado $\frac{1}{3}$ por egemplo, van saliendo continuamente guarismos decimales de orden siempre menor, y podemos parar la aproximacion, que se podria proseguir eternamente, en una clase de decimales tan pequeña, que las que quedan por sacar se pueden reputar como de ningun valor, ó se pueden omitir sin error substancial en el resultado.

Las series cuyos términos van menguando, conforme acabamos de decir, son las verdaderas, y se llaman *convergentes*, porque nos van encaminando ácia el verdadero valor que buscamos. Las series cuyos términos van creciendo al infinito se llaman *divergentes*, porque nos van apartando mas y mas del verdadero valor de la cantidad en cuyo lugar deseamos substituirlas.

285 Hay series que guardan tal ley en su formacion que es siempre una misma la razon que hay entre un término qualquiera y el que se le sigue inmediatamente; por cuyo motivo se llaman series *geométricas*. Tal es la serie $\frac{a}{f} - \frac{agz}{f^2} + \frac{ag^2z^2}{f^3} - \frac{ag^3z^3}{f^4} + \frac{ag^4z^4}{f^5}$ &c. que sacamos quando buscábamos (37) el cociente de a partida por $f + gz$, en cuya serie se echa de ver que qualquiera término es al inmediato que se le sigue : : $1 : \frac{gz}{f}$.

286 Pero aunque se pueden formar las series, segun llevamos dicho, por medio de una division continuada, es muy cansado este camino, por lo que han discurrido los Analystas un método sumamente ingenioso que ahorra muchísimo trabajo. Suponen la cantidad propuesta,

sea fraccion ó radical, igual á una serie cuyos términos llevan todos coeficientes indeterminados; eliminan por medio de la multiplicacion el denominador; y comparando despues los términos homólogos unos con otros, forman tantas equaciones quantos son los coeficientes de los términos de la serie indeterminada; y sacando su valor, queda averiguado el de la serie propuesta. Si buscamos por este camino el valor de la fraccion $\frac{a}{f+gz}$ ó la serie que puede representarle, supondrémos $\frac{a}{f+gz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c; tendrémos, pues, $a = (f + gz)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \text{ \&c.})$, y egecutando la multiplicacion indicada, sacarémos

$$\begin{aligned} a = fA + fBz &+ fCz^2 + fDz^3 \text{ \&c.} \\ + gAz &+ gBz^2 + gCz^3 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

$$\text{ó } \left.\begin{aligned} fA + fBz + fCz^2 + fDz^3 + \text{ \&c.} \\ -a + gAz + gBz^2 + gCz^3 + \text{ \&c.} \end{aligned}\right\} = 0$$

de cuya espresion sacarémos las equaciones siguientes $a = fA$, ó $A = \frac{a}{f}$; $fB + gA = 0$, $fC + gB = 0$, $fD + gC = 0$, que nos están enseñando el camino que se ha de seguir para sacar el valor de los coeficientes indeterminados de la serie que, segun suponemos, representa el quebrado propuesto. Porque una vez que es conocido el primer término A, con substituirle en la equacion $fB + gA = 0$ saldrá el valor de B, el qual substituido en $fC + gB = 0$ dará el valor de C. Prosiguiendo á este tenor sacaríamos para espresar el valor de $\frac{a}{f+gz}$ la misma serie que por medio de la division.

287 Acerca del modo con que se forman por este método los coeficientes de los términos de la serie, es muy importante considerar como se originan los unos de los otros. Para cuyo fin atiendo á las equaciones $fB + gA = 0$, $fC + gB = 0$, $fD + gC = 0$, y veo que $B = \frac{gA}{f}$, $C = \frac{gB}{f}$, $D = \frac{gC}{f}$ &c; de manera que si llamo P el coeficiente de un término qualquiera, y Q el del término siguiente siempre será $Q = \frac{gP}{f}$.

288 Si hubiéramos de valuar la cantidad $\frac{a+bz}{f+gz+hz^2}$ supondríamos $\frac{a+bz}{f+gz+hz^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c, y multiplicando ambos miembros por el denominador del primero, saldria

$$\begin{aligned} a + bz = fA &+ fBz + fCz^2 + fDz^3 + \&c. \\ &+ gAz + gBz^2 + gCz^3 + \&c. \\ &+ hAz^2 + hBz^3 + \&c. \end{aligned}$$

de donde sacaríamos $fA = a$, $fB + gA = b$; ó $A = \frac{a}{f}$, $B = \frac{b}{f} - \frac{ga}{ff}$, y los demás coeficientes se sacarian de las equaciones siguientes

$$fC + gB + hA = 0, fD + gC + hB = 0$$
$$fE + gD + hC = 0, fF + gE + hD = 0.$$

Por las quales se echa de ver que en conociendo dos coeficientes consecutivos, al instante se sacará el inmediato que se les siguiese. Si los dos coeficientes consecutivos fueren P y Q, y el inmediato fuere R, será $fR + gQ + hP = 0$, ó $R = \frac{-gQ-hP}{f}$. Como ya sacamos antes los valores de A y B, sacarémos facilísimamente los de C, D, *E* &c. y por consiguiente serán determinados los coeficientes de la serie supuesta.

Para hacer alguna aplicacion de lo que acabamos de decir, supongamos que $\frac{1+2z}{1-z-zz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ $+$ &c, en cuyo supuesto $a = 1$, $b = 2$, $f = 1$, $g = -1$, $h = -1$; y será $A = 1$, $B = 3$, y tendremos $C = B + A$, $D = C + B$, $E = D + C$ &c. y substituyendo donde fuese menester los valores conocidos de A y B, hallarémos que $\frac{1+2z}{1-z-zz} = 1 + 3z + 4z^2 + 7z^3$ $+ 11z^4 + 18z^5$, cuyos coeficientes son cada uno la suma de los dos que le preceden inmediatamente.

289 Toda serie cuyos coeficientes se forman de algunos de los que los preceden, guardando siempre una ley constante, se llaman series *recurrentes*, porque se debe recurrir á los términos antecedentes para formar los que se siguen. El denominador mismo de la fraccion cuyo valor ha de espresar la serie, manifiesta por sí qué ley siguen en su formacion los coeficientes de sus respectivos términos; porque quando dicho denominador es binomio, pende el valor del coeficiente de un término qualquiera de solo un coeficiente antecedente; si fuese trinomio el denominador, dependerá qualquiera coeficiente de dos de los antecedentes &c.

290 Para la formacion de estas series es indispensable que no sea cero el primer término constante f del denominador; porque una vez que, segun hemos visto, el primer término de la serie es $A = \frac{a}{f}$, así este, como to-

dos los demás serian infinitos en el supuesto de $f = 0$. En todos los casos, excepto este que luego consideraremos, la fraccion que se ha de convertir en serie, tendrá esta forma $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \&c.}{1 - fz - gz^2 - hz^3 - kz^4 \&c.}$, y suponemos que sea 1 el primer término del denominador, porque todo quebrado se puede reducir á que sea la unidad el primer término de su denominador; $\frac{1}{3}$ por egemplo se transforma en $\frac{1}{1+2}$. Suponemos tambien que son negativos todos los demás términos del denominador, á fin de que sean positivos todos los de la serie que ha de resultar.

Si suponemos que sea $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c. la serie recurrente que es igual al quebrado propuesto, y sacamos los valores de los coeficientes, hallarémos

$$A = a,\ B = fA + b$$
$$C = fB + gA + c$$
$$D = fC + gB + hA + d$$
$$E = fD + gC + hB + kA + e$$

cuyas equaciones nos están diciendo que cada coeficiente es igual á la suma de los múltiplos de algunos de los antecedentes, y de un coeficiente de alguno de los términos del numerador. A no ser que se prosiga á lo infinito el numerador, faltarán por precision muy en breve términos que añadir á dichos múltiplos, y cada término se podrá determinar en virtud de una ley constante por medio de los que le preceden. Para que se forme luego la serie recurrente, es preciso que la fraccion de que ha de resultar sea una *fraccion genuina*, esto es, que el esponente de z

en el numerador sea menor que en el denominador; porque si fuese igual ó mayor, en cuyo caso la fraccion se llamaria *espuria*, la serie recurrente no será continua, sino despues del término que tubiere el mismo esponente que el numerador.

Todo esto se verifica en la fraccion espuria $\frac{a^3+z^3}{a-z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ &c. que despues de multiplicado todo por $a - z$, se transforma en

$$\begin{array}{l} a^3 + z^3 = aA + aBz + aCz^2 + aDz^3 + aEz^4 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad - Az - Bz^2 - Cz^3 - Dz^4 \text{ \&c.} \end{array}$$

que se reduce á

$$\left.\begin{array}{l} aA + aBz + aCz^2 + aDz^3 + aEz^4 \text{ \&c.} \\ -a^3 - Az - Bz^2 - Cz^3 - Dz^4 \text{ \&c.} \end{array}\right\} = 0$$
$$-z^3$$

de cuya equacion sacamos $A = a^2$, $B = \frac{A}{a}$, $C = \frac{B}{a}$. Hasta aquí todo vá ajustado á una misma ley, pero en el término siguiente, en el qual ha de ser $aD - C = 1$, sale $D = \frac{1+C}{a}$, y se interrumpe la ley; pero despues de este término proseguirá la serie sin interrupcion.

291 Las series que merecen una atencion particular son las que proceden de una fraccion, cuyo denominador está elevado á alguna potencia. De esta clase es la fraccion $\frac{a+bx}{(1-fx)^2}$, que reducida á serie será

$$\begin{array}{l} a + 2fax + 3f^2ax^2 + 4f^3ax^3 + \text{\&c.} \\ \quad + bx + 2fb + 3f^2b \end{array}$$

en la qual el coeficiente de la potencia x^n será $(n+1)f^na + nf^{n-1}b$. Será recurrente esta serie, porque cada uno de sus términos se determinará por dos de los antecedentes, siguiendo una ley que se manifestará reduciendo el denominador á $1 - 2fx + ffxx$, que es la potencia que señala su esponente.

Si supusiéramos $f = 1$, y $x = 1$, se transformaría la serie en la progresion arismética general $a + (2a + b) + (3a + 2b) + (4a + 3b)$; cuyas diferencias son constantes; porque por la naturaleza de la progresion arismética cada término lleva á su antecedente un mismo exceso que aquí es $a + b$.

Luego toda progresion arismética es una serie recurrente; porque si fuese $A + B + C + D +$ &c. una progresion arismética, será $C = 2B - A$, $D = 2C - B$, $E = 2D - C$ &c. (I. 213).

292 Si fuese la fraccion propuesta $\frac{a + bx + cxx}{(1 - fx)^3} = (a + bx + cxx) \times \frac{1}{(1 - fx)^3} = (a + bx + cxx) \times (1 - fx)^{-3}$; por ser $\frac{1}{(1 - fx)^3} = (1 - fx)^{-3} = 1 + 3fx + 6f^2x^2 + 10f^3x^3 + 15f^4x^4 +$ &c. se transformará en esta serie infinita

$$\begin{array}{lllll} a + 3fax & + 6f^2ax^2 & + 10f^3ax^3 & + 15f^4ax^4 & \&c. \\ \quad + bx & + 3fbx^2 & + 6f^2bx^3 & + 10f^3bx^4 & \&c. \\ & \quad + cx^2 & + 3fcx^3 & + 6f^2cx^4 & \&c. \end{array}$$

en la qual el coeficiente de x^n será

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} f^n a + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} f^{n-1} b + \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} f^{n-2} c.$$

Si en esta serie suponemos $f = 1$, $x = 1$, resultará una serie general de segunda órden, porque serán constantes sus diferencias segundas. Sea $A + B + C + D +$ &c. esta serie; será tambien recurrente, porque cada uno de sus términos se forma por medio de tres de los antecedentes; de manera que $D = 3C - 3B + A$, $E = 3D - 3C + B$. Y como las diferencias segundas de los términos de una progresion arismética son constantes, pues cada una de ellas $= 0$, convendrá tambien la propiedad mencionada á qualquiera progresion arismética.

293 Por el mismo camino hallaríamos que de la fraccion $\frac{a + bx + cx^2 + dx^3}{(1 - fx)^4}$ resultaria una serie infinita, en la qual el coeficiente de x^n seria $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^n a + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-1} b + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} d$.

Si en la espresada serie suponemos $f = 1$, y $x = 1$, representará todas las series algebráicas que llamarémos de tercera órden por ser constantes sus diferencias terceras. Todas las progresiones de esta órden procedentes del denominador $1 - 4x + 6xx - 4x^3 + x^4$ serán tambien recurrentes, y será $E = 4D - 6C + 4B - A$, $F = 4E - 6D + 4C - B$ &c. cuya propiedad se verificará tambien en todas las progresiones de clase inferior.

Discurriendo á este tenor se sacará que todas las progresiones algebráicas de qualquiera órden que paran en diferencias constantes, son series recurrentes, cuya ley se determina por medio del denominador $(1 - x)^n$, en el supuesto de ser n un número mayor que el que espresa la órden de la progresion.

294. Tambien se regula la órden de las series recurrentes por el número de los términos antecedentes que se nece-

sitan para formar un término qualquiera: de manera que llamarémos serie recurrente de primera órden toda serie, de la qual un término qualquiera sea igual al producto de un término antecedente multiplicado por alguna constante; si para determinar un término qualquiera se necesitan dos, tres ó quatro &c. de los antecedentes, las series se llaman recurrentes de segunda, tercera, quarta &c. órden; y así prosiguiendo. La serie

$$1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239 \text{ \&c.}$$

es serie recurrente de segunda órden, porque tomando á arbitrio los dos primeros términos, cada término de la serie es igual á la suma de los dos que le preceden multiplicados el primero por 1, y el otro por 2. Pero la serie

$$0, 0, 1, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{16}, \tfrac{2}{16}, \tfrac{3}{32}, \tfrac{5}{64} \text{ \&c.}$$

es recurrente de tercera órden, porque cada término es la suma de los tres que le preceden multiplicados, el primero por $\frac{1}{4}$, el segundo por $-\frac{1}{2}$, y el último por 1. Los tres primeros términos se tomarán á arbitrio.

295 Veamos ahora qué serie resultará quando fuere cero el término constante del denominador. En este caso la funcion fraccionaria tendrá esta forma $\frac{a+bx+cx^2+\&c.}{x(1-fx-gx^2-\&c.)}$. Para conseguir el intento, no atenderemos al factor x del denominador, y reduciremos lo restante $\frac{a+bx+cxx\ \&c.}{(1-fx-gx^2-\&c.)}$ á la serie recurrente $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c. de donde inferirémos que $\frac{a+bx+cx^2+\&c.}{x(1-fx-gx^2-hx^3-\&c.)}=\frac{A}{x}+B+Cx+Dx^2+Ex^3+$ &c. Tambien sacaríamos que ...... $\frac{a+bx+cx^2+\&c.}{x^2(1-fx-gx^2-\&c.)}=\frac{A}{xx}+\frac{B}{x}+C+Dx+Ex^2+$

&c., y que en general $\frac{a+bx+cx^2+dx^3 \text{ \&c.}}{x^m(1-fx-gx^2-hx^3 \text{ \&c.})} = \frac{A}{x^m} + \frac{B}{x^{m-1}} + \frac{C}{x^{m-2}} + \frac{D}{x^{m-3}} +$ &c, sea el esponente m el número que se quisiere.

Del Método inverso de las Series.

296 Llamamos *método inverso* de las series el artificio á que apelamos quando en el supuesto de ser, por egemplo, $x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} +$ &c. queremos espresar el valor de y por otra serie que en cada uno de sus términos lleve una potencia distinta de x, y por coeficiente alguno de los coeficientes de la primera serie que se supone $= x$.

Para manifestar como se consigue esto, considerarémos el caso mas sencillo en que $m = n = 1$, en cuyo supuesto la equacion general propuesta se transforma en $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c. de la qual hemos de sacar el valor de y en x.

Supondremos $y = Ax + Bx^2 + Cx \quad + Dx^4 +$ &c.

$$\text{y tendrémos} \begin{cases} y^2 = & A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 \\ & \qquad\qquad\qquad\;\; + 2ACx^4 \\ y^3 = & \qquad\quad\; A^3x^3 + 3A^2Bx^4 \\ y^4 = & \qquad\qquad\qquad\quad\; A^4x^4 \end{cases}$$

Multiplicando, pues, respectivamente estos valores de y, y^2, y^3, y^4 por los coeficientes de la serie $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c. Sacarémos

$$x = \begin{cases} Aax + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 + \&c. \\ \quad A^2b \quad + 2ABb + B^2b \quad \&c. \\ \qquad\qquad\qquad + 2ACb \\ \qquad\qquad A^3c \quad + 3A^2Bc \quad \&c. \\ \qquad\qquad\qquad A^4d \end{cases}$$

Si pasamos x al segundo miembro, sacarémos 1.° $Aax - x = 0$, ó $Aa = 1$, de donde sale $A = \frac{1}{a}$. 2.° $aB + A^2b = 0$; substituyendo en esta última el valor hallado de A, sacarémos $B = -\frac{b}{a^3}$. Por el mismo camino hallaríamos $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, y así prosiguiendo.

De donde inferirémos que si $x = ay + by^2 + cy^3$ &c. tendrémos en todos los casos semejantes $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}x^5 +$ &c. cuyo valor podrá servir como de fórmula general en todos los casos parecidos á este.

Si fuese por egemplo, $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5$ &. y quisiéramos sacar el valor de y en x, tendríamos $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 1$ &c. Luego seria $y = x + x^2 + x^3 + x^4 +$ &c.

Si fuese $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ &c. seria $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$, y resultaria

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5 \quad \&c.$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} \quad \&c.$$

y si $z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$ &c.

hallarémos que $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} +$ &c.

297 Supongamos ahora $m = 1$, y $n = 2$, la serie

propuesta no contendrá sino potencias ímpares de y, y la equacion general se transformará en $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 +$ &c. Para sacar la fórmula correspondiente á este caso, supondrémos $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 +$ &c.

y tendrémos
$$\left\{\begin{array}{llllll} y = & Ax & + Bx^3 & + Cx^5 & + Dx & + \&c. \\ y^3 = & & A^3 & + 3A^2B & + 3A^2C & + \&c. \\ & & & & + 3AB^2 & + \&c. \\ y^5 = & & & A^5 & + 5A^4B & + \&c. \\ y^7 = & & & & A^7 & \&c. \end{array}\right.$$

Practicando respectivamente lo mismo que antes (296) sacarémos

$$x = \left\{\begin{array}{lllll} ay = & Aax & + aBx^3 & + aCx^5 & + aDx^7 \quad \&c. \\ by^3 = \ldots\ldots & & A^3b & + 3A^2Bb & + 3A^2Cb \quad \&c. \\ & & & & + 3AB^2b \\ cy^5 = \ldots\ldots & & & A^5c & + 5A^4Bc \quad \&c. \\ dy^7 = \ldots\ldots & & & & A^7d \end{array}\right.$$

De cuya equacion inferirémos $x = Aax$, ó $A = \frac{1}{a}$; $aB + A^3b = 0$, ó $B = \frac{-b}{a^4}$; $C = \frac{3b^2 - ac}{a^7}$; $D = \ldots\ldots \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}$: &c. de suerte que la fórmula será $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^4}x^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}x^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}x^7$ &c.

En virtud de esto me será fácil hallar el valor de t en r, en el supuesto de que sea $r = t - \frac{t^3}{2.3p^3} + \frac{t^5}{2.3.4.5p^4} - \frac{t^7}{2.3.4.5.6.7p^6} +$ &c. Porque en este caso será $a = 1$, $b = -\frac{1}{2.3p^2}$, $c = \frac{1}{2.3.4.5p^4}$, $d = -$ &c. $t = y$, $r = x$, y egecutando las substituciones correspondientes, saldrá $t = r = \frac{1}{2.3p^2}r^3 + \left(\frac{1}{3.4p^4} - \frac{1}{2.3.4.5p^4}\right)r^5 +$ &c. cuya espresion puede reducirse á otra mas sencilla, si egecutamos la substraccion. A cuyo fin reducirémos los dos quebrados que incluye el paréntesis á un mismo denominador, y lo conseguirémos con multiplicar los dos términos del primero por 2×5 ó por 10, en cuyo supuesto la cantidad que encierra el paréntesis se transformará en $\frac{10-1}{2.3.4.5p^4} = \frac{9}{2.3.4.5p^4} = \frac{3 \cdot 3}{2.3.4.5p^4}$ que dividiendo ambos términos por 3, se reduce á $\frac{3}{2.4.5p^4}$. Luego el valor hallado de t será $r + \frac{1}{2.3p^2} r^3 + \frac{3}{2.4.5p^4} r^5 + \frac{3 \cdot 5}{2.4.6.7p^6} r^7$ &c.

De la sumacion de las Series.

298 El punto mas importante y mas dificultoso á un tiempo que acerca de las Series conviene averiguar, consiste en hallar la suma de todos sus términos, esto es, en reducir á una sola espresion finita todos los términos de una serie propuesta. De esta reduccion pende comunmente el resolver las cuestiones cuya resolucion viene á parar en una serie. Qualquiera percibirá, sin que sea menester prevenirlo, que será imposible lograr este intento si fuese siempre divergente la serie; pero que si fuese convergente podrá superarse en muchos casos la dificultad de esta operacion, conforme vamos á declarar.

299 Hay en toda serie una espresion algebráica muy reparable, llamada el *término general* de la serie, por medio de la qual se pueden formar todos sus términos, substituyendo succesivamente en lugar de la indeterminada n que lleva, y espresa el número de los términos, los números naturales 1, 2, 3, 4, 5 &c. Por egemplo, el térmi-

no general de esta serie 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37 &c. es $6n - 5$, porque si en esta espresion substituimos sucesivamente en lugar de n todos los números naturales, resultarán succesivamente todos los términos de la serie.

300 Llamamos *suma general* ó *término sumatorio* de una serie una funcion de n tal, que si en ella se substituye un número entero en lugar de n sale la suma de tantos términos de la serie, quantas unidades hay en n. Así la suma general de la serie (299) es $3n^2 - 2n$, porque qualquiera número entero que se substituya en lugar de n, saldrá la suma de tantos términos quantas unidades hay en n. Si quisiéramos sacar la suma de los siete primeros términos, hariamos $n = 7$, y saldria 133.

301 La suma de una serie continuada al infinito es la suma de un número infinito de sus términos, cuya suma se halla muchas veces aun sin conocer la suma general. Quando esta es conocida, se saca la suma de la serie continuada al infinito con hacer $n = \infty$. Sirva de egemplo esta serie $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{2.3}$, $\frac{1}{3.4}$, $\frac{1}{4.5}$, $\frac{1}{5.6}$ &c. cuyo término general $= \frac{1}{n(n+1)}$, y la suma general $= \frac{n}{n+1}$. Para sacar la suma de un número infinito de sus términos, haremos $n = \infty$, y (183) será $\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n} = 1$.

302 Una vez conocida la suma general, que llamarémos S, de una serie, se saca fácilmente su término general. Porque si en dicha suma se substituye $n - 1$ en lugar de n, resultará la suma de todos los términos hasta el término $(n - 1)^{mo}$ inclusive. Si restamos esta suma que

llamarémos s, de la suma general S, resultará por precision el término general T y será $T = S - s$.

Pero el término general de la serie solo será $= S - s$ quando fuere S la verdadera suma de la serie. Aunque S y s sean tales que substituyendo en la primera $n - 1$ en lugar de n resulte la segunda, no por esto se podrá inferir que sea S la suma cabal de la serie. Porque puede suceder que S discrepe de la verdadera suma de una cantidad dada y constante, independiente de n. Así aunque $\frac{6n-3}{2} = \frac{3n^2-1}{2} - \frac{3.(n-1)^2-1}{2}$, no obstante la verdadera suma de la serie cuyo término general fuere $\frac{6n-3}{2}$ no es $\frac{3n^2-1}{2}$, que discrepa de la verdadera suma de la cantidad $\frac{1}{2}$.

303 Hay sin embargo una señal infalible para conocer si S es la verdadera suma: se supondrá $n = 1$, y si en este supuesto el término general $T = S$, será S la verdadera suma. La razon es muy clara, porque de substituir 1 en lugar de n en el término general, ha de resultar (299) el primer término de la serie; y de substituir 1 en lugar de n en la suma general ha de resultar (300) la suma de todos los términos hasta el primero, esto es el primer término. Luego si S contubiere algo mas de la suma, será, despues de la espresada substitucion, mayor que el primer término, y mayor que T; lo propio digo respectivamente si contubiere algo menos. Quando el término general fuere mayor que S, deberá añadírsele á S la diferencia que hubiere entre los dos para sacar la verdadera suma: si S

fuese al contrario mayor que T, se sacará la suma cabal, quitándole á S el exceso que le lleváre á T. Así en el egemplo propuesto, el supuesto de $n = 1$ transforma el término general $\frac{6n-3}{2}$ en $\frac{3}{2}$, y $S = \frac{3n^2-1}{2}$ se transforma en 1: luego T es mayor que S de la cantidad $\frac{1}{2}$: luego para que sea S la suma cabal se le debe añadir, y será dicha suma $\frac{3n^2-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3n^2}{2}$.

De lo dicho se infiere con evidencia que por medio del término general se podria hallar la suma de una serie, con tal que se conociera una funcion de n tal, que con restar de ella la misma funcion de $n - 1$, resultára el mismo término general. Pero esto es muy dificultoso y casi imposible de conseguir, por mas sencillas que vengan propuestas las fórmulas de los términos generales. Por este motivo tomarémos otro rumbo, y buscarémos el término general por medio de las sumas, á fin de sacar muchas fórmulas, y estas muy generales, en las quales el término general nos dé á conocer la suma de las series. Quiero decir, que propondrémos muchas fórmulas que representen sumas generales de series, y por ellas determinarémos las condiciones que se repararán en los términos generales que por su medio sacarémos; porque así se nos hará fácil determinar despues la suma de una serie propuesta, segun tubiésemos averiguado por este camino las condiciones que han de concurrir en su término general.

304 Pero para lograr el fin que llevamos, es preciso tomemos fórmulas que puedan ser las sumas cabales de las se-

ries: ya dimos antes (303) una señal para distinguir las sumas cabales de las que no lo son. Hemos de considerar tambien que no sirve el método que vamos á proponer, mientras fuere $S - s$ la fórmula del término general. Porque toda serie cuyo término general es $S - s$ consta de dos series, siendo S el término general de la primera y s el de la segunda. Si por medio de estos dos términos generales sacamos las dos series, al instante hallarémos que el primer término de la primera destruirá el segundo de la segunda, que el segundo de la primera destruirá el tercero de la segunda &c. de modo que no quedará sino el último término de la primera serie, del qual se habrá de restar el primero de la segunda.

Para darnos mejor á entender con un egemplo, supongamos que sea la suma $S = \frac{n}{2+n}$, y que substituyendo en ella $n - 1$ en lugar de n salga $s = \frac{n-1}{1+n}$, y será por consiguiente el término general $T = S - s = \frac{n}{2+n} - \frac{n-1}{1+n}$. Formemos sin mudar la forma de este término general, las dos series, es á saber, la serie A que nace del término general $\frac{n}{n+2}$, y la serie B que sale del término general $\frac{n-1}{1+n}$.

$$A \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{5}{7} \; \ldots\ldots \; \frac{n-1}{1+n}, \frac{n}{2+n}$$

$$B - \frac{0}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{6} \; \ldots\ldots \; -\frac{n-1}{1+n}.$$

Se viene á los ojos que todos los términos de estas dos series se destruyen mutuamente por tener signos contrarios, á excepcion del último de A y del primero de B. Por consiguiente será la suma $\frac{n}{2+n} - \frac{0}{2}$, ó $\frac{n}{2+n}$: luego mientras tubiere el término general la forma de arriba, no podrá ser este método de utilidad alguna.

305 Es, pues, preciso valerse de alguno de los artificios de la Análysis para darle al término general $S - s$ otra forma, de manera, que la fórmula que de él nazca no tenga términos que se destruyan los unos á los otros. Quando esto se pudiere conseguir, y se consigue las mas veces, servirá el método, y no será de ningun provecho para los casos en que no se pudiere efectuar la mencionada transformacion del término general. Por egemplo, si reducimos á un mismo denominador los dos quebrados de arriba, saldrá $S - s = \frac{2}{(1+n) \cdot (2+n)}$, cuya fórmula no tiene el inconveniente de la primera, y dá la serie

$$\frac{2}{2 \cdot 3}, \frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{2}{4 \cdot 5}, \frac{2}{5 \cdot 6}, \frac{2}{6 \cdot 7} \text{ \&c.}$$

la suma de la qual será $= \frac{n}{2+n}$. Por consiguiente la suma de esta serie continuada infinitamente será $= \frac{n}{n} = 1$.

Aunque las consideraciones que hemos hecho parece que limitan los usos del método que vamos á manifestar, no obstante haremos patente que es inmenso el número de las series, cuya suma se puede hallar por medio de su aplicacion.

306 Empecemos por las series cuya suma general está representada por una funcion del número de términos n, en cuyo divisor no esté n. Ya que las fórmulas que tienen un término constante é independiente de n, no pueden representar las verdaderas sumas (302) de las series, solo considerarémos aquellas cuyos términos contienen todos n; esto es, el número de los términos. Y para obrar con mas

seguridad en esta investigacion, buscarémos primero qué serie será aquella cuya suma general tiene por espresion la fórmula An, siendo A una cantidad qualquiera. Quando $S = An$, si se substituye $n - 1$ en lugar de n, sale $s = An - A$; luego $S - s = T = A$. Se percibe fácilmente que del término general hallado A, en el qual no entra n, resultará la serie de los términos iguales A, A, A &c. cuya suma es evidentemente nA.

307 Consideremos ahora las series, cuya suma general $S = An + Bn^2$. Substituyo $n - 1$ en lugar de n, y sale

$$s = \begin{cases} An - A \\ Bn^2 - 2Bn + B \end{cases} \text{luego } S - s = \begin{cases} A \\ -B + 2Bn. \end{cases}$$

Formemos por medio de este término general la serie

$$\begin{array}{l} A, A, A, A, A, A \text{ \&c.} \\ B, 3B, 5B, 7B, 9B, 11B \text{ \&c.} \end{array}$$

que se compone de dos, siendo la primera la serie de los términos iguales, y la segunda la serie de los términos que ván creciendo en la misma progresion que los números impares. Toda la serie se compone de términos que forman una progresion arismética, en la qual restando cada término del que se le sigue, sale la misma diferencia $2B$. Son, pues, constantes las primeras diferencias de esta serie, y podrá servir de fórmula general respecto de todas las series en que concurriese la misma circunstancia. El término general de la serie $= \begin{array}{l} A \\ -B + 2Bn \end{array}$

y la suma $= An + Bn^2$.

No hay duda en que es esta la verdadera suma, porque suponiendo $n = 1$ en el término general y en la suma, sale la misma cantidad. Por lo que, si el término general de la serie no llevare mas que la primera potencia de n, se sacará facilísimamente su suma.

Para cuya operacion se supondrá $= A - B$ el término que no lleva la letra n en el término general dado de la serie propuesta; se supondrán iguales á $2B$ los coeficientes de n, y por medio de estas dos equaciones se determinarán los valores de A y B, que substituidos en la fórmula de la suma darán con efecto la suma de la serie. Sea, por egemplo, el término general $15 + 3n$; haremos $A - B = 15$, $2B = 3$; luego $A - \frac{3}{2} = 15$ ó $A = \frac{33}{2}$, y $B = \frac{3}{2}$; luego la suma de la serie será $\frac{33n + 3nn}{2}$.

308 De aquí se infiere que por este método se podrá hallar así el término general, como la suma general de las series, cuyas primeras diferencias fueren constantes. Se reducirá la operacion á igualar los dos primeros términos de la serie con los primeros de la fórmula de la serie, ó á suponer el primer término de la serie igual al término general $A - B + 2Bn$, suponiendo en este $n = 1$; despues se igualará el segundo término de la serie propuesta con el mismo término general, suponiendo en este $n = 2$. De estas dos equaciones se sacarán los valores de A y B, que servirán para hallar el término general y la suma de la serie propuesta.

Apliquemos esta regla á la serie 3, 7, 11, 15, 19 &c., cuya primera diferencia $= 4$. Hago

$$3 = \frac{A}{-B+2B} \text{ y } 7 = \frac{A}{-B+4B}$$

restando la primera equacion de la segunda sale $4 = 2B$, $B = 2$, y substituyendo este valor de B en qualquiera de las dos equaciones, saldrá $A = 1$. Substituyendo estos valores en las fórmulas del término general, y de la suma general, hallaremos que el término general de la serie es $= -1 + 4n$, y que la suma $= n + 2n^2$.

309 Consideremos las series cuya suma indefinita y general sea $S = An + Bn^2 + Cn^3$. Substituyo en esta espresion $n - 1$ en lugar de n y sale

$$s = \begin{cases} -A + An \\ +B - 2Bn + Bn^2 \\ -C + 3Cn - 3Cn^2 + Cn^3 \end{cases}$$

restando s de S resultará el término general

$$S - s = T = \begin{cases} A \\ -B + 2Bn \\ +C - 3Cn + 3Cn^2 \end{cases}$$

este término general nos dará la serie

$$A,\ A,\ A,\ A,\ A \text{ &c.}$$
$$B,\ 3B,\ 5B,\ 7B,\ 9B \text{ &c.}$$
$$C,\ 7C,\ 19C,\ 37C,\ 61C \text{ &c.}$$

que consta de tres; la primera contiene los términos iguales; la segunda, los términos que forman la progresion de los números impares; la tercera es de tal calidad, que sus segundas diferencias son constantes é $= 6C$, cuya propiedad se ha de verificar en toda la serie, que por consiguiente podrá servir de fórmula general respecto de todas las series cuyas segundas diferencias fueren constantes. Comparo cada término de la serie dada con cada término de la fórmula general, y formo tres equaciones; de la última saldrá el valor de C, de la segunda el de B, y de la primera el de A. Sea el término general dado de la serie $= 1 - n + n^2$, el qual comparándole con el universal dá tres equaciones, es á saber $1 = A - B + C$, $-1 = 2B - 3C$, $1 = 3C$; de la última saco $C = \frac{1}{3}$: substituyendo este valor de C en las otras dos saco $1 = A - B + \frac{1}{3}$, $-1 = 2B - 1$. La última da $B = 0$; y será por consiguiente la primera $1 = A + \frac{1}{3}$ ó $A = \frac{2}{3}$. Substituyendo estos valores en la fórmula de la suma, saldrá $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n^3$.

310 Todo esto nos enseña el modo de hallar el término general y la suma general de una serie cuyas segundas diferencias son constantes. Porque de la comparacion de tres términos sacarémos los valores de A, B, C, y conocidos estos, quedarán determinados el término general y la suma general.

Sirva de egemplo la serie 9, 13, 21, 33, 49, 69 &c. cuyas diferencias segundas $= 4$. Si comparamos los tres primeros términos de esta serie con los tres primeros de la serie universal, ó con el término general, substituyendo sucesivamente en este en lugar de n, los números 1, 2, 3, resultarán tres equaciones que llamaremos de *primera órden*. Restaremos la primera de la segunda, la segunda de la tercera, y resultarán dos equaciones que llamaremos de *segunda órden*. Restaremos la segunda de estas de la primera, y resultará una sola equacion de *tercera órden*, que nos dará el valor de C, el qual substituido en alguna de las de segunda órden, dará el valor de B. Con substituir en una equacion de primera órden los valores de C y B, saldrá el valor de A, y hallados todos estos valores quedarán determinados el término general de la serie, y su suma. Haciendo el cálculo sacaremos las siguientes equaciones

De 1.ª órden. De 2.ª órden. De 3.ª órd.

$$\left.\begin{aligned} 9 &= A + B + C \\ 13 &= A + 3B + 7C \\ 21 &= A + 5B + 19C \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 4 &= 2B + 6C \\ 8 &= 2B + 12C \end{aligned}\right\} \left. 4 = 6C \right\} \text{Luego } C = \tfrac{2}{3}$$

Substituyendo $\frac{2}{3}$ valor de C en la primera de segunda órden, sale $B = 0$. Los valores de B y C substituidos en la primera de primera órden dan $A = 8 + \frac{1}{3}$. Por consiguiente el término general de la serie será $= 9 - 2n + 2n^2$, y la suma $= (8 + \frac{1}{3})n + \frac{2}{3}n^3$.

311 Si aplicásemos el método á una serie cuya suma fuese $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$ hallariamos que su término general sería

$$\begin{array}{l} A \\ - B + 2Bn \\ + C - 3Cn + 3Cn^2 \\ - D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3 \end{array}$$

del qual naceria una serie que tendria constantes las terceras diferencias.

Por el mismo camino hallaríamos que la serie cuya suma fuere $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5$ tendria por término general

$$\begin{array}{l} A \\ - B + 2Bn \\ + C - 3Cn + 3Cn^2 \\ - D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3 \\ + E - 5En + 10En^2 - 10En^3 + En^4 \end{array}$$

del qual naceria una serie cuyas diferencias quartas serian constantes

312 De todo lo dicho hasta aquí podemos inferir que toda serie cuyas diferencias m^{mas} fueren constantes, tendrá por término general una fórmula, en la qual subirá n á la potencia m; y que toda serie en cuyo término general llevare n el esponente m, tendrá por suma una fórmula en que estará el término n^{m+1} y no habrá término alguno sin n.

Esta observacion es de muchísimo alivio en la práctica. Supongamos que tropecemos con una serie que tenga constantes algunas diferencias, y nos convenga hallar su término general. Tomaremos la fórmula $A + Bn + Cn^2$ &c. tal que su último término tenga un esponente de igual grado que el de las diferencias constantes. Haremos sucesivamente $n = 1, 2, 3$ &c. en el espresado término general, y le igualaremos con los primeros términos de la serie para formar tantas equaciones quantas fueren las indeterminadas A, B, C, D &c. Se determinará el valor de estas, y saldrá el término general de la serie propuesta.

313 Pero si fuese dado el término general y quisiéramos averiguar la suma, tomaríamos $An + Bn^2 + Cn^3$ &c, de modo que haya un término en que el mayor esponente de n sea mayor de una unidad que el mayor esponente del término general. Substituiremos en la fórmula $n - 1$ en lugar de n, y restaremos de la fórmula indeterminada la que resultare de esta substitucion. Igualaremos los términos de la fórmula que resultare, con los términos homólogos del término general, y resultarán tantas equaciones quantas fueren las indeterminadas A, B, C, D &c. y determinadas estas, estará determinada la suma de la serie.

Supongamos, por egemplo, que la serie propuesta sea 2, 9, 24, 50, 90, 147, 224, 324 &c. cuyas diferencias terceras son constantes. Para hallar su término general tomo la fórmula de tercer grado $A + Bn + Cn^2 + Dn^3$. Hago n sucesivamente $= 1, 2, 3, 4$; comparo los quatro resultados con los quatro primeros términos de la serie, y salen las equaciones de primer grado: resto las inferiores de las superiores, y saco las equaciones de segunda, tercera &c. órden, como sigue

Prim. órden.	Seg. órd.	Terc. órd.	Quart. órd.
$A + B + C + D = 2$			
$A + 2B + 4C + 8D = 9$	$B + 3C + 7D = 7$		
$A + 3B + 9C + 27D = 24$	$B + 5C + 19D = 15$	$2C + 12D = 8$	
$A + 4B + 16C + 64D = 50$	$B + 7C + 37D = 26$	$2C + 18D = 11$	$6D = 3$

de cuyas equaciones saco $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $D = \frac{1}{2}$; luego el término general de la serie sera $\frac{1}{2} n + n^2 + \frac{1}{2} n^3$.

314 Si en el supuesto de ser dado el término general

$\frac{1}{2}n + n^2 + \frac{1}{2}n^3$ quisiéremos hallar la suma general, representarémos esta por $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$, en cuya fórmula substituiremos $n - 1$ en lugar de n, y saldrá

$$\begin{array}{l} - A + An \\ + B - 2Bn + Bn^2 \\ - C + 3Cn - 3Cn^2 + Cn^3 \\ + D - 4Dn + 6Dn^2 - 4Dn^3 + Dn^4 \end{array}$$

Restando esta cantidad de la primera $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$, saldrá el término general

$$\begin{array}{l} A \\ - B + 2Bn \\ + C - 3Cn + 3Cn^2 \\ - D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3. \end{array}$$

Compárolo con el término general dado, y de esta comparacion saco las quatro equaciones $A - B + C - D = 0$, $2B - 3C + 4D = \frac{1}{2}$, $3C - 6D = 1$, $4D = \frac{1}{2}$, que me dan $D = \frac{1}{8}$, $C = \frac{7}{12}$, $B = \frac{7}{8}$, $A = \frac{5}{12}$. Por consiguiente la suma de la serie será $\frac{5n}{12} + \frac{7n^2}{8} + \frac{7n^3}{12} + \frac{n^4}{8}$. Se podrá, pues, determinar el término general, y por medio de este la suma de todas las series que tubieren constantes algunas diferencias, que suelen llamarse *series algebráicas*.

315 Consideremos ahora las series cuya suma general tiene por espresion un quebrado compuesto de funciones racionales de n, y empezaremos por las series que continuadas infinitamente dan una suma finita. Para que esto se verifique, es preciso que en la fórmula de la suma ge-

neral el mayor esponente de n sea uno mismo en el numerador y el denominador del quebrado; porque de otro modo no se desvaneceria n en ambos términos del quebrado. Esto supuesto, iremos por grados en esta investigacion, y buscaremos primero qué serie será aquella cuya suma general sea $= \frac{Ln}{A+Bn}$. Escribiremos en esta $n - 1$ en lugar de n, á fin de sacar el término general $T = \frac{Ln}{A+Bn} - \frac{L.\overline{n-1}}{A+B.\overline{n-1}}$ que, despues de reducidos ambos términos á un mismo denominador, será $\frac{AL}{(A+B.\overline{n-1})\,(A+Bn)}$. Si por medio de este término general formamos la serie, su suma será $\frac{Ln}{A+Bn}$, por manera que la suma de la serie continuada infinitamente será $= \frac{Ln}{Bn} = \frac{L}{B}$.

El numerador del término general es una cantidad constante independiente de n; en el denominador hay dos factores de primer grado que no se diferencian uno de otro sino en que B está multiplicado en el uno por $n - 1$, y en el otro por n. Por lo que si consideramos cada uno de estos factores como término general, cada uno dará una misma serie, cuya diferencia $= B$, pero la segunda empezará por el segundo término de la primera; porque la serie cuyo término general $= A + B.\overline{n-1}$ es A, $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$ &c., y la serie cuyo término general $= A + Bn$ es $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$ &c. que empieza por el segundo término de la primera. Por consiguiente, del término general hallado resulta esta serie

$\frac{AL}{A(A+B)}$, $\frac{AL}{(A+B)(A+2B)}$, $\frac{AL}{(A+2B)(A+3B)}$ &c.
cuya suma $= \frac{Ln}{A+Bn}$, y suponiendo n infinita $= \frac{L}{B}$.

316 Apliquemos toda esta doctrina á la serie $\frac{6}{2.7}$, $\frac{6}{7.12}$, $\frac{6}{12,17}$, $\frac{6}{17.22}$, $\frac{6}{22.27}$ &c. Las dos series

$$2, 7, 12, 17, 22$$
$$7, 12, 17, 22, 27$$

que componen los divisores, son ambas de primera órden, porque la diferencia de cada una $= 5$, y la segunda empieza por el segundo término de la primera. Por consiguiente la serie propuesta está cifrada en nuestra fórmula, y tiene una suma algebráica general.

Para sacar la expresion de su término general, y por consiguiente los valores de A y B, se han de comparar los divisores de la propuesta con los de la serie universal $\frac{AL}{A.(A+B)}$ &c. De este cotejo sacaremos que $A = 2$, $B = 5$, y $A + B = 7$, de donde inferiremos que el término general de la serie será $\frac{6}{(-3+5n)\,(2+5n)} = \frac{6}{(2+5\,.\,\overline{n-1})\,(2+5n)}$.
Para determinar L hemos de atender á que $AL = 6$, luego $L = 3$, y la suma general de la serie $= \frac{3n}{2+5n}$, que en el supuesto de ser n infinita $= \frac{3}{5}$.

317 Veamos lo que pasa en las series cuya suma fuere $\frac{Ln+Mn^2}{(A+B\,.\,\overline{n-1})\,.\,(A+Bn)}$. Si en ella escribo $n - 1$ por n, saldrá la fraccion $\frac{L\,.\,\overline{n-1} + M \times (n-1)^2}{(A+B\,.\,\overline{n-2})\,.\,(A+B\,.\,\overline{n-1})}$

que tiene del mismo modo que la que espresa la suma, el divisor $A+B\cdot\overline{n-1}$. Bastará, pues, para reducir los dos quebrados á un mismo denominador, con la mira de restar el segundo del primero, multiplicar el numerador del primero por $A+B\cdot\overline{n-2}$, y el numerador del segundo por $A+Bn$. Despues de egecutada la sustraccion saldrá el término general

$$\frac{\begin{array}{r} AL - BLn \\ - AM - BMn \\ + 2AMn \end{array}}{(A+B\cdot\overline{n-2})\cdot(A+B\cdot\overline{n-1})\cdot(A+Bn)}$$

El numerador de esta fórmula es el término general de una serie de primera órden, con tal que no sea cero el coeficiente de la cantidad n, porque en este caso la serie será de cantidades iguales. De cada factor del divisor sale una serie de primera órden, y de todos sale la misma, pero de tal forma qué la segunda empieza por el segundo término de la primera, y la tercera por el tercero. Esto nos está diciendo que condiciones han de concurrir en las series de los quebrados para que tengan una suma de la forma sobredicha.

Sirva de egemplo la serie

$$\frac{4}{2.3.4},\ \frac{7}{3.4.5},\ \frac{10}{4.5.6},\ \frac{13}{5.6.7},\ \frac{16}{6.7.8}\ \&c.$$

la serie de los numeradores tiene por término general $1+3n$. Los primeros factores del divisor engendran la misma serie que los demás; pero el segundo término de la primera es el primero de la segunda, y el tercer término de la primera es el primer término de la tercera. El término general de la tercera $= 3 + n$: haciendo un cotejo con el tercer factor $A + Bn$ de la serie universal, cuyo factor representa el término general de la tercera serie, y debe ser igual á $3 + n$, que es el término general hallado de la misma serie, sale $A = 3$, $B = 1$.

Si comparamos el numerador del término general de la fórmula universal, con el término general de la serie que forman los numeradores de la serie propuesta, sacaremos $3L - 3M = 1$, $-L - M + 6M = 3$. Si substituimos en la segunda equacion el valor de L en M sacado de la primera, saldrá $M = \frac{5}{2.3}$, cuyo valor substituido en lugar de M en qualquiera de las dos equaciones, dará $L = \frac{7}{2.3}$, y por consiguiente la suma de la serie propuesta viene á ser $\frac{\frac{7}{2.3}n + \frac{5}{2.3}n^2}{(3 + n - 1).(3 + n)} = \frac{7n + 5n^2}{2.3.(2+n).(3+n)}$

que siendo n infinita $= \frac{5}{6}$, conforme verá el que egecutáre las multiplicaciones que representa el denominador, y no dejare en el resultado mas que los términos en que estuviere la mayor potencia de n (184).

318 Si el numerador del término general fuese divisible por uno de los factores estremos, despues de egecutada la division, corresponderia al caso que consideramos antes (315). Si en el denominador faltára el factor medio, sería preciso multiplicar así el numerador como el denomi-

nador del término general por el factor que faltare, á fin de que correspondiese la serie al caso actual.

319 Consideremos las series cuya suma es.......

$$\frac{Ln + Mn^2 + Nn^3}{(A+B.\overline{n-2}.).(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$$. Si substituimos en esta fórmula $n-1$ en lugar de n saldrá

$$\frac{\begin{array}{l} -L+Ln \\ +M-2Mn+Mn^2 \\ -N+3Nn-3Nn^2+Nn^3 \end{array}}{(A+B.\overline{n-3}).(A+B.\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1})}$$

Para reducir ambas fórmulas á un mismo denominador, bastará multiplicar la primera por $A+B.\overline{n-3} = \begin{array}{l} A \\ -3B+Bn \end{array}$, y la segunda por $A+Bn$.

Despues de egecutada esta multiplicacion, y restado el segundo quebrado del primero, sale el término general

$$\frac{\begin{array}{l} AL-2BLn+3ANn^2 \\ -AM+2AMn-3BNn^2 \\ +AN-BMn-BMn^2 \\ \quad -3ANn \\ \quad +BNn \end{array}}{(A+B.\overline{n-3}).(A+B.\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1})(A+Bn)}$$

La serie que resulta del numerador de este término general, es una serie de segunda órden, y será de la primera si n^2 llevare un coeficiente $= 0$, ó de cantidades iguales si fuere tambien $= 0$ el coeficiente de n. El divisor se compone de quatro factores, cada uno de los quales es el término general de una serie de primera órden; pero la segunda empieza por el segundo término de la primera, la tercera por el tercero, la quarta por el quarto.

Sirva de egemplo la serie

$$\frac{1}{4.7.10.13}, \frac{7}{7.10.13.16}, \frac{17}{10.13.16.19}, \frac{31}{13.16.19.22} \text{ \&c.}$$

Será fácil sacar que $A = 10$, y $B = 3$; porque si consideramos el último factor $A + Bn$ del divisor como término general, resultará la serie que forma los últimos factores de cada divisor de la propuesta, de cuya serie son constantes las primeras diferencias. Substituyendo, pues, en $A + Bn$ sucesivamente 1, 2 saldrán dos valores, tales que si comparamos el primero con 13, el segundo con 16, y restamos el primero del segundo, sale con efecto $A = 10$, $B = 3$.

El término general del numerador $= -1 + 2n^2$.

Por consiguiente para determinar L, M, N, se formarán estas equaciones $10L - 10M + 10N = -1$, $-6L + 17M - 27N = 0$, $-3M + 21N = 2$, de las quales se sacará $L = \frac{-19}{3.4.5.7}$, $M = \frac{7}{5.8}$, $N = \frac{101}{3.5.7.8}$. Será, pues, la suma general de la serie $= \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\frac{-19}{2.4.5.7} n + \frac{7}{5.8} n^2 + \frac{101}{3.5.7.8.} n^3}{(4+3n).(7+3n).(10+3n)}$$ que suponiendo n infinita

$$= \frac{101}{3^4.5.7.8} = \frac{101}{22680}.$$

320 Si el numerador del término general fuese divisible por alguno de los factores estremos, este caso se reduciria al de antes (317), porque el divisor de la suma se compondria de solos dos factores. Si faltaren ambos factores medios, el divisor engendrará dos series, de las quales la una empezará por el quarto término de la otra. Si faltare solo el primero de los factores medios, resultarán tres series, tales que la segunda empezará por el tercer término, y la tercera por el quarto término de la primera. Finalmente, si faltase el segundo de los factores medios, la segunda serie empezará por el segundo término, y la tercera por el quarto término de la primera. En todos estos casos bastará multiplicar el numerador y el denominador del término general por los factores que faltaren, procurando que en el divisor sean quatro los factores, que engendren quatro series de tal calidad, que la segunda empiece por el segundo término de la primera, la tercera por el tercero, y la quarta por el quarto. Con esto quedará reducida la fórmula al caso actual.

321 Todo lo dicho hasta aquí hace patentes las condiciones que deben concurrir en el término general para que tenga la serie una suma algebráica, y que continuada al infinito tenga una suma finita. Para esto es preciso que conste el denominador de muchos factores, de los quales resulten series arisméticas, tales que la segunda empiece por el segundo término de la primera, la tercera por el segundo término de la segunda, y prosiguiendo á este tenor.

Es tambien preciso que en el numerador la mayor potestad de n no pase del número de los factores menos 2. Si en el denominador faltaren algunos de los factores medios, se multiplicarán por ellos el numerador y el denominador, á fin de que se verifiquen las condiciones espresadas. Todas las veces que éstas concurrieren en el término general, se hallará la suma egecutando la operacion que vamos á proponer.

Se fingirá una fórmula en cuyo numerador no esté el término que no lleva n, y tal que el mayor esponente de n sea igual al número de los factores menos 1; se tomarán indeterminados los coeficientes L, M, N &c. de todos los términos; se le dará á esta fórmula el mismo denominador del término general, á excepcion del primer factor. Todas estas son circunstancias que ha de tener indefectiblemente la fórmula. Substitúyase en ella $n-1$ en lugar de n, y despues de reducidas ambas fórmulas á un mismo denominador, se restará la segunda de la primera. La que resultáre se comparará con el término general dado: de esta comparacion se sacarán los coeficientes L, M, N &c. y substituyendo sus valores en la fórmula dada, saldrá la suma de la serie. Basta esto para dar á entender el método.

322 Hemos supuesto que en la fórmula de la suma el mayor esponente de n en el numerador era igual al número de los factores del denominador, ó al mayor esponente que en este tiene n. Si fuese así, se procurará que el mayor esponente de n sea menor en el numerador que en el denominador, lo que se conseguirá con suponer iguales á cero los coe-

ficientes de las dimensiones superiores, y borrarlos en la fórmula del término general, para que resulte este. Pero aun en este caso, el mayor esponente de *n* en el numerador del término general es menor por lo menos de dos unidades que el número de los factores, ó que el esponente del denominador. Y así queda comprehendido este caso en el que declaramos antes (321).

323 Si el esponente de *n* en el numerador de la suma fuese mayor que el número de los factores del denominador, es constante que multiplicando unos por otros los factores, se podrá egecutar la division; se deberá egecutar con efecto hasta llegar á un esponente de *n* que sea igual al número de los factores; y conseguido esto, se dejará de proseguir la division. Concluida esta operacion, estará dividida la fórmula en dos, siendo la primera un entero, y la otra una fraccion. Se buscará primero el término general de la serie, cuya suma fuere el entero, en cuyo término general el esponente de *n* será menor de una unidad, que en la fórmula de la suma, segun hemos visto. Se buscará despues el término general de la serie, cuya suma fuere la fórmula quebrada. Se añadirá otro factor á los que lleváre el denominador, y en el numerador se hará el esponente de *n* dos unidades menor por lo menos, que el número de los factores del denominador despues de añadirle uno mas.

324 Por lo que, si en el numerador del término general dado de una serie fuese el esponente de *n* igual ó mayor que el número de los factores, se multiplicarán unos por otros

los factores, y se hará la division, hasta que el esponente del numerador sea menor que el esponente del denominador. Se partirá el término general en dos fórmulas, la una entera y la otra quebrada. La serie que resultáre de la parte entera será siempre sumable algebráicamente. Lo será tambien la que resultáre de la parte quebrada, si el esponente de n en el numerador fuere menor dos unidades por lo menos que el número de los factores; pero no lo será, si solo fuese menor de una unidad.

Sea por egemplo, el término general . . . . $\frac{2+\overline{c-5}\,.\,n^2+5n^3+5n^4+n^5}{(1+n).(2+n).(3+n)}$, cuyo divisor no tiene sino tres factores, y el mayor esponente de n en el numerador $= 5$. De la multiplicacion de los factores saldrá $6 + 11n + 6n^2 + n^3$. Hágase la division, hasta que el esponente del numerador sea menor que el del denominador, y saldrá $-n + n^2 + \frac{2+6n+cn^2}{(1+n).(2+n).(3+n)}$. Por lo que mira á la serie cuyo término general $= -n + n^2$, tiene una suma algebráica: la que tiene por término general . . . . $\frac{2+6n+cn^2}{(1+n).(2+n).(3+n)}$, tendrá tambien una suma algebráica si $c = 0$. Si c no fuese cero, no se conoce método alguno que pueda dar su suma. El mismo método se podria aplicar á las series, cuya suma general tiene en el denominador factores de segundo, tercero y mas alto grado. Pero nos basta lo dicho para lo que necesitamos. Pasemos á las series cuya suma es una fórmula esponencial multiplicada por una fórmula algebráica entera.

325 Llamamos *fórmula esponencial* aquella en que n hace oficios de esponente. La primera que ocurre considerar es una cantidad constante levantada á la potencia n, y así buscaremos el término general de una serie, cuya suma sea $= AK^n - A$. Resto la cantidad A, porque sin esto no podria ser dicha cantidad la verdadera suma. Substituyendo $n - 1$ en lugar de n, saldrá otra fórmula, que será la suma de los términos, cuyo número es $n - 1$: restando esta fórmula de la primera, saldrá el término general . . . .

$$A \cdot K^n - A \cdot K^{n-1} = AK^n - \frac{AK^n}{K} = \ldots\ldots\ldots$$

$\frac{AK^{n+1} - AK^n}{K} = \frac{A(K-1)}{K} K^n$. Si suponemos $n = 1$, así el término general como la suma serán $= AK - A$; cuya espresion evidencia que la fórmula propuesta no podia representar la verdadera suma (303) sin restar del término esponencial AK^n la cantidad A. Ya se ve que el término general hallado engendrará una serie geométrica qualquiera cuya suma, por lo mismo, será fácil hallar. Mientras fuere K mayor que la unidad, la serie irá siempre creciendo, y los términos ván siendo siempre mayores, de conformidad que siendo n infinita, será tambien K^n infinita. Si $K = 1$, todos los términos de la serie, y su suma $= 0$. Finalmente si K fuere menor que la unidad, la serie irá siempre decreciendo, de forma que siendo n infinita, K^n será infinitamente pequeña (182). Pero en este caso así la fórmula del término general, como la de la suma serian negativas. Para que sean positivas, se debe dar esta forma $A - A . K^n$ á la suma, y estotra .... $\frac{A . \overline{1-K}}{K} . K^n$ al término general. Pero como en el supuesto de ser n infinita y K menor que 1, K^n viene á ser infinitamente pequeña; la suma de la serie infinitamente continuada será $= A$.

326 Quando viene propuesto el término general, se debe distinguir la cantidad que lleva el esponente n de la que no le lleva. Se supondrá la primera $= K^n$, y la otra $= \frac{A . \overline{K-1}}{K}$, ó $\frac{A . \overline{1-K}}{K}$, segun fuere K mayor ó menor que la unidad: hecho esto, se determinarán K y A, y una vez determinadas estas dos cantidades, se conocerá la suma. Sea, por egemplo, el término general $\frac{1}{3} . 2^n$. Hágase $K^n = 2^n$, ó $K = 2$; como este valor es mayor que la unidad, se tomará la primera fórmula haciendo $\frac{A . \overline{K-1}}{K} = \frac{1}{2} A = \frac{1}{3}$: luego $A = \frac{2}{3}$. Substituyendo estos valores en la fórmula $AK^n - A$ de la suma general, sacaremos que la suma de la serie cuyo término general $= \frac{1}{3} . 2^n$ es $\frac{2}{3} 2^n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} . (2^n - 1)$.

327 Si en el término general propuesto hubiere dos ó muchas cantidades multiplicadas ó divididas unas por otras, afectas de diversos esponentes, en los que no hay sin embargo mas potestad de n que la linear, despues de reducidas por artificios analyticos al mismo esponente n, se deberán considerar todas como una misma cantidad levantada á la potestad n. Si fuese, por egemplo, el término general

$\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$; se le dará esta forma $2.\ 3.\ \frac{2^n}{3^n} = 2.\ 3. (\frac{2}{3})^n$. Sale $K = \frac{2}{3}$, que por ser menor que la unidad, manifiesta que se debe escoger la segunda fórmula; luego $\frac{A.\overline{1-K}}{K} = \frac{1}{2}A = 2 . 3$. Luego $A = 2^2 . 3$, y por consiguiente la suma es $2^2 . 3 - \frac{2^2 . 3 . 2^n}{3^n} = 2^2 . 3 - \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}}$. Suponiendo n infinita, la cantidad $\frac{2^{n+2}}{3^{n-1}}$, es infinitamente pequeña (182), y la suma de la serie $= 2^2 . 3 = 12$.

328 Se aplica tambien este método á los casos en que el esponente n está multiplicado por una cantidad constante. Sea, por egemplo, el término general $\frac{3^{3n+1}}{2^{2n-2}}$. Se le deberá dár esta forma $3 . 2^2 . \frac{3^{3n}}{2^{2n}} = 3 . 2^2 (\frac{3^3}{2^2})^n$. Es, pues, $K = \frac{3^3}{2^2}$, y $\frac{A.\overline{K-1}}{K} = A.(\frac{3^3}{2^2} - 1).(\frac{2^2}{3^3}) = A.\frac{3^3 - 2^2}{3^3} = 3 . 2^2$, ó $A = \frac{3^3 . 2^2}{3^3 - 2^2}$. Luego si substituimos estos valores de K y A en $AK^n - A$ que es la fórmula de la suma, sacaremos que la serie cuyo término general $= \frac{3^{3n+1}}{2^{2n-2}}$ es $\frac{3^4 . 2^2}{3^3 - 2^2} . \frac{3^{3n}}{2^{2n}} - \frac{3^3 . 2^2}{3^3 - 2^2} = \frac{3^{3n+4}}{3^3 - 2^2 . 2^{2n-2}} - \frac{3^3 . 2^2}{3^3 - 2^2}$. Esto es tan fácil que no necesita de mas esplicacion.

329 Quando ocurriere sumar una serie geométrica, se deberá considerar primero si es creciente ó decreciente; si fuere creciente, se usará de la primera fórmula, y de la segunda, si fuere la serie decreciente. Haciendo $n = 1$, se igualará el término general con el primer término de la serie, y con el segundo, haciendo $n = 2$; se dividirá la segunda equacion por la primera, saldrá el valor de K, que puesto en la primera equacion dará el valor de A. Con estos dos valores saldrá la suma, igualmente que el término general. Sirva de egemplo la serie

$$3,\ 5,\ 8\tfrac{1}{3},\ 13\tfrac{8}{9}\ \&c.$$

ya que esta serie vá creciendo, servirá la primera fórmula $\frac{A.\overline{K-1}}{K}.K^n$ del término general. Suponiendo n sucesivamente $=1$, $=2$, y comparando respectivamente los dos resultados con los dos primeros términos de la serie, formarémos las dos equaciones

$$A.(K-1) = 3;\ \text{y}\ A.(K-1).K = 5.$$

Dividiendo la segunda por la primera, sale $K = \frac{5}{3}$; cuyo valor substituido en la primera sale $A.\frac{2}{3} = 3$, ó $A = \frac{3^2}{2}$

Por consiguiente el término general será $= \frac{3^2}{2}.\frac{\frac{5}{3}-1}{\frac{5}{3}}.\frac{5^n}{3^n}$ $= \frac{3^2}{2}.\frac{3}{5}.\frac{2}{3}.\frac{5^n}{3^n}$, que borrando 2 y 3 en el numerador y el denominador, y practicando lo dicho (91 y 92), se reduce á $\frac{5^{n-1}}{3^{n-2}}$. La suma será $\frac{3^2}{2}\times\left(\frac{5^n}{3^n}\right) - \frac{3^2}{2} = \frac{3^2}{2}\left(\frac{5^n}{3^n} - 1\right)$, que despues de reducido á quebrado todo lo que encierra el paréntesis, y pasado 3^2 al denominador (92) se transforma en $\frac{5^n - 3^n}{2 \cdot 3^{n-2}}$.

330 Consideremos ahora las series cuya suma es $(A + Bn). K^n - A$, ó $AK^n + nBK^n - A$. Para sacar el término general, en lugar de n substituiré $n - 1$, y resultará $AK^{n-1} + nBK^{n-1} - BK^{n-1} - A$; restando esta espresion de la primera, sacaré que el término general de la serie es

$$AK^n - AK^{n-1} + nBK^n - nBK^{n-1} + BK^{n-1},$$

en cuya espresion es de reparar que $AK^n = \frac{AK^{n+1}}{K}$; $-AK^{n-1} = \frac{-1 \times AK^n}{K}$; $nBK^n = \frac{nBK^{n+1}}{K}$; $-nBK^{n-1} = \frac{-1 \times nBK^n}{K}$; y $BK^{n-1} = \frac{BK^n}{K}$; por consiguiente el término general hallado será

$$\frac{AK^{n+1} - 1AK^n + nBK^{n+1} - 1nBK^n + BK^n}{K}$$

$$= \frac{(AK - 1)\,K^n + BK^n + (nBK - 1)\,K^n}{K} =$$

$$\left(\frac{A\,.\,\overline{K-1} + B + Bn\,.\,\overline{K-1}}{K}\right) K^n$$

El término general de la serie cuya suma fuese $(A + Bn + Cn^2). K^n - A$ será

$$\frac{\left.\begin{array}{llll} AK & + BKn & + CKn^2 & \\ -A & & & \\ +B & -Bn & & \\ -C & +2Cn & -Cn^2 & \end{array}\right\} \times K^n}{K}$$

Sirven estas fórmulas quando K es mayor que la unidad: si fuese menor, se han de mudar en ambas los signos. Todo esto hace patente que una serie cuya suma tiene por espresion una fórmula algebráica multiplicada por otra esponencial, de la qual se reste un término constante, tiene por término general una fórmula algebráica del mismo grado, multiplicada por la misma esponencial.

331 Así, para hallar la suma de una serie cuyo término general es una fórmula algebráica multiplicada por otra esponencial, se fingirá una fórmula de coeficientes indeterminados $A + Bn + Cn^2$ &c. del mismo grado; se la multiplicará por la cantidad esponencial, y despues se restará A. Se supondrá que la cantidad que resultare es la suma; se substituirá en ella $n - 1$ en lugar de n, y se restará de la primera fórmula la que resultare de esta substitucion. Comparando el término general que resultare con el dado, se determinarán los coeficientes, y se sacará la suma que se busca. A todas las cantidades se las darán signos contrarios, si fuese la esponencial menor que la unidad. Haremos una ó dos aplicaciones de todo esto.

Sea el término general $(1 + n + n^2) . 2^n$. Tomo por suma $(A + Bn + Cn^2)\ 2^n - A$. Poniendo en esta $n - 1$ en lugar de n, y restando de la primera fórmula la que resultáre, saldrá

$$\left.\begin{array}{l} \quad A + Bn + Cn^2 \\ \left\{\begin{array}{l} -A \\ +B - Bn \\ -C + 2Cn - Cn^2 \end{array}\right. \\ \hline \qquad 2 \end{array}\right\} \times 2^n$$

comparando, cada uno con el suyo, los términos de este término general con los del término general supuesto ..... $(1 + n + n^2) \cdot 2^n$, sale $A\frac{-A+B-C}{2} = 1$, $B\frac{-B+2C}{2} = 1$, $C - \frac{C}{2} = 1$. De cuyas equaciones resultan los valores $C = 2$, $B = -2$, $A = 6$; luego será la suma... $= (6 - 2n + 2n^2) \cdot 2^n - 6$.

Si el término general fuese $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n + n^2\right) \cdot \frac{1}{2^n}$; como la esponencial es menor que la unidad, fórmese la suma de este modo $A - (A + Bn + Cn^2) \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)$. Restando de esta la fórmula que resulta de la substitucion de $n - 1$ en lugar de n, saldrá el término general

$$\left.\begin{array}{l} -A - Bn - Cn^2 \\ +2A + 2Bn + 2Cn^2 \\ -2B - 4Cn \\ +2C \end{array}\right\} \times \frac{1}{2^n}$$

Hágase el cotejo correspondiente para formar las equaciones $A - 2B + 2C = \frac{1}{3}$, $B - 4C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, de las quales se sacará $B = \frac{9}{2}$, $A = \frac{22}{3}$; luego la suma de la serie será $= \frac{22}{3} - \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{22}{3} + \frac{9n}{2} + n^2\right)$. Como en el supuesto de ser n infinita, será $\frac{1}{2^n}$ infinitamente pequeña, se viene á los ojos que la suma de la serie infinitamente continuada será $= \frac{22}{3}$.

Estas series suelen llamarse *Algebráico-geométricas*, porque se forman multiplicando todos los términos de una serie algebraica por los términos de una serie geométrica.

332 Si resultare una serie de la suma ó de la diferencia de series geométricas ó algebráico-geométricas, es evidente que se podrá sacar su suma. Porque por el método declarado se hallará la suma de cada una de las series que se han de sumar ó restar, por medio de su término general. Y así como el término general de la serie compuesta se compone de la suma ó de la diferencia de los términos generales de las dos generatrices, lo mismo sucederá con la suma que por consiguiente será conocida. Es sumamente dificil conocer si una serie propuesta se compone de la suma ó de la diferencia de series geométricas ó algebráico-geométricas; pero son de esta clase todas las series recurrentes, que segun llevamos dicho (289) son aquellas en las quales un término qualquiera se determina por algunos de los antecedentes multiplicados por constantes dadas.

333 Para demostrar que todas estas series recurrentes se pueden formar de la adicion ó sustracion de series geo-

métricas, ó algebraico-geométricas, consideraremos primero el término general mas sencillo, esto es, AK^n, del qual nace la serie AK, AK^2, AK^3, AK^4 &c. que es una serie geométrica recurrente de primera órden; porque cada término se forma del antecedente inmediato multiplicado por K. Por lo que, si llamamos t la cantidad que multiplicada por cada término dá el siguiente, tendremos $K=t$, y así K no será otra cosa que la raiz de esta equacion $x-t=0$. Por consiguiente dada t se hallará el término general de la serie propuesta, suponiendo At ó AK igual al primer término de la serie, de cuya equacion se sacará el valor de A. Apliquemos esto á la serie

$$6,\ 4,\ 2\tfrac{2}{3},\ 1\tfrac{7}{9},\ \tfrac{32}{27},\ \tfrac{64}{81}\ \&c.$$

que es recurrente de primera órden, porque siendo 6 su primer término, se forma multiplicando cada término por $\frac{2}{3}$. Luego el término general de esta serie tendrá esta forma $A.\left(\frac{2}{3}\right)^n$ y $t=K=\frac{2}{3}$. Para hallar A, hágase $n=1$, y fórmese una equacion con el primer término de la serie, y saldrá $\frac{2A}{3}=6$, ó $A=9$; luego el término general de la serie $=9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2^n}{3^{n-2}}$.

334 Consideremos el término general AK^n+BH^n, del qual sale la serie

$$AK,\ AK^2,\ AK^3\ \&c.$$
$$BH,\ BH^2,\ BH^3\ \&c.$$

que se forma de la suma de dos series geométricas y es serie recurrente de segunda órden, porque cada uno de sus términos se forma de los dos que le preceden. Pero se debe multiplicar el segundo, esto es el mas próximo al que se busca, por $K+H$, y el primero por $-KH$. Para percibir la verdad de esta proposicion bastará multiplicar $AK^{n-1}+BH^{n-1}$ por $K+H$ y $AK^{n-2}+BH^{n-2}$ por $-KH$; tomando la suma, sale AK^n+BH^n que es el término siguiente. Llamemos t la cantidad que en la formacion de la serie multiplica el segundo de los dos términos, y s la que multiplica el primero, será $t=K+H$, y $s=-KH$: Luego $tt=K^2+2KH+H^2$, y añadiendo al primer miembro de la equacion $4s$, y al segundo $-4KH$, saldrá $tt+4s=K^2-2KH+H^2$; sacando la raiz sale $\sqrt{(tt+4s)}=K-H$. Si añadimos á esta equacion estotra $t=K+H$, sacaremos $t+\sqrt{(tt+4s)}=2K$, y $K=\frac{t+\sqrt{(tt+4s)}}{2}$. Si restamos $\sqrt{(tt+4s)}=K-H$ de $t=K+H$, sacaremos $\frac{t-\sqrt{(tt+4s)}}{2}=H$. Los valores de K y H no son otra cosa que las raices de la equacion $xx-tx-s=0$. Porque de la naturaleza de una equacion de segundo grado resulta (241) que la suma de sus raices es igual al coeficiente del segundo término tomado con signo contrario, y su producto es igual al tercer término, cuyas circunstancias concurren en las cantidades K y H; porque debe ser $K+H=t$, $KH=-s$; luego K y H son las raices de la equacion $xx-tx-s=0$. Despues de determinadas K, H, se determinarán A y B, suponiendo $AK+BH$ igual al primer término de la serie, y AK^2+BH^2 igual al segundo, y estas dos equaciones darán los valores de A y B.

Supongamos por egemplo, $s = -1$, $t = 3$, y sean 3, 2 los primeros términos de la serie, á fin de que nazca la serie recurrente de segunda órden

$$3, 2, 3, 7, 18, 47, 123 \text{ \&c.}$$

por el método declarado saldrá $K = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $H = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, que son las raices de la equacion $xx - 3x + 1 = 0$. Para hallar A y B haremos $A.\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + B.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 3$, $A.\left(\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4}\right) + B.\left(\frac{9-6\sqrt{5}+5}{4}\right) = 2$ ó $A\left(\frac{14+6\sqrt{5}}{4}\right) + B\left(\frac{14-6\sqrt{5}}{4}\right) = 2$, que dividiendo por 2 ambos términos de cada quebrado se reduce á $A.\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right) + B.\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) = 2$

Réstese esta equacion de la primera multiplicada por 3, y saldrá $A + B = 7$, que puesto en la primera dá $\frac{3}{2}.7 + \frac{1}{2}\sqrt{5}.(A-B) = 3$; luego mirando $(A-B)$ como si fuese la incógnita sacarémos $A - B = \frac{-15}{\sqrt{5}} = \frac{-3\times 5}{\sqrt{5}}$: y si reflexionamos que $5 = \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ (69) sacaremos que $\frac{-3\times 5}{\sqrt{5}} = \frac{-3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5}$, y finalmente $A - B = -3\sqrt{5}$. Sumando esta equacion con estotra $A + B = 7$ hallada poco ha, y restando despues la primera de la segunda hallarémos $A = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$, $B = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$; por lo que, el término general de la serie será

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})^n}{2^n} + \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{(3-\sqrt{5}^n)}{2^n}.$$

335 Sirve siempre este método, escepto quando $4s = -tt$, en cuyo caso son iguales K y H, y la equacion $xx - tx - s = 0$ tiene dos raices iguales. Porque quando $4s$

$= - tt$, la equacion $tt + 4s = K^2 - 2KH + H^2$ hallada antes (334) se reduce á $tt - tt = K^2 - 2KH + H^2$ ó á $K^2 - 2KH + H^2 = 0$; que dá $K - H = 0$ y $K = H$; y como son K y H las raices de la equacion $xx - tx - s = 0$, serán iguales las raices de esta equacion siempre que $4s = - tt$ ó que $K = H$. En este caso jamas se podrán determinar A y B, y se sacará aplicando el método declarado una equacion ó idéntica ó absurda.

Sea por egemplo $t = 3$, $s = - \frac{9}{4}$ y los primeros términos de la serie 1, 1, á fin de que nazca la serie 1, 1, $\frac{3}{4}$, 0, $\frac{-27}{16}$, $\frac{-81}{16}$ &c. en la qual se hallará $K = H = \frac{3}{2}$. Por lo que, si tubiese la serie un término general de la forma supuesta, este sería $A.\left(\frac{3}{2}\right)^n + B.\left(\frac{3}{2}\right)^n = (A + B).\left(\frac{3}{2}\right)^n$, el qual, si despues de hecho $n = 1$, le igualamos con el primer término de la serie, y con el segundo despues de hecho $n = 2$, saldrá $\frac{3}{2}.(A+B) = 1$, $\frac{9}{4}.(A+B) = 1$, de los quales se sacará $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, ó $1 = \frac{2}{3}$ que es un absurdo.

Por consiguiente quando se halla $K = H$, ó quando la equacion $xx - tx - s = 0$ tiene dos raices iguales, no está hallado todavia el término general de la serie. Bolveremos á considerar este caso dentro de poco.

336 Si el término general fuese $AK^n + BH^n + CI^n$, se originará una serie que se formará multiplicando respectivamente los tres antecedentes inmediatos por $K + H + I$, $- KH - KI - HI$, KHI, empezando por el último que está mas inmediato al término que se busca. Esto se evidenciará multiplicando

$AK^{n-1} + BH^{n-1} + CI^{n-1}$ por $K + H + I$
$AK^{n-2} + BH^{n-2} + CI^{n-2}$ por $-KH - KI - HI$
$AK^{n-3} + BH^{n-3} + CI^{n-3}$ por KHI,
pues saldrá $AK^n + BH^n + CI^n$.

Si al término general se le añadiese un quarto término DL^n, se formaria la serie multiplicando respectivamente los quatro términos antecedentes, empezando por el último, por

$$K + H + I + L$$
$$-KH - KI - KL - HI - HL - IL$$
$$KHI + KHL + HIL$$
$$-KHIL$$

cuya verdad se demuestra del mismo modo que en el caso anterior. Lo mismo diríamos y demostraríamos por el mismo camino, si el término general fuese la suma de cinco, seis ó mas términos de la misma forma. De donde sacaremos la regla universal siguiente. Toda serie cuyo término general consta de muchos términos juntos cuya forma sea AK^n, resulta de la multiplicacion de tantos términos antecedentes de la serie, quantos términos hay en el término general, cuyos términos antecedentes se han de multiplicar respectivamente, empezando por el último, por

la suma de todas las K, H, &c.

por sus productos de dos en dos, tomados negativamente;

por sus productos de tres en tres;

por sus productos de quatro en quatro, negativamente, y así prosiguiendo. Cuya regla manifiesta con evidencia que todas las series que tienen un término general de la forma espresada, son series recurrentes.

337 Resta declarar como dada la ley de una serie recurrente, que se forma multiplicando respectivamente algunos de los términos antecedentes, empezando por el último, por t, s, r, q, p &c. se halla su término general. Es evidente que será $K +$ &c. $= t$, $- KH -$ &c. $= s$, $KHI +$ &c. $= r$, $- KHIL -$ &c. $= q$, $KHILM +$ &c. $= p$, y así prosiguiendo. Esto supuesto, reparo que las raices de la equacion

$$x^m - Kx^{m-1} + KHx^{m-2} - KHIx^{m-3} + KHILx^{m-4} \&c. = 0$$
$$\quad - \&c. \quad + \&c. \quad - \&c. \quad + \&c.$$

son K &c. Por consiguiente practicando las substituciones correspondientes, la equacion se transformará en estotra

$$x^m - tx^{m-1} - sx^{m-2} - rx^{m-3} - qx^{m-4} - px^{m-5} \&c. = 0$$

Cuya resolucion dará los valores de las cantidades K, H, &c. que buscamos. Es preciso que en la espresada equacion el esponente m sea igual al número de los términos antecedentes, que son necesarios para formar la serie, ó al número de las cantidades t, s, r, &c: halladas las raices de la equacion, el término general tendrá esta forma $AK^n + BH^n +$ &c. Para determinar los valores de A y B &c. se igualarán los primeros términos de la serie, cuyo número sea m, con el término general, haciendo en este sucesivamente $n = 1$, $= 2$ &c: y de estas equaciones se sacarán los valores que se buscan.

338 Aunque es muy general este método, padece una excepcion quando en la equacion $x^m - tx^{m-1} - \&c. = 0$ hay dos ó mas raices iguales, porque entónces no se pueden determinar los valores de A y B. Pero dentro de poco diremos por qué camino se halla en este caso el término general.

339 Para acabar de declarar todo lo dicho, supondremos que se busque el término general de la serie

$$0, 0, 1, 1, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{21}{16}, \frac{21}{16}, \&c.$$

que en el supuesto de ser 0, 0, 1 sus tres primeros términos, cada uno de los demás se forma multiplicando los tres antecedentes, empezando por el último, por 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{-1}{4}$, y sumando los tres productos. Por consiguiente la equacion que dá las raices K, H, I será

$$x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

cuyas raices son 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$; luego el término general de la serie tendrá esta forma

$$A.\ 1^n + B.\ \frac{1}{2^n} + C.\ \frac{(-1)^n}{2^n}$$

Para determinar A y B, supondré sucesivamente $n = 1$, 2, 3, y formaré equaciones con los tres primeros términos de la serie

$$A + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = 0$$
$$A + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} = 0$$
$$A + \frac{B}{8} - \frac{C}{8} = 1$$

Restando la primera de la segunda y de la tercera, resultarán estas dos $-\frac{B}{4} + \frac{3C}{4} = 0$, $\frac{-3B}{8} + \frac{3C}{8} = 1$, ó

$-B+3C=0$, $-3B+3C=8$. Resto la primera multiplicada por 3, de la segunda, y sale $-6C=8$, ó $C=\frac{-4}{3}$, luego $B=-4$, y $A=\frac{4}{3}$; luego el término general que se busca será

$$\tfrac{4}{3}-\frac{4}{2^n}-\frac{4}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{(-1)^n}{3.2^{n-2}}.$$

considerando que $4=2^2$ y teniendo presente lo dicho (92).

340 Hasta aquí hemos considerado las raices geométricas, y determinado las series recurrentes que de ellas se originan. Pararémos ahora la consideracion en las series algebráico-geométricas, y considerarémos primero el término general $(A+Bn).K^n$ del qual sale esta serie $(A+B)K$, $(A+2B)K^2$, $(A+3B)K^3$, $(A+4B)K^4$ &c. cuya serie se forma multiplicando los dos términos antecedentes, el último por $2K$, y el primero por $-K^2$; como se verifica si se multiplica $(A+B.\overline{n-1})K^{n-1}$ por $2K$ y $(A+B.\overline{n-2}).K^{n-2}$ por $-K^2$; y se suman los productos, cuya suma será $(A+Bn).K^n$. Si suponemos $2K=t$, $-KK=s$, será evidentemente $4s=-tt$; y la equacion $xx-tx-s=0$ tendrá dos raices iguales. Este es el caso en que segun diximos poco há, no puede tener el término general la forma AK^n+BH^n, pero ahora queda determinada la forma que debe tener. Por consiguiente la raiz de la equacion $xx-tx-s=0$ que tiene dos raices iguales, será $K=\frac{t}{2}$. Lo demás se hará como arriba.

Sea por egemplo la serie

0, 1, 4, 12, 32, 80, 192 &c.

que tomando por primeros términos o, 1 se forma multiplicando los dos términos antecedentes, el último por 4, el primero por -4. Ya que $t = 4$, $s = -4$, saldrá $4s = -tt$, ó la equacion $xx - tx - s = 0$ tendrá dos raices iguales, y hallaremos $K = 2$. Tendrá, pues el término general esta forma $(A + Bn) . 2^n$. Si hacemos sucesivamente $n = 1$, $n = 2$ y formamos equaciones con los primeros términos de la serie, saldrá $2A + 2B = 0$, $4A + 8B = 1$. Si multiplicamos la primera de estas dos equaciones por 2 y restamos de la segunda el producto, sacarémos $4B = 1$; y sacaremos $-4A = 1$, si despues de multiplicada la misma primera equacion por 8, la restaremos de la primera; luego $B = \frac{1}{4}$, $A = \frac{-1}{4}$; y el término general será

$$\left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{4}\right) . 2^n = (n - 1) . 2^{n-2}$$

341 Si fuese el término general $(A + Bn + Cn^2) . K^n$ será recurrente de tercera órden la serie que engendrare, y se formará de la suma de los tres términos antecedentes despues de multiplicados, empezando por el último respectivamente, por $3K$, $-3K^2$, K^3. Asimismo la serie cuyo término general fuere $(A + Bn + Cn^2 + Dn^3) . K^n$ será recurrente de quarta órden, y se formará multiplicando los quatro términos antecedentes, empezando por el último respectivamente, por $4K$, $-6K^2$, $4K^3$, $-K^4$. De donde sacamos la regla general siguiente. Si el término general fuese $(A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$ &c.$) K^n$, en cuya fórmula el número de los términos de que se compone la cantidad al-

gebráica que multiplica K^n, es m, y el mayor esponente $n = m - 1$; la serie recurrente que de ella naciere, se formará multiplicando el último de los términos antecedentes por mK; el que le precede, por $-\frac{m.\overline{m-1}}{2}K^2$; el que precede á este, por $\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}.K^3$; el otro por $-\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{2.3.4}K^4$, y asi prosiguiendo.

342 Si formo la equacion
$x^m - mKx^{m-1} - \frac{m.\overline{m-1}}{2}K^2x^{m-2} - \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}.$
K^3x^{m-3} &c. $= 0$ es evidente que tendrá tantas raices iguales á K quantas unidades hubiere en el esponente m. Sean ahora las cantidades que deben multiplicar los términos antecedentes, empezando por el último, t, s, r, q, &c. será $mK = t$; $-\frac{m.\overline{m-1}}{2}K^2 = s$; $\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}K^3$, $= r$; $-\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{2.3.4}K^4 = q$, cuyos valores substituidos en la propuesta equacion dan $x^m - tx^{m-1} - sx^{m-2} - rx^{m-3} - qx^{m-4}$ &c. $= 0$ la misma que hallamos arriba. Así todas las veces que esta equacion tubiere raices iguales, el término general tendrá la forma supuesta, y las cantidades A, B &c. se hallarán por el mismo camino.

Sea, por egemplo, la serie

$0, 0, 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{16}, 1\frac{3}{4}$ &c.

en la qual cada término, tomando á arbitrio los quatro primeros, es la suma de los quatro antecedentes despues de multiplicados respectivamente, empezando por el último, por 2, $\frac{-3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{16}$; fórmese la equacion

$$x^4 - 2x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16} = 0$$

que tiene quatro raices, todas $= \frac{1}{2}$; luego el término general de la serie, tendrá esta forma $(A + Bn + Cn^2 + Dn^3)\,\frac{1}{2^n}$. Para determinar los valores de A, B &c. Supondremos en el término general sucesivamente $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, y formarémos con los quatro primeros términos de la serie, estas equaciones

$$(A + B + C + D)\tfrac{1}{2} = 0$$
$$(A + 2B + 4C + 8D)\tfrac{1}{4} = 0$$
$$(A + 3B + 9C + 27D)\tfrac{1}{8} = 0$$
$$(A + 4B + 16C + 64D)\tfrac{1}{16} = 1$$

ó

$$A + B + C + D = 0$$
$$A + 2B + 4C + 8D = 0$$
$$A + 3B + 9C + 27D = 0$$
$$A + 4B + 16C + 64D = 16$$

Réstese la primera de la segunda, la segunda de la tercera, la tercera de la quarta, y saldrán estas tres equaciones

$$B + 3C + 7D = 0$$
$$B + 5C + 19D = 0$$
$$B + 7C + 37D = 16$$

Restando la primera de estas de la segunda, y la segunda de la tercera, resultarán estas dos

$$2C + 12D = 0$$
$$2C + 18D = 16$$

Restando la primera de las dos últimas de la segunda, sale $6D = 16$. Por consiguiente $D = \frac{8}{3}$, $C = -16$, $B = \frac{88}{3}$, $A = -16$; luego el término general es ....

$$(-16 + \tfrac{88}{3}n - 16n^2 + \tfrac{8}{3}n^3) \times \frac{1}{2^n}.$$

343 Si se considerare el término general como formado de muchos términos, de los quales unos pertenezcan á la forma actual, otros á la antecedente, se hallará la misma equacion que tendrá algunas de sus raices iguales, y las otras desiguales. Por cuyo motivo se compondrá el término general de un conjunto de fórmulas, de las quales las unas darán series geométricas, y las otras las darán algebráico-geométricas. Bien que lo dicho basta para manifestar el método, no obstante añadirémos un egemplo. Sea la serie

$0, 3, -2, 23, -14, 87, -90, 303$ &c.

que se forma multiplicando los cinco términos antecedentes empezando por el último, por $0, 4, -2, -3, 2$, y sumando los productos. Para hallar el término general, es preciso hallar las raices de esta equacion $x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$ que son $x = 1$, $x = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$, de las quales tres son iguales, y las otras dos desiguales. Asi el término general tendrá esta forma $(A + Bn + Cn^2) \cdot 1^n + D(-1)^n + E \cdot (-2)^n$.

Para determinar los coeficientes A, B, C, D, E, suponiendo sucesivamente $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, se formarán equaciones con los cinco primeros términos de la serie, de las quales se sacará $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$, $D = -2$, $E = 1$; por consiguiente el término general será $1 - 2n + n^2 - 2 \cdot (-1)^n + 1 \cdot (-2)^n$.

Aplicacion de las Series al cálculo de los Logaritmos.

344 Quando quisimos dár (I. 227 y sig.) una idea del modo con que se han podido formar las tablas de los logaritmos, prevenimos que no era el mas breve el método que íbamos á proponer, por fundarse en principios distintos de los que hasta entonces habíamos sentado, los métodos de calcular con brevedad estos números artificiales. Como ya tenemos todos los datos en que se funda uno de estos métodos compendiosos, nos parece del caso darle aquí lugar á continuacion de las series, porque se reduce su practica al cálculo de una serie.

345 Para tratar este punto con toda la generalidad posible, y demostrar de camino algunas fórmulas que son muy socorridas en algunos tratados, será del caso tomar el asunto desde sus primeros elementos, recordando el principio fundamental que acerca de los logaritmos dejamos sentado en la Arismética (I. 226). De lo que allí digimos se percibe, que si fuese a un número mayor que la uni-

dad, y m el esponente de la potencia á que hemos de elevar a para que sea igual á un número dado b, de suerte que sea $a^m = b$, será m el logaritmo de b, y tendremos $m = \log b$, ó $m = L.b$, ó $m = Lb$.

Si fuese $a = 10$, y $b = 100$, sería preciso que $m = 2$ para que $a^m = b$, pues $(10)^2 = 100$, en cuyo supuesto sería 2 el logaritmo de 100, y lo es con efecto en el supuesto ó sistema, por el qual se han calculado las tablas ordinarias de los logaritmos (I. 226).

346 Supongamos $a^m = b$: será, pues, $La^m = Lb$, y si $a^n = c$, tambien será $La^n = Lc$, pues siendo iguales dos cantidades, tambien lo serán sus logaritmos. Si multiplicamos ordenadamente una por otra las dos equaciones $a^m = b$, $a^n = c$, sacarémos $a^{m+n} = bc$, y $Lbc = La^{m+n}$. Por consiguiente ya que m es el logaritmo de b, y n el de c, tendrémos $m + n = Lb + Lc$, y significa que el *logaritmo de un producto qualquiera se compone de la suma de los logaritmos de sus factores*; con esto quedan transformadas las multiplicaciones en reglas de sumar.

Sea, por egemplo, P un producto y F, G sus dos factores, tendrémos en general $LP = LF + LG$, y $LF = LP - LG$, cuya equacion nos está diciendo, que *si conociésemos un producto y el uno de sus dos factores, se hallará el valor del otro con restar del logaritmo del producto el logaritmo del factor conocido, cuya regla reduce todas las divisiones á reglas de restar.*

347 Por ser $L.P = L.F + L.G$, si $F = G$, será

$F \times G = P = F^2$, y $L.P = L.F^2 = 2L.F$: tambien seria $L.F^3 = 3L.F$; $L.F^4 = 4L.F$, y en general $L.F^m = mL.F$. Luego *para elevar un número qualquiera á una potencia determinada, basta multiplicar el logaritmo del espresado número por el esponente de la potencia, á la qual se le quiere elevar. El logaritmo que resultare será el de la potencia que se busca.*

Como las raices son potencias fraccionarias (83) es evidente que *con multiplicar el logaritmo de un número por un quebrado determinado, ó lo que es lo mismo con dividirle por el esponente de la raiz, resultará el logaritmo de dicha raiz.*

348 De todo lo dicho hasta aquí inferirémos que

$L.AB = L.A + L.B$	$L.ABCD = L.A + L.B + L.C + L.D.$
$L.\frac{A}{B} = L.A - L.B$	$L.\frac{ABC}{DE} = L.A + L.B + L.C - L.D - L.E$
$L.A^m = mL.A$	$L.A^m B^p C^q = mL.A + pL.B + qL.C.$
$L.A^{-m} = -mL.A$	$L.\frac{Ax^n}{r^z} = L.A + nLx - zLr.$
$L.A^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}L.A$	$L.\frac{AB+BC}{m+n} = LB + L(A+C) - L(m+n)$,
$L.A^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n}L.A$	considerando que $AB + BC = B(A+C)$.

$$L\sqrt{(x^2+y^2)} = L(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}L(x^2+y^2).$$

$$L\frac{a+x}{a-x} = L(a+x) - L(a-x).$$

$L(a^2 - x^2) = L(a+x) + L(a-x)$ porque $a^2 - x^2 = (a+x) \cdot (a-x)$.

$$L\sqrt{(a^2-x^2)} = L(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}L(a^2-x^2) = \frac{1}{2}L(a+x) + \frac{1}{2}L(a-x).$$

$$Lz^3 + \frac{3}{4}Lz = \frac{15}{4}Lz = Lz^{\frac{15}{4}} = L\sqrt[4]{z^{15}} = Lz^3\sqrt[4]{z^3}.$$

$L\sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = L(a^3 - x^3)^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} L(a - x) + \frac{m}{n} L(a^2 + ax + x^2)$, porque $a^3 - x^3 = (a - x).(a^2 + ax + x^2)$.
$L\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2} L(a - x) + \frac{1}{2} L(a + x) - 2L(a + x) = \frac{1}{2} L(a - x) - \frac{3}{2} L(a + x)$.

349 Supongamos ahora que queramos sacar el logaritmo de un número representado por $1 + x$. Haremos $(1 + x)^m = 1 + z$, y $L(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ &c. por consiguiente tambien será $L(1 + z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c. De la equacion $(1 + x)^m = 1 + z$ sale $(1 + x)^m - 1 = z$, y $z = -1 + 1 + mx + \frac{m.\overline{m-1}}{2} x^2$ &c. (100) que (por destruirse -1 y $+1$) se reduce á $z = mx + \frac{m.\overline{m-1}}{2} x^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3} x^3 +$ &c. Una vez que segun suponemos $(1 + x)^m = 1 + z$, serán tambien iguales los logaritmos de los dos miembros de esta equacion, y por ser (347) $L(1 + x)^m = mL(1 + x)$, y porque hemos supuesto $L(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c. tendremos $mL(1 + x) = (Ax + Bx^2 + Cx^3 +$ &c.$) \times m = mAx + mBx^2 + mCx^3 +$ &c. Por consiguiente ya que tambien hemos supuesto $L(1 + z) = Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c. será lo mismo $mL(1 + x) = L(1 + z)$ que $mAx + mBx^2 + mCx^3 +$ &c. $= Az + Bz^2 + Cz^3$ &c. Si en el segundo miembro de esta equacion substituimos en lugar de z su valor que hallamos poco ha, es á saber $z = mx + \frac{m.\overline{m-1}}{2} x^2 +$ &c. resultará

$$mAx + mBx^2 + mCx^3 + \&c. = \left\{\begin{array}{l} Amx + \frac{m.\overline{m-1}}{2}Ax^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}Ax^3 + \&c. \\ \quad + Bm^2x^2 \quad + m^2.\overline{m-1}\,Bx^3 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad Cm^3x^3 + \&c. \end{array}\right.$$

De cuya equacion sacaremos, despues de egecutadas las reducciones y comparaciones correspondientes. 1.° $B = -\frac{1}{2}A$; $C = \frac{1}{3}A$; $D = -\frac{1}{4}A$; y así prosiguiendo: de modo que despues de todas las reducciones saldrá $L(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c)$.

350 En esta espresion es indeterminada, conforme se echa de ver, la cantidad A, por cuyo motivo dándola sucesivamente diferentes valores, saldrán distintos logaritmos de la misma cantidad $1 + x$. Por consiguiente puede un mismo número tener una infinidad de logaritmos diferentes, ó puede haber diferentes systemas de logaritmos, segun variare el valor de A. El mas sencillo y natural de todos los systemas logarítmicos es el que resulta del supuesto $A = 1$, por cuyo motivo los logaritmos calculados en este supuesto, se llaman *logaritmos naturales*, y tambien *hyperbólicos* por la razon que declararemos en otro lugar.

351 Todos los systemas posibles de logaritmos se pueden reducir al de los logaritmos naturales, porque sea el que fuere el systema, no es otra cosa el logaritmo de $1 + x$, que el producto de su logaritmo natural por la cantidad constante A que se llama el *módulo* del systema, y que determinaremos dentro de poco. Por lo que, toda la di-

ficultad que se encuentra en el cálculo de los logaritmos, se reduce á la que ocurre en el cálculo de los logaritmos naturales. Veamos, pues, cómo se pueden calcular estos con facilidad.

352 Para cuyo fin volvamos á considerar la equacion $L(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.)$ que en el supuesto de $A = 1$ se transforma en $L(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ Si á cada miembro le añadimos La, el primero será $La + L(1+x) =$ (346) $L(a \times \overline{1+x}) = L(a+ax)$, y la equacion será $L(a+ax) = La + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \&c.$

Si hacemos $ax = z$, será $x = \frac{z}{a}$: si substituimos este valor de x en la equacion $L(a+ax) = La + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ &c. tendrémos $L(a+z) = La + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3}$ &c. Si hiciéramos z negativa, sacaríamos $L(a-z) = La - \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} - \frac{z^3}{3a^3} - \&c.$ Y restando esta última equacion de $L(a+z) = La + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \&c.$ tendremos $L(a+z) - L(a-z)$ ó $L\left(\frac{a+z}{a-z}\right) = \frac{2z}{a}\left(1 + \frac{z^2}{3a^2} + \frac{z^4}{5a^4} + \frac{z^6}{7a^6} + \&c.\right)$ cuya serie no puede menos de ser convergente, pues z ha de ser menor que a á fin de que sea $\frac{a+z}{a-z}$ una cantidad positiva.

353 Para aplicar esta serie al cálculo de los logaritmos supondremos $\frac{a+z}{a-z} = \frac{m}{m-1}$, de donde sacarémos $\frac{z}{a} = \frac{1}{2m-1}$. Por consiguiente si en el segundo miembro de $L\left(\frac{a+z}{a-z}\right) = \frac{2z}{a}\left(1 + \frac{z^2}{3a^2} + \frac{z^4}{5a^4} + \frac{z^6}{7a^6} + \&c.\right)$ substituimos $\frac{1}{2m-1}$ en lugar de $\frac{z}{a}$, sacaremos, en el supuesto de ser $\frac{a+z}{a-z} = \frac{m}{m-1}$, que $L\left(\frac{a+z}{a-z}\right) = L\left(\frac{m}{m-1}\right) = Lm - L(m-1)$

$= \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \frac{1}{7(2m-1)^6}\right.$ &c. Luego $Lm = L(m - 1) + \frac{2}{2m-1}\left(+ 1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} +\right.$ &c.) Pero quando se busca el logaritmo del número m, se supone conocido el de $m - 1$; luego saldrá el de m por medio de una serie muy convergente, particularmente quando fuere m algo crecida.

Si buscáramos, por egemplo, el logaritmo natural de 2, seria $m = 2$, cuyo número substituido en la fórmula últimamente hallada, daria $L2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \right.$ &c.$) = 0{,}69314718$ &c.

Pero si quisiéramos hallar el logaritmo de 5, substituiríamos en la misma fórmula 5 en lugar de m, y resultaria $L5 = L4 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9^2} + \frac{1}{5 \cdot 9^4} + \right.$ &c). Y por ser $L4 = L2^2 = 2L2$, será $L5 = 2L2 + \frac{2}{9} \times \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9^2} + \frac{1}{5 \cdot 9^4} + \frac{1}{7 \cdot 9^6} + \right.$ &c.$) = 1{,}60943791$.

Hallados por este camino los logaritmos de los números primeros, será muy facil sacar los de los demás números. Porque el log. de 6 será la suma (346) del log. de 2, y del log. de 3: el log. de 4 será el duplo del log. de 2; y el duplo del log. de 3 será el log. de 9.

354 Determinemos ahora el valor del módulo A en otro sistema, en el de las tablas por egemplo, en el qual $a = 10$, y $L10 = 1$. Tomaremos primero el log. natural de 10, que será la suma del log. de 2 y del log. de 5 ó $2{,}30258509$. Y como (350) el log. ordinario de 10 ó $1 = A(2{,}30258509)$, tendremos $A =$

$\frac{1}{2,30258509} = 0,43429448$ &c. que es el valor del módulo de las tablas. Por consiguiente para transformar los logg. naturales en los de las tablas, se han de multiplicar los primeros por el quebrado $0,43429448$ &c.

Y recíprocamente, para transformar los logg. de las tablas en logg. naturales, se han de dividir los primeros por $\frac{1}{2,30258509}$, ó multiplicar por $2,30258509$. Porque si en $1 = A(2,30258509)$ que es el log. tabular de 10, substituimos en lugar de A su valor $\frac{1}{2,30258509}$, será por las tablas $L.\,10 = \left(\frac{1}{2,30258509}\right)(2,30258509)$, y dividiendo este log. tabular de 10 por $\frac{1}{2,30258509}$, saldrá $2,30258509$ log. natural de 10.

355 El número determinado a se llama *base logarítmica* del sistema; 10 es la base del sistema vulgar llamado el *sistema de Briggs*, porque fue este calculador el primero que calculó los logg. ordinarios. En general, se llama base de un sistema logarítmico qualquiera, el número cuyo log. $= 1$.

356 Si dado un logaritmo quisiéramos hallar el número que le corresponde, tendríamos que acudir al método inverso de las series, practicando lo que sigue.

Si el log. dado fuese de los vulgares, se le debería reducir primero á log. natural, y se reduciría la operacion á averiguar qué número corresponde al log. natural propuesto.

Supongamos, pues, que sea z este log. y $1 + x$ el número que le corresponde; en virtud de lo que precede tendrémos $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. ; el empeño está en sacar el valor (296) de x en z.

Para conseguirlo, supongo $x = Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c. de donde saco

$$z = \left\{ \begin{array}{llllll} Az & + Bz^2 & + Cz^3 & + Dz^4 & + \&c. \\ & - \frac{1}{2}A^2 & - AB & - \frac{1}{2}B^2 & \&c. \\ & & & - AC & \&c. \\ & & + \frac{1}{3}A^3 & + A^2B & \&c. \\ & & & - \frac{1}{4}A^4 & \&c. \end{array} \right.$$

Trasladando z al segundo miembro, y suponiendo iguales con cero todos los coeficientes, hallarémos que $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = \frac{1}{24}$ &c. luego $x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} +$ &c. Luego finalmente $1 + x$, ó el número que buscamos $= 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} +$ &c. En general un número qualquiera $n = 1 + Ln + \frac{L^2n}{2} + \frac{L^3n}{2.3} + \frac{L^4n}{2.3.4} +$ &c. cuya serie es siempre convergente sea el que fuere el número n.

357 Si quisiéramos hacer uso de esta serie para hallar la base de los logg. naturales, ó saber á qué número pertenece el log. natural 1 ; sería $n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} +$ &c. luego $n = 2,71828183$. Este número es de muchísimo uso en el ramo mas dificultoso del cálculo infinitesimal.

358 Sirven los logg. en muchas ocasiones, particularmente para resolver algunas equaciones cuya resolu-

cion no es posible conseguir por otro camino.

Supongamos que de la equacion $a^x = b$ queramos sacar el valor de x. Tendremos (346) La^x ó $xLa = Lb$, y $x = \frac{Lb}{La}$.

Sea $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$, que es lo mismo (91) que a^{mx} $b^{1-nx} = c$; tendremos $mxLa + (1-nx)Lb = Lc$; luego $mxLa$ $- nxLb = Lc - Lb$, que dá $x = \frac{Lc - Lb}{mLa - nLb} = \frac{L\frac{c}{b}}{L\frac{a^m}{b^n}}$.

Sea $a^x = \frac{b^{mx-n}}{c^{qx}}$ que no se distingue (91) de $a^x =$ $b^{mx-n}c^{-qx}$; tendremos $xLa = mxLb - nLb - qxLc$; traspasando $-nLb$ al primer miembro, y xLa al segundo, sale $nLb = mxLb - xLa - qxLc$, y despejando x resulta $x = \frac{nLb}{mLb - qLc - La} = \frac{Lb^n}{Lb^m - Lc^q - La} = \frac{Lb^n}{L\frac{b^m}{ac^q}}$.

Sea finalmente $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$; tendremos desde luego $nLb - \frac{a}{x}Lb - mxLc = xLf - pLf$; despues $(mLc + Lf)x^2 - (nLb + pLf)x = -aLb$, ó $x^2 Lc^m f$ $- xLb^n f^p = - Lb^a$, equacion de segundo grado de cuya resolucion sacaremos (152) $x = \frac{Lb^n f^p}{2Lc^m f} \pm \sqrt{\left(\frac{(Lb^n f^p)^2}{4(Lc^m f)^2} - Lb^a\right)}$.

359 Ahora cumpliremos lo prometido (175), quiero decir que declararemos como se puede sacar el valor de n de la espresion $u = aq^{n-1}$. Una vez que siendo iguales las cantidades lo han de ser tambien sus logaritmos, de $u = aq^{n-1}$ sacaremos $Lu = La + Lq^{n-1}$, ó por lo dicho (347), $Lu = La + (n-1) Lq$; luego traspasando, $(n-1) Lq = Lu - La$, y dividiendo por Lq, $n - 1 = \frac{Lu - La}{Lq}$, y finalmente $n = \frac{Lu-La}{Lq} + 1$.

Aplicacion del Algebra al cálculo de las líneas trigonométricas.

360 Para que se haga mas perceptible la verdad de algunas de las proposiciones que vamos á sentar, hemos
Fig. de prevenir que tambien se pueden distinguir en la circun-
31. ferencia del círculo *arcos positivos* y *negativos*. Si consideramos como positivos los arcos que cogieren desde A ácia N, B &c. serán negativos (127) los que cogieren desde A ácia D'', M &c. De la misma contraposicion que hay entre las líneas positivas y negativas, se infiere que si miramos como positivos los senos que como $D'E'$ estuvieren del lado de los arcos positivos, y los cosenos que desde el centro C cogieren ácia A, habrémos de considerar como negativos los senos que como $D''E''$ cayeren al

otro lado del diámetro AB, y los cosenos que desde C coggiesen ácia B. Fig. 31.

361 Sentado esto, una vez que segun insinuamos (I. 644) al paso que crece un arco, crece su seno, tambien menguará el seno á medida que menguáre el arco: de manera que *si llegase á ser cero el arco* AD′, *por egemplo, será tambien cero su seno* D′E′, *y positivo su coseno* CA, *que será igual al radio que llamaremos* 1. Pero si el arco AD' fuere menor que el quadrante, su seno $D'E'$ y su coseno CE', serán ambos positivos: quando el arco AD' fuese igual al quadrante AN, su seno igual al radio CN será positivo, y el coseno $= 0$: si creciere todavia mas el arco sin llegar al valor de la semicircunferencia, su seno DE será todavia positivo, pero será negativo su coseno CE: en llegando á valer el arco la semicircunferencia ANB, su seno será $= 0$, y su coseno negativo CB será igual al radio. Quando fuese el arco mayor que la semicircunferencia, pero menor que los tres quadrantes, quando fuese, por egemplo, $ANBD'''$, su seno $D'''E'''$, y su coseno CE''' serán ambos negativos: en llegando á valer el arco los tres quadrantes como $ANBM$, su seno CM es igual al radio y negativo, y el coseno es otra vez $= 0$: si creciere todavia mas el arco sin llegar á valer toda la circunferencia, su seno $D''E''$ seria negativo, pero su coseno CE'' sería positivo. Finalmente, en llegando el arco á valer la circunferencia, su seno será $= 0$, y su coseno CA positivo será igual al radio lo mismo que en el arco nulo,

Fig. 362 Si el arco fuese mayor que la circunferencia
31. qual sería el arco $ANBMAD'$, que es la suma de toda la circunferencia y del arco AD', tendria el mismo seno $D'E'$ y el mismo coseno CE' que el arco AD': de manera que *no muda de seno, ni de coseno un arco por añadirle la circunferencia*; y así ha de ser, pues un arco nulo y la circunferencia tienen un mismo seno $=0$, y un mismo coseno $=1$. Lo propio sería aun quando se le añadiesen al arco AD' dos, tres ó mas circunferencias.

363 Si tomáramos un arco negativo AD'' menor que un quadrante, su seno $D''E''$ sería negativo y positivo su coseno CE''. Por donde se echa de ver que un mismo seno negativo, y un mismo coseno positivo pertenecen á dos arcos distintos; es á saber, á un arco positivo mayor que tres quadrantes, y á un arco negativo menor que un quadrante. Quando el arco negativo fuere mayor que un quadrante, pero menor que la semicircunferencia, qual es el arco AMD''', el seno $D'''E'''$, y el coseno CE''' serán ambos negativos: por consiguiente un mismo seno y coseno ambos negativos pertenecen á dos arcos distintos, es á saber á un arco positivo mayor que la semicircunferencia, pero menor que tres quadrantes, y á un arco negativo mayor que un quadrante, pero menor que la semicircunferencia. Si el arco negativo fuere mayor que dos quadrantes, pero menor que tres, qual es el arco $AMBD$ será positivo su seno DE, y negativo su coseno CE, los mismos que corresponden á un arco positivo mayor que el qua-

drante, y el menor que la semicircunferencia. Finalmente, Fig.
si el arco negativo fuese mayor que tres quadrantes; pero 31.
menor que la circunferencia, qual sería el arco $AMBND'$, serán su seno DE', y su coseno CE' ambos positivos, y los mismos que corresponden á un arco positivo que no llega al quadrante.

Si el arco negativo llegáre á valer toda la circunferencia, tendria el mismo seno y coseno que la circunferencia positiva, de donde sacaremos que se quedan unos mismos el seno y coseno de un arco, aunque se le añada la circunferencia tomada negativamente una vez, dos veces &c.

364 De todo lo dicho resulta, que el seno de un arco nulo, es nulo, esto es, que sen $0 = 0$. Si llamamos π la semicircunferencia, y suponemos el radio $= 1$, tendrémos sen $\frac{1}{2}\pi = 1$, cos $\frac{1}{2}\pi = 0$, sen $\pi = 0$, cos $\pi = -1$; sen $\frac{3}{2}\pi = -1$, cos $\frac{3}{2}\pi = 0$, sen $2\pi = 0$, cos $2\pi = 1$, cuyas fórmulas nos están diciendo que todos los senos y cosenos están comprehendidos entre $+1$ y -1. Tambien es evidente por la naturaleza del complemento que cos $A =$ sen $(\frac{1}{2}\pi - A)$, y que sen $A =$ cos $(\frac{1}{2}\pi - A)$, pues el arco A añadido al arco $\frac{1}{2}\pi - A = \frac{1}{2}\pi = 90°$, y el arco A restado de $\frac{1}{2}\pi + A = \frac{1}{2}\pi = 90°$.

365 Con la mira de guardar uniformidad y de sacar mas sencillos los resultados de los cálculos en que nos vamos á empeñar, supondrémos constantemente el radio del círculo $= 1$. En virtud de esto, y teniendo presentes to-

Fig. das las definiciones que dimos en la Trigonometría (I. 640),
32. y llamando A el arco AM, tendrémos esta proporcion $\cos A : \text{sen } A :: 1 : \text{tang } A$.

Sácase esta analogía de la semejanza de los triángulos CPM, CAT que dán $CP : PM :: CA : AT$.

366 Los triángulos CQM, CBT' tambien semejantes darán $CQ : QM :: CB : BT'$ ó $\text{sen } A : \cos A :: 1 : \cot A$.

367 Luego $\text{tang } A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$, y $\frac{\cos A}{\text{sen } A} = \frac{1}{\text{tang } A}$; y $\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen } A}$, y $\text{sen } A = \text{tang } A \times \cos A$, y $\cos A = \cot A \times \text{sen } A$.

368 Prueba la última consecuencia que *las cotangentes de dos arcos qualesquiera están en razon inversa de sus tangentes*. Y si en $\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen } A}$, substituimos en lugar de $\frac{\cos A}{\text{sen } A}$ su valor $\frac{1}{\text{tang } A}$, sacado poco ha, sacaremos $\cot A = \frac{1}{\text{tang } A}$, y $\cot A \times \text{tang } A = 1$, cuya espresion nos está diciendo, que *el radio es medio proporcional entre la tangente de un arco, y la de su complemento*.

369 De lo que demostramos en la Trigonometría (I. 654); es á saber que $R : \cos A :: 2 \text{ sen } A : \text{sen } 2A$, sacarémos con multiplicar respectivamente los estremos, y los medios que $\frac{1}{2} \text{sen } 2A = \cos A \times \text{sen } A$, en el supuesto de ser el radio $R = 1$. Si substituimos en esta equacion en lugar de $\cos A$ su valor $\text{sen } A \times \cot A$ (367) sacarémos $\frac{1}{2}$ sen $2A = (\text{sen } A)^2 \times \cot A$, y si en esta substituimos en lugar de $\cot A$ su valor $\frac{1}{\text{tang } A}$ (368) resultará finalmente $\frac{1}{2} \text{sen } 2A = \frac{(\text{sen } A)^2}{\text{tang } A}$.

370 Los triángulos semejantes CPM, CAT, CBT' Fig.
dán 1.º $PM: AT :: CM: CT$, esto es, sen A: tang A:: 32.
1 : sec $A = \frac{\text{tang } A}{\text{sen } A}$. 2.º $CP: CA :: CM: CT$, ó cos A: 1 :: 1 : sec A. 3.º $PM : CM :: CB : CT'$, ó sen A: 1 :: 1 : cosec A, cuyas dos últimas analogías manifiestan 1.º que *el radio es medio proporcional entre el coseno de un arco y su secante.* 2.º que *el radio es medio proporcional entre el seno de un arco y su cosecante.*

Luego cos $A \times$ sec $A = 1 =$ sen $A \times$ cosec A, por consiguiente sec $A = \frac{1}{\cos A}$, y cosec $A = \frac{1}{\text{sen } A}$, y $\frac{\text{sen } A}{\cos A} = \frac{\sec A}{\text{cosec } A}$, cuyo valor substituido en tang $A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$ dará tang $A = \frac{\sec A}{\text{cosec } A}$. Luego sec $A =$ cosec $A \times \frac{\text{sen } A}{\cos A}$; y como (367) $\frac{\text{sen } A}{\cos A} =$ tang A, será sec $A =$ cosec $A \times$ tang A $= \frac{\text{cosec } A}{\cot A}$, despues de substituido $\frac{1}{\cot A}$ en lugar de tang A.

371 Luego tambien *los senos de dos arcos* A *y* B *serán recíprocamente proporcionales á las secantes de sus complementos, y los cosenos de dichos arcos serán recíprocos á sus secantes.*

Porque de lo probado antes (370) se saca cosec $A = \frac{1}{\text{sen } A}$, y sec $A = \frac{1}{\cos A}$: luego tambien se probaria que cosec $B = \frac{1}{\text{sen } B}$, y sec $B = \frac{1}{\cos B}$. Podremos, pues, formar las dos analogías siguientes

cosec A: cosec B :: $\frac{1}{\text{sen } A} : \frac{1}{\text{sen } B}$ :: sen B : sen A;

y sec A: sec B :: $\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B}$ :: cos B : cos A.

372 Si dividimos el arco AM, y su complemento 33.
BM cada uno en dos partes iguales en los puntos D y E, y tiramos las líneas CDG, CEF hasta que encuentren res-

Fig. pectivamente las tangentes AI, BH prolongadas, si fuere
33. menester, en G y F; tendrémos 1.° $sec\ A = cot\ \frac{1}{2}$ $comp\ A - tang\ A$. 2.° $cosec\ A = cot\ \frac{1}{2} A - cot\ A$.

Porque los triángulos CBK, CAF son semejantes por razon de las paralelas, y será por consiguiente el ángulo AFC = al ángulo BCK; pero en virtud del supuesto que hacemos de estar dividido el arco BM por el medio en el punto E, el ángulo BCK = al ángulo KCM; luego el triángulo CLF es isósceles: luego $CL = LF$; pero $LF = AF - AL$, y es AF la tangente del arco AE complemento de $BE = \frac{1}{2} BM$, ó $\frac{1}{2}$ comp A, y AL es la tangente del arco AM: luego CL ó sec A = cot $\frac{1}{2}$ comp A — tang A.

Los triángulos rectángulos CAI, CBG son semejantes por razon de las paralelas CA, BG, luego el ángulo $BGC = ACI$; pero por la construccion $ACI = MCI$: luego el triángulo CHG es isósceles, y $CH = HG$; es tambien patente que $HG = BG - BH$ = cot $\frac{1}{2} A$ — cot A. Luego tambien la cosecante CH del arco AM es igual á la misma cantidad.

34. 373 Desde el punto M tírense á los estremos F, G de los dos diámetros BF, AG, las líneas MF, MG que cortan los radios CA, CB en los puntos H, I: tírese tambien por el punto M la tangente DME que remata en los radios CA, CB prolongados quanto fuere menester, en los quales determinen las líneas CE, CD respectivamente iguales á la secante y á la cosecante del arco AM.

Todo esto supuesto tendrémos 1.° *sec* A $=$ *tang* A $+$ Fig.
cot $\frac{1}{2}$ *comp* A. 2.° *cosec* A $=$ *cot* A $+$ *tang* $\frac{1}{2}$ A. 34.

Una vez que el ángulo *FME* resulta del concurso de la tangente *ME*, y de la cuerda *MF*, tiene por medida la mitad del arco *MAF* que sus lados abrazan; y el ángulo *MHE* cuyo vértice está dentro de la circunferencia tiene por medida la mitad de la suma (I. 380) de los arcos *AM* y *FG* que abrazan sus dos lados prolongados. Pero el arco *FG* $=$ al arco *AF*; luego el ángulo *MHE* es igual á *HME*, luego el triángulo *HME* es isósceles, y por consiguiente $HE = ME =$ tang *A*. Fuera de esto, como el ángulo *CFH* está en la circunferencia, no vale mas que la mitad del ángulo *BCM*, cuyo vértice está en el centro, y abraza el mismo arco (I. 373). Luego si miramos el radio *CF* como seno total, *CH* será la tangente (I. 667) de la mitad del complemento del arco *AM*; luego la secante $CE = CH + HE =$ tang $\frac{1}{2}$ comp *A* $+$ tang *A*.

2.° Del mismo modo probaríamos que $ID = MD =$ cot *A*, y $CI =$ tang $\frac{1}{2}$ *A*. Por otra parte se viene á los ojos que $CD =$ cosec *A*; luego quedará probado que cosec $A =$ cot $A +$ tang $\frac{1}{2}$ *A*.

374 Si comparamos respectivamente los dos valores que acabamos de hallar de la secante y de la cosecante (372 y 373) hallarémos 1.° que cot $\frac{1}{2}$ comp *A* $-$ tang $A = \frac{1}{2}$ comp *A* $+$ tang *A*. 2.° que cot $\frac{1}{2}$ *A* $-$ cot $A =$ cot $A +$ tang $\frac{1}{2}$ *A*. De la primera de estas

Fig. dos equaciones, sacaremos 2 tang $A =$ cot $\frac{1}{2}$ comp $A -$
34. tang $\frac{1}{2}$ comp A: de la segunda 2 cot $A =$ cot $\frac{1}{2}$ $A -$ tang $\frac{1}{2}$ A. Si en el último miembro de la primera de las dos últimas equaciones, substituimos en lugar de cot $\frac{1}{2}$ comp A su valor $\frac{1}{\text{tang } \frac{1}{2} \text{ comp } A}$ (368), y en el último miembro de la segunda $\frac{1}{\text{tang } \frac{1}{2} A}$ en lugar de cot $\frac{1}{2}$ A. sacaremos tang $A = \frac{1 - (\text{tang } \frac{1}{2} \text{ comp } A)^2}{2 \text{ tang } \frac{1}{2} \text{ comp } A}$, y cot $A = \ldots$ $\frac{1 - (\text{tang } \frac{1}{2} A)^2}{2 \text{ tang } \frac{1}{2} A}$. De donde sacaremos las dos analogías siguientes

$2\ tang\ \frac{1}{2}\ comp\ A : 1 + tang\ \frac{1}{2}\ comp\ A :: 1 - tang\ \frac{1}{2}\ comp\ A : tang\ A$,

y $2\ tang\ \frac{1}{2}\ A : 1 + tang\ \frac{1}{2}\ A :: 1 - tang\ \frac{1}{2}\ A : cot\ A$.

Y si atendemos á que el complemento del ángulo $A = 90° - A$, y que por lo mismo $\frac{1}{2}$ comp $A = 45° - \frac{1}{2} A$, la primera de estas dos analogías se podrá transformar en 2 tang $(45° - \frac{1}{2} A) : 1 +$ tang $(45° - \frac{1}{2} A) :: 1 -$ tang $(45° - \frac{1}{2} A)$: tang A.

35. 375 Si llamamos siempre A un arco AM, tendremos 1.° $1 + cos\ A = 2\ (cos\ \frac{1}{2}\ A)^2 = \frac{sen\ A}{tang\ \frac{1}{2}\ A}$.

2.° $1 - cos\ A = 2\ (sen\ \frac{1}{2}\ A)^2 = sen\ A \times tang\ \frac{1}{2}\ A$.

Por los estremos BM del diámetro AB, y de la cuerda AM, tírese la cuerda BMG que remata en un punto G de la tangente del arco AM, y tírense por el centro C

las rectas CF y CI respectivamente paralelas á las rectas BM y AM; es evidente que de los triángulos AGM, AFD semejantes por causa de las paralelas, podremos inferir, que así como AM es dupla de AD (I. 349) será tambien AG dupla de AF tangente de la mitad del arco AM; que CI partirá por el medio la cuerda BM (I. 349), y que CD ó MI ó IB serán el coseno de la mitad del mismo arco. Fig. 35.

Sentado esto, los triángulos semejantes BIC, BHM darán $BC : BI :: BM : BH :: 2BI : BH$; luego $BH = \frac{2(BI)^2}{BC}$; esto es, $1 + \cos A = 2 (\cos \frac{1}{2} A)^2$.

Los triángulos CIB, AHM tambien semejantes (I. 460) darán $CB : CI :: AM : AH$: luego $AH = \frac{2(AD)^2}{CB}$, por ser $AM = 2AD$ ó $2DM$ ó $2CI$; luego $1 - \cos A = 2 (\operatorname{sen} \frac{1}{2} A)^2$.

2º. De los triángulos semejantes AHM, BAG y BHM sacaremos $BH : HM :: BA : AG$; esto es $1 + \cos A : \operatorname{sen} A :: 2 : 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$; y tambien $HM : AH :: AB : AG$; esto es, $\operatorname{sen} A : 1 - \cos A :: 2 : 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$; luego $1 + \cos A = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A}$, y $1 - \cos A = \operatorname{sen} A \times \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$.

376 Luego $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = (\operatorname{tang} \frac{1}{2} A)^2$; y $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A} \times \frac{1}{\operatorname{sen} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} A}$ (49) $= \frac{1}{(\operatorname{tang} \frac{1}{2} A)^2}$.
Si tubiéremos presente (368) que siendo tang $A =$

Fig. 35. $\frac{1}{\cot A}$ será $(\tang \frac{1}{2} A)^2 = \frac{1}{(\cot \frac{1}{2} A)^2}$; y substituyéremos sacaremos que $\frac{1}{(\tang \frac{1}{2} A)^2} = (\cot \frac{1}{2} A)^2 = \frac{1+\cos A}{1-\cos A}$.

377 Si llamamos V el un seno verso AH del arco AM, y V' el otro seno verso BH, inferiremos que pues (375) $AH = \frac{2(AD)^2}{CB}$ y $BH = \frac{2(BD)^2}{BC}$ que $V = 2\,(\text{sen}\,\frac{1}{2} A)^2$ y $V' = 2\,(\cos \frac{1}{2} A)^2$; luego $\frac{V}{2} = (\text{sen}\,\frac{1}{2} A)^2$ y $\frac{V'}{2} = (\cos \frac{1}{2} A)^2$.

Si llamamos A el arco MK complemento de AM, los triángulos semejantes AHM, MHB y AMB (I.463) darán $AB : BM :: BM : BH$: esto es $2 : 2 \cos \frac{1}{2} \text{com}\, A :: 2 \cos \frac{1}{2} \text{com}\, A : 1 + \text{sen}\, A = \frac{4(\cos \frac{1}{2} \text{comp}\, A)^2}{2} = \ldots\ldots$ $2\,(\cos \frac{1}{2} \text{comp}\, A)^2$. Y como $\cos \frac{1}{2} \text{comp}\, A = \ldots\ldots$ $\cos(45^\circ - \frac{1}{2} A) = \text{sen}\,(45^\circ + \frac{1}{2} A)$; sacaremos finalmente que $1 + \text{sen}\, A = 2\, \text{sen}^2 (45^\circ + \frac{1}{2} A)$; comparando el triángulo AHM con el triángulo AMB sacaríamos que $1 - \text{sen}\, A = 2\, \text{sen}^2 (45^\circ - \frac{1}{2} A)$. De donde saldria que $\frac{1+\text{sen}\, A}{1-\text{sen}\, A} = \frac{\text{sen}^2 (45^\circ + \frac{1}{2} A)}{\text{sen}^2 (45^\circ - \frac{1}{2} A)}$.

378 Hemos demostrado en otro lugar (I. 655 y 656) que si fuesen A y B dos arcos y el radio $= 1$

1.° $\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\, A \times \cos B + \text{sen}\, B \times \cos A$;
2.° $\text{sen}\,(A - B) = \text{sen}\, A \times \cos B - \text{sen}\, B \times \cos A$;
3.° $\cos(A + B) = \cos A \times \cos B - \text{sen}\, A \times \text{sen}\, B$;
4.° $\cos(A - B) = \cos A \times \cos B + \text{sen}\, A \times \text{sen}\, B$.

Si sumamos la segunda equacion con la primera, y restamos despues la segunda de la primera, sacaremos Fig. 35.

por adicion $\text{sen } A \times \cos B = \frac{1}{2} \text{sen}(A+B) + \frac{1}{2} \text{sen}(A-B)$

por sustraccion $\text{sen } B \times \cos A = \frac{1}{2} \text{sen}(A+B) - \frac{1}{2} \text{sen}(A-B)$.

Si sumamos una con otra las dos equaciones $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \text{sen } A \text{ sen } B$, y $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B$, y restamos despues la primera de la segunda, sacarémos

por adiccion $\cos A \times \cos B = \frac{1}{2} \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B)$

por sustraccion $\text{sen } A \times \text{sen } B = \frac{1}{2} \cos(A-B) - \frac{1}{2} \cos(A+B)$.

379 De las mismas fórmulas podremos inferir que si conociesemos los senos y cosenos de todos los arcos menores que 30°, conoceremos tambien los senos y cosenos de todos los arcos mayores que 30° hasta 60°.

Porque si en la fórmula que representa el seno de $A+B$ suponemos $A=B$, $\text{sen }(A+B)$ será $\text{sen } 2A = 2 \cos A \text{ sen } A$; y si suponemos lo mismo en la fórmula que espresa el coseno de $A+B$, tendremos $\cos 2A = (\cos A)^2 - (\text{sen } A)^2 = 2(\cos A)^2 - 1$, substituyendo en lugar de $(\text{sen } A)^2$ su valor $1-(\cos A)^2$ sacado del triángulo rectángulo CPM en el qual $(CM)^2 - (CP)^2 = (PM)^2$, esto es $1-(\cos A)^2 = (\text{sen } A)^2$ en el supuesto de ser 1 el radio CM, y A el arco AM. 32.

380 Sentado esto, supongamos que sea $A = 30^\circ$, será $\text{sen }(30^\circ + B) = \text{sen } 30^\circ \cos B + \cos 30^\circ \text{ sen } B$. Pero $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ (I. 642), y $\cos 30^\circ = \sqrt{(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, pues $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3$. Luego sen

Fig. $(30^\circ + B) = \frac{1}{2}\text{sen } B\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cos B$, y sen $(30^\circ - B)$
35. $= \frac{1}{2}\cos B - \frac{1}{2}\text{ sen } B\sqrt{3}$. Si restamos la segunda de las dos últimas equaciones de la primera, resultará sen $(30^\circ + B)$ — sen $(30^\circ - B) =$ sen $B\sqrt{3}$, y por consiguiente sen $(30^\circ + B) =$ sen $(30^\circ - B) +$ sen $B\sqrt{3}$.

381 Si hicieramos ahora $A = 60^\circ$, sería sen $(60^\circ + B) =$ sen 60°. cos $B +$ sen B cos 60°. Para darla á esta espresion la transformacion que corresponde, consideraremos primero que siendo $60^\circ = 2 \times 30^\circ$, la equacion (379) sen $2A = 2$ cos A sen A nos dará sen $60^\circ = 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, y por consiguiente sen $60^\circ \times \cos B = \frac{1}{2}\cos B\sqrt{3}$; despues sacaremos el valor de cos 60° de la equacion (379) cos $2A = 2(\cos A)^2 - 1$, y tendremos sen $B \times (2 \times \frac{1}{2} \times 3 - 1) =$ sen $B \times (\frac{3}{2} - 1)$ ó sen $B(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ sen B. Luego sen $(60^\circ + B) = \frac{1}{2}\cos B\sqrt{3} + \frac{1}{2}$ sen B, y sen $(60^\circ - B) = \frac{1}{2}\cos B\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ sen B. Restando la segunda equacion de la primera sacaremos sen $(60^\circ + B) -$ sen $(60^\circ - B) =$ sen B, y finalmente sen $(60^\circ + B) =$ sen $(60^\circ - B) +$ sen B. Si quisieramos aplicar esta fórmula para sacar el seno de 66°, por egemplo, seria sen $66^\circ =$ sen $54^\circ +$ sen 6°. Por este camino se pueden hallar los senos de todos los arcos desde 60° á 90° una vez que se conozcan los senos de los arcos que están entre 30° y 60°. Por consiguiente calculados los senos desde 0° hasta 30°, se sacarán sobre la marcha los de todos los demás arcos.

382 Las mismas fórmulas nos servirán para hallar

los senos y cosenos de arcos duplos, triplos, &c. de arcos dados. Supongamos, por egemplo, que conozcamos el coseno que llamaremos c del arco AM: suponiendo siempre el radio $CM = 1$, el triángulo rectángulo CPM nos manifestará que el seno s del mismo arco $= \sqrt{(CM^2 - CP^2)} = \sqrt{(1 - cc)}$. Fig. 36.

Para sacar el valor del coseno del arco AD duplo de AM, repararemos que pues $DM = AM$, el coseno del primer arco será tambien c y su seno será igualmente $\sqrt{(1 - cc)}$. Llamando A el arco AM, el arco AD será $2A$, la fórmula $\cos(A+B) = \cos A . \cos B - \text{sen } A . \text{sen } B$ se transformará en $\cos 2A = \cos A . \cos A - \text{sen } A . \text{sen } A = (\cos A)^2 - (\text{sen } A)^2$; substituyendo, pues, en lugar de $(\cos A)^2$ su valor cc, y en lugar de $(\text{sen } A)^2$ su valor $1 - cc$, resultará que el coseno del arco $AD = 2A$ será $= 2cc - 1$.

Hallaremos el seno del mismo arco $AD = 2A$ con hacer las substituciones correspondientes en la fórmula $\text{sen } (A + B) = \text{sen } A . \cos B + \text{sen } B . \cos A$ y sacaremos que $\text{sen } 2A = 2c \sqrt{(1 - cc)}$.

En virtud de esto se hace sumamente facil hallar el coseno y el seno del arco quadruplo de AM ó del arco $= 4A$. Porque esto es lo mismo que buscar el coseno y el seno del arco duplo de $2A$, cuyo supuesto transforma la fórmula que dá el coseno de la suma de dos arcos, en $\cos(2A + 2A) = \cos 2A . \cos 2A - \text{sen } 2A . \text{sen } 2A$, y egecutando las substituciones correspondientes saldrá

Fig. 36. $\cos 4A = 8c^4 - 8cc + 1$; y haciendo tambien las substituciones correspondientes en la fórmula del seno de la suma de dos arcos, hallaremos que $\text{sen } 4A = (8c^3 - 4c) \sqrt{(1 - cc)}$: y así de los demás arcos que crecen en proporcion dupla.

383 El mismo método nos dirigirá para hallar los senos y cosenos de arcos triplos, quíntuplos &c. de arcos dados. Porque si buscásemos el coseno de un arco triplo del arco A, la fórmula que espresa el coseno de la suma de dos arcos se transformará en $\cos (2A +) A = \cos 2A . \cos A - \text{sen } 2A . \text{sen } A$, cuya espresion se transforma, despues de egecutadas las substituciones correspondientes en $\cos 3A = (2cc - 1) \times c - [2c\sqrt{(1 - cc)}] \times \sqrt{(1 - cc)} = 4c^3 - 3c$.

Practicando las substituciones que hacen al caso en la espresion del seno de la suma de dos arcos, sacaremos $\text{sen } 3A = (2c\sqrt{1 - cc}) \times c + (\sqrt{1 - cc}) \times (2cc - 1) = (4cc - 1)\sqrt{(1 - cc)}$. Esto nos está diciendo lo que habria que hacer para sacar el seno y coseno del arco quíntuplo &c.

384 Si llamásemos s el seno del arco A y c su coseno, sería $\text{sen } A = s$, y $\cos A = \sqrt{(1 - ss)}$. Siguiendo el mismo rumbo que seguimos poco há (382 y 383) hallaríamos que $\cos 2A = 1 - 2ss$, y $\text{sen } 2A = 2s\sqrt{(1 - ss)}$; $\cos 4A = 8s^4 - 8s^2 + 1$, y $\text{sen } 4A = (4s - 8s^3) \sqrt{(1 - ss)}$; $\cos 3A = (1 - 4ss)\sqrt{(1 - ss)}$, y $\text{sen } 3A = 3s - 4s^3$ &c.

385 Hemos pues probado que los senos de arcos múltiplos se pueden espresar por cosenos y senos del arco simple ó primitivo, y que los cosenos de arcos múltiplos se pueden espresar por cosenos del arco simple. Por consiguiente podremos formar con las espresiones de los senos de arcos múltiplos de un arco dado A las dos tablas siguientes Fig.

386 Sen $A = \sqrt{(1-cc)}$

sen $2A = 2c\sqrt{(1-cc)}$

sen $3A = (4cc-1)\sqrt{(1-cc)}$

sen $4A = (8c^3-4c)\sqrt{(1-cc)}$

sen $5A = (16c^4-12c^2+1)\sqrt{(1-cc)}$

sen $6A = (32c^5-32c^3+6c)\sqrt{(1-cc)}$

sen $7A = (64c^6-80c^4+24c^2-1)\sqrt{(1-cc)}$

&c.

ó

387 Sen $A = s$

sen $2A = 2s\sqrt{(1-ss)}$

sen $3A = 3s-4s^3$

sen $4A = (4s-8s^3)\sqrt{(1-ss)}$

sen $5A = 5s-20s^3+16s^5$

sen $6A = (6s-32s^3+32s^5)\sqrt{(1-ss)}$

sen $7A = 7s-56s^3+112s^5-64s^7$

&c.

388 Con la mira de dar á estas fórmulas toda la generalidad posible, pondremos aquí una serie que repre-

Fig. senta todas las que pueda haber en cada tabla; pero para la segunda tabla se necesitan dos series, porque el factor $\sqrt{(1-ss)}$ que se halla en todas las fórmulas de número par, no se halla en las de número impar. Estas series generales las inferiremos considerando los coeficientes y esponentes de cada término de las fórmulas de las tablas.

Fórmula ó serie general correspondiente á la primera tabla.

$$\text{Sen } nA = \left(2^{n-1} c^{n-1} - \overline{n-2} \times 2^{n-3} c^{n-3} + \frac{\overline{n-3} \times \overline{n-4}}{1 . 2} 2^{n-5} c^{n-5} - \frac{\overline{n-4} \times \overline{n-5} \times \overline{n-6}}{1 . 2 . 3} \times 2^{n-7} c^{n-7} + \frac{\overline{n-5} \times \overline{n-6} \times \overline{n-7} \times \overline{n-8}}{1 . 2 . 3 . 4} 2^{n-9} c^{n-9} - \&c.\right) \sqrt{1-cc}$$

siendo n un número qualquiera.

389 *Fórmula general correspondiente á la segunda tabla, siendo* n *un número impar qualquiera.*

$$\text{Sen } nA = ns - \frac{n \times \overline{nn-1}}{1.2.3} s^3 + n \frac{\overline{nn-1} \times \overline{nn-9}}{1.2.3.4.5} s^5 - n \times \ldots \frac{\overline{nn-1} \times \overline{nn-9} \times \overline{nn-25}}{1.2.3.4.5.6.7} s^7 \ \&c.$$

390 *Fórmula general correspondiente á la segunda tabla, siendo* n *un número par qualquiera.*

$$\text{Sen } nA = \left(ns - \frac{n \times \overline{nn-4}}{1.2.3} s^3 + \frac{n \times \overline{nn-4} \times \overline{nn-16}}{1.2.3.4.5} s^5 - \ldots \frac{n \times \overline{nn-4} \times \overline{nn-16} \times \overline{nn-36}}{1.2.3.4.5.6.7} s^7 + \ldots\ldots 2^{n-1} s^{n-1}\right) \sqrt{(1-ss)}.$$

391 Si juntamos tambien las fórmulas que hemos sa-

cado de los cosenos de arcos múltiplos espresados por cose- Fig.
nos y senos del arco simple, formaremos las dos tablas siguientes:

$$\cos A = c$$
$$\cos 2A = 2cc - 1$$
$$\cos 3A = 4c^3 - 3c$$
$$\cos 4A = 8c^4 - 8c^2 + 1$$
$$\cos 5A = 16c^5 - 20c^3 + 5c$$
$$\cos 6A = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$$
$$\cos 7A = 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c$$

&c.

ó

392 $\cos A = \sqrt{(1 - ss)}$

$$\cos 2A = -2ss + 1$$
$$\cos 3A = (-4ss + 1)\sqrt{(1 - ss)}$$
$$\cos 4A = 8s^4 - 8s^2 + 1$$
$$\cos 5A = (16s^4 - 12s^2 + 1)\sqrt{(1 - ss)}$$
$$\cos 6A = -32s^6 + 48s^4 - 18s^2 + 1$$
$$\cos 7A = (-64s^6 + 80s^4 - 24s^2 + 1)\sqrt{(1 - ss)}$$

393 *Fórmula general correspondiente á la primera tabla, siendo* n *un número qualquiera.*

$$\cos nA = 2^{n-1} c^n - \frac{n}{1} 2^{n-3} c^{n-2} + \frac{n \times \overline{n-3}}{1.2} 2^{n-5} c^{n-4} - \frac{n \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}}{1.2.3} 2^{n-7} c^{n-6} + \frac{n \times \overline{n-5} \times \overline{n-6} \times \overline{n-7}}{1.2.3.4} 2^{n-9} c^{n-8} - \&c.$$

394 Quando es obtuso el arco que espresa A, su cose-

Fig. no es negativo, y entónces mudan de signo todas las fórmulas en que está elevada la letra c á potencias impares; lo mismo sucederá tambien en la fórmula general quando n es impar.

395 *Fórmula general de la segunda serie, siendo* n *un número impar qualquiera.*

$$\text{Cos}\, nA = \left(\pm 2^{n-1} s^{n-1} \mp n \overline{n-2} \times 2^{n-3} s^{n-3} \pm \ldots \frac{\overline{n-3} \times \overline{n-4}}{1 \cdot 2} 2^{n-5} s^{n-5} \mp \&c.\right) \sqrt{(1 - ss)}.$$

396 *Fórmula general de la segunda serie, siendo* n *un número par qualquiera.*

$$\mp \cos nA = 2^{n-1} s^{n} - \frac{n}{1} 2^{n-3} s^{n-2} + \frac{n \times \overline{n-3}}{1 \cdot 2} 2^{n-5} s^{n-4} - \frac{n \times \overline{n-4} \times \overline{n-5}}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-7} s^{n-6} + \frac{n \times \overline{n-5} \times \overline{n-6} \times \overline{n-7}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^{n-9} s^{n-8} - \&c.$$

En la primera fórmula sirven los signos superiores, quando el número impar es uno de los números impares 1, 5, 9, 13 &c; y los signos inferiores quando n es uno de los números impares 3, 7, 11 &c.

Del mismo modo en la segunda fórmula sirven los signos superiores quando el número es duplo de un número par; y el signo inferior sirve para los números pares que no son duplos de un número par.

397 De las tablas (387 y 392) sacaremos las fórmulas que espresan las potencias de los senos. Porque si consideramos con algun cuidado los términos de las líneas impares de la tabla (387), veremos que de ellas se pueden sacar los valores de las potencias de la letra s que representa el seno del arco simple; y de los términos de las

líneas pares de la tabla (392), se sacarán los valores Fig.
de las potencias pares del mismo seno. Así, de sen $A = s$, sacamos sen $A =$ sen A.

La equacion (392) cos $2A = -2ss + 1$ dá $2 \text{ sen}^2 A = 1 - \cos 2A$. En la tabla (387) hallamos sen $3A = 3s - 4s^3$, de donde sacamos $4 \text{ sen}^3 A = 3 \text{ sen } A - \text{sen } 3A$. Finalmente de la tabla (392) sacamos $\cos 4A = 8s^4 - 8s^2 + 1$, de cuya espresion inferiremos $8 \text{ sen}^4 A = \cos 4A - 4 \cos 2A + 3$, despues de substituido en lugar de s^2 su valor $\frac{1 - \cos 2A}{2}$ sacado de $2 \text{ sen}^2 A = 1 - \cos 2A$. Por este camino formaríamos la tabla siguiente.

Sen $A =$ sen A

$2 \text{ sen}^2 A = 1 - \cos 2A$

$4 \text{ sen}^3 A = 3 \text{ sen } A - \text{sen } 3A$

$8 \text{ sen}^4 A = 3 - 4 \cos 2A + \cos 4A$

$16 \text{ sen}^5 A = 10 \text{ sen } A - 5 \text{ sen } 3A + \text{sen } 5A$

$32 \text{ sen}^6 A = 10 - 15 \cos 2A + 6 \cos 4A - \cos 6A$

$64 \text{ sen}^7 A = 35 \text{ sen } A - 21 \text{ sen } 3A + 7 \text{sen } 5A - \text{sen } 7A.$

Es muy fácil hacerse cargo de la ley que guardan los coeficientes de esta tabla; por decontado, las potencias impares del seno de A están todas espresadas por senos de arcos múltiplos del mismo arco, siendo así que todas las potencias pares del seno de A están espresadas por cosenos. Los coeficientes son evidentemente los mismos que los del binomio elevado á una potencia qualquiera, con la diferencia de que en las potencias pares el número abstrac-

Fig. to que no está multiplicado por coseno de A, no es mas que la mitad de lo que sería el coeficiente que ocuparia el mismo lugar en la misma potencia del binomio. Por ègemplo, el coeficiente del tercer término de la quarta potencia del binomio $a+b$ es 6, y en la tabla no es mas que 3, pues $8 \text{ sen}^4 A = 3 - 4 \cos 2A + \cos 4A$. De todo esto se sigue que se necesitan dos fórmulas generales para representar estas series de potencias, previniendo que se representan en la fórmula general al revés de lo que están puestas en la tabla.

Primera fórmula general para representar las potencias de sen A *siendo* n *un número impar.*

$$2^{n-1} \text{ sen}^n A = \pm \text{ sen } nA \mp n \text{ sen } \overline{n-2}.\, A \pm \frac{n \times \overline{n-1}}{2} \text{ sen } \overline{n-4}.\, A \mp \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.2.3} \text{ sen } \overline{n-6}\, A \pm \&c. \ldots \pm \frac{n \times \overline{n-1} \ldots \overline{n-2} \, \&c.}{1.2.3 \, \&c.} \text{ sen } A.$$

Segunda fórmula general para representar las potencias de sen A, *siendo* n *un número par qualquiera.*

$$2^{n-1} \text{ sen}^n A = \pm \cos nA \mp n \cos \overline{n-2}.\, A \pm \frac{n \times \overline{n-1}}{1.2} \times \cos \overline{n-4}.\, A \mp \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1.2.3} \cos \overline{n-6}\, A. \ldots \ldots \mp \frac{1}{2}\left(\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \, \&c.}{1.2.3 \, \&c.}\right) \times \cos 0\, A.$$

Cada una de estas dos fórmulas generales lleva dos signos; quando fuere n un número impar, servirá el signo superior, siendo $n = 4m + 1$, y m un número qualquiera; y servirá el signo inferior quando fuere $n = 4m - 1$, y

m un número qualquiera. Si n fuese par, servirán los signos Fig.
superiores siendo $n = 4m$, y m un número qualquiera; y servirán los signos inferiores quando fuere $n = 2m$, y m un número qualquiera.

398 Para hallar una fórmula general que esprese las potencias sucesivas del coseno de un ángulo, acudiremos á las tablas (386 y 391) haciendo acerca de ellas las mismas consideraciones que hicimos acerca de las otras (387 y 362) y formaremos fácilmente la tabla siguiente

$$\cos^1 A = \cos A,$$
$$2 \cos^2 A = 1 + \cos 2A,$$
$$4 \cos^3 A = 3 \cos A + \cos 3A,$$
$$8 \cos^4 A = 3 + 4 \cos 2A + \cos 4A,$$
$$16 \cos^5 A = 10 \cos A + 5 \cos 3A + \cos 5A,$$
$$32 \cos^6 A = 10 + 15 \cos 2A + 6 \cos 4A + \cos 6A,$$
$$64 \cos^7 A = 35 \cos A + 21 \cos 3A + 7 \cos 5A + \cos 7A$$
&c.

Si tomamos todas estas equaciones al revés, sacaremos fácilmente la siguiente

Fórmula general.

$$2^{n-1} \cos^n A = \cos nA + \frac{n}{1} \cos \overline{n-2}\, A + \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \cdot 2} \cdot \cos \overline{n-4} \times A + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos \overline{n-6}\, A \ldots + \frac{1}{2} \left(\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}\ \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3\ \&c.} \right) \cos \overline{n-n}.A,$$ ó $\cos A$, segun que n es un número par, ó impar.

399 Ya que segun probamos (190) $aa + bb = (a + b\sqrt{-1}) \times (a - b\sqrt{-1})$, y $(\cos A)^2 + (\text{sen } A)^2$

Fig. $= 1$, tambien tendrémos $(\cos A + \operatorname{sen} A\sqrt{-1}) \times (\cos A - \operatorname{sen} A\sqrt{-1}) = 1 = (\cos B + \operatorname{sen} B\sqrt{-1}) \times (\cos B - \operatorname{sen} B\sqrt{-1})$.

Si multiplicamos $\cos A + \operatorname{sen} A\sqrt{-1}$ por $\cos B + \operatorname{sen} B\sqrt{-1}$, el producto será $\cos B.\cos A - \operatorname{sen} B.\operatorname{sen} A + (\cos B.\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B.\cos A)\sqrt{-1}$. Pero hemos visto (I. 656) que $\cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B = \cos(A+B)$, y (I. 655) que $\operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A = \operatorname{sen}(A+B)$. Luego $(\cos A + \operatorname{sen} A\sqrt{-1}) \times (\cos B + \operatorname{sen} B\sqrt{-1}) = \cos(A+B)\sqrt{-1} \times [\operatorname{sen}(A+B)]$.

Tambien sacaríamos que el producto de $(\cos A - \operatorname{sen} A\sqrt{-1}) \times (\cos B - \operatorname{sen} B\sqrt{-1}) = \cos(A+B) - \sqrt{-1} \times [\operatorname{sen}(A+B)]$.

Calculando por el mismo método inferiríamos que $(\cos A \pm \operatorname{sen} A\sqrt{-1}) \times (\cos B \pm \operatorname{sen} B\sqrt{-1}) \times (\cos C \pm \operatorname{sen} C\sqrt{-1}) = \cos(A+B+C) \pm \sqrt{-1} \times [\operatorname{sen}(A+B+C)]$.

400 Luego si suponemos $A = B$ tendrémos $(\cos A + \operatorname{sen} A\sqrt{-1})^2 = \cos 2A \pm \operatorname{sen} 2A\sqrt{-1}$; y si supusiéramos tambien $C = A$, sacaríamos que $(\cos A \pm \operatorname{sen} A\sqrt{-1})^3 = \cos 3A \pm \operatorname{sen} 3A\sqrt{-1}$; y en general $(\cos A \pm \operatorname{sen} A\sqrt{-1})^n = \cos nA \pm \operatorname{sen} nA\sqrt{-1}$.

401 De la última equacion inferirémos estotras dos $\operatorname{sen} nA\sqrt{-1} = (\cos A + \operatorname{sen} A\sqrt{-1})^n - \cos nA$, y $\operatorname{sen} nA\sqrt{-1} = \cos nA - (\cos A - \operatorname{sen} A\sqrt{-1})^n$. Si sumamos uno con otro estos dos valores, y partimos la

suma por $2\sqrt{-1}$, sacaremos la equacion siguiente Fig.

$$\text{Sen } nA = \frac{(\cos A + \text{sen } A\sqrt{-1})^n - (\cos A - \text{sen } A\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

y por el mismo camino hallaríamos

$$\cos nA = \frac{(\cos A + \text{sen } A\sqrt{-1})^n + (\cos A - \text{sen } A\sqrt{-1})^n}{2}$$

402 Si elevamos cada binomio á su potencia n por lo dicho (99), sacaremos las dos fórmulas siguientes sin imaginarias:

$$\text{Sen } nA = \tfrac{n}{1}(\cos A)^{n-1} \times \text{sen } A - \tfrac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos A)^{n-3} \times (\text{sen} A)^3 + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(\cos A)^{n-5} \times (\text{sen } A)^5 - \&c.$$

$$\text{Cos } nA = (\cos A)^n - \tfrac{n.(n-1)}{1.2}(\cos A)^{n-2} \times \text{sen } (A)^2 + \tfrac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}(\cos A)^{d-4} \times (\text{sen } A)^4 - \ldots\ldots \tfrac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(u-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}(\cos A)^{n-6} \times (\text{sen } A)^6 \ \&c.$$

403 Si suponemos que el arco A es infinitamente pequeño, será sen $A = A$, pues un arco infinitamente pequeño se confunde con su cuerda, y con su seno, y cos $A = 1$; y para que el arco A sea de una cantidad finita, será preciso que sea n infinitamente grande, en cuyo supuesto los productos $n.(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, $(n-1)(n-2)(n-3)$ &c. serán n, n^2, n^3 &c. (183).

Luego si hacemos el arco finito $D = nA$, será $\frac{D}{n} = A = $ sen A, $\frac{D^2}{n^2} = (\text{sen } A)^2$, $\frac{D^3}{n^3} = (\text{sen } A)^3$ &c. cos $A = 1$, por consiguiente todas las potencias de cos A serán iguales á la unidad, y substituyendo estos valores en las dos fórmulas (402) sacaremos

Fig.

$$\text{Sen } D = D - \frac{D^3}{1.2.3} + \frac{D^5}{1.2.3.4.5} - \frac{D^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{D^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.$$
$$\text{Cos } D = 1 - \frac{D^2}{1.2} + \frac{D^4}{1.2.3.4} - \frac{D^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{D^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \&c.$$

404 Hagamos $A + B = P$, $A - B = Q$: sumando ordenadamente una con otra estas dos equaciones, sacaremos $A = \frac{P+Q}{2}$, y restando la segunda de la primera saldrá $B = \frac{P-Q}{2}$. Luego egecutando las substituciones correspondientes en las quatro equaciones que sacamos (378) tendremos.

$$\text{sen } P + \text{sen } Q = 2 \text{ sen } (\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q) \times \cos (\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q)$$
$$\text{sen } P - \text{sen } Q = 2 \text{ sen } (\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q) \times \cos (\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q)$$
$$\cos P + \cos Q = 2 \cos (\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q) \times \cos (\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q)$$
$$\cos Q - \cos P = 2 \text{ sen } (\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q) \times \text{sen } (\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q)$$

405 Supongamos que en las dos primeras fórmulas $P = 90^\circ$, que en las dos últimas $Q = 0$, y tengamos presente (362) que el seno de $90^\circ = 1$, que el coseno de un arco nulo es tambien $= 1$, que $45^\circ - \frac{1}{2}Q$ es el complemento de $45^\circ + \frac{1}{2}Q$, pues $45^\circ + \frac{1}{2}Q + 45^\circ - \frac{1}{2}Q = 90^\circ$, y que el coseno del complemento de un arco es el seno del mismo arco, sacaremos

$1 + \text{sen } Q = 2 \text{ sen } (45^\circ + \frac{1}{2}Q) \cos (45^\circ - \frac{1}{2}Q) = 2 \text{ sen}^2 (45^\circ + \frac{1}{2}Q)$.

$1 - \text{sen } Q$, que es lo mismo que $\cos V.Q = 2 \text{ sen } (45^\circ - \frac{1}{2}Q) \times \cos (45^\circ + \frac{1}{2}Q) = 2 \text{ sen}^2 (45^\circ - \frac{1}{2}Q) = 2 \cos^2 (45^\circ + \frac{1}{2}Q) = \cos V.Q$

$1 + \cos P = 2 \cos^2 \frac{1}{2} P$

$1 - \cos P$, que es lo mismo que $\text{sen } V.P = 2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2} P = \text{sen } V.P$.

406 Si dividimos unas por otras las fórmulas dadas antes (404) tendremos $\frac{\text{sen } P + \text{sen } Q}{\text{sen } P - \text{sen } Q}$ Fig.

$$= \frac{(\text{sen}\,\frac{P+Q}{2})\,(\cos\frac{P-Q}{2})}{(\cos\frac{P+Q}{2})\,(\text{sen}\,\frac{P-Q}{2})} = \text{tang}\,\frac{P+Q}{2} \times \cot\frac{P-Q}{2}$$

$= \frac{\text{tang}\,\frac{P+Q}{2}}{\text{tang}\,\frac{P-Q}{2}}$ teniendo presente que siendo A un arco (368) será $\cot A = \frac{1}{\text{tang}\,A}$, y egecutando la substitucion correspondiente.

$$\frac{\text{sen } P + \text{sen } Q}{\cos P + \cos Q} = \text{tang}\,\frac{P+Q}{2}$$
$$\frac{\text{sen } P + \text{sen } Q}{\cos Q - \cos P} = \cot\frac{P-Q}{2}$$
$$\frac{\text{sen } P - \text{sen } Q}{\cos P + \cos Q} = \text{tang}\,\frac{P-Q}{2}$$
$$\frac{\text{sen } P - \text{sen } Q}{\cos Q - \cos P} = \cot\frac{P+Q}{2}$$
$$\frac{\cos P + \cos Q}{\cos Q - \cos P} = \cot\frac{P+Q}{2}.\ \cot\frac{P-Q}{2}.$$

407 Si dividimos unas por otras algunas de las fórmulas (405), sacaremos $\frac{1+\text{sen } Q}{1-\text{sen } Q} = \frac{\text{sen}^2(45^\circ + \frac{1}{2}Q)}{\text{sen}^2(45^\circ - \frac{1}{2}Q)}$

$$= \frac{\text{sen}^2(45^\circ + \frac{1}{2}Q)}{\cos^2(45^\circ + \frac{1}{2}Q)} = \text{tang}^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}Q.)$$

$$\frac{1+\cos P}{1-\cos P} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}P}{\text{sen}^2\frac{1}{2}P} = \cot^2\tfrac{1}{2}P.$$

$$\frac{1+\text{sen } Q}{1+\cos P} = \frac{\text{sen}^2(45^\circ + \frac{1}{2}Q)}{\cos^2\frac{1}{2}P}$$

$$\frac{1-\text{sen } Q}{1-\cos Q} = \frac{\cos V.\,Q}{\text{sen } V.\,Q} = \frac{\text{sen}^2(45^\circ - \frac{1}{2}Q)}{\text{sen}^2\frac{1}{2}P}.$$

Fig. 408 Si dividimos unas por otras las fórmulas que segun hallamos arriba (378) espresan sen $(A+B)$, sen $(A-B)$, cos $(A+B)$, cos $(A-B)$, sacaremos

$$\frac{\text{sen}\,(A+B)}{\text{sen}\,(A-B)}=\frac{\text{sen}\,A.\cos B+\text{sen}\,B.\cos A}{\text{sen}\,A.\cos B-\text{sen}\,B.\cos A}=\frac{\frac{\text{sen}\,A.\cos B}{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}+\frac{\text{sen}\,B.\cos A}{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}}{\frac{\text{sen}\,A\,\cos B}{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}-\frac{\text{sen}\,B.\cos A}{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}}=\frac{\frac{\cos B}{\text{sen}\,B}+\frac{\cos A}{\text{sen}\,A}}{\frac{\cos B}{\text{sen}\,B}-\frac{\cos A}{\text{sen}\,A}}$$

$$=\frac{\cot B+\cot A}{\cot B-\cot A}=\frac{\frac{1}{\text{tang}\,B}+\frac{1}{\text{tang}\,A}}{\frac{1}{\text{tang}\,B}-\frac{1}{\text{tang}\,A}}=\frac{\text{tang}\,A+\text{tang}\,B}{\text{tang}\,A-\text{tang}\,B}.$$

$\frac{\text{Sen}\,(A+B)}{\cos\,(A-B)}=\frac{\text{sen}\,A.\cos B+\text{sen}\,B.\cos A}{\cos A.\cos B+\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}$, que dividiendo ambos términos por sen A. sen $B=\frac{\frac{\cos B}{\text{sen}\,B}+\frac{\cos A}{\text{sen}\,A}}{\frac{\cos A.\cos B}{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}+1}=$ $\frac{\cot B+\cot A}{1+\cot B.\cot A}=\frac{\text{tang}\,A+\text{tang}\,B}{1+\text{tang}\,A.\,\text{tang}\,B}$, con substituir en lugar de cot A y cot B, sus valores $\frac{1}{\text{tang}\,A}$ y $\frac{1}{\text{tang}\,B}$, y egecutar las reducciones correspondientes.

$\frac{\text{Sen}\,(A-B)}{\cos\,(A+B)}=\frac{\text{sen}\,A.\cos B-\text{sen}\,B.\cos A}{\cos A.\cos B-\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}=\frac{\cot B-\cot A}{\cot B.\cot A-1}=\frac{\text{tang}\,A-\text{tang}\,B}{1-\text{tang}\,A\,\text{tang}\,B}$ cuya espresion se saca tambien con dividir primero todo como antes por sen A . sen B, y substituir en lugar de cot A &c. su valor $\frac{1}{\text{tang}\,A}$

$\frac{\cos\,(A+B)}{\cos\,(A-B)}=\frac{\cos A.\cos B-\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}{\cos A.\cos B+\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}$ que dividiendo ambos términos por cos A. sen $B=\frac{\cot B-\text{tang}\,A}{\cot B+\text{tang}\,A}$, substituyendo $\frac{1}{\text{tang}\,B}$ en lugar de cot B, $=\frac{1-\text{tang}\,A.\,\text{tang}\,B}{1+\text{tang}\,A.\,\text{tang}\,B}=\frac{\cot A-\text{tang}\,B}{\cot A+\text{tang}\,B}$, despues de haber substituido $\frac{1}{\cot A}$ en lugar de tang A, y egecutado las reducciones correspondientes.

$\frac{\text{Sen}\,(A+B)}{\cos\,(A+B)}=\text{tang}\,(A+B)$ (367) $=\frac{\text{sen}\,A.\cos B+\text{sen}\,B.\cos A}{\cos A.\cos B-\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}$ que, dividiendo ambos términos por cos A. cos B y reduciendo, $= \frac{\text{tang } A + \text{tang } B}{1 - \text{tang } A . \text{tang } B}$ que despues de substituido $\frac{1}{\cot . A}$ y $\frac{1}{\cot B}$ en lugar de tang A &c. y reducido se transforma en $\frac{\cot A + \cot B}{\cot A \times \cot B - 1}$. Luego cot $(A+B) = \frac{1}{\text{tang } (A+B)} = \frac{1 - \text{tang } A . \text{tang } B}{\text{tang } A + \text{tang } B} = \frac{\cot A . \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$, cuya espresion se sacaría inmediatamente sin cálculo teniendo presente que las cotangentes están en razon inversa de las tangentes.

$\frac{\text{sen } (A - B)}{\cos (A - B)} = \text{tang } (A - B) = \frac{\text{tang } A - \text{tang } B}{1 + \text{tang } A . \text{tang } B} = \frac{\cot B - \cot A}{\cot B . \cot A + 1}$. Luego cot $(A - B) = \frac{1 + \text{tang } A . \text{tang } B}{\text{tang } A - \text{tang } B} = \frac{\cot B . \cot A + 1}{\cot B - \cot A}$.

409 Si hicieramos $A = 45°$, sería (I. 643) tang $(45° + B) = \frac{1 + \text{tang } B}{1 - \text{tang } B} = \frac{\cot B + 1}{\cot B - 1}$, y tang $(45° - B) = \frac{1 - \text{tang } B}{1 + \text{tang } B} = \cot (45° + B) = \frac{\cot B - 1}{\cot B + 1}$.

410 En el supuesto de ser $A = B = \frac{1}{2} C$, será tang $2A = \frac{2 \text{ tang } A}{1 - \text{tang}^2 A}$, ó tang $C = \frac{2 \text{ tang } \frac{1}{2} C}{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} C}$ y cot $2A = \frac{1 - \text{tang}^2 A}{2 \text{tang} A} = \frac{1 - \text{tang } A \times \text{tang } A}{2 \text{ tang } A}$. Si substituimos en el denominador $\frac{1}{\cot A}$ en lugar de tang A, y egecutamos la misma substitucion en lugar de uno de los dos factores del segundo termino del numerador, se transformará el numerador en $1 - \frac{\text{tang } A}{\cot A}$, y el denominador en $\frac{2}{\cot A}$; y practicando las operaciones correspondientes, quedará $\frac{1 - \text{tang}^2 A}{2 \text{ tang } A}$ transformada en $\frac{1}{2} \cot A - \frac{1}{2}$ tang A. Luego cot $C = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} C - \frac{1}{2}$ tang $\frac{1}{2} C$, y transponiendo despues de divididos ambos miembros por $\frac{1}{2}$, sacaremos cot $\frac{1}{2} C = 2 \cot C +$ tang $\frac{1}{2} C$, y tang $\frac{1}{2} C = \cot \frac{1}{2} C - 2 \cot C$.

411 Ya que (370) sec $A = \frac{1}{\cos A}$, y cosec $A = \frac{1}{\text{sen } A}$, sacaremos

Fig.

$$\sec(A+B)=\frac{1}{\cos A.\cos B-\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B}=\frac{\frac{1}{\cos A\ \cos B}}{1-\frac{\operatorname{sen} A.\ \operatorname{sen} B}{\cos A.\ \cos B}}$$

$=\frac{\sec A.\ \sec B}{1-\operatorname{tang} A.\ \operatorname{tang} B}=\frac{\operatorname{cosec} A.\ \operatorname{cosec} B}{\cot A\ \cot B-1}$, substituyendo en el numerador en lugar de $\sec A.\ \sec B$ sus valores $\frac{\operatorname{cosec} A}{\cot A}$, $\frac{\operatorname{cosec} B}{\cot B}$ (370) y en el denominador $\frac{1}{\cot A\ \cot B}$ en lugar de A tang B, y egecutando despues la reduccion correspondiente.

$$\sec\ (A-B)=\frac{\sec A.\ \sec B}{1+\operatorname{tang} A.\ \operatorname{tang} B}.$$

$$\operatorname{cosec}(A+B)=\frac{\operatorname{cosec} A\ .\ \operatorname{cosec} B}{\cot B,+\cot A}.$$

$$\operatorname{cosec}(A-B)=\frac{\operatorname{cosec} A\ .\ \operatorname{cosec} B}{\cot B-\cot A}.$$

32. 412 Si $A=B$, y atendemos á que del triángulo rectángulo CBT' resulta que llamando A el arco AM, $(CT')^2=(CB)^2+(BT')^2$, esto es, que $\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$, será $\operatorname{cosec} 2A=\frac{\operatorname{cosec}^2 A}{2\cot A}=\frac{1+\cot^2 A}{2\ \cot A}$ $=\frac{\cot A+\operatorname{tang} A}{2}$, despues de substituido en el numerador de la antecedente, $\cot A\times\frac{1}{\operatorname{tang} A}$ en lugar de $\cot^2 A$, y en el denominador $\frac{2}{\operatorname{tang} A}$ en lugar de $2\cot A$; luego $\operatorname{cosec} A=\frac{\cot\frac{1}{2}A+\operatorname{tang}\frac{1}{2}A}{2}$. Pero (410) $\cot\frac{1}{2}A=2\cot A+\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$; luego $\operatorname{cosec} A=\frac{\cot\frac{1}{2}A+\operatorname{tang}\frac{1}{2}A}{2}=\cot\frac{1}{2}A-\cot A$, con substituir en lugar de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$ su valor (410) $\cot\frac{1}{2}A-2\cot A$.

413 Si consideramos la espresion de $\sec(A+B)$ (411), y atendemos á que el triángulo rectangulo CAT dá $(CT)^2=(CA)^2+(AT)^2$ ó $(\sec A)^2=1+(\operatorname{tang} A)^2$; tambien sacarémos $\sec 2A=\frac{\sec^2 A}{1-\operatorname{tang}^2 A}=\frac{1+\operatorname{tang}^2 A}{1-\operatorname{tang}^2 A}$

$= \frac{(1+\tang A)^2}{1-\tang^2 A} - \frac{2\tang A}{1-\tang^2 A} = \frac{1+\tang A}{1-\tang A} - \frac{2\tang A}{1-\tang^2 A}$, dividiendo por $1+\tang A$ ambos términos del quebrado que forma el primer término del primer miembro de esta última equacion. Pero (409) $\frac{1+\tang A}{1-\tang A} = \tang(45^\circ + A)$, y $\frac{2\tang A}{1-\tang^2 A} = \tang 2A$ (410). Luego $\sec 2A = \tang(45^\circ + A) - \tang 2A$, y $\sec A = \tang(45^\circ + \frac{1}{2}A) - \tang A = \cot(45^\circ - \frac{1}{2}A) - \tang A$.

414 Una vez que $\sec A = \frac{1}{\cos A}$, y $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$, y $\sec A$ (370) $= \frac{\tang A}{\operatorname{sen} A} = \tang A \times \frac{1}{\operatorname{sen} A} = \tang A . \operatorname{cosec} A$. Si substituimos en esta espresion los valores de $\operatorname{cosec} A$ hallados antes (412) sacarémos $\sec A = \frac{\tang A}{2}(\cot \frac{1}{2}A + \tang \frac{1}{2}A)$, cuyo último miembro, por ser $\cot \frac{1}{2}A + \tang \frac{1}{2}A = 2\cot A + 2\tang \frac{1}{2}A$, despues de hecha la substitucion correspondiente, y dividiendo por 2, se transforma en $\tang A \times \ldots\ldots (\cot A + \tang \frac{1}{2}A)$, que con substituir $\frac{1}{\tang A}$ por $\cot A$, es igual á $1 + \tang A . \tang \frac{1}{2}A$. Y si en $\tang A (\cot A + \tang \frac{1}{2}A)$ substituimos en lugar de $\tang \frac{1}{2}A$ su valor (410) $\cot \frac{1}{2}A - 2\cot A$, sacarémos tambien que $\tang A (\cot A + \tang \frac{1}{2}A) = \tang A (\cot \frac{1}{2}A - \cot A) = \tang A . \cot \frac{1}{2}A - 1$ despues de substituir en el primer miembro $\frac{1}{\tang A}$ por $\cot A$; y si en el último miembro substituimos $\frac{1}{\tang \frac{1}{2}A}$ en lugar de $\cot \frac{1}{2}A$, sacarémos finalmente $\tang A \cot \frac{1}{2}A - 1 = \frac{\tang A}{\tang \frac{1}{2}A} - 1$.

415 Si llamamos T la tangente del arco A, y supo-

nemos iguales los arcos A y B, la fórmula tang $(A+B)$ $=\frac{\text{tang } A+\text{tang } B}{1-\text{tang } A.\text{ tang } B}$, se transformará en tang $2A=\frac{2T}{1-T^2}$.

Si en la misma fórmula hiciéramos $A=2A$ y $B=A$, tang $(A+B)$ seria tang $3A=\frac{3T-T^3}{1-3T^2}$, despues de egecutadas las substituciones correspondientes en el segundo miembro de la espresada fórmula. Basta esto para hacerse cargo de lo que se deberá practicar para hallar las tangentes de los demás arcos múltiplos de A.

416 Si consideramos la fórmula cot $(A+B)=\frac{1}{\text{tang}(A+B)}$ y discurrimos acerca de su denominador, conforme hemos discurrido poco há, sacarémos que cot $A=\frac{1}{T}$, cot $2A=\frac{1-T^2}{2T}$, cot $3A=\frac{1-3T^2}{3T-T^3}$, &c. Si juntamos en una tabla las espresiones de las tangentes, y en otra las espresiones de las cotangentes de los arcos múltiplos de A, formarémos las dos tablas siguientes.

Tang $A=T$

Tang $2A=\frac{2T}{1-T^2}$

Tang $3A=\frac{3T-T^3}{1-3T^2}$

Tang $4A=\frac{4T-4T^3}{1-6T^2+T^4}$

Tang $5A=\frac{5T-10T^3+T^5}{1-10T^2+5T^4}$

&c.

Cot $A=\frac{1}{T}$

Cot $2A=\frac{1-T^2}{2T}$

Cot $3A=\frac{1-3T^2}{3T-T^3}$

Cot $4A=\frac{1-6T^2+T^4}{4T-4T^3}$

Cot $5A=\frac{1-10T^2+5T^4}{5T-10T^3+T^5}$

&c.

De la primera tabla sacarémos para la espresion general de la tangente de un arco múltiplo qualquiera, con atender á la ley de los coeficientes.

$$\text{Tang}\; nA = \frac{nT - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}T^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{1.2.3.4.5}T^5 - \&c.}{1 - \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}T^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}T^4 - \&c.}$$

417 Si tubiéramos presente lo dicho (403), y que tang $D = \frac{\text{sen}D}{\cos D}$, y cot $D = \frac{\cos D}{\text{sen}D}$, inferirémos que

$$\text{Tang}\; D = \frac{D - \frac{D^3}{1.2.3} + \frac{D^5}{1.2.3.4.5} - \frac{D^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{D^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} - \&c.}{1 - \frac{D^2}{1.2} + \frac{D^4}{1.2.3.4} - \frac{D^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{D^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \&c.}$$

$$\text{Cot}\; D = \frac{1 - \frac{D^2}{1.2} + \frac{D^4}{1.2.3.4} - \frac{D^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{D^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \&c.}{D - \frac{D^3}{1.2.3} + \frac{D^5}{1.2.3.4.5} - \frac{D^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{D^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}}$$

418 Hagamos ahora el arco A una parte qualquiera $\frac{1}{m}$ de 90°; como el arco de $90^\circ = 1,5707963267948966$, cuyo número llamarémos c, tendremos

$$\text{Sen}\,\frac{90^\circ}{m} = \frac{c}{m} - \frac{c^3}{2.3.m^3} + \frac{c^5}{2.3.4.5.m^5} - \frac{c^7}{2.3.4.5.6.7.m^7} + \frac{c^9}{2.3.4.5.6.7.8.9m^9}\;\&c.$$

$$\begin{aligned} = &+ \tfrac{1}{m}.\,1,5707963267948966 - \tfrac{1}{m^3}.0,6459640975062462 \\ &+ \tfrac{1}{m^5}.0,0796926262461670 - \tfrac{1}{m'}.0,0046817541353186 \\ &+ \tfrac{1}{m^9}.\,0,0001604411847871 - \tfrac{1}{m^{11}}.0,0000035988432352 \\ &+ \tfrac{1}{m^{13}}.\,0,0000000569217292 - \tfrac{1}{m^{15}}.0,0000000006688035 \\ &+ \tfrac{1}{m^{17}}.\,0,0000000000060669 - \tfrac{1}{m^{19}}.0,0000000000000437 + \&c. \end{aligned}$$

Fig. Y $\cos\frac{90^\circ}{m} = 1 - \frac{c^2}{2m^2} + \frac{c^4}{2.3.4.m^4} - \frac{c^6}{2.3.4.5.6.m^6} + \&c.$

$$= 1 - \frac{1}{m^2}.1,2337005501361 69 + \frac{1}{m^4}.0,2536695079010 48$$
$$- \frac{1}{m^6}.0,0208634807633 52 + \frac{1}{m^8}.0,0009192602748 39$$
$$- \frac{1}{m^{10}}.0,0000252020423 73 + \frac{1}{m^{12}}.0,0000004710874 77$$
$$- \frac{1}{m^{14}}.0,0000000063866 03 + \frac{1}{m^{16}}.0,0000000000656 59$$
$$- \frac{1}{m^{18}}.0,0000000000005 29 + \frac{1}{m^{20}}.0,0000000000000 03 - \&c.$$

419 Lo mismo se puede practicar respecto de tang $\frac{90^\circ}{m}$, y de cot $\frac{90^\circ}{m}$. Por consiguiente por medio de estas series se podrán calcular los senos, cosenos &c. de todos los arcos con substituir los valores correspondientes en lugar de m. Pero como basta calcular los senos hasta 30° (381) para sacar todos los demás, el quebrado $\frac{1}{m}$ será siempre menor que $\frac{1}{3}$, y será por consiguiente muy convergente la serie igual á sen $\frac{90^\circ}{m}$. Si quisiésemos sacar, por egemplo, el seno de 9°, será $m = 10$, y al instante hallarémos sen $9^\circ = 0,156434465040314$; cuyo método tambien podria practicarse para hallar el seno de un arco de un número determinado de grados, minutos y segundos.

420 Es patente que los senos que por este cálculo se sacan pertenecen á un círculo cuyo radio $= 1$; y así para hallar los que corresponden á un círculo cuyo radio fuese $= a$, se deberian multiplicar por a. Para hacerse cargo de la razon de esta regla conviene considerar que siendo semejantes unos con otros todos los círculos, sus líneas homólogas rectas ó curvas, quales son los arcos de un mismo número de grados y minutos, sus senos, cosenos, tangentes &c. están en la misma razon que los radios de dichos círcu-

los; de suerte que si llamamos R el seno total ó el radio del círculo de las tablas; r, el radio de un círculo qualquiera; X y x, las líneas homólogas de dichos dos círculos, tendrémos esta proporcion $R : r :: X : x$, de la qual inferirémos $Rx = rX$, $x = \frac{rX}{R}$ y $X = \frac{Rx}{r}$. Por consiguiente si conociésemos x en el círculo cuyo radio es r, hallaríamos su valor en las tablas ó en el círculo cuyo radio fuere R; y si fuere conocida X por las tablas, se sacará el valor de x respecto del círculo cuyo radio fuere r. Por egemplo, si fuese x el seno de un arco de un número N de grados, y conocemos su valor en el círculo cuyo radio es r, hallarémos el número N con buscar en las tablas un seno $= \frac{Rx}{r}$ que será el seno X, á cuyo lado estará el número N de grados y minutos &c.

En las tablas ordinarias, se supone el radio $= \ldots$ 10 000 000 000, y para mayor comodidad contienen tambien los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes, cotangentes desde $1'$ hasta 90°, á excepcion de los arcos que contienen segundos, porque es fácil hallar sus senos, cosenos &c. en virtud de lo dicho (I. 662).

421 Por lo que mira á las secantes y cosecantes que son de poco uso, tambien están en las espresadas tablas; pero aun quando no estubieran, seria fácil sacarlas de las fórmulas sec $A = \frac{1}{\cos A}$, y cosec $A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$, que llamando R el radio de las tablas, se transforman (370) en sec $A = \frac{RR}{\cos A}$, y cosec $A = \frac{RR}{\operatorname{sen} A}$. De donde inferiremos (346 y 347) log sec $A = 2\,LR - L\cos A = 20,0000000$

$-L \cos A$ y L cosec $A = 20,0000000 - L$ sen A.

422 Despues de haber manifestado como dado un arco se halla su seno, su coseno &c. nos resta declarar como se resuelve la cuestion inversa, esto es, como dado el seno, el coseno &c. de un arco, se halla la longitud de dicho arco.

Como en el caso de ser dado el coseno ó la cotangente se saca al instante el seno y la tangente, se reduce la cuestion á hallar la longitud de un arco cuyo seno ó tangente es dada.

Pero si atendemos al valor de sen D, sacaremos por el método inverso de las series (297) $D = \text{sen } D + \frac{\text{sen}^3 D}{3} + \frac{3 \text{ sen}^5 D}{2.4.5} + \frac{3.5.\text{sen}^7 D}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.\text{sen}^9 D}{2.4.6.8.9} + \&c.$

2.° Si llamamos T la tangente del arco D será (417)

$$T = \frac{D - \frac{D^3}{1.2.3} + \frac{D^5}{1.2.3.4.5} - \&c.}{1 - \frac{D^2}{1.2} + \frac{D^4}{1.2.3.4}}$$

de cuya equacion sacarémos despues de eliminado el denominador del segundo miembro, y hechas las transposiciones correspondientes, $T = D + \frac{D\,T}{1.2} - \frac{D^3}{1.2.3} - \frac{D^4 T}{1.2.3.4}$ &c. Sea $D = AT + BT^3 + CT^5 + \&c.$ tendrémos despues de egecutadas las substituciones correspondientes y de determinadas las incógnitas A, B, C &c. $A = 1$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{5}$; y por consiguiente $D = \text{tang } D - \frac{\text{tang}^3 D}{3} + \frac{\text{tang}^5 D}{5} - \frac{\text{tang}^7 D}{7} + \&c.$

423 Resuelven pues estas dos series la cuestion propuesta; las aplicarémos ahora para buscar la razon que hay entre el diámetro y la circunferencia.

Si llamáramos A el arco cuya longitud buscamos, é hiciéramos sen $A = \frac{1}{2}$, hallaríamos que la longitud de un arco de $30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} +$ &c. Este valor multiplicado por 6, daría la semicircunferencia, y por consiguiente la razon que se busca; pero como esta serie, bien que convergente, es trabajosa de calcular, mas vale valerse de la segunda, que en el supuesto de ser el arco A de 45°, ó tang $A = 1$, dá $A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. Y porque no converge esta serie con bastante rapidez, se ha buscado un medio mas breve para sacar la longitud del expresado arco de 45.°

424 Para este fin se supone dicho arco compuesto de dos que llamarémos A y B, y se busca separadamente su longitud. En virtud de este supuesto tang $(A + B) = 1 = \frac{\text{tang } A + \text{tang } B}{1 - \text{tang } A.\ \text{tang } B}$. Luego tang $A +$ tang $B = 1 -$ tang A tang B, y trasponiendo tang $A +$ tang $A.$ tang $B = 1 -$ tang B, y dividiendo ambos miembros de la última equacion por $1 +$ tang B, sale finalmente tang $A = \frac{1 - \text{tang } B}{1 + \text{tang } B}$. Sea tang $B = \frac{1}{3}$, tendrémos tang $A = \frac{1}{2}$.

La suma de los arcos A y B, ó la quarta parte de la semicircunferencia c, será

$$\frac{c}{4}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \text{\&c.} \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \text{\&c.} \end{matrix}\right\} = 0{,}7853981633974483$$

De donde se saca $c = 3{,}14159265358979 32$ y la razon entre el diámetro y la circunferencia la misma que supusimos (I. 504).

425 Si consideramos con alguna atencion la fórmula general que dimos (402) para expresar el seno de un arco múltiplo de A ó sen nA, siendo n un número impar, hallarémos que tambien puede servir para egecutar la division de un arco dado de círculo en un número impar de partes iguales. Porque una vez que la espresada fórmula dá el valor de sen nA; valerse de los senos para dividir nA en n partes, es buscar el seno de $\frac{n}{n}A$, ó buscar sen A, pues en conociendo el valor de sen A, sabemos por medio de las tablas de los senos qual es el valor del arco A, y por consiguiente de la parte $\frac{1}{n}$ del arco nA. Supongamos, por egemplo, que queramos dividir un arco dado a en tres partes iguales, substituirémos en el primer miembro de la mencionada fórmula a en lugar de sen nA, en el segundo miembro substituirémos 3 en lugar de n, y x en lugar de sen A, de cuyas substituciones resultará $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}r^2a = 0$, en el supuesto de ser r el radio del círculo.

Esto manifiesta que para dividir un arco en tres partes iguales por medio de los senos, se ha de sacar el valor de x de la equacion $x^3 - \frac{1}{3}r^2x + \frac{1}{4}r^2a = 0$, de suerte que si fuese A un arco cuyo seno $= a$, sacarémos de dicha equacion el valor de $x =$ sen $\frac{1}{3}A$.

426 Podemos aprovechar estas consideraciones para resolver por aproximacion las equaciones del tercer grado que están en el caso irreductible: pero con la mira de hacer

mas perceptible esta aplicacion, hemos de recordar que los arcos $180^\circ - A$ y $-(180^\circ + A)$ tienen el mismo seno que el arco A (362 y 363); luego servirá la misma equacion $x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} ar^2 = 0$ para dividirlos cada uno en tres partes iguales; por consiguiente las tres raices de dicha equacion son sen $\frac{1}{3} A$, sen $\frac{180^\circ - A}{3}$, $-$ sen $\frac{180 + A}{3}$, ó sen $\frac{1}{3} A$, sen $(60^\circ - \frac{1}{3} A)$, $-$ sen $(60^\circ + \frac{1}{3} A)$.

427 Supongamos ahora que sea $x^3 - px + q = 0$ la equacion que hemos de resolver; que si fuese $x^3 - px - q = 0$, la reduciríamos á la misma forma con hacer $x = -y$; y egecutar las substituciones correspondientes: si comparamos la propuesta con $x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} ar^2 = 0$, tendrémos $\frac{3}{4} r^2 = p$, $\frac{1}{4} ar^2 = q$; de la primera sale $r^2 = \frac{4p}{3}$, y $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, y substituyendo en la segunda el valor de r^2 sacado de la primera, saldrá $a = \frac{3q}{p}$. Por consiguiente si trazamos un círculo cuyo radio sea $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, y llamamos A el arco cuyo seno fuere $\frac{3q}{p}$, los tres valores de x serán sen $\frac{1}{3} A$, sen $(60^\circ - \frac{A}{3})$, $-$ sen $(60^\circ + \frac{1}{3} A)$: como el seno ha de ser menor que el radio, es preciso que $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ sea mayor que $\frac{3q}{p}$, ó $\frac{1}{27} p^3$ sea mayor que $\frac{1}{4} q^2$. De donde inferirémos que toda equacion de tercer grado que se halláre en el caso irreductible se podrá resolver por este método.

428 Si llamamos, pues, R el radio de las tablas, sacarémos que el seno tabular del arco A es $\frac{R \times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$, con hacer esta proporcion $2\sqrt{\frac{1}{3}p} : R :: \frac{3q}{p} : \frac{R \times 3q\sqrt{3}}{p\sqrt{p}}$, ó que sen $A = \frac{R \times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$. Pero una vez que es conocida la cantidad A, lo serán tam-

bien las cantidades sen $\frac{A}{3}$, sen $(60^\circ - \frac{1}{3}A)$, — sen $(60^\circ + \frac{1}{3}A)$, y por consiguiente transformando estos senos en los que corresponden al radio $= 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ (420), hallarémos que las tres raices de la propuesta serán $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}$ sen $\frac{1}{3}A$, $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}$ sen $(60^\circ - \frac{1}{3}A)$, $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}$ sen $(60^\circ + \frac{1}{3}A)$.

Busquemos por este método las raices de la equacion $x^3 - 3x + 1 = 0$, de la qual sacamos comparándola con la universal $x^3 - px + q = 0$, $p = 3$, $q = 1$, cuyos valores substituidos en sen $A = \frac{R \times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$ dán sen $A = \frac{1}{2}R$, y por consiguiente (I. 642) $A = 30^\circ$, y $\frac{1}{3}A = 10^\circ$. Substituyendo en $\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}$ sen $\frac{1}{3}A$, 3 en lugar de p, y sen 10° en lugar de sen $\frac{1}{3}A$, saldrá $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}$ sen $\frac{1}{3}A = \frac{2 \text{ sen } 10^\circ}{R} = 0,3472964$, y egecutando las substituciones correspondientes en $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R} \times$ sen $(60^\circ - \frac{1}{3}A)$, y $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}$ sen $(60^\circ + \frac{1}{3}A)$ sacarémos que los otros dos valores de x son $x = \frac{2 \text{ sen } 50^\circ}{R} = 1,5320888$, $x = -\frac{2 \text{ sen } 70^\circ}{R} = -1,8793852$.

Si la equacion que se ha de resolver fuese $x^3 - x +$

$\frac{1}{3} = 0$, sería $p = 1$, $q = \frac{1}{3}$; y substituyendo estos valores en la fórmula sen $A = \frac{R \times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$, sacaríamos que sen $A = \frac{R}{2}\sqrt{3}$, y por consiguiente $A = 60°$: y $\frac{1}{3}A = 20°$. Practicando las substituciones en $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}$ sen $\frac{1}{3}A$, hallaremos $x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}}}{R}$ sen $20° = \frac{2\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$ sen $20°$ dividido por R, ó por ser $\sqrt{1} = 1$, $\frac{2 \text{ sen } 20°}{R\sqrt{3}} = 0{,}394931$, $x = \frac{2 \text{ sen } 40°}{R\sqrt{3}} = 0{,}742227$; $x = -\frac{2 \text{ sen } 80°}{R\sqrt{3}} = -1{,}137158$.

Si ocurriese sacar las raices de la equacion $x^3 - 5x + 3 = 0$, que dá $p = 5$, $q = 3$, sen $A = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{3^5}{5^3}}$, y L sen $A = LR + \frac{5}{2}L3 - L2 - \frac{2}{3}L5 = 9{,}843318$ $= L$ sen $44°\ 11'\ 52''$, luego $A = 44°\ 11'\ 52''$ y los tres valores de x son $x = \frac{2\sqrt{5}\ \text{sen}(14°\ 43'\ 57'')}{R\sqrt{3}}$, $x = \frac{2\sqrt{5}\ \text{sen}(45°\ 16'\ 3'')}{R\sqrt{3}}$, $x = \frac{-2\sqrt{5}\ \text{sen}(74°\ 43'\ 57'')}{R\sqrt{3}}$.

Haciendo las operaciones indicadas, hallarémos $x = 0{,}656625$; $x = 1{,}834238$, $x = -2{,}490863$.

Cuestiones numéricas.

429 Cuestion I. *Dada la suma* a *de dos números, y la diferencia* b *de sus quadrados, hallar dichos números.*

Sea x el menor de los dos números que buscamos, el mayor será $a - x$, y sus quadrados serán xx y $aa - 2ax + xx$, cuya diferencia $aa - 2ax$ suponemos $= b$. Luego $aa - 2ax = b$, y $aa - b = 2ax$; por consiguiente

$x = \frac{aa-b}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}$. Substituyendo este valor de x en $a - x$, se sacará el valor del otro número.

Si fuere la suma de los dos números ó $a = 8$, y la diferencia de sus quadrados ó $b = 16$, sería $\frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} = 4 - 1 = 3 = x$, y $a - x = 5$. Serian, pues, en este caso 3 y 5 los números que se piden.

430 Cuestion II. *Hallar tres cantidades* x, y, z, *de las quales son dadas las sumas, sumándolas de dos en dos.*

Sea a la suma de x é y; b, la de x y z; c, la de y y z. Tendrémos tres equaciones para determinar las tres incógnitas x, y, z; es á saber $x + y = a$, $x + z = b$, $y + x = c$. Para esterminar dos qualesquiera de las incógnitas, pongo por caso y y z, resto x de cada miembro de la primera y segunda equacion, y hallo $y = a - x$, y $z = b - x$: substituyo estos valores en la tercera equacion en lugar de y y z, y saco $a - x + b - x = c$: luego traspasando y reduciendo sale $x = \frac{a+b-c}{2}$. Substituyendo este valor de x en las equaciones $y = a - x$, $z = b - x$, sacarémos los valores de y y z.

Supongamos que sea $x + y = 9$, $x + z = 10$, y $y + z = 13$; con substituir en los valores de x, y y z, 9 en lugar de a, 10 en lugar de b, y 13 en lugar de c, resultará $a + b - c = 6$, y por consiguiente $x = \frac{a+b-c}{2} = 3$, $y = a - x = 6$, $z = b - x = 7$.

431 Cuestion III. *Para pagar á unos jornaleros á razon de* 3 *reales cada uno me faltan* 8 *reales; pero si no*

les doy mas que 2 reales á cada uno, me sobran 3 reales, ¿quántos reales tengo?

Llamo x los reales que tengo: luego $x+8$ es la suma con que podré pagar cada oficial á razon de 3 reales; y como es preciso que el número de oficiales sea tres veces menor que la espresada suma, será $\frac{x+8}{3}$.

Como me sobran 3 reales, no dándole mas que 2 reales á cada jornalero, será $x-3$ la suma que basta para satisfacerles á este precio. Luego $\frac{x-3}{2}$ será tambien el número de los jornaleros, y tendrémos $\frac{x+8}{3}=\frac{x-3}{2}$ que se reduce eliminando los divisores á $2x+16=3x-9$, y trasladando $x=25$ que son los reales que tengo.

Para averiguar quántos son los jornaleros, substituirémos este valor de x en $\frac{x-3}{2}$, por egemplo, que espresa su número, y $\frac{x-3}{2}$ será $\frac{25-3}{2}=11$.

432 Cuestion IV. *Dadas las fuerzas de un agente, hallar quantos agentes como él, producirán un efecto* a *en un tiempo dado* b.

Sea tal la fuerza del agente, que pueda producir el efecto c en el tiempo d: será el tiempo d al tiempo b coco el efecto c que dicho agente puede causar en el tiempo d, al efecto que podrá hacer en el tiempo b, que por consiguiente será $\frac{bc}{d}$. Tambien dirémos: La obra $\frac{bc}{d}$ de un agente es á la obra a de todos, como este agente solo es á todos, cuyo número será por consiguiente $\frac{ad}{bc}$.

Si un escribiente puede copiar 15 pliegos en 8 dias, ¿quantos amanuenses tan largos como el primero se necesitarán para copiar 405 pliegos en 9 dias? En este egemplo $d=8$, $c=15$, $a=405$, $b=9$, y egecutando las substituciones correspondientes, será $\frac{ad}{bc}=\frac{405\times 8}{9\times 15}=\frac{3240}{135}=24$, que espresa el número de los amanuenses que se necesitarán.

433 Cuestion V. *Dadas las fuerzas de muchos agentes, determinar el tiempo* x *en que podrán producir un efecto determinado obrando juntos*; ó en otros términos:

Un oficial puede hacer una obra a en el tiempo b: otro oficial hace la obra c en el tiempo d, y otro la obra e en el tiempo f, ¿quánto tiempo gastarán estos tres oficiales juntos para hacer la obra g?

Si llamamos x el tiempo que buscamos, sacarémos la obra que el primer oficial hará en este tiempo con hacer la proporcion siguiente $b:a::x:\frac{ax}{b}$. La obra que el segundo oficial hará en el mismo tiempo, la espresa el quarto término de esta proporcion $d:c::x:\frac{cx}{d}$. Finalmente la obra que hará en el mismo tiempo el tercer oficial, será el quarto término de esta proporcion $f:e::x:\frac{ex}{f}$. Luego $\frac{ex}{f}+\frac{cx}{d}+\frac{ax}{b}$ espresa la obra que los tres oficiales juntos harán en el tiempo x, cuya obra es g; luego $\frac{ex}{f}+\frac{cx}{d}+\frac{ax}{b}=g$; de donde sacarémos $\frac{edbfx}{f}+\frac{cdbfx}{d}+\frac{abdfx}{b}=bdfg$ ó $edbx+cbfx+adfx=bdfg$, y por consiguiente $x=\frac{bdfg}{bde+bcf+adf}$.

Si un oficial de albañil hace 7 varas corrientes de tapia en 5 dias, otro hace 10 en 3 dias, y otro 11 en 4 dias, podremos saber en quantos dias harán los tres juntos 150 varas corrientes de la misma tapia. Porque en virtud de estos supuestos será $a = 7$, $b = 5$, $c = 10$, $d = 3$, $e = 11$, $f = 4$, $g = 150$, y egecutando las substituciones correspondientes saldrá $x = \frac{9000}{449} = 20 + \frac{20}{449}$, cuyo número espresa en quántos dias harán juntos los tres oficiales la obra propuesta.

434 Cuestion VI. *Dos caños juntos que corren uniformemente han llenado un estanque* a, *el uno en el tiempo* b, *y el otro en el tiempo* c; *los dos mismos caños han llenado otro estanque* d, *el uno en el tiempo* e, *y el otro en el tiempo* f: *se pregunta ¿quanta agua ha salido por cada caño?*

Representen x é y el agua que dan respectivamente los caños; por egemplo, las arrobas que cada uno daría cada dia en el supuesto de que la cabida de los estanques a y d esté medida por arrobas, y contando por dias los tiempos b, c, e, f.

Espresará bx el agua que diere el primer caño en el tiempo b, cy representará el agua que diere el segundo caño en el tiempo c. Y como estas dos cantidades de agua han de ser iguales por la cuestion á la que cabe en el estanque a, tendremos $bx + cy = a$, y $x = \frac{a - cy}{b}$.

Tambien representarán ex y fy el agua que dieren los mismos caños en los tiempos e y f, y tendremos por consiguiente $ex + fy = d$, y $x = \frac{d - fy}{e}$.

De los dos valores hallados de x sacamos $\frac{a - cy}{b} = \frac{d - fy}{e}$, ó $ae - cey = bd - bfy$, ó $de - bd = cey - bfy$, ó finalmente $y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$.

Substituyendo este valor de y en alguno de los valores precedentes de x, pongo por caso en $\frac{a-cy}{b}$, resultará $x = \frac{a - c\left(\frac{ae-bd}{ce-bf}\right)}{b}$, ó $x = \frac{a \times (ce-bf) - c \times (ae-bd)}{b \times (ce-bf)}$, que con egecutar las operaciones indicadas se reduce á $x = \frac{cd-af}{ce-bf}$.

Supongamos que corriendo 2 dias el primer caño, y 3 el segundo hayan llenado un estanque de 195 arrobas, y que corriendo el primero 5 dias y el otro 4, hayan llenado un estanque de 330 arrobas.

Será, pues, $a = 195$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 330$, $e = 5$; $f = 4$. Luego $cd - af = 210$; $ce - bf = 7$; $ae - bd = 315$, y por consiguiente $x = \frac{dc-af}{ce-bf} = \frac{210}{7} = 30$, $y = \frac{ae-bd}{ce-bf} = \frac{315}{7} = 45$.

435 Cuestion VII. *Se sabe quanto ha costado cada uno de tres almacenes en que hay tres especies de granos; se sabe tambien quantas fanegas hay de cada grano en cada almacen: se pregunta ¿á quanto sale la fanega de cada grano?*

Llamemos a, b, c el número de fanegas de cada grano que hay en el primer almacen, y d lo que ha costado este almacen.

Llamemos e, f, g las fanegas de los mismos granos que hay en el segundo almacen, cuyo precio es h.

Llamemos i, k, l las fanegas de los mismos granos que hay en el tercer almacen que ha costado m.

Llamemos finalmente x, y, z el precio de una fanega de cada grano.

Es evidente que la porcion del primer grano que hay en el almacen cuyo importe es d, costará ax, pues a espresa las fanegas de dicho grano, y x el precio de cada fanega. La porcion del segundo grano que hay en el mismo almacen costará by, y la porcion del otro grano que hay en este mismo almacen costará cz. La suma de estas tres cantidades ha de ser igual al precio d de dicho almacen; luego será $ax + by + cz = d$. Discurriendo del mismo modo sacaríamos las dos equaciones siguientes $ex + fy + gz = h$, $ix + lz + ky = m$, de las condiciones correspondientes á los otros dos almacenes.

Hemos, pues, de sacar de estas equaciones los valores de x, y, z. La primera equacion dá $x = \frac{d - by - cz}{a}$, si igualamos este valor de x con el que sacamos de la segunda equacion, tendremos $\frac{d - by - cz}{a} = \frac{h - fy - gz}{e}$; luego $de - bey - cez = ah - afy - agz$, y $z = \frac{de - ah + afy - bey}{ce - ag}$; y como de la tercera equacion sacamos $x = \frac{m - ky - lz}{i}$, tendremos tambien $\frac{d - by - cz}{a} = \frac{m - ky - lz}{i}$; luego $di - biy - ciz = am - aky - alz$, y $z = \frac{di - am + aky - biy}{ci - al}$.

Si formáramos una equacion con los dos valores que hemos sacado de z, resultaria otra equacion en que no habria mas incógnita que y, de la qual se sacaria por consiguiente el valor de esta cantidad. Pero como serían bastante penosos los cálculos que tendríamos que hacer, usaremos de algunas abreviaciones muy socorridas para este caso, y otros muchos que se le parecen.

$$\text{Haremos}\left\{\begin{array}{l} de - ah = A \\ af - be = B \\ ce - ag = C \\ di - am = D \\ ak - bi = E \\ ci - al = F \end{array}\right.$$

cuyos supuestos transforman las equaciones precedentes en $z = \frac{A+By}{C}$ y $z = \frac{D+Ey}{F}$, que dán $AF + BFy = DC + CEy$, de donde sacamos $y = \frac{AF-CD}{CE-BF}$. Si substituimos este valor de y en alguno de los dos valores que sacamos antes de z, pongo por caso en el primero, hallaremos

$z = \dfrac{A + \frac{ABF-BCD}{CE-BF}}{C}$ que se reduce á $z = \frac{AE-BD}{CE-BF}$.

Estos valores de y y z los substituiremos en alguno de los valores de x que hallamos antes, en $\frac{d-cz-by}{a}$ por egemplo, y tendremos $x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \left(\frac{AE-BD}{EC-BF}\right) - \frac{b}{a}\left(\frac{AF-DC}{CE-BF}\right)$, ó $x = \frac{d(CE-BF) - c(AE-BD) - b(AF-DC)}{a(CE-BF)}$.

Hagamos una aplicacion de este método con suponer que en el primer almacen hay 30 fanegas de centeno, 20 de cebada, y 10 de trigo, y que su importe sea 230^{rs}.

Que en el segundo almacen hay 15 fanegas de centeno, 6 de cebada, y 12 de trigo, y que haya costado 138^{rs}.

Que en el tercer almacen hay 10 fanegas de centeno, cinco de cebada, 4 de trigo, y que haya costado 75^{rs}. Para averiguar á como sale cada fanega de centeno, de cebada y de trigo haremos $a = 30$, $b = 20$, $c =$

10, $d = 230$, $e = 15$, $f = 6$, $g = 12$, $h = 138$, $i = 10$, $k = 5$, $l = 4$, $m = 75$, cuyos supuestos darán $de - ab = A = -690$, $af - be = B = -120$, $ce - ag = C = -210$, $di - am = D = 50$, $ak - bi = E = -50$, $ci - al = F = -20$, cuyos valores substituidos en $AF - CD$, $CE - BF$, $AE - BD$, resultará 24300, 8100, 40500, y por consiguiente $y = \frac{24300}{8100} = 3$, $z = \frac{40500}{8100} = 5$, y $x = \frac{230 \times 8100 - 10 \times 40500 - 20 \times 24300}{30 \times 8100} = 4$.

Luego cada fanega de centeno costó . . $4^{rs.}$

Cada fanega de cebada 3

Cada fanega de trigo 5

436 Cuestion VIII. *Si un número* a *de ovejas se come en el tiempo* c *la yerba de una dehesa* b, *y un número* d *de ovejas se come la yerba de otra dehesa* e *igualmente pingüe que la primera en el tiempo* f, *y crece la yerba uniformemente; se pregunta ¿quantas ovejas se comerán la yerba de una dehesa semejante* g *en el tiempo* h?

Si los tiempos fuesen unos mismos, y las dehesas igualmente pingües, será la superficie de la dehesa b á la superficie de la dehesa e como el número a de ovejas es al número de las ovejas que en el tiempo c se comerán la yerba de la dehesa e, cuyo número será por consiguiente $\frac{ae}{b}$.

Pero siendo desiguales los tiempos, y una misma la dehesa, los dos números de ovejas serán en razon inversa de los tiempos, pues quanto menor fuere el número de las ovejas, tanto mas tiempo necesitarán para comerse la yerba de la dehesa. Luego el tiempo f será al tiempo c, como el número $\frac{ae}{b}$ de ovejas que pastarán la dehesa e en el tiempo c, al número de las ovejas que en el tiempo f pastarán la yerba de la misma dehesa e, cuyo número será por consiguiente $\frac{ace}{bf}$, y por la misma razon será $h : c :: \frac{ae}{b} : \frac{ace}{bh}$.

El número $\frac{ace}{bf}$ de las ovejas que pastarian la dehesa e en el tiempo f le hemos calculado en el supuesto de que no crezca la yerba; pero como por la cuestion las ovejas d se comen la dehesa e en el tiempo f en el supuesto de que crezca la yerba, es preciso que el número d sea mayor que el número $\frac{aec}{bf}$, el qual se ha de restar del primero para sacar el número de ovejas que en el tiempo f se comerán la yerba que criáre la dehesa e en el tiempo $f - c$; y por consiguiente será dicho número $d - \frac{ace}{bf}$.

Y como el número de las ovejas está en razon inversa de los tiempos, haremos $h : f :: \frac{bdf - ace}{bf} : \frac{bdf - aec}{bh}$, cuyo quarto término espresa el número de las ovejas que en el tiempo h se comerán la yerba que en el tiempo $f - c$ criáre la dehesa e. Pero una vez que, segun la cuestion supone, crece la yerba uniformemente, en la misma dehesa crecerá como dos en un tiempo duplo, como tres en un tiempo triplo &c.; el número de las ovejas que se comerán la yerba que creciere en la dehesa e en el tiempo $h - c$, será el quarto término de esta proporcion $f - c : h - c ::$ $\frac{bdf - aec}{bh} : \frac{bdfh - bcdf - aceh + aecc}{bfh - bch}$.

Esta última cantidad se ha de añadir al número $\frac{aec}{bh}$ que espresa las ovejas que en el tiempo h pastarán la dehesa, en el supuesto de que al cabo del tiempo c no crece la yerba, y resultará $\frac{bdfh - bcdf - aceh + acfe}{bfh - bch}$. Porque si al número $\frac{bdfh - bcdf - aceh + aecc}{bfh - bch}$ que representa las ovejas que se comerán la yerba que crece en el tiempo $h - c$, se le añade el número de las ovejas que se comerán la yerba que antes habia en la dehesa e, y la que habia crecido en el tiempo c, espresará la suma el número de las ovejas que se comerán la yerba que habia en la dehesa e, y la que habia criado en el tiempo h.

Luego para sacar quantas ovejas se comerán en el tiempo h la dehesa g, haremos esta proporcion $e : g : : \frac{bdfh - bcdf - aceh + acfe}{bfh - bch} : \frac{bdfgh - ccagh - bcgfd + ecfga}{befh - bceh}$, cuyo quarto término es el que se busca.

Si 12 ovejas se comen $3\frac{1}{3}$ fanegadas de una dehesa en 4 semanas; y 21 ovejas se comen 10 fanegadas de una dehesa semejante en 9 semanas; quántas ovejas se comerán 24 fanegadas en 18 semanas?

En este caso $a = 12$, $b = 3\frac{1}{3}$, $c = 4$; $d = 21$ $e = 10$, $f = 9$; $g = 24$, $h = 18$. Egecutando las substituciones correspondientes resultará que 36 es el número de ovejas que se busca.

437 Cuestion IX. *Declarar y demostrar las operaciones pertenecientes á la regla de dos falsas posiciones.*

Por lo dicho (I. 210) se percibe que la *regla de dos falsas posiciones* es aquella en que se busca un número incógnito por medio de dos números supuestos. Con la mira de hacer mas patente lo que vamos á declarar para la resolucion de esta cuestion lo aplicaremos á algunos egemplos.

I. *Se ha recibido un oficial, y con la mira de estimularle al trabajo, se le ofrece un peso cada dia que trabajáre, con la condicion de que cada dia que holgáre, no solo no se le dará nada, sino que él habrá de pagar ocho reales: al cabo de 15 dias no cobra mas que 110 reales: se pregunta ¿quántos dias ha trabajado?*

Supongo que ha trabajado 6 dias, pero en este supuesto no le tocaria haber cobrado mas que 18 reales: estoy, pues, equivocado en 92 reales de menos, y es señal de que ha trabajado mas de 6 dias.

Supongo despues que ha trabajado 12 dias. En este supuesto deberia haber cobrado 156 reales: el error ó la equivocacion es, pues, de 46 reales de mas.

Dispongo como se ve los dos números supuestos, y los errores ó equivocaciones correspondientes

$$\begin{array}{cc} 6 & 12 \\ -92 & +46 \end{array}$$

Multiplico despues el primer número por la segunda equivocacion, y el segundo número por la primera: saco los productos 276 y 1104: divido su suma 1380 por 138 suma de las equivocaciones, y el cociente 10 es el número de dias que trabajó el oficial.

Si los dos números supuestos hubiesen dado ambas equivocaciones de mas ó de menos, hubiera dividido la diferencia de los productos por la diferencia de las equivocaciones.

Por egemplo, despues de haber verificado con el primer supuesto que el oficial ha trabajado mas de seis dias, supongo que ha trabajado 9 : la equivocacion será tambien de 23 reales de menos; tendré pues

$$\begin{array}{cc} 6 & 9 \\ -92 & -23 \end{array}$$

y multiplicando 23 por 6, y 92 por 9, dividiendo la diferencia 690 de los dos productos por la diferencia 69 de las dos equivocaciones 92 y 23, sacaré como antes el cociente 10 que me dice que el oficial trabajó 10 dias.

438 Si consideramos con alguna atencion las operaciones en que empeña la regla de dos falsas posiciones, hallarémos que consisten en suponer un número ajustado á las condiciones de la cuestion, que estará resuelta si el número supuesto cumpliere con dichas condiciones. Si no, se señala la equivocacion sea de mas, sea de menos, y se supone otro número señalando la equivocacion que de él resultáre. Despues se multiplica el primer error por el segundo número, y el segundo error por el primer número. Hecho esto, se divide la suma de los dos productos por la suma de las equivocaciones quando estas son de un mismo signo, y si fueren de distintos signos, se partirá la diferencia de los productos por la de las equivocaciones.

II. *De dos jugadores el mas diestro apuesta 12 reales contra 8 cada juego: despues de haber jugado diez juegos, el otro le paga 20 reales ¿quántos juegos ganó?*

Si hubiera ganado 6, el otro hubiera ganado 4, y hubieran estado en paz, hay, pues, una equivocacion que es -20. Si hubiera ganado 8 juegos, el otro hubiera tenido que darle 40^{rs}. La segunda equivocacion será, pues, $+ 20$

$$\begin{array}{cc} 6 & 8 \\ -20 & +20 \end{array}$$

Partiendo 280 suma de los productos, por 40 suma de los errores, se hallará que ganó dicho jugador 7 juegos.

439 La práctica de la regla que estamos esplicando se puede abreviar del modo siguiente. Despues de haber supuesto dos números, y determinado las equivocaciones que dán, se multiplicará la diferencia de los dos números por la equivocacion menor, y se partirá el producto por la suma de los errores, si el uno fuese de mas y el otro de menos, ó por su diferencia, si ambas fuesen de un mismo signo. El cociente espresará lo que se le habrá de añadir ó quitar al número que hubiese dado la menor equivocacion. Se añade quando dicho número es el menor de los dos, y son de signo distinto los errores. Se quita quando el espresado número es el menor, y las equivocaciones llevan un mismo signo. La suma ó la resta será el número que se pide. Se egecutará todo lo contrario quando el número que hubiere dado la menor equivocacion, fuere el mayor.

En el último egemplo los dos números supuestos son 6 y 8, cuya diferencia es 2. La multiplico por -20 ó por $+20$, por la que quisiere, pues son iguales las dos equivocaciones, y no se cuenta con sus signos al egecutar la multiplicacion ni la division: parto despues el producto 40 por la suma de las equivocaciones que tambien es 40. El cociente 1 es la correccion que se ha de hacer con uno de los dos números supuestos.

Para hacerla con el número 6 que corresponde á — 20, reparo 1.° que 6 es menor que 8; 2.° que los signos de los errores son distintos. Por consiguiente he de añadir 1 á 6 para sacar el número que se pide.

I. *Dejó un amo dispuesto en su testamento que á los quatro criados que tenia se les den gratificaciones; con la condicion de que al mas antiguo se den* 200rs. *mas que al que se le sigue; á éste* 300rs. *mas que al tercero, y al tercero* 400rs. *mas que al quarto; de manera que la gratificacion del último no sea mas que la quarta parte de la del primero; se pregunta ¿quánto le ha tocado á cada uno?*

Supongo que al primero le han tocado 2000rs. en cuyo supuesto al último le habrán tocado 1100rs. Pero como la quarta parte de 2000 no es mas que 500, la primera equivocacion es de + 600.

Supongamos despues que al primero no le han tocado sino 1600rs. cuya quarta parte es 400, en cuyo supuesto al último no le tocarían mas que 700. Hay, pues, una equivocacion de 300. Multiplico la diferencia de los dos números supuestos

$$\begin{array}{cc} 2000 & 1600 \\ +600 & +300 \end{array}$$

por la menor equivocacion y parto el producto 120000 por 300, diferencia de los dos errores.

Sale el cociente 400. Y como el número que corresponde á la menor equivocacion es el menor, y son unos mismos los signos; he de restar 400 de 1600 para que salga el número 1200 que buscamos.

440 Obra, segun se echa de ver, á tientas el que egecuta una regla de dos falsas posiciones; pero no por esto es despreciable esta regla, pues en muchas ocasiones es un recurso indispensable. Importa por lo mismo manifestar sus fundamentos, y nos valdremos para este fin de un egemplo muy sencillo.

II. *Se piden dos números cuya suma sea* 13, *y la diferencia* 5.

Supongo que el menor sea 2; el mayor será 7, y la suma de los dos 9. Por consiguiente hay en este supuesto — 4 de equivocacion. Supongo despues que el número menor sea 3, el mayor será 8, la suma 11, y la segunda equivocacion — 2. Sé por otra parte que el número menor que busco es 4 (I. 673), y veo que la primera equivocacion se há á la segunda, como la diferencia entre el primer número supuesto y el número que busco, es á la diferencia entre el segundo número supuesto y el mismo número que busco; porque — 4 : — 2 : : 2 : 1. No falta mas sino hallar un método general para sacar en este caso el número incógnito.

Llámole x; a, el primer número supuesto; b, el segundo; c, la primera equivocacion; d, la segunda. Digo, pues, que mientras hubiere proporcion entre los errores y las diferencias indicadas, tendremos $c : d :: x - a : x - b$, y por consiguiente $x = \frac{bc - ad}{c - d}$. Luego se ha de multiplicar cada número supuesto por la equivocacion que corresponde al otro, y dividir la diferencia de los productos por la de los errores, quando llevaren un mismo signo. Si las dos equivocaciones llevaren signos contrarios, debería dividir la suma de los productos por la suma de los errores; porque siendo d, por egemplo, una cantidad negativa, la fórmula será $x = \frac{bc + ad}{c + d}$.

441 Pero quando ninguno de los dos números supuestos es el que se busca, el empeño está en hallar la correccion indispensable para convertirle en el número que se busca. Llamemos y esta correccion; d, la menor equivocacion; b, el número del qual resulta; y lo demás como antes. Es constante que si fuese b menor que x, tendrémos $b + y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$. En este caso $y = \frac{(b - a)d}{c - d}$; pero si fuese b mayor que x, sería $b - y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$, é $y = \frac{(a - b)d}{c - d}$. Quiero decir que en ambos casos se ha de multiplicar la diferencia de los dos números supuestos por la menor equivocacion, y dividir su producto por la diferencia de los errores quando son de un mismo signo, ó por su suma quando llevan signos contrarios. El cociente será siempre la correccion que se busca.

442 Quando se hace uso de esta regla para hallar las raices de las equaciones suelen no salir resultados muy exactos. Esto proviene de que entónces no hay entre las equivocaciones exactamente la misma razon que entre las

diferencias, siendo así que la regla se funda en la igualdad de estas razones. Por consiguiente el resultado se acercará mas ó menos al verdadero, segun que la razon de las equivocaciones se arrimare mas ó menos á las de las diferencias. Esta es la razon por que en la resolucion de las equaciones (272) se han de substituir en lugar de x dos números que discrepen poco del que se busca.

443 Cuestion X. *He recibido un oficial holgazan y para animarle al trabajo le prometo un peso por cada dia que trabajare, con la condicion de que por cada dia que holgare no solo no le daré nada, sino que él me habrá de pagar* 8^{rs}. *Al cabo de* 15 *dias le ajusto la cuenta, y hallo que no le he de dar mas que* 110^{rs}. *¿Quantos dias ha trabajado?*

Llamo x el número de los dias que ha trabajado, en cuyo supuesto los dias que ha holgado serán $15 - x$. Lo que le debo por los x dias que ha trabajado es $15x$, y lo que él me debe por los $15 - x$ que ha dejado de trabajar será $8(15 - x)$, y como por la cuestion esta última cantidad rebajada de la primera importa 110^{rs}, tendré $15x - 120 + 8x = 110$; luego $23x = 230$, y $x = 10$.

Vease ahora como resuelve el Álgebra las cuestiones con mucha mas brevedad que la Arismética.

444 Cuestion XI. *Declarar los fundamentos de la regla de interés.*

La regla de interés se dirige á determinar lo que se ha de pagar por alguna porcion de dinero prestado con ciertas condiciones.

Como estas condiciones pueden variar al infinito, hay casos que empeñan en cálculos sumamente complicados. Nosotros nos ceñiremos aqui á considerar en general estas cuestiones.

I. *Un usurero ha prestado* 15600rs. *á* 8 *por ciento cada año ¿quanto se le deberá dár al cabo de cinco años para pagarle el capital y los intereses caidos?*

Llamemos p el capital de 15600rs; t, los cinco años, esto es, el tiempo que corre el interés; r, lo que dá de renta 1 real en un año, ó en general en el tiempo que 100rs. dán 8 de interés; s, la suma á que asciende el capital con los intereses. Para hallar el valor de r diremos: ya que 100 dán 8 de interés ¿quanto dará 1? esto es $100 : 8 :: 1 : r = 0,08$.

Sentado esto, si un real da el interés r en un año, ¿qué intereses dará el capital p en el mismo tiempo? ó $1 : r :: p : x = pr$. Pero si el interés x es pr al cabo de un año, al cabo del tiempo t será prt; porque si en un año dá el capital pr interés, en t años ha de dar prt, pues $1 : pr :: t : prt$. Por consiguiente si sumamos el capital p con el interés prt, será en general $s = p + prt$, de donde sacaremos $p = \frac{s}{1+rt}$; $r = \frac{s-p}{pt}$; $t = \frac{s-p}{pr}$.

Si substituimos los valores de p, r y t quales los supone el egemplo propuesto, en la fórmula que espresa el valor de s, sacaremos $s = 15600 + 15600 \times 0,08 \times 5 = 21840$.

Si en el supuesto de haberse pagado al cabo de cinco años por el capital y los intereses á 8 por ciento la suma de 21840^{rs} se nos preguntará qual era el capital, hubiéramos hecho las substituciones en la fórmula $p = \frac{s}{1+rt}$, y hubiéramos hallado $p = 15600^{rs}$. En una palabra, las fórmulas que hemos sacado manifiestan, que en conociendo tres de estas quatro cosas el capital, la suma, el interes de 1 real, ó el tiempo, se hallará siempre la quarta.

II. *Un negociante tiene que pagar á otro cien doblones cada año; pero como le ha de incomodar cumplir con su acreedor, consigue de este que no le pida nada durante ocho años; ofreciéndole que le pagará todos los atrasos con el interes, á razon de 5 por 100 ¿quánto le habrá de pagar?*

Llamarémos a los cien doblones, ó en general qualquiera renta, pension ó juro, que se paga anualmente; r, el interes de 1 doblon en un año; t, el tiempo, al cabo del qual se pagarán los intereses y atrasos, cuya suma representará s.

Considero que pues la renta no se paga sino al cabo del año, el negociante no deberá interés alguno por el primer año; pero al cabo del segundo año deberá ar por los intereses, pues $1 : r :: a : ar$; al cabo del tercer año deberá $2ar$ por los intereses, y asi prosiguiendo hasta el fin del último año, que los intereses montarán $ar(t - 1)$.

Pero estos intereses forman una progresion arismética, cuyo primer término es cero, el último $ar(t - 1)$, y t el número de los términos. Luego su suma será (169) $\frac{t(t-1)ar}{2}$; cuya suma añadida á la renta, compondrá la suma de los atrasos y de los intereses. Luego $s = art\left(\frac{t-1}{2}\right) + at$ que dá $a = \frac{2s}{[r(t-1)+2]t}$; $r = \frac{2s-2at}{at(t-1)}$; $t = \sqrt{\left[\frac{2s}{ar} + \left(\frac{2-r}{2r}\right)^2\right]} + \frac{2-r}{2r}$.

Si hacemos en la fórmula que expresa el valor de s las substituciones correspondientes al caso propuesto, sacarémos $s = \left(\frac{100 \times 8 \times 0{,}05}{2}\right) \times 7 + 800 = 940$; y si conociéramos r, s, t, la fórmula $a = \frac{2s}{[r(t-1)+2]t}$ daria el valor de a.

445 Las cuestiones que acabamos de resolver pertenecen á la regla que llaman de *interés simple.* Las hay que pertenecen á las reglas de interés compuesto; y por *interés compuesto* entendemos el que se paga por el capital y sus intereses, quando no se pagan al tiempo que toca. Aunque el interés compuesto está prohibido, pueden ocurrir casos en que sea lícito: tales son los dos que vamos á proponer.

I. *Parte del caudal de un pupilo consiste en una suma de 20000 pesos que su tutor ha puesto á ganancias á 5 por 100. Al cabo de un año el sugeto que tenia prestada esta cantidad la vuelve pagando el interés estipulado. El tutor halla al instante proporcion de emplear dicha cantidad al mismo interés, y forma un nuevo capital con los 20000 pesos y el interés que dieron en el primer año, y coloca este nuevo capital. Emplea del mismo modo á principios del tercer año el interés del segundo año, y prosigue del mismo modo por espacio de seis años. Se pregunta ¿qué es lo que ha de dar á su pupilo por esta parte de su administracion?*

Hagamos $p = 20000$; $t = 6$ años; $s =$ la suma que debe el tutor; $r =$ el interés simple de un peso; $q =$ 1Pe $+ r =$ un peso con el interés que dá. Sacarémos el valor de q por medio de esta proporcion. Si 100 han dado 105 al cabo de un año, quánto dará 1 Pe, ó 100: 105 :: 1 : $q = 1,05$.

Es evidente que si 1 Pe dá q en un año, q dará q^2 en el segundo año; porque $1 : q :: q : q^2$. Luego la suma que se ha de pagar al cabo de dos años por 1 Pe, y su interés compuesto será q^2: será q^3 al cabo de tres años, y q^t al cabo de t años. Pero una vez que 1 Pe dá q^t en un tiempo t, pPe darán pq^t en el mismo tiempo. Tendrémos, pues, $s = pq^t = 20000 \times (1,05)^6 = 20000 \times 1,3401 =$ 26802 Pe, y es lo que deberá el tutor con muy corta diferencia.

La fórmula $s = pq^t$ dá 1.° $p = \frac{s}{q^t}$. 2.° $q = \sqrt[t]{\frac{s}{p}}$, ó $Lq = \frac{Ls - Lp}{t}$. 3.° $t = \frac{Ls - Lp}{Lq}$. Damos estas fórmulas porque los logaritmos facilitan mucho la resolucion de estas cuestiones, y las hay que no se pueden resolver por otro medio.

446 II. *Un banquero tiene que cobrar cada año una renta de 2400 pesos, y desde principios del año de 1769 se conviene en no cobrarla con la condicion de que ganará un 4 por 100 cada año; por consiguiente al fin de 1769 se le deberán los 2400 pesos, y 96 pesos mas por los intereses. Su ánimo es proseguir colocando así al mismo interés por espacio de ocho años la renta del año antecedente con los intereses de los demas años ¿quánto le tocará cobrar al cabo de dicho tiempo?*

Sea $a = 2400$ Pe, $t = 8$ años, $r = 0,04 =$ el interes de un peso en un año, $q = 1$ Pe $+ r = 1,04$, $s =$ la suma que se pide, será a lo que se le debe al banquero á fines de 1769; $2a + ar = a + aq =$ lo que se le deberá á fines de 1770, $a + aq + aq^2 =$ lo que se le deberá á fines de 1771, y prosiguiendo á este tenor hasta que al cabo de un número t de años se le deberá $a + aq + aq^2 \ldots . aq^{t-1}$. Pero la suma de esta progresion es (174) $\frac{q \times q^{t-1} - 1}{q - 1} \times a = \frac{q^t - 1}{r} \times a$. Por consiguiente la suma debida al cabo de t años, está generalmente espresada por $s = \frac{q^t - 1}{r} \times a$, cuya fórmula dá en el caso actual $s = \frac{(1,04)^8 - 1}{0,04} \times 2400 = 22140$ Pe con muy corta diferencia.

La misma fórmula dá tambien $a = \frac{rs}{q^t - 1}$; $t = \frac{L\left(\frac{rs}{a} + 1\right)}{Lq}$, y $\frac{s}{a} q - q^t = \frac{s - a}{a}$, despues de substituido $q - 1$ en lugar de r. Esta última equacion dará á lo menos un valor aproximado de q, dado caso que no tuviere divisor alguno comensurable. Se sacará, pues, de ella el valor de r, el qual multiplicado por 100 manifestará el interes, siempre que fueren conocidas a, s y t.

Cuestiones algebraicas.

447 Cuestion I. *Dar para representar* $(a + b)^m$ *una fórmula mas sencilla que la que dimos antes* (99).

Ya que $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.\overline{m-1}}{2}a^{m-2}b^2$ $+$ &c. inferirémos que $(P+PQ)^m = P^m + mP^mQ +$ $\frac{m.\overline{m-1}}{2}P^mQ^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}P^mQ^3 +$ &c. Luego si A representare el primer término P^m, el segundo será mAQ; y si B representare el segundo, el tercero será $\frac{m-1}{2}BQ$; y si C representare el tercero, el quarto será $\frac{m-2}{3}CQ$ &c. Tendrémos, pues, $(P+PQ)^m =$

$$\overset{A}{P^m} + \overset{B}{mAQ} + \overset{C}{\frac{m-1}{2}BQ} + \overset{D}{\frac{m-2}{3}CQ} + \overset{E}{\frac{m-3}{4}DQ} + \text{\&c.}$$

Se viene á los ojos que esta fórmula es mas sencilla que la primera (99), pues el quinto término, por egemplo, se saca sobre la marcha con multiplicar el término D que ya está calculado quando se calcula el quinto, por $\frac{m-3}{4}Q$. Es muy importante reparar que la cantidad Q es el segundo término del binomio dado dividido por el primero P.

Si quisiera aplicar esta fórmula para hallar la quarta potencia de $2a+3z$, sería $m=4$, $P=2a$, $PQ=$ $3z$; luego $Q=\frac{3z}{2a}$. Por consiguiente

$P^m = 16a^4$; $mAQ = 4 \times 16a^4 \times \frac{3z}{2a} = 96a^3z$;

$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{3}{2} \times 96a^3z \times \frac{3z}{2a} = 216a^2z^2$;

$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{2}{3} \times 216a^2z^2 \times \frac{3z}{2a} = 216az^3$;

$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{4} \times 216az^3 \times \frac{3z}{2a} = 81z^4$.

Luego $(2a+3z)^4 = 16a^4 + 96a^3z + 216a^2z^2 +$ $216az^3 + 81z^4$.

448 Si el esponente de la potencia á que se ha de elevar el binomio $P+PQ$ fuese $\frac{m}{n}$, tendriamos $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} =$

$$\begin{array}{ccccccc} A & & B & & C & & D \\ P^{\frac{m}{n}} & + \frac{m}{n} & AQ & + \frac{m-n}{2n} & BQ & + \frac{m-2n}{3n} & CQ + \&c. \end{array}$$

Cuya fórmula nos servirá para los usos que manifiestan los egemplos siguientes.

I. Para hallar el valor de $\sqrt{(rr-xx)}$ ó elevar $rr-xx$ á la potencia cuyo esponente es $\frac{1}{2}$, por ser $\sqrt{(rr-xx)} = (rr-xx)^{\frac{1}{2}}$ (83), haria $P = rr$, $Q = \frac{-xx}{rr}$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; por consiguiente $(rr-xx)^{\frac{1}{2}} = r + \frac{1}{2} A \times \frac{-xx}{rr} - \frac{1}{4} B \times \frac{-xx}{rr} - \frac{3}{6} C \times \frac{-xx}{rr} - \frac{5}{8} D \times \frac{-xx}{rr}$ &c. $= r - \frac{xx}{2rr} A + \frac{xx}{4rr} B + \frac{3xx}{6rr} C + \frac{5xx}{8rr} D +$ &c. esto es, con substituir los valores de A, B, C, &c, $(rr-xx)^{\frac{1}{2}} = r - \frac{xx}{2r} - \frac{x^4}{8r^3} - \frac{x^9}{16r^5} - \frac{5x^8}{128r^7}$ &c.

II. Si hubiéramos de sacar el valor de $\frac{rr}{r+x}$ ó $rr \times (r+x)^{-1}$, sería $P = r$, $Q = \frac{x}{r}$, $\frac{m}{n} = -1$, ó $m = -1$, $n = 1$. Por consiguiente $(r+x)^{-1} = r^{-1} - 1 A \times \frac{x}{r} - 1 B \times \frac{x}{r} - 1 C \times \frac{x}{r} - 1 D \times \frac{x}{r}$ &c. $= \frac{1}{r} - \frac{x}{r} A - \frac{x}{r} B - \frac{x}{r} C$ &c. Y $rr \times (r+x)^{-1} = rr \times (\frac{1}{r} - \frac{x}{rr} + \frac{xx}{r^3} - \frac{x^3}{r^4}$ &c.) esto es $\frac{rr}{r+x} = r - x + \frac{xx}{r} - \frac{x^3}{r^2} + \frac{x^4}{r^3}$ &c.

III. Quando ocurra valuar $\frac{1}{\sqrt{(2rx-xx)}} = (2rx-xx)^{-\frac{1}{2}}$, tendrémos $P = 2rx$, $Q = -\frac{x}{2r}$, $m = -1$, $n = 2$. Será, pues, en virtud de esto $(2rx-xx)^{-\frac{1}{2}} = (2rx)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} A \times \frac{-x}{2r} - \frac{3}{4} B \times \frac{-x}{2r} - \frac{5}{6} C \times \frac{-x}{2r} - \frac{7}{8} D \times \frac{-x}{2r}$ &c. $= \frac{1}{\sqrt{2rx}} + \frac{x}{4r} A + \frac{3x}{8r} B + \frac{5x}{12r} C + \frac{7x}{16r} D +$ &c. $= \frac{1}{\sqrt{2rx}} + \frac{x}{4r\sqrt{2rx}} + \frac{3xx}{32rr\sqrt{2rx}} +$ &c. $= \frac{1}{\sqrt{2rx}} \times (1 + \frac{x}{4r} + \frac{3xx}{4.8r^2} + \frac{3.5x^3}{4.8.12r^3} + \frac{3.5.7x^4}{4.8.12.16r^4} +$ &c.)

IV. Para sacar la raiz cúbica de $1 - x^3$ cuya espresion es $\sqrt[3]{(1-x^3)} = (1-x^3)^{\frac{1}{3}}$, haré $P=1$, $Q=-x^3$, $m=1$, $n=3$. Luego $(1-x^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} A \times -x^3 - \frac{2}{6} B \times -x^3 - \frac{5}{9} C \times -x^3 - \frac{8}{12} D \times -x^3 - \frac{11}{15} E \times -x^3$ &c. $= 1 - \frac{x^3}{3} A + \frac{x^3}{3} B + \frac{5x^3}{9} C + \frac{2x^3}{3} D + \frac{11x^3}{15} E$ &c. esto es $\sqrt[3]{(1-x^3)} = 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{9} - \frac{5x^9}{81} - \frac{10x^{12}}{243} - \frac{22x^{15}}{729}$ &c.

V. Si quisiera valuar $\sqrt[3]{\left[\frac{aa}{(aa+xx)^2}\right]} = a^{\frac{2}{3}} \times (aa+xx)^{-\frac{2}{3}}$, sería $P=aa$, $Q=\frac{xx}{aa}$, $m=-2$, $n=3$. Sería, pues, $(aa+xx)^{-\frac{2}{3}} = aa^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} A \frac{xx}{aa} - \frac{5}{6} B \frac{xx}{aa} - \frac{8}{9} C \frac{xx}{aa} - \frac{11}{12} D \frac{xx}{aa}$ &c. $= \frac{1}{a^{1\frac{1}{3}}} - \frac{2xx}{3a^{3\frac{1}{3}}} + \frac{5x^4}{9a^{5\frac{1}{3}}} - \frac{40x^6}{81a^{7\frac{1}{3}}} + \frac{110x^8}{243a^{9\frac{1}{3}}}$ &c. $= \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \times \left(\frac{1}{a} - \frac{2x^2}{3a^3} + \frac{5x^4}{9a^5} - \frac{40x^6}{81a^7} + \frac{110x^8}{243a^9}\right.$ — &c.) que multiplicando por a la cantidad que está dentro del paréntesis, y dividiendo por a la que está fuera, saldrá $= \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} \left(1 - \frac{2x^2}{3a^2} + \frac{5x^4}{9a^4} - \frac{40x^6}{81a^6} + \frac{110x^8}{243a^8}\right.$ &c).

Por consiguiente $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{(aa+xx)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{aa}} \times \left(1 - \frac{2x^2}{3a^2} + \frac{5x^4}{9a^4} - \frac{40x^6}{81a^6} + \frac{110x^8}{243a^8}\right.$ &c.)

VI. Sacarémos la raiz quinta de $aa-xx$, ó el valor de $(aa-xx)^{\frac{1}{5}}$, haciendo $P=aa$, $Q=\frac{-xx}{aa}$, $m=1$, $n=5$, Será pues $(aa-xx)^{\frac{1}{5}} = aa^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} A \times \frac{-xx}{aa} - \frac{4}{10} B \times \frac{-xx}{aa} - \frac{9}{15} C \times \frac{-xx}{aa} - \frac{14}{20} D \times \frac{-xx}{aa} = a^{\frac{2}{5}} - \frac{xx}{5aa} A + \frac{2xx}{5aa} B + \frac{3xx}{5aa} C + \frac{7xx}{10aa} D$ &c. $= a^{\frac{2}{5}} \times \left(1 - \frac{xx}{5aa} - \frac{2x^4}{25a^4} - \frac{6x^6}{125a^6} - \frac{21x^8}{625a^8}\right.$ &c.)

VII. Para hallar el valor de $(a+x)\times(a-x)^{\frac{1}{4}}$ empezaremos buscando el valor de $(a-x)^{\frac{1}{4}}$ en cuyo supuesto será $P=a$, $Q=\frac{-x}{a}$, $m=1$, $n=4$. Luego $(a-x)^{\frac{1}{4}}$ $=a^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}A\times\frac{-x}{a}-\frac{3}{8}B\times\frac{-x}{a}-\frac{7}{12}C\times\frac{-x}{a}$ &c. $=$ $a^{\frac{1}{4}}-\frac{x}{4a}A+\frac{3x}{8a}B+\frac{7x}{12a}C$ &c. $=a^{\frac{1}{4}}-\frac{x}{4a^{\frac{3}{4}}}-\frac{3x^2}{32a^{\frac{7}{4}}}$ $-\frac{7x^3}{128a^{\frac{11}{4}}}$ &c. Multiplicando esta última cantidad por $a+x$ sale

$$a^{\frac{5}{4}}-\frac{a^{\frac{1}{4}}x}{4}-\frac{3x^2}{32a^{\frac{3}{4}}}-\frac{7x^3}{128a^{\frac{7}{4}}}\text{\&c.}$$

$$+a^{\frac{1}{4}}x-\frac{x^2}{4a^{\frac{3}{4}}}-\frac{3x^3}{32a^{\frac{7}{4}}}\text{\&c.}$$

Luego $(a+x)(a-x)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{5}{4}}+\frac{3a^{\frac{1}{4}}x}{4}-\frac{11x^2}{32a^{\frac{3}{4}}}-\frac{19x^3}{128a^{\frac{7}{4}}}$ &c.

$$=\sqrt[4]{a}\left(a+\tfrac{3}{4}x-\frac{11x^2}{32a}-\frac{19x^3}{128aa}\text{ \&c.}\right)$$

VIII. Si ocurriese valuar $\sqrt{\left(\frac{aa+xx}{aa-xx}\right)}$, valuaremos primero el numerador $(aa+xx)^{\frac{1}{2}}$ será $P=aa$, $Q=\frac{xx}{aa}$, $m=1$, $n=2$, y $(aa+xx)^{\frac{1}{2}}$ será $=a+\frac{1}{2}A\times\frac{xx}{aa}$ $-\frac{1}{4}B\times\frac{xx}{aa}-\frac{3}{6}C\times\frac{xx}{aa}$ &c. $=a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$ &c.

Despues valuaré $\frac{1}{\sqrt{(aa-xx)}}=(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$, y será $P=aa$, $Q=\frac{-xx}{aa}$, $m=-1$, $n=2$, y será $(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}A\times\frac{-xx}{aa}-\frac{3}{4}B\times\frac{-xx}{aa}-\frac{5}{6}C$

$\times \frac{-xx}{aa}$ &c. $= \frac{1}{a} + \frac{xx}{2a^3} + \frac{3x^4}{8a^5} + \frac{5x^6}{16a^7}$ &c. Luego $\sqrt{\left(\frac{aa+xx}{aa-xx}\right)} = (a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$ &c.$) \times (\frac{1}{a} + \frac{xx}{2a^3} + \frac{3x^4}{8a^5} + \frac{5x^6}{16a^7}$ &c.$) = 1 + \frac{xx}{a^2} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^6}$ &c.

IX. Tambien hallaría por este camino el valor de $\frac{ax}{aa-ax+xx}$, del mismo modo que si fuese un binomio el denominador. Para cuyo fin haré $y = ax - xx$, y será $aa - ax + xx = aa - y$, y será $\frac{ax}{aa-ax+xx} = ax \times (aa-y)^{-1}$. Será, pues, $P = aa$, $Q = \frac{-y}{aa}$, $m = -1$, $n = 1$, y $(aa-y)^{-1} = \frac{1}{aa} - 1A \times \frac{-y}{aa} - 1B \times \frac{-y}{aa} - 1C \times \frac{-y}{aa} - 1D \times \frac{-y}{aa}$ &c. $= \frac{1}{aa} + \frac{y}{aa}A + \frac{y}{aa}B + \frac{y}{aa}C + \frac{y}{aa}D$ &c. $= \frac{1}{aa} + \frac{y}{a^4} + \frac{y^2}{a^6} + \frac{y^3}{a^8} + \frac{y^4}{a^{10}}$ &c. $= \frac{1}{aa} + \frac{ax-xx}{a^4} + \frac{(ax-xx)^2}{a^6} + \frac{(ax-xx)^3}{a^8} + \frac{(ax-xx)^4}{a^{10}}$ &c. Despues de substituido en lugar de y y de sus potencias $ax - xx$ y sus potencias correspondientes, el segundo miembro de la última equacion se reduce á

$$
\begin{array}{llllll}
\frac{1}{aa} + \frac{x}{a^3} - \frac{xx}{a^4} & & & & & \\
 & + \frac{xx}{a^4} & - \frac{2x^3}{a^5} & + \frac{x^4}{a^6} & \text{\&c.} \\
 & & + \frac{x^5}{a^5} & - \frac{3x^4}{a^6} & \text{\&c.} \\
 & & & + \frac{x^4}{a^6} & \text{\&c.} \\
= \frac{1}{aa} + \frac{x}{a^3} & * & - \frac{x^3}{a^5} & - \frac{x^4}{a^6} & \text{\&c.}
\end{array}
$$

y $\frac{ax}{aa-ax+xx} = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} * - \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^5}{a^5}$ &c.

449 Cuestion II. *Elevar una serie dada á una potencia qualquiera.*

Es sumamente dificultosa la resolucion general de esta cuestion: quiero decir, que hay mucha dificultad para sacar una fórmula general que esprese una potencia qualquiera de una serie. No obstante procurarémos dar esta fórmula en el tomo siguiente, donde declararémos los principios del cálculo que nos facilitará sacarla, y despues enseñarémos tambien como dada una serie se puede hallar la cantidad radical que representa.

Por ahora nos contentarémos con poner aquí algunas fórmulas particulares que son de muchísimo recurso en algunos casos de los mas comunes. Para cuyo fin supondrémos que la serie propuesta es $A+B+C+D+E$ &c. $=y$, en cuyo supuesto será

$$\begin{aligned} y^2 = {} & A^2+2AB+2AC+2AD+2AE+2AF+2AG+2AH \text{ \&c.} \\ & +BB+2BC+2BD+2BE+2BF+2BG \\ & +CC+2CD+2CE+2CF \\ & +DD+2DE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^3 = {} & A^3+3A^2B+3A^2C+3A^2D+3A^2E+3A^2F+3A^2G \text{ \&c.} \\ & +3ABB+6ABC+6ABD+6ABE+6ABF \\ & +B^3+3ACC+6ACD+6ACE \\ & +3BBC+3BBD+6BCD \\ & +3BCC+3ADD \\ & +3BBE \\ & +C^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^4 = {} & A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+6A^2C^2+4B^3C \text{ \&c.} \\ & +4A^3C+12A^2BC+12AB^2C+12ABC^2 \\ & +4A^3D+12A^2BD+12AB^2D \\ & +4A^3E+12A^2CD \\ & +B^4+12A^2BE \\ & +4A^3F \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllll}
y^5 = A^5 + 5A^4B & + 10A^3B^2 & + 10A^2B^3 & + 5AB^4 & + B^5 \text{ \&c.} \\
 & + 5A^4C & + 20A^3BC & + 30A^2B^2C & + 20AB^3C \\
 & & + 5A^4D & + 20A^3BD & + 30A^2BC^2 \\
 & & & + 10A^3CC & + 30A^2B^2D \\
 & & & + 5A^4E & + 20A^3CD \\
 & & & & + 20A^3BE \\
 & & & & + 5A^4F
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
y^6 = A^6 + 6A^5B & + 15A^4B^2 & + 20A^3B^3 & + 15A^2B^4 \text{ \&c.} \\
 & + 6A^5C & + 30A^4BC & + 60A^3B^2C \\
 & & + 6A^5D & + 30A^4BD \\
 & & & + 15A^4CC \\
 & & & + 6A^5E
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
y^7 = A^7 + 7A^6B & + 21A^5B^2 & + 35A^4B^3 & + 35A^3B^4 \text{ \&c.} \\
 & + 7A^6C & + 42A^5BC & + 105A^4B^2C \\
 & & + 7A^6D & + 42A^5BD \\
 & & & + 21A^5CC \\
 & & & + 7A^6E
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
y = A^8 + 8A^7B & + 28A^6B^2 & + 56A^5B^3 & + 70A^4B^4 \text{ \&c.} \\
 & + 8A^7D & + 56A^6BC & + 168A^5B^2C \\
 & & + 8A^7C & + 56A^6BD \\
 & & & + 28A^6CC \\
 & & & + 8A^7E
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
y^9 = A^9 + 9A^8B + 36A^7B^2 + 84A^6B^3 + 126A^5B^4 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\qquad\quad + 9A^8C \quad + 72A^7BC + 252A^6B^2C \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 9A^8D \quad + 72A^7BD \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 36A^7CC \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 9A^8E
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
y^{10} = A^{10} + 10A^9B + 45A^8B^2 + 120A^7B^3 + 210A^6B^4 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\qquad\quad + 10A^9C \quad + 90A^8BC + 360A^7B^2C \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 10A^9D \quad + 90A^8BD \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 45A^8CC \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 10A^9E
\end{array}
$$

I. Si hubiéramos de cubar $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ &c. sería $A = a$, $B = bx$, $C = cx^2$, $D = dx^3$, $E = ex^4$ &c. y haciendo las substituciones correspondientes en la fórmula que espresa y^3, hallariamos que el cubo de la serie propuesta

$$
\begin{array}{l}
= a^3 + 3aabx + 3aacx^2 + 3aadx^3 + 3aaex^4 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\qquad + 3abbx^2 + 6abcx^3 + 6abdx^4 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b^3x^3 \quad + 3accx^4 \text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 3bbcx^4 \text{ \&c.}
\end{array}
$$

II. Para formar la quarta potencia de $x - \frac{2}{x} + \frac{p}{x^3} - \frac{2cd}{x^5}$, acudiré á la fórmula que es igual á y^4, y haciendo en ella las substituciones correspondientes al caso actual en que $x = A$, $B = -\frac{2}{x}$, $C = \frac{p}{x^3}$, $D = -\frac{2cd}{x^5}$, sacaré

$$y^4 = x^4 - 4x^3 \tfrac{2}{x} + 6xx \times \tfrac{4}{xx} - 4x \times \tfrac{8}{x^3} + 4x^3 \times \tfrac{p}{x^3} - 12xx \times \tfrac{2p}{x} - 4x^3 \times \tfrac{2cd}{x^5} \text{ \&c.}$$

$$= x^4 - 8x^2 + 24 + 4p - \tfrac{32+24p+8cd}{xx} \text{ \&c.}$$

III. Para elevar $2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{7}{2}} + 5x^{\frac{9}{2}} - 6x^{\frac{11}{2}}$ &c. á la quinta potencia, haré uso de la fórmula que representa y^5, y egecutando en ella las substituciones correspondientes sacaré

$$y^5 = 32x^{\frac{5}{2}} + \left.\begin{array}{l} 80x^{\frac{4}{2}} \times 3x^{\frac{5}{2}} + 80x^{\frac{3}{2}} \times 9x^{\frac{10}{2}} - 160x^{\frac{3}{2}} \times 12x^{\frac{12}{2}} \\ + 80x^{\frac{4}{2}} \times -4x^{\frac{7}{2}} + 80x^{\frac{4}{2}} \times 5x^{\frac{9}{2}} \\ - 80x^{\frac{4}{2}} \times 6x^{\frac{11}{2}} \end{array}\right\} \text{\&c.}$$

$$= 32x^{\frac{5}{2}} + 240x^{\frac{9}{2}} + 720x^{\frac{13}{2}} - 1920x^{\frac{15}{2}} - 480x^{\frac{15}{2}} \text{ \&c.} - 320x^{\frac{11}{2}} + 400x^{\frac{13}{2}};$$

esto es $y^5 = 32x^{\frac{5}{2}} + 240x^{\frac{9}{2}} + 320x^{\frac{11}{2}} + 720x^{\frac{13}{2}} - 1920x^{\frac{15}{2}} + 400x^{\frac{13}{2}} - 480x^{\frac{15}{2}}$

ó $y^5 = 32x^{\frac{5}{2}} + 240x^{\frac{9}{2}} - 320x^{\frac{11}{2}} - 1120x^{\frac{13}{2}} - 2400x^{\frac{15}{2}}$ &c.

Al tiempo de hacer en la fórmula general que espresa el valor de y^5 las substituciones correspondientes, omitimos los resultados que darian la primera cantidad del quarto término de la fórmula, y las quatro primeras cantidades del quinto término de la misma fórmula, con la mira de omitir en la serie que buscamos los términos en los quales el esponente de x sería mayor que $\frac{15}{2}$.

IV. Si hubiera de sacar la octava potencia de $1 - 2x + x^3$ acudiria á la fórmula que representa y^8, y consideraría que como la cantidad propuesta no tiene mas que tres términos representados por A,B,C, todos los demás son o, será $D=0$, $E=0$, $F=0$ &c. executando finalmente las substituciones correspondientes á estos supuestos, resultaria

$$y^8=1-16x+28\times 4x^2-56\times 8x^3+70\times 16x^4 \text{ \&c.}$$
$$+8x^3-56\times 2x^4+168\times 4x^5$$
$$+28x^6$$
$$=1-16x+112x^2-448x^3+1120x^4$$
$$+8x^3-112x^4+672x^5 \quad \text{\&c.}$$
$$+28x^6$$
$$y^8=1-16x+112x^2+8x^3 \quad -112x^4$$
$$-448x^3+1120x^4,$$

esto es $y^8=1-16x+112x^2-440x^3-1008x^4$, &c.
cuyo valor se ha calculado en el supuesto de ser x muy pequeña: si fuese x muy grande, x^3 habria de ser el primer término de la serie, que se escribirá así

$$x^3+0-2x+1+0 \text{ \&c.}$$

cuya forma manifiesta que $B=0$, y que lo son tambien E, F &c. Executando, pues, las substituciones correspondientes á estos supuestos, sacarémos que

$$y^8=x^{24}+0-8x^{21}\times 2x+8x^{21}\times 1+28x^{18}\times 4xx$$
$$\text{ó } y^8=x^{24}-16x^{22}+8x^{21}+112x^{20} \text{ \&c.}$$

450 Cuestion III. *Abreviar una serie, ó darla una forma mas sencilla.*

Todos los cálculos matemáticos se dirigen á expresar en números las cantidades calculadas, ó los resultados de las operaciones; porque solo con los números podemos conocer exactamente los valores de las cantidades ó de sus razones. Se han, pues, de reducir tambien á números las series, cuya reduccion es dificultosa quando la serie es muy compuesta ó tiene muchos factores. Pero quando muchos de los factores de un término lo son tambien de los términos siguientes, se vence mucha parte de esta dificultad, introduciendo en los términos siguientes el término antecedente en lugar de los factores que le son equivalentes. Para cuya operacion daremos dos reglas.

451 *Regla I.* Representemos por A, B, C, D &c. los términos de una serie dada. Para hallar sus coeficientes, divídase cada término por el que le precede, el cociente será el coeficiente del expresado término. Resultará despues de egecutada la substitucion correspondiente una serie igual á la primera, cuya expresion será menos complicada.

$$\begin{array}{lllll} A & B & C & D & E \end{array}$$

I. Si $z + \frac{z^3}{2a^2} + \frac{3z^5}{2.4a^4} + \frac{3.5z^7}{2.4.6a^6} + \frac{3.5.7z^9}{2.4.6.8a^8}$ &c. $= y$

$\frac{B}{A} = \frac{zz}{2aa} =$ al coeficiente de B.

$\frac{C}{B} = \frac{3z^2}{4a^2} =$ al coeficiente de C.

$\frac{D}{C} = \frac{5z^2}{6a^2} =$ al coeficiente de D &c.

Se transforma con esto la serie en

$z + \frac{zz}{2aa} A + \frac{3z^2}{4aa} B + \frac{5z^2}{6aa} C + \frac{7z^2}{8aa} D$ &c. $= y$.

II. Si fuese $1 + \frac{u}{1.3} + \frac{u^2}{1.3.5} + \frac{u^3}{3.5.7} + \frac{u^4}{5.7.9} + \frac{u^5}{7.9.11} = y$; sería $\frac{B}{A} = \frac{u}{3}$; $\frac{C}{B} = \frac{u}{5}$; $\frac{D}{C} = \frac{u}{7}$; $\frac{E}{D} = \frac{3u}{9}$; $\frac{F}{E} = \frac{5u}{11}$ &c. y la serie, despues de simplificada, sería $1 + \frac{u}{3} A + \frac{u}{5} B + \frac{u}{7} C + \frac{3u}{9} D + \frac{5u}{11} E + \frac{7u}{13} F$ &c. $= y$.

III. Si la serie propuesta fuese $x - \frac{3x^2}{1.2} - \frac{5x^3}{1.2.3.4} -$

$\frac{7x^4}{1.2.3.4.5.6}$ &c. sería $\frac{B}{A} = -\frac{3x}{1.2}$; $\frac{C}{B} = \frac{5x}{3.3.4}$; $\frac{D}{C} = \frac{7x}{5.5.6}$ &c. y la serie se transformaría en $x - \frac{3x}{2}A + \frac{5x}{3.3.4}B + \frac{7x}{5.5.6}C$ &c.

IV. Para reducir la serie $bz - \frac{bz^3}{2.3a^2} - \frac{bz^5}{5.2.4a^4} - \frac{bz^7}{7.2.4.6a^6} - \frac{bz^9}{9.2.4.6.8a^8}$ &c. $= d$, sería $\frac{B}{A} = -\frac{zz}{2.3aa}$; $\frac{C}{B} = \frac{3zz}{4.5aa}$; $\frac{D}{C} = \frac{5zz}{6.7aa}$ &c. y la serie simplificada seria

$$bz - \frac{zz}{2.3aa}A + \frac{3z^2}{4.5aa}B + \frac{5zz}{6.7aa}C + \frac{7zz}{8.9aa}D \text{ \&c.}$$

452 *Regla II.* Si algun factor ó algunos factores no se halláren en todos los términos, se omitirán, y despues de reducida la serie en virtud de la primera regla, se restituirán en sus términos respectivos los factores que se hubieren omitido.

I. Supongamos que se haya de simplificar la serie

$$x - \frac{3x^2}{1.2} - \frac{5x^3}{1.2.3.4} - \frac{7x^4}{1.2.3.4.5.6} - \frac{9x^5}{1.2.3.4.5.6.7.8} \text{ \&c.} = y.$$

Omitirémos todos los factores numéricos de los numeradores, cuya preparacion transforma la serie propuesta en

$$x - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3.4} - \frac{x^4}{1.2.3.4.5.6} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5.6.7.8} \text{ \&c.}$$

Aplicándola á esta serie la primera regla, se reducirá á

$$x - \frac{x}{1.2}A + \frac{x}{3.4}B + \frac{x}{5.6}C + \frac{x}{7.8}D \text{ \&c.}$$

y volviendo á su lugar los factores omitidos, tendrémos

$$x - \frac{x}{1.2}A \times 3 + \frac{x}{3.4}B \times 5 + \frac{x}{5.6}C \times 7 + \frac{x}{7.8}D \times 9 \text{ \&c.} = y.$$

II. En la serie

$$bz - \frac{bz^3}{3.2aa} + \frac{bz^5}{5.2.4a^4} - \frac{bz^7}{7.2.4.6a^6} + \frac{bz^9}{9.2.4.6.8a^8} \text{ \&c.} = y.$$

Omitiré los factores 3, 5, 7, 9 &c. que no son comunes á todos los términos, y la serie será

$$bz - \frac{bz^3}{2aa} + \frac{bz^5}{2.4a^4} - \frac{bz^7}{2.4.6a^6} + \frac{bz^9}{2.4.6.8a^8} \text{ \&c.}$$

que se reduce en virtud de la primera regla á

$$bz - \frac{zz}{2aa}A - \frac{zz}{4aa}B - \frac{zz}{6aa}C - \frac{zz}{8aa}D \text{ \&c.}$$

que restituyendo los factores omitidos, se reduce á

$$\frac{bz}{1} - \frac{\frac{zz}{2aa}A}{3} - \frac{\frac{zz}{4aa}B}{5} - \frac{\frac{zz}{6aa}C}{7} - \frac{\frac{zz}{8aa}D}{9} \text{ \&c.}$$

III. Para reducir la serie

$$x - \frac{ax^3}{3.2} + \frac{bx^5}{5.2.4} - \frac{cx^7}{7.2.4.6} + \frac{dx^9}{9.2.4.6.8} \text{ \&c.}$$

rep aro que no son comunes á todos los términos los factores $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{5}$, $\frac{c}{7}$, $\frac{d}{9}$ &c. los omitiré, pues, y la serie que he de reducir será $x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2.4} - \frac{x^7}{2.4.6} + \frac{x^9}{2.4.6.8}$ &c. y despues de la reduccion será

$$x - \frac{xx}{2}A - \frac{xx}{4}B - \frac{xx}{6}C - \frac{xx}{8}D \text{ \&c.}$$

y restituyendo los factores omitidos se transformará la serie propuesta en

$$x - \frac{x}{2}A \times \frac{a}{8} - \frac{xx}{4}B \times \frac{b}{5} - \frac{xx}{16}C \times \frac{c}{7} - \frac{xx}{8}D \times \frac{d}{9} \text{ \&c.}$$

453 Cuestion IV. *Sacar la raiz de una serie que contiene todas las potencias de dos letras, de z é y, por egemplo, como en esta equacion*

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 \text{ \&c.} = gy + hy^2 + jy^3 + ky \text{ \&c.}$$

454 *Regla I.* Supondremos $z = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4$ &c., y tendremos

$$\left.\begin{array}{lllll} az = & aAy + aBy^2 + & aCy^3 + & aDy^4 \text{ \&c.} \\ +bz^2 = & & bA^2y^2 + 2bABy^3 + & bBBy^4 \text{ \&c.} \\ & & & +2bACy^4 \\ +cz^3 = & & cA^3y^3 + & 3cA^2By^4 \\ +dz^4 = & & & dA^4y^4 \end{array}\right\} = gy + hy^2 + jy^3 + ky^4 \text{ \&c.}$$

comparando unos con otros los coeficientes homólogos, sacarémos $aA = g$, y $A = \frac{g}{a}$; $aB + bA^2 = h$, y $B =$

$\frac{h - bAA}{a}$; $aC + 2bAB + cA^3 = j$, y $C = \frac{j - 2bAB - cA^3}{a}$; $aD + bB^2 + 2bAC + 3cA^2B + dA^4 = k$, y $D = \frac{k - bB^2 - 2bAC - 3cA^2B - dA^4}{a}$. Por el mismo camino sacaríamos

$$E = \frac{l - 2bBC - 2bAD - 3cAB^2 - 3cA^2C - 4dA^3B - eA^5}{a};$$

$$F = \frac{m - 2bBD - bC^2 - 2bAE - cB^3 - 6cABC - 3cA^2D - 6dA^2B^2 - 4dA^3C - 5eA^4B - fA^6}{a} \text{ \&c.}$$

I. Si las dos series propuestas fuesen $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$ &c. $= \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{5}y^4$ &c. y quisiésemos hallar el valor de x, sería $z = x$, $y = y$, $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = -\frac{1}{24}$ &c. y $g = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{3}$, $j = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{5}$, &c. sería, pues, $x = \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{8}}{1}y^2 + \frac{\frac{1}{4} + \frac{11}{48} - \frac{1}{48}}{1}y^3$ &c. ó $x = \frac{1}{2}y + \frac{11}{24}y^2 + \frac{11}{24}y^3 + \frac{1381}{2880}y^4$ &c.

II. Si hubiéramos de sacar el valor de z de estas dos series

$$z + \frac{z^3}{6dd} + \frac{3z^5}{40d^4} + \frac{5z^7}{112d^6} \text{ \&c.}$$
$$= ny + \frac{ny^3}{6dd} + \frac{3ny^5}{40d^4} + \frac{5ny^7}{112d^6} \text{ \&c.}$$

Sería en este caso $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{6dd}$, $d = 0$, $e = \frac{3n}{40d^4}$, $f = 0$ &c. y $g = n$, $h = 0$, $j = \frac{n}{6dd}$, $k = 0$, $l = \frac{3}{40d^4}$, $m = 0$ &c. Luego

$$z = \frac{n}{1}y + 0y^2 + \left(\frac{n}{6dd} - \frac{A^3}{6dd}\right)y^3 + 0y^4 + \left(\frac{3n}{40d^4} - \frac{AAC}{2dd} - \frac{3A^5}{40d^4}\right)y^5,$$

en cuyo cálculo es de notar, que B, D &c. son cero. Luego

$$z = ny + \frac{n - n^3}{6dd}y^3 + \left(\frac{3n}{40d^4} - \frac{n^3}{12d^4} + \frac{n^5}{120d^4}\right)y^5 \text{ \&c.} =$$
$$ny + \frac{n - n^3}{6dd}y^3 + \frac{9n - 10n^3 + n^5}{120d^4}y^5 =$$
$$ny + \frac{n}{1} \times \frac{1 - nn}{6dd}y^3 + \frac{n - n^3}{6dd} \times \frac{9 - nn}{20dd}y^5 \text{ \&c.}$$

ó $z = ny + \frac{1 - nn}{2.3dd}yyA + \frac{9 - nn}{4.5dd}yyB$ &c.

representando A, B respectivamente cada uno de los términos inmediatamente antecedentes.

455 *Regla II.* Si las dos series llevaren las potencias y los productos de z é y como estas

$$az+bz^2+cz^3+dz^4 \text{ \&c.} +fy+gzy+hz^2y+jz^3y \text{ \&c.}$$
$$+ly^2+my^2z+ny^2z^2 \text{ \&c.} +py^3+qy^3z \text{ \&c.} +sy^4 \text{ \&c.} = 0$$

Haremos $z = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4$, y será

$$\left.\begin{array}{lll}
az & = aAy + aBy^2 + aCy^3 \text{ \&c.} \\
+bz^2 & = \ldots\ldots bA^2y^2 + 2bABy^3 \\
+cz^3 & = \ldots\ldots\ldots\ldots + cA^3y^3 \\
+fy & = \ldots fy \\
+ly^2 & = \ldots\ldots ly^2 \\
+py^3 & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots py^3 \\
+gyz & = \ldots\ldots gAy^2 + gBy^3 \\
+my^2z & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + mAy^3 \\
+hyz^2 & = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots hA^2y^3
\end{array}\right\} = 0$$

De la comparacion de los términos homólogos sacaremos $aA+f=0$, $aB+bA^2+l+gA=0$ &c., luego $A=-\frac{f}{a}$, $B=-\frac{bA^2+l+gA}{a}$, $C=-\frac{2bAB+cA^3+p+gB+mA+hA^2}{a}$ &c. Apliquemos esta fórmula para sacar el valor de y de esta equacion $2y+\frac{1}{12}y^3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+xy-\frac{3}{8}xyy+x^2y^2=0$.

En este caso $z=y$, $y=x$, $a=2$, $c=\frac{1}{12}$, $f=\frac{1}{2}$, $g=1$, $h=-\frac{3}{8}$, $l=-\frac{1}{4}$, $n=1$; b, d, j, m, p, q, $s=0$. Por consiguiente $y=-\frac{1}{4}x-\frac{-\frac{1}{4}+A}{2}x^2-$

$$\frac{\frac{1}{12}A^3+B-\frac{3}{8}A^2}{2}x^3-\frac{\frac{1}{4}A^2B+C-3AB+A^2}{2}x^4 \text{ \&c.}$$

$$=-\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{173}{708}x^3+\tfrac{43}{384}x^4 \text{ \&c.}$$

456 Cuestion V. *Sacar las raices de una equacion afecta por medio de una serie.*

Regla I. Supongamos que constando la equacion de términos que contengan potencias de x é y, se nos ofrezca sacar el valor de y en x. Haremos la equacion $=0$, y tomaremos para representar la raiz una serie indeterminada como $y=Ax^n+Bx^{n+r}+Cx^{n+s}+Dx^{n+t}$ &c. en la qual los esponentes $n+r$, $n+s$ vayan creciendo, si fuere x muy pequeña, en cuyo caso será la serie ascendente; y vayan menguando, si fuese x grande; en cuyo supuesto será la serie descendiente. Con esto será la serie convergente; cada término será menor que el inmediato antecedente hasta que el último llegue á ser de ningun momento.

Substituiremos en la equacion en lugar de y y de sus potencias el primer término Ax^n y sus potencias respectivas. Hecho esto, se determinará n suponiendo los dos menores esponentes iguales entre sí, quando se quisiere espresar el valor de y por una serie ascendiente, ó los dos mayores, si la serie hubiere de ser descendiente. Y si no se conoce á primera vista quales son los dos menores ó los dos mayores, se conocerá comparando los esponentes de dos en dos.

Para determinar r, s, t, &c. substituiremos en todos los esponentes en lugar de n su valor hallado, con cuya substitucion se transformarán dichos esponentes en otros tantos números. Restarémos el menor de estos números, para sacar una serie ascendiente, de todos los que hubieren resultado, ó restarémos el mayor para una descendiente. Las restas que de estas sustracciones resultaren las sumaremos consigo mismas, y unas con otras de todos los modos posibles. Las sumas que resultaren empezando por las menores, serán los valores respectivos de r, s, t, &c. que serán afirmativos en la serie ascendiente, y negativos en la descendiente, y substituiremos dichos valores en la serie $Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+s}$ &c.

Finalmente para sacar los valores de A, B, C, D &c. substituiremos la serie que nos diere esta última substitucion en lugar de y en la equacion propuesta, y formaremos con los coeficientes las equaciones correspondientes, segun manifestarán los egemplos.

I. Sea $a^4x^2 - a^4xy + x^6 = ay^5$. Para hallar el valor de y, escribiré la equacion propuesta en esta forma $a^4x^2 - a^4xy + x^6 - ay^5 = 0$. Hago $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+s} + Dx^{n+t}$ &c. Substituyo en la equacion Ax^n en lugar de y, y sale $a^4x^2 - a^4Ax^{n+1} + x^6 - aA^5x^{5n} = 0$. Supongo despues iguales los dos esponentes menores haciendo $n + 1 = 2$, y haciendo otro tanto con los mayores sale $5n = 6$.

Para una serie ascendiente, de la equacion $n + 1 = 2$ saco $n = 1$, y los esponentes indices 2, $n + 1$, 6, $5n$ serán 2, 2, 6, 5; resto 2 de todos, y saco 3, 4; sumo estos números consigo mismos, y el uno con el otro, y resulta la serie de los números 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10 &c. que son respectivamente los valores de r, s, t &c. y egecutando las substituciones correspondientes, la forma de la serie será $y = Ax + Bx^4 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^8$ &c. Substituyo esta serie en lugar de y en la equacion como sigue.

$$
\begin{array}{llllll}
a^4x^2 = & a^4x^2 & & & & \\
-a^4xy = & -a^4Ax^2 & -a^4Bx^5 & -a^4Cx^6 & -a^4Dx^8 & \&c. \\
+x^6 = & & & x^6 & & \\
-ay^5 = & & -aA^5x^5 & & -5aA^4Bx^8 & \&c.
\end{array}
$$

Comparando unos con otros los términos homólogos, sale $a^4 - a^4A = 0$ y $A = 1$; $-a^4B - aA^5 = 0$, y $B = \frac{-A^5}{a^3} = -\frac{1}{a^3}$; $-a^4C + 1 = 0$, y $C = \frac{1}{a^4}$; $-a^4D - 5aA^4B = 0$, y $D = +\frac{5}{a^6}$ &c.

Luego la serie ó la raiz que buscamos será $y = x - \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^5}{a^4} + \frac{5x^7}{a^6}$ &c.

Para una serie descendiente, formo la equacion $5n = 6$, con los dos esponentes mayores, saco $n = 1\frac{1}{5}$, y substituyendo estos valores de n, los esponentes $2, n+1, 6, 5n$ se transforman en $2, 2\frac{1}{5}, 6, 6$; restando de cada uno de estos números el mayor 6, resultarán las restas $-3\frac{4}{5}, -4$; y r, s, t &c. serán $-3\frac{4}{5}, -4, -7\frac{3}{5}, -7\frac{4}{5}, -8$ &c. y la serie será $y = Ax^{1\frac{1}{5}} + Bx^{-2\frac{3}{5}} + Cx^{-2\frac{4}{5}} + Dx^{-5\frac{2}{5}}$ &c. cuyo valor substituido en la equacion propuesta dará

$$
\begin{aligned}
a^4x^2 &= a^4x^2 \\
-a^4xy &= -\ a^4Ax^{2\frac{1}{5}} \qquad - \ a^4Bx^{-1\frac{3}{5}} \\
+\ x^6 &= x^6 \\
-\ ay^5 &= -aA^5x^6 - 5aA^4Bx^{2\frac{1}{5}} - 5aA^4Cx^2 - 5aA^4Dx^{-1\frac{3}{5}} \\
&\qquad - 10aA^3B^2\ \&c.
\end{aligned}
$$

comparando los coeficientes de cada término, sacaremos

$1 - aA^5 = 0$, y $A = \frac{1}{a^{\frac{1}{5}}}$; $-a^4A - 5aA^4B = 0$, y $B = -\frac{1}{5}a^{3\frac{3}{5}}$; $a^4 - 5aA^4C = 0$, y $C = \frac{1}{5}a^{3\frac{4}{5}}$; $-a^4B - 5aA^4D - 10aA^3B^2 = 0$, y $D = -\frac{1}{25}a^{7\frac{2}{5}}$ &c. Luego

$$y = \frac{x^{1\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}} - \frac{a^{3\frac{3}{5}}}{5x^{2\frac{3}{5}}} + \frac{a^{3\frac{4}{5}}}{5x^{2\frac{4}{5}}} - \frac{a^{7\frac{2}{5}}}{25x^{6\frac{2}{5}}}\ \&c.$$

Si hubiéramos hecho $n + 1 = 6$, los esponentes se hubieran transformado en 2, 6, 6, 25; pero como 6 no es ni el mayor ni el menor esponente, no sirve.

El supuesto de $5n = 2$ hubiera transformado los esponentes en 2, $1\frac{2}{5}$, 6, 2; y como 2 no es ni el mayor ni el menor esponente, tampoco sirve.

Pero si hubiéramos hecho $n + 1 = 5n$, los esponentes hubieran sido 2, $1\frac{1}{4}$, 6, $1\frac{1}{4}$; el coeficiente menor $1\frac{1}{4}$ hubiera podido servir para sacar una serie ascendiente de esta forma

$y = Ax^{\frac{1}{4}} + Bx + Cx^{1\frac{3}{4}} + Dx^{2\frac{1}{2}}$ &c.

II. Sea propuesta la equacion $a^3x + ax^3 - a^3y - y^4 = 0$. Substituyendo Ax^n en lugar de y, resulta la transformada $a^3x + ax^3 - a^3Ax^n - A^4x^{4n} = 0$. Supongamos $n = 1$ para comparar los menores esponentes; los de la transformada serán 1, 3, 1, 4; y restando el menor de los mayores, las diferencias serán 2, 3; y sumándolas segun se previno, hallaremos que r, s, t &c. son respectivamente 2, 3, 4, 5, 6 &c. y la serie será $Ax + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$ &c. $= y$. Luego.

$$
\begin{aligned}
a^3x &= a^3x \\
ax^3 &= ax^3 \\
-a^3y &= -a^3Ax - a^3Bx^3 - a^3Cx^4 - a^3Dx^5 - a^3Ex^6 \ \&c. \\
-y^4 &= -A^4x^4 \quad -4A^3Bx^6 \ \&c.
\end{aligned}
$$

formando con los coeficientes las equaciones correspondientes, sale $a^3A = a^3$, y $A = 1$; $B = \frac{1}{aa}$; $C = -\frac{1}{a^3}$, $D = 0$, $E = -\frac{4}{a^5}$ &c. y la raiz será

$$y = x + \frac{1}{aa}x^3 - \frac{1}{a^5}x^4 - \frac{4}{a^5}x^6 \ \&c.$$

Si quisiésemos espresar el valor de y por una serie descendiente, haremos $3 = 4n$, y $n = \frac{3}{4}$, y serán los esponentes 1, 3, $\frac{3}{4}$, 3, y restando el mayor 3 de los demás sacaremos las diferencias -2, $-2\frac{1}{4}$, y r, s, t &c. $=$ -2, $-2\frac{1}{4}$, -4, $-4\frac{1}{4}$ &c. é $y =$ $Ax^{\frac{3}{4}} + Bx^{-1\frac{1}{4}} + Cx^{-1\frac{1}{2}} + Dx^{-3\frac{1}{4}}$ &c: Luego

$$
\begin{aligned}
a^3x &= +a^3x \\
+ax^3 &= ax^3 \\
-a^3y &= -a^3Ax^{\frac{3}{4}} \\
-y^4 &= -A^4x^3 - 4A^3Bx - 4A^3Cx^{\frac{3}{4}} - 4A^3Dx^{-1} \\
& \qquad - 6A^2B^2x^{-1}
\end{aligned}
$$

De los coeficientes sacaremos estas equaciones $A^4 = a$ y $A = a^{\frac{1}{4}}$; $B = \frac{a^{2\frac{1}{4}}}{4}$; $C = -\frac{a^{2\frac{1}{2}}}{4}$, $D = -\frac{3a^{4\frac{1}{2}}}{32}$ &c. é $y = a^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}} + \frac{a^{2\frac{1}{4}}}{4} x^{-1\frac{1}{4}} - \frac{a^{2\frac{1}{2}}}{4} x^{-1\frac{1}{2}} - \frac{3a^{4\frac{1}{4}}}{32} x^{-3\frac{1}{4}}$ &c.

III. Para sacar de la equacion $y^3 + aay + axy - x^3 - 2a^3 = 0$ el valor de y, substituiremos Ax^n en lugar de y, y resultará la transformada $A^3x^{3n} + aaAx^n + aAx^{n+1} - x^3 - 2a^3x^0 = 0$.

Sacaremos la serie ascendiente haciendo el esponente menor $n = 0$, con lo que los esponentes serán 0, 0, 1, 3, 0; las diferencias, 1, 3; r, s, t &c. serán 1, 2, 3, 4, 5 &c. y finalmente la serie $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. Tendrémos, pues,

$$\begin{array}{llllll}
y^3 & = A^3 & + 3A^2Bx & + 3AB^2x^2 & + 3A^2Dx^3 & \text{\&c.} \\
 & & & + 3A^2C & + B^3 & \\
 & & & & + 6ABC & \\
+ a^2y & = a^2A & + aaBx & + aaCx^2 & + aaDx^3 & \\
+ axy & = & + aAx & + aBx^2 & + aCx^3 & \\
- x^3 & = & & & - x^3 & \\
- 2a^3 & = - 2a^3 & & & &
\end{array}$$

Formando con los coeficientes las correspondientes equaciones, sale $A^3 + aaA - 2a^3 = 0$, de cuya equacion sacando la raiz mirando A como incógnita sale $A = a$; $3A^2B + aaB + aA = 0$, y $B = -\frac{1}{4}$; $C = \frac{1}{64a}$; $D = \frac{131}{512aa}$. Luego $y = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$ &c.

IV. Hallemos una serie descendiente que espresa el valor de y sacado de la equacion $y^3 + y^2 + y - x^3 = 0$.

Substituiremos Ax^n en lugar de y, y saldrá la transformada $A^3x^{3n} + A^2x^{2n} + Ax^n - x^3 = 0$. Compararemos los esponentes mayores 3 y $3n$, haciendo $3n = 3$, luego $n = 1$, y los esponentes serán 3, 2, 1, 3, restando el mayor de los demás, las diferencias serán -1, -2; los valores de r, s, t &c. serán respectivamente -1, -2, -3, -4 &c. y tendremos $y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2}$ &c. luego

$$\begin{array}{lllllll}
y^3 & = & A^3x^3 & + 3A^2Bx^2 & + 3A^2Cx & + 3A^2D & \\
& & & & + 3ABB & + 6ABC & \&c. \\
& & & & & + B^3 & \\
+ y^2 & = & & + A^2x^2 & + 2ABx & + BB & \&c. \\
& & & & & + 2AC & \\
+ y & = & & & + Ax & + B & \&c. \\
- x^3 & = & - x^3 & & & &
\end{array}$$

Los coeficientes dan $A^3 = 1$, y $A = 1$; $B = -\frac{1}{3}$; $C = -\frac{2}{9}$; $D = \frac{7}{81}$ &c. y por consiguiente $y = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{81xx}$ &c.

457 *Regla II.* Hágase $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r}$ &c. y despues de hallado el valor de n, y substituido en los esponentes, conforme se dijo (456), escríbanse por órden, réstese cada uno del mayor mas inmediato, y resultarán las diferencias. El número mayor que midiere todas estas diferencias será el valor de r, que habrá de ser afirmativo en la serie ascendiente, ó quando x fuere pequeña, y negativo en una serie descendien-

te, ó quando x fuere grande. Después se substituirán en la serie indeterminada los valores de n y r.

I. Sea $y^3 - axy + x^3 = 0$. Substituiré Ax^n en lugar de y, y sacaré la transformada $A^3x^{3n} - aAx^{n+1} + x^3 = 0$. Hago $n + 1 = 3$ que dá $n = 2$; y los esponentes serán 6, 3, 3, esto es, 3, 6. Luego $6 - 3 = 3$, y $r = 3$. Por consiguiente, si egecutamos las substituciones correspondientes, la comparacion de los esponentes menores nos dará la serie ascendiente $y = Ax^2 + Bx^5 + Cx^8 + Dx^{11}$ &c. Egecutando en la equacion propuesta las substituciones que ella misma está indicando, hallaremos

$$y^3 = A^3x^6 + 3A^2Bx^9 + 3A^2Cx^{12}$$
$$+ 3ABB \text{ \&c.}$$
$$-axy = -aAx^3 - aBx^6 - aCx^9 - aDx^{12}$$
$$+x^3 = +1x^3$$

Luego $aA = 1$, y $A = \frac{1}{a}$; $B = \frac{1}{a^4}$; $C = \frac{3}{a^7}$; $D = \frac{12}{a^{10}}$ &c. y por consiguiente $y = \frac{x^2}{a} + \frac{x^5}{a^4} + \frac{3x^8}{a^7} + \frac{12x^{11}}{a^{10}}$ &c.

II. Si la propuesta fuese $y^5 - by^2 + 9bx^2 - x^3 = 0$, la substitucion de Ax^n en lugar de y la transformaría en $A^5x^{5n} - bA^2x^{2n} + 9bx^2 - x^3 = 0$. Haciendo $2n = 2$, sale $n = 1$, y los esponentes serán 5, 2, 2, 3, ó 2, 3, 5; y restando cada uno del inmediato mayor sacaremos las diferencias 1, 2. Luego $r = 1$, y $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ &c. y tendremos

$$y^5 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + A^5x^5$$
$$-by^2 = -bA^2x^2 - 2bABx^3 - 2bACx^4 - 2bADx^5 \text{ \&c.}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - bBB \quad - 2bBC$$
$$+9bx^2 = +9bx^2$$
$$-x^3 = \qquad -x^3$$

Luego $bA^2 = 9b$, y $A = 3$, $B = -\frac{1}{6b}$; $C = -\frac{1}{216bb}$; $D = \frac{81}{2b} - \frac{1}{3888b^3}$, y por consiguiente $y = 3x - \frac{x^2}{6b} - \frac{x^3}{216bb} + \left(\frac{81}{2b} - \frac{1}{3888b^3}\right)x^4$ &c.

458 *Regla III.* Si la equacion que dá el valor de A fuere una equacion afecta, que tubiese muchas raices iguales ó valores de A, entonces se habrá de dividir el menor residuo hallado por lo dicho (456) por el número de las raices iguales; se agregará el cociente á las restas entre las quales se tomará por una, ó si no, divídase el valor de r sacado en virtud de lo dicho (457) por el número de las raices iguales, y tómese el cociente en lugar de r.

I. Sea $y^9 - xy^3 + 2x^2y^2 - x^3y - x^{14} = 0$. Para hallar el valor de y substituiré en su lugar Ax^n, y sacaré la transformada $A^9x^9 - A^3x^{3n+1} + 2A^2x^{2n+2} - Ax^{n+3} - x^{14} = 0$. Hago $3n + 1 = 2n + 2$, que dá $n = 1$, serán los esponentes 9, 4, 4, 4, 14; la suma de los coeficientes de los términos que llevan el esponente menor, es $-A^3 + 2A^2 - A = 0$, ó $A^2 - 2A + 1 = 0$, cuya equacion tiene dos raices iguales, es á saber $A = 1$ y $A = 1$. Las diferencias de los esponentes serán 5 y 10; dividiendo pues 5 por 2 sacamos el cociente $\frac{5}{2}$, y serán las diferencias $\frac{5}{2}$, 5, 10. Luego serán r, s, t &c. respectivamente $\frac{5}{2}$, 5, $7\frac{1}{2}$, 10 &c. ó despues de haber hallado por lo dicho (457) que $r = 5$, será $\frac{r}{2} = \frac{5}{2}$, cuyo número substituiremos en lugar de r, y por ambos caminos sacaremos

$$y = Ax + Bx^{3\frac{1}{2}} + Cx^6 + Dx^{8\frac{1}{2}} \text{ \&c. Luego}$$

$$\begin{array}{rlllll}
y^9 = & & & + A^9x^9 & \\
- xy^3 = & - A^3x^4 & - 3A^2Bx^{6\frac{1}{2}} & - 3A^2Cx^9 & \text{\&c.} \\
 & & & - 3AB^2 & \\
+ 2x^2y^2 = & + 2A^2x^4 & + 4ABx^{6\frac{1}{2}} & + 4ACx^9 & \\
 & & & + 2BB & \\
- x^3y = & - Ax^4 & - Bx^{6\frac{1}{2}} & - Cx^9 & \\
- x^{14} = & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & - \text{\&c.}
\end{array}$$

Luego $-A^3 + 2A^2 - A = 0$, y $A = 1$, $4B - 4B = 0$, y B se podrá tomar á arbitrio; pues sea el que fuere B siempre será $4B = 4B$. Hagamos, pues, $B = -1$, en este caso $1 - 3C - 3 + 4C + 2 - C = 0$, ó $4C = 4C$, y C se podrá tomar á arbitrio. Sea $C = 1$, será, pues, en fuerza de esto $y = x - x^{3\frac{1}{2}} - x^6$ &c. Tambien se podria haber sacado de este modo el valor de B. Una vez que $A = 1$, el coeficiente de los términos en que está x^9 será $1 - 3C - 3BB + 4C + 2BB - C = 0$ que dá $1 - BB = 0$, y $B = 1$ ó -1.

II. Sea $a^4y^2 - 2a^4xy + a^4x^2 + x^4y^2 = 0$. De la substitucion de Ax^n en lugar de y, resultan los esponentes $2n$, $n+1$, 2, $2n+4$. Sea $2n = 2$, ó $n = 1$, y los esponentes se transformarán en $2,2,2,6$, cuya diferencia

$= 4$. Será, pues, la equacion $a^4 A^2 x^{2n} - 2a^4 A x^{n+1} + a^4 x^2 - A^2 x^{2n+4}$, ó $a^4 A^2 x^2 - 2a^4 A x^2 + a^4 x^2 - A^2 x^6$, cuyo primer término lleva el coeficiente $A^2 - 2A + 1 = 0$, y dá dos valores iguales de $A = 1$. Divídase, pues, la diferencia 4 por 2, y el cociente 2 es r, ó la diferencia comun. Luego la serie $y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r}$ &c. será $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7$ &c luego

$$\begin{aligned} a^4 yy &= a^4 A^2 x^2 + 2a^4 ABx^4 + 2a^4 ACx^6 + 2a^4 ADx^8 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + a^4 BB \quad + 2a^4 BC \text{ \&c.} \\ -2a^4 xy &= -2a^4 Ax^2 - 2a^4 Bx^4 - 2a^4 Cx^6 - 2a^4 Dx^8 \\ + a^4 xx &= + a^4 xx \\ - x^4 y^2 &= \qquad\qquad\qquad - A^2 x^6 \quad - 2ABx^8 \text{ \&c.} \end{aligned}$$

de cuya equacion sacamos $A^2 - 2A + 1 = 0$, y $A = 1$; $B = B$; se podrá, pues, tomar B á arbitrio. Supongamos $B = \frac{1}{aa}$; $0C + a^4 B^2 - 1 = 0$, ó $0C = 1 - 1 = 0$, y C se podrá tomar á arbitrio. Hagamos $C = \frac{1}{a^4}$; $0D + 2AB - 2a^4 BC = 0$, y D se podrá tomar á arbitrio. Sea $D = \frac{1}{a^6}$ &c. Luego $y = x + \frac{x^3}{aa} + \frac{x^5}{a^4} + \frac{x^7}{a^6} +$ &c.

Tambien se podria buscar por otro camino el valor de B, C &c. Porque una vez que $A = 1$, de las quatro cantidades que componen el tercer término de la última transformada, se destruyen la primera y la tercera, y solo quedan la segunda $a^4 B$ y la quarta $- A^2$, que dán $a^4 BB = A^2 = 1$, y $BB = \frac{1}{a^4}$ ó $B = \frac{1}{a^2}$.

459 *Regla IV*. Si la cantidad que forma la serie en x fuese igual con muy corta diferencia á alguna canti-

dad dada, se substituirá en lugar de x dicha cantidad $+$ una nueva letra; despues se buscará una serie ascendiente de la nueva letra que esprese la raiz.

Supongamos, por egemplo; $y^4 - x^2y^2 + xy^2 + 2y^2 - 2y + 1 = 0$, siendo $x = 2$ con muy corta diferencia.

Haremos $x = 2 + z$; cuya cantidad substituida en lugar de x, dá $y^4 - z^2y^2 - 3zy^2 - 2y + 1 = 0$. Haciendo $y = Az^n$, y haciendo la substitucion correspondiente, se transformará la equacion en

$$A^4z^{4n} - A^2z^{2n+2} - 3A^2z^{2n+1} - 2Az^n + 1 = 0.$$

Si hacemos $n = 0$, los esponentes serán 0, 2, 1, 0, 0; restando el menor 0 de los dos mayores, las diferencias serán 1, 2, que sumadas, segun hemos dicho, darán 1, 2, 3, 4 &c. cuyos números representan respectivamente los esponentes de la serie $y = Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2}$ &c. que por consiguiente será $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. Luego

$$\begin{array}{lllll}
y^4 & = A^4 & + 4A^3Bz & + 4A^3Cz^2 & \text{\&c.} \\
 & & & + 6A^2BB & \\
-z^2y^2 & = & & - AAz^2 & \\
-3zy^2 & = & - 3A^2z & - 6ABz^2 & \\
-2y & = -2A & - 2Bz & - 2Cz^2 & \\
+1 & = +1 & & &
\end{array}$$

Tenemos, pues, $A^4 - 2A + 1 = 0$, y $A = 1$; $4B - 2B = 3$, y $B = \frac{3}{2}$; $4C + 6BB - 1 - 6B - 2C = 0$, y $C = -\frac{7}{4}$ &c. Luego $y = 1 + \frac{3}{2}z - \frac{7}{4}zz$ &c.

Fig.

Cuestiones geométricas.

460 Cuestion I. *Dada la base, la suma de los dos lados, y el ángulo del vértice de un triángulo rectilíneo, trazar el triángulo.*

Tírese la línea indefinita AE, y tómese en ella la AB igual á la suma de los lados, y hágase el ángulo ABC igual á la mitad del ángulo dado del vértice: desde el punto A como centro con un radio igual á la base dada, trácese el arco de círculo NCM que corta BC en C: tírese la AC, hágase el ángulo $BCD=CBD$, y tírese CD que corta AB en D; será ACD el triángulo que se pide. 37.

Por ser iguales los ángulos BCD y CBD será (I. 403) $CD=DB$, y por consiguiente $AD+DC=AB$: por la misma razon el ángulo $ADC=BCD+CBD$ (I. 394) será igual á $2CBD$.

461 Cuestion II. *Dados el ángulo del vértice, la base, y la diferencia de los lados, determinar el triángulo.*

Tírese á arbitrio la AC: tómese en ella la AD igual á la diferencia de los lados, y hágase el ángulo CDB igual al complemento de la mitad del ángulo dado: desde el punto A tírese AB igual á la base dada, y desde B la BC, de manera que el ángulo $DBC=CDB$; será ABC el triángulo que se pide. 38.

Una vez que por la construccion son iguales los ángulos CDB y DBC, $CB=CD$, y por consiguiente $CA-CB=AD$. Fuera de esto, como cada uno de estos ángu-

Fig. los iguales es igual al complemento de la mitad del ángulo dado, su suma que es el suplemento del ángulo C, ha de ser por lo mismo igual á dos ángulos rectos menos el ángulo dado, y por consiguiente $C =$ el ángulo dado.

462 Cuestion III. *Dados el ángulo del vértice, la razon de los lados que le forman, y la base, ó la perpendicular, ó la diferencia de los segmentos de la base; trazar el triángulo.*

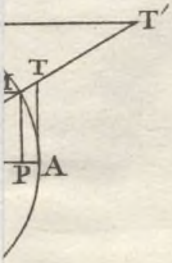
39. Tírese CA á arbitrio, y hágase el ángulo ACB igual al ángulo dado: hagánse CB y CA, tales que tengan entre sí la misma razon que los lados, y tírese la AB. Si fuese dada la base, hágase AM igual á dicha base, y tíresele á CA la paralela ME que encuentra CB en E; pero si fuese dada la perpendicular, tírese CF perpendicular á AB, en la qual se tomará CH igual á la perpendicular dada, y se tirará DHE paralela á AB: finalmente, si fuese dada la diferencia de los segmentos de la base, hágase $FG = AF$, tírese CG, y hágase GN igual á la diferencia dada de los segmentos; tirando NE paralela á CG y ED paralela á BA, será CDE el triángulo que se pide.

Por ser paralelas las líneas AB, DE; ME, AC; y NE, CG, será $DE = AM$, $EI = NG$, y tambien $CD : CE :: CA : CB$ (I. 451).

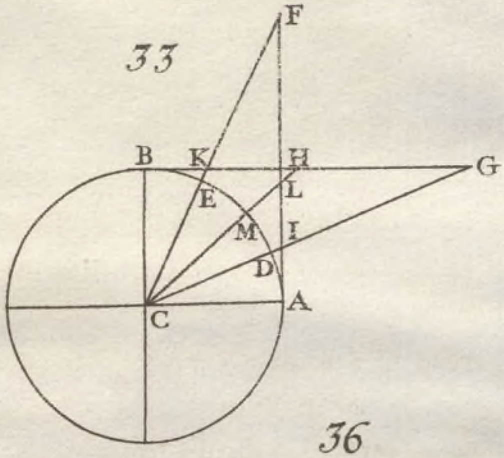
463 Cuestion IV. *Dados el ángulo del vértice y los segmentos de la base hechos por la perpendicular tirada desde dicho ángulo, trazar el triángulo.*

40. Sean AD y DB los segmentos de la base: divídase

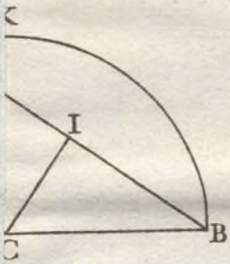
Plana 476



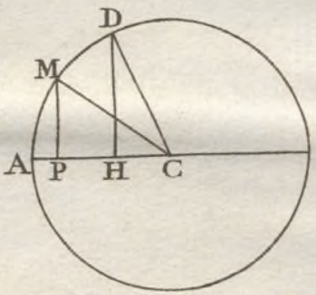
33

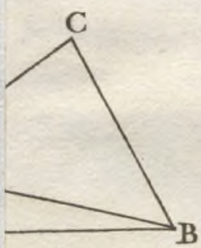


35

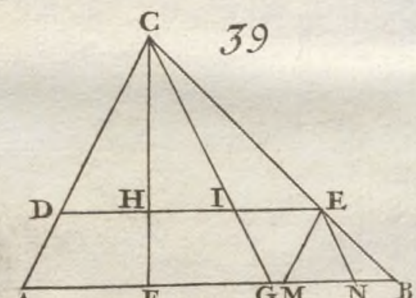


36

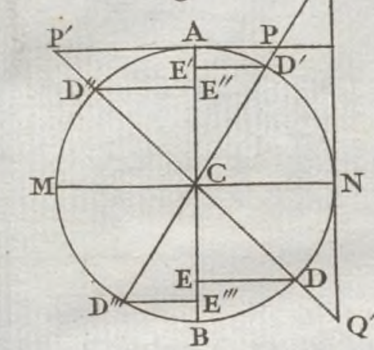




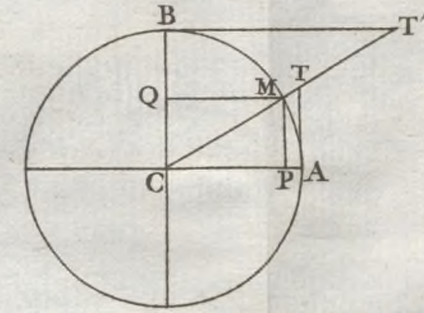
39



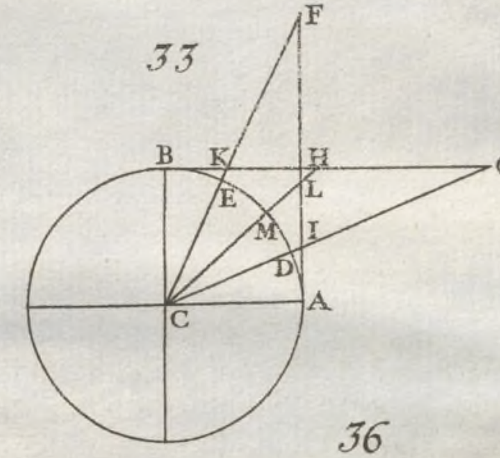
31



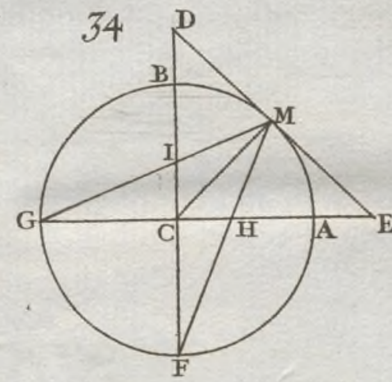
32



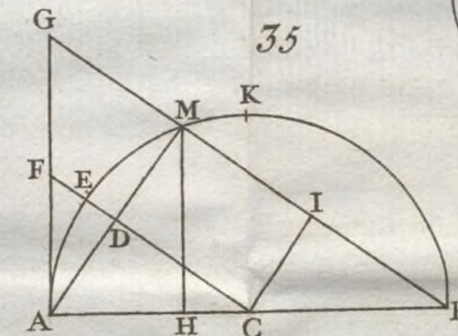
33



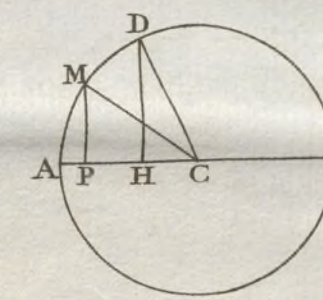
34



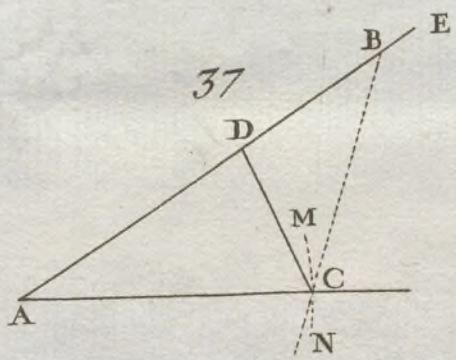
35



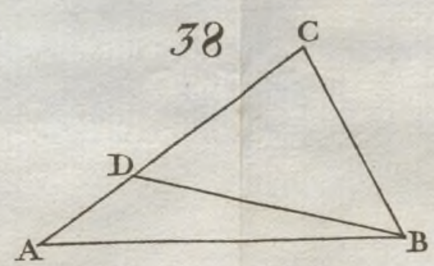
36



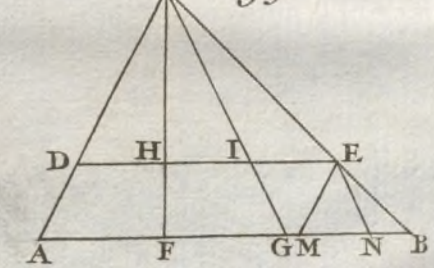
37



38



39



AB en dos partes iguales por la perpendicular EF: hágase Fig. el ángulo EAO igual á la diferencia que hay entre el án- 40. gulo dado, y un ángulo recto, y tírese la AO que encuentra en O la EF. Desde O como centro, y con un radio OA trácese el círculo $BGAQ$, y tírese DC perpendicular á AB, que encuentra en C la circunferencia del círculo: tírense las líneas AC y CB; será ACB el triángulo cuya construccion se pide.

Como el ángulo ACB que está en la circunferencia abraza el arco AQB, es igual al ángulo EOA, mitad del ángulo del centro que descansase sobre el mismo arco AQB (I. 373); pero EAO es igual en virtud de la construccion, á la diferencia que hay entre el ángulo dado y un ángulo recto; por consiguiente $ACB = EOA$ es igual al ángulo dado.

464 Cuestion V. *Dadas la base, la perpendicular y el ángulo del vértice de un triángulo, construir el triángulo.*

Sobre la base dada AB hágase el segmento $ACGB$ de 40. círculo que contenga el ángulo dado, como en la cuestion antecedente: hágase EF igual á la perpendicular dada, y tírese FC paralela á AB, que encuentre la periferia del círculo en C: tírense las AC y BC, y estará hecho lo que se pide.

La razon es patente en virtud de lo dicho en la cuestion precedente.

465 Cuestion VI. *Dado el ángulo del vértice, la su-*

Fig. *ma de los dos lados que le forman, y la diferencia de los segmentos de la base, construir el triángulo.*

41. Tírese á arbitrio la recta *AC*, tómese en ella la *AB* igual á la diferencia de los segmentos de la base, hágase el ángulo *CBE* igual á la mitad del suplemento del ángulo dado, y desde *A* tírese á *BE* la *AE* igual á la suma dada de los lados: hágase el ángulo $EBD = BED$, y tírese la *BD* que encuentre la *AE* en *D*, desde cuyo punto como centro, y con un radio igual á *BD*, trácese el círculo *BCE* que encuentre en *C* la *AC*, tírese *DC*, y será *ADC* el triángulo que se pide.

Por ser el ángulo $EBD = BED$, será $DE = DB = DC$, y por consiguiente $AD + DC = AE$. Fuera de esto, el ángulo central *CDE* es duplo del ángulo *CBE* cuyo vértice está en la circunferencia, y el ángulo *CBE* es igual por la construccion á la mitad del suplemento del ángulo dado: luego *CDE* será igual al suplemento entero, y finalmente será *ADC* igual al ángulo dado.

466 Cuestion VII. *Dado el ángulo del vértice, la suma de los lados que le forman y la razon de los segmentos de la base, trazar el triángulo.*

42. Supongamos que haya entre *AG* y *GB* la misma razon que entre los segmentos de la base: trácese sobre la recta *AB* un segmento de círculo capaz del ángulo dado (I. 379): tírese *GC* perpendicular á *AB* que encuentre en *C* la circunferencia: tírense las líneas *AC* y *CB*, y sobre la *AC* prolongada tómese $CH = CB$, tírese la *BH*

y sobre la HA tómese HD igual á la suma dada de los la- Fig.
dos: tírese DE paralela á AB, y EF paralela á BC; será 42.
DEF el triángulo que se pide.

Tírese, para probarlo, la FN perpendicular á DE. Yá que por la construccion $CH = CB$, y FE es paralela á CB, será $FE = FH$ (I. 451), y por consiguiente $FE + FD = HD$. Y como FE es paralela á CB, el ángulo $DFE = ACB$, y por ser equiángulos los triángulos ABC, DEF será $AG : GB :: DN : NE$.

467 Cuestion VIII. *Dado el ángulo del vértice, la perpendicular y la razon de los segmentos de la base, trazar el triángulo.*

Tómense en la AB las líneas AF, FB que tengan 43.
la misma razon que los segmentos de la base, y sobre la recta AB hágase el segmento de círculo ACB capaz del ángulo dado: tírese la FC perpendicular á AB que encuentre en C la circunferencia del círculo, en la qual se tomará CG igual á la perpendicular dada: tírese DGE paralela á AB que encuentre respectivamente AC y CB en D y E; será DCE el triángulo que se pide.

Por ser paralelas las líneas DE y AB, será $AF : DG :: CF : CG :: FB : GE$, ó $AF : BF :: DG : GE$, de donde resulta que DG y EG están en la razon dada. Y como por la construccion el ángulo DCE, y la perpendicular CG son respectivamente iguales al ángulo, y á la perpendicular dada: luego &c.

468 Cuestion IX. *Dada la base, la suma de los la-*

Fig. *dos, y la diferencia de los ángulos de la base, trazar el triángulo.*

44. En el estremo B de la base AB levántese la perpendicular BE, y hágase el ángulo EBC igual á la mitad de la diferencia de los ángulos de la base. Desde el punto A tíresele á BC la AC igual á la suma de los lados, y hágase el ángulo $CBD = BCA$, será ABD el triángulo que se pide.

Desde el punto D como centro, y con el radio CD trácese el semicírculo CHF, y tírese FB. Hecho esto, ya que por la construccion el ángulo $CBD = BCD$, será $DB = DC$, de donde se infiere que $AD + DB = AC$, y que el semicírculo ha de pasar por el punto B. Por consiguiente el ángulo CBF, cuyos lados pasan por los estremos del diámetro será recto (I. 376), y será por lo mismo igual al ángulo ABE: si de cada uno de estos ángulos iguales se resta el ángulo FBE comun á ambos, resultará $ABF = EBC$; pero por ser DF igual á DB es evidente que $ABF = EBC$ será igual á la mitad de la diferencia de los ángulos ABD y DAB.

469 Cuestion X. *Dada la base, la diferencia de los lados, y la diferencia de los ángulos de la base, determinar el triángulo.*

45. En el estremo B de la base dada AB hágase el ángulo ABD igual á la mitad de la diferencia dada de los ángulos de la base, y desde A tírese á la BD la línea AD igual á la diferencia de los lados: tírese ADC, y hágase el ángulo $DBC = BDC$, y será ABC el triángulo que se pide.

Porque como el ángulo $DBC = BDC$ será CD igual Fig.
á CB, y AC será mayor que BC de la cantidad AD. A mas de esto, ya que $A + ABD = CDB$ (I. 394) $= CBD$ será $A + 2ABD = CBD + ABD = ABC$, y por consiguiente $ABC - A = 2ABD$ que es igual á la diferencia dada.

470 Cuestion XI. *Dada la diferencia de los ángulos de la base, la razon de los lados, y una de estas tres cosas la base, la perpendicular, ó la diferencia de los segmentos de la base; trazar el triángulo.*

Tírese á arbitrio la AC, y hágase el ángulo ACD igual 46.
á la diferencia dada de los ángulos de la base, y háganse CD y CA en la misma razon dada de los lados: tírese ADE, á la qual se tirará la perpendicular CQ: tómese QE igual á QD, y tírese la CE: hecho esto, si fuere dada la base, hágase AB igual á dicha base, y tírese BF paralela á CA; pero si fuese dada la perpendicular, se tomará la línea CP igual á dicha perpendicular, y por el punto P tírese la FPG paralela á la AE. Finalmente, si fuese dada la diferencia de los segmentos de la base, se tomará AR igual á dicha diferencia, se tirarán RH y FHG respectivamente paralelas á CA y EA; será CFG el triángulo que se pide.

Porque una vez que $QE = QD$, y el ángulo $EQC = DQC$, será $CE = CD$, y el ángulo $E = QDC = A + ACD$ (I. 394), y por consiguiente $E - A = ACD$; de donde inferirémos, por razon de las paralelas AE, GF

Fig. &c. que $GFC - FGC = ACD$, y tambien $FG = AB$, $GH = AR$, y $CF : CG :: CE = CD : CA$.

471 Cuestion XII. *Dada la suma de los lados, la diferencia de los segmentos de la base, y la diferencia de los ángulos de la base, trazar el triángulo.*

47. Tómese AD igual á la suma de los lados, y el ángulo ADE igual á la mitad de la diferencia de los ángulos de la base: desde A tírese á DE la AE igual á la diferencia dada de los segmentos de la base: hágase el ángulo $CED = EDC$, y desde el punto C donde EC encuentra AD, trácese con el radio EC el semicírculo EBD que corta AE prolongada en B: tírese BC, y está hecha la operacion.

Para probarlo, tíresele á AB la perpendicular CQ. Por ser $EQ = BQ$ (I. 348), será $AQ - BQ = AE$; y por ser iguales en virtud de la construccion los ángulos CED, EDC, será $CD = CE = CB$, y por consiguiente $AC + CB = AD$. A mas de esto, $ABC - BAC = BEC - BAC = ACE$ (I. 394) $= 2ADE$ (I. 373).

472 Cuestion XIII. *Dada la diferencia de los ángulos de la base, la razon de los segmentos de la base, y una de estas tres cosas la suma de los lados, la diferencia de los lados, ó la perpendicular, construir el triángulo.*

48. Sea AC con BC en la razon dada de los segmentos de la base, y hágase sobre AB un segmento de círculo BKA (I. 379) capaz de un ángulo igual á la diferencia de los ángulos de la base: bágese CK perpendicular á AC que corta en K la circunferencia del círculo; y en la

AC prolongada hágase $CD = CB$, y tírense KA, KB y Fig.
KD. Hecho esto, si fuere dada la perpendicular, tómese KF que la sea igual, y por el punto F tírese la EFG paralela á AD; pero si fuese dada la suma ó la diferencia de los lados, tómese KE quarta proporcional á $AK \pm KD$, AK, y dicha suma ó diferencia, y tírese EFG como antes, será KEG el triángulo que se pide.

Yá que CK es perpendicular á AD, y $CD = CB$, el ángulo D será igual á $DBK =$ (I. 394) $A + BKA$; de donde resulta, por ser EG paralela á AD, que $KGE = KEG + BKA$, y por consiguiente $KGE - KEG = AKB$, que por construccion es igual á la diferencia dada de los ángulos de la base.

Fuera de esto, por ser paralelas las líneas AD y EG, tendrémos $EF : FG :: AC : BC = CD$. Por la misma razon tendrémos tambien $AK \pm KD : KA :: KE \pm KG : KE ::$ la diferencia ó la suma dada de los lados : KE (por construccion), y por consiguiente $KE \pm KG$ es igual á dicha suma ó diferencia.

478 Cuestion XIV. *Dada la diferencia de los lados, la diferencia de los segmentos de la base, y la diferencia de los ángulos de la base, trazar el triángulo.*

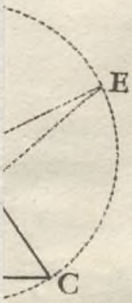
Tírese la indefinita AQ, tómese en ella AD igual á la 49.
diferencia dada de los lados, y hágase el ángulo QDH igual al complemento de la mitad de la diferencia de los ángulos de la base: desde A tírese á DH la AC igual á la diferencia dada de los segmentos, y despues de prolongada

Fig. esta línea ácia L, hágase el ángulo DCE igual á CDE, de manera que CE encuentre AQ en E: desde E como centro trácese con el radio EC un arco que corte AL en B: tírese EB, será AEB el triángulo que se pide.

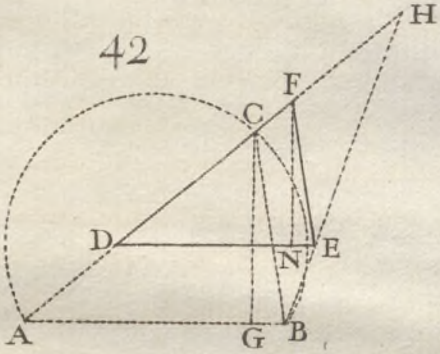
Para probarlo, tirarémos á AB la perpendicular EP. Por ser el ángulo $DCE = CDE$ será $ED = EC$, y por consiguiente $AE - EB = AE - EC = AE - ED = AD$. Asimismo, por ser $EB = EC$ será $PB = PC$, y por consiguiente $AP - PB = AP - PC = AC$. A mas de esto, siendo el ángulo $EBC = ECB$ (I. 403), y $ECB - A = CEA$ (I. 394), es evidente que $EBC - A = CEA$ igual á la diferencia dada, por ser isósceles el triángulo EDC, y el ángulo de la base igual al complemento de la mitad de dicha diferencia por la construccion.

474 Cuestion XV. *Dada la perpendicular, la diferencia de los ángulos de la base, y la diferencia de los segmentos de la base, construir el triángulo.*

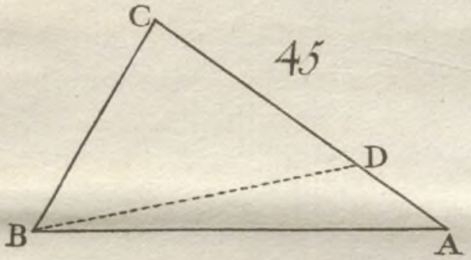
50. Sobre AQ igual á la diferencia dada de los segmentos de la base, trácese el segmento de círculo $QCLA$ capaz (I. 379) de un ángulo igual á la diferencia de los ángulos de la base: tírese en medio de AQ la perpendicular TL, en la qual se tomará TE igual á la perpendicular dada: tírese EC paralela á AQ, que encuentre en C la periferia del círculo: tírese tambien CP perpendicular á AQ; y en la AQ prolongada hágase $PB = PQ$: tírense las líneas CA y CB, y será ACB el triángulo que se pide.



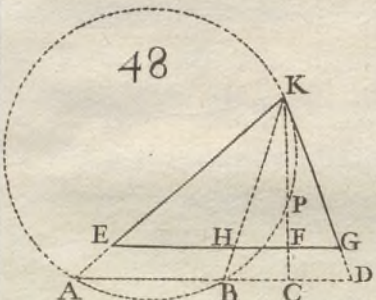
42



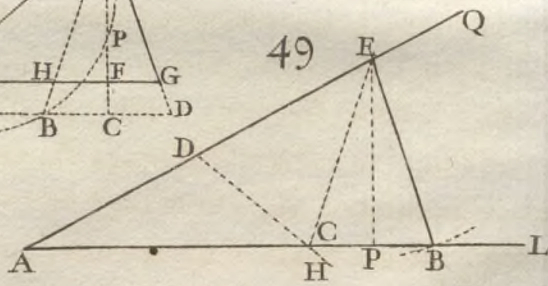
45



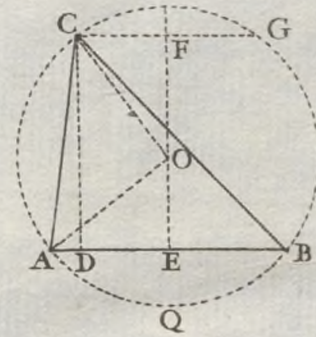
48



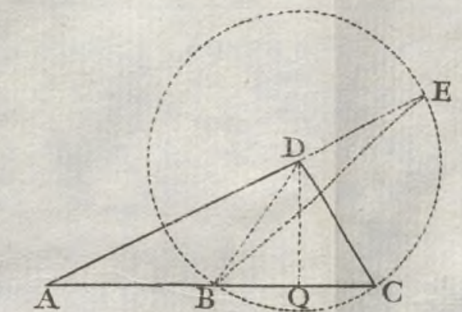
49



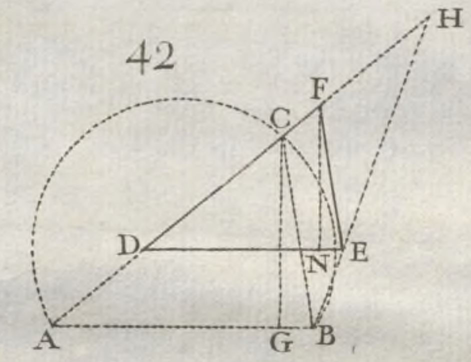
40



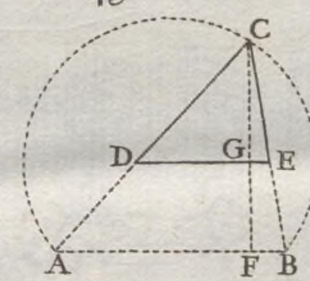
41



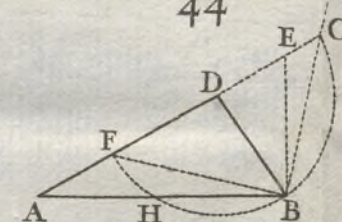
42



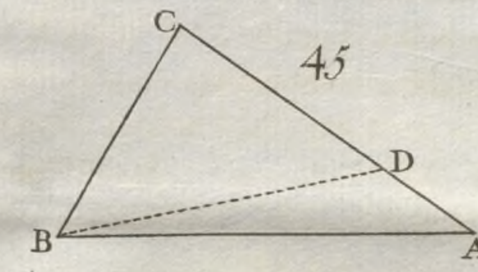
43



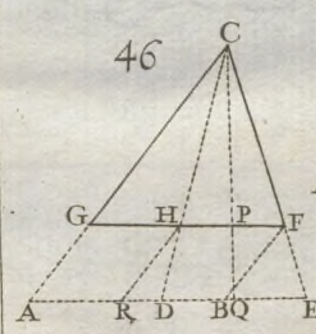
44



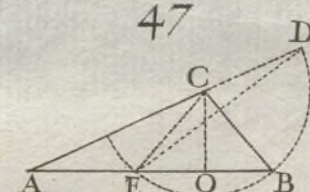
45



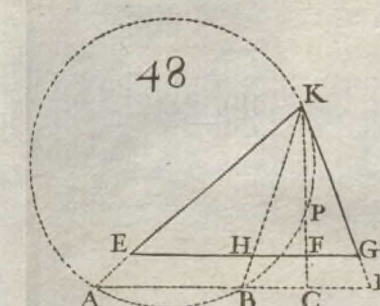
46



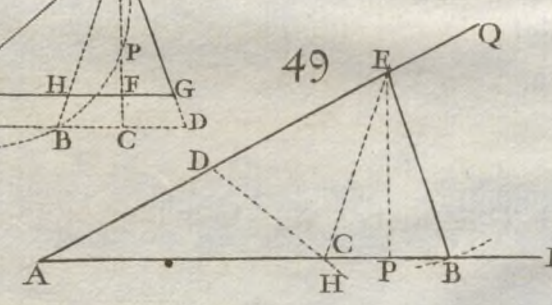
47



48



49



Ya que por la construccion CP es perpendicular á QB, y PB igual á PQ, el ángulo $B = PQC$, y $B (= PQC) = BAC = ACQ =$ la diferencia de los ángulos dados, por la misma razon $CP = TE$, y $AP - BP = AP - PQ = AQ$. Fig.

475 Cuestion XVI. *Dados los segmentos de la base, y la suma de los lados de un triángulo rectilíneo, determinar el triángulo.*

En el mayor segmento AQ tómese QF igual al menor segmento BQ: tírese QL perpendicular á AB, y tírese AI que forme con AB un ángulo qualquiera, en cuya línea se tomará AE igual á la suma dada de los lados, y tírese BE: hágase el ángulo $AFG = AEB$: pártase por el medio EG en H, y desde B como centro, con un radio igual á EH, trácese el arco MCN que corte la perpendicular QL en C: tírense las CA, CB, y estará hecha la operacion. 51.

Para demostrarlo, desde C como centro, y con el radio CB trácese el círculo $BDLKF$, y prolónguese AC hasta que encuentre en D la circunferencia. Por razon de los triángulos semejantes AEB, AFG tendremos $AE : AB :: AF : AG$; luego $AG \times AE = AF \times AB$; pero (I. 476) $AF \times AB = AK \times AD$; luego $AG \times AE = AK \times AD$; luego como EG y DK son iguales por construccion, es evidente que AG y AK, como tambien AE y AD serán iguales.

476 Cuestion XVII. *Dados los segmentos de la base*

Fig. *y la diferencia de los lados, trazar el triángulo.*

51. Hágase *AF* igual á la diferencia de los segmentos dados *AQ*, *BQ*, y tírese *AJ* que forme con *AB* un ángulo qualquiera, en la qual se tomará *AG* igual á la diferencia dada de los lados; tírese la *FG*, hágase el ángulo *ABE* $=$ *AGF*, y desde *B* como centro, y con un intervalo igual á $\frac{1}{2}$ *EG* trácese el arco *NCM* que corte en *C* la perpendicular *QL*; tírense *C*B y *CA*, será *ACB* el triángulo que se pide.

Se demuestra del mismo modo que la antecedente.

Interrumpiremos la serie de las cuestiones para demostrar la proposicion siguiente, que nos haria falta.

52. 477 *Si una línea recta* AB *fuese dividida en el punto* C *en una razon dada, y se tomare una línea recta* CBO *que tenga con* AC *la misma razon que* BC *con* AC — BC, *y desde el punto* O *como centro, y con un radio igual* OC, *se trazare el círculo* CPD, *y se tiraren las dos líneas* AP, BP *desde los puntos* A *y* B *que se encuentren en un punto de su circunferencia; estas líneas serán la una á la otra en la misma razon que* AC *y* CB.

Porque una vez que *CO*: *AC* :: *BC* : *AC*—*BC*, será (I. 188) *CO* : *AO* :: *BC* : *AC*, y tambien (I. 186) *CO*: *BC* :: *AO* : *AC*; luego (I. 188) *CO* : *BO* :: *AO*: *CO*, ó *PO* : *BO* :: *AO* : *PO*. Por lo que, ya que son proporcionales los lados de los triángulos *POB*, *AOP* al rededor del ángulo comun *O*, serán estos triángulos semejantes (I. 464), y por consiguiente los demás lados serán tambien proporcionales, esto es, $PO = CO : AO :: BP : AP$; luego $BC : AC :: BP : AP$. Fig.

478 Cuestion XVIII. *Dados los segmentos de la base y la razon de los lados, trazar el triángulo.*

Sean AQ y QB los segmentos de la base, y sea toda la base AB dividida en C en la razon dada de los lados; hágase $CO : AC :: BC : AC - BC$; con el radio CO descríbase el semicírculo CPD, y tírese la QP perpendicular á KO que encuentre la circunferencia en P; tírense las AP y BP; será APB el triángulo que se pide. 53.

Se funda en lo dicho (477).

479 Cuestion XIX. *Dada la base, la perpendicular y la razon de los lados, trazar el triángulo.*

Divídase la base AB en el punto C en la razon dada de los lados, y trácese el semicírculo CPD como en la cuestion última; en la línea OR perpendicular á AD tómese ON igual á la perpendicular dada, y por el punto N tírese la ENP paralela á AD que encuentre la circunferencia del círculo en E y P; tírense las PA y PB, y estará resuelta la cuestion. 54.

Es tambien patente por lo dicho (477).

Es de advertir que esta cuestion tiene dos resoluciones, porque la paralela ENP encuentra la circunferencia en dos puntos.

480 Cuestion XX. *Dada la diferencia de los segmentos de la base, la perpendicular y la razon de los lados, construir el triángulo.*

Fig. Sea AB la diferencia de los segmentos de la base, sea
54. lo demás como en la cuestion última; hágase $QF = QB$, y tírese PF, será AFP el triángulo que se pide.

481 Cuestion XXI. *Dada la razon de los segmentos de la base, la perpendicular y la razon de los lados, construir el triángulo.*

Tírese á arbitrio la recta ABC, tómense en ella las
55. partes AE, EB que tengan una con otra la misma razon que los lados, y las partes AF, FB que tengan una con otra la misma razon que los segmentos de la base, y tírese FQ perpendicular á AB, é igual á la altura dada del triángulo; hágase tambien $EC : AE :: BE : AE - BE$; con el radio CE descríbase el arco de círculo ERS, y desde el punto R donde corta la perpendicular FQ, tírense las RA y RB, y la QP y QT paralelas respectivamente á RA y RB; será PQT el triángulo que se pide.

Porque por lo dicho poco ha (477) $AR : BR :: AE : BE$; por consiguiente tendremos, por causa de las paralelas, $QP : QT :: RA : RB :: AE : BE$, y por la misma razon $PF : TF :: AF : BF$.

482 Cuestion XXII. *Dividir el ángulo dado* ABC *en dos partes* CBF, ABF *tales que sus senos tengan uno con otro una razon dada.*

56. En las líneas BA y CB prolongadas, tómense las líneas BE y BD que tengan una con otra la misma razon que tiene el seno del ángulo CBF con el seno del ángulo ABF; tírese DE y su paralela BF, y estará hecha la operacion.

Porque (I. 671) *BE*: *BD*:: sen *D* (=*CBF*): sen Fig. *BED* (= *ABF*).

483 Cuestion XXIII. *Dividir un ángulo dado en dos partes, tales que sus tangentes tengan una con otra una razon dada.*

Tómense en la *AB* las dos líneas *AD*, *BD* que ten- 57. gan una con otra la razon dada, y sobre toda la línea *AB* trácese un arco de círculo *BCA* capaz del ángulo dado; tírese *DC* perpendicular á *AB* que encuentre la circunferencia en *C*, y tírense *AC* y *BC*, serán *ACD* y *BCD* los dos ángulos que se piden.

La misma construccion prueba la operacion.

484 Cuestion XXIV. *Dividir un ángulo dado* ABC *en dos partes, tales que sus secantes tengan una con otra una razon dada.*

Tómense las dos líneas *BE* y *BT* que tengan entre sí 58. la misma razon que las secantes; tírese la *TE* y la *BF* perpendicular á *ET*, y estará hecha la operacion.

La misma construccion la demuestra.

485 Cuestion XXV. *Desde un punto dado* O, *tirar* 59. *una línea recta* OF *que encuentre dos líneas* AC, AB *dadas de posicion, de tal modo que sus partes* OE, OF *interceptadas entre el punto y dichas líneas, sean la una á la otra en razon dada.*

Desde *O* ácia *A*, donde concurren las líneas *BA* y *CA* tírese *OAD* en la qual se tomarán las partes *AD*, *AO* en la razon de *FE*: *EO*, y se tirará *DF* paralela á *AC* que en-

Fig. cuentre AB en F; se tirará FO, y estará hecho lo que se pide.

Es evidente por lo dicho (I. 451).

486 Cuestion XXVI. *Dividir un arco dado* CD *en dos partes, tales que el rectángulo de sus senos sea de una magnitud dada.*

60. Tíresele al radio OC la perpendicular DF, en la qual prolongándola si fuere menester, se tomará $FG = \frac{1}{2} OC$; y sobre ella se construirá el rectángulo $FIHG$ igual al rectángulo dado; y suponiendo que HI corta la circunferencia en E, tírese OB que parta por el medio la DE; serán CB y DB los dos arcos que se piden.

Para probarlo, tirarémos las CM y DNE perpendiculares al radio OB, y las NN y EE perpendiculares á DF. La construccion manifiesta que los triángulos OCM, DNN son semejantes, por ser NN paralela á CO, y ND paralela á CM. Por consiguiente $OC : CM :: DN : NN = \frac{1}{2} EE$; luego $CM \times DN = OC \times \frac{1}{2} EE = \frac{1}{2} OC \times EE = FG \times EE =$ al rectángulo dado por la construccion.

487 Cuestion XXVII. *Dada la razon de los senos, y la razon de las tangentes de dos ángulos, determinar los ángulos.*

61. Supongamos que AD y ED esten en razon de los senos, y AD, FD en razon de las tangentes; desde el punto D como centro, y con el radio DE trácese el semicírculo ERK; y sobre AF trácese otro semicírculo que corte el primero en H, por cuyo punto tírese AR, y

tírese la HD; los ángulos DHR, DAR serán los que se piden. Fig.

Para probarlo, tirarémos la línea FH, y la DQ ambas perpendiculares á AR. Esto supuesto el ángulo AHF será recto (I. 376), las líneas FH y DQ serán paralelas (I. 338), y por consiguiente $AD : FD :: AQ : HQ ::$ tang DHQ : tang DAQ. Asimismo, $DA : DE = DH ::$ sen DHQ : sen DAQ.

488 Cuestion XXVIII. *Desde un punto* A *de la circunferencia de un círculo dado, tirar las dos cuerdas* AD, AB, *que esten una con otra en la razon de* m : n, *y que subtendan dos arcos* AB *y* ABD *que tengan el uno con el otro la razon de* 1 : 3. 62.

Tírese el diámetro AH, y tambien la cuerda AQ que tenga con este diámetro la razon de $n - m : 2m$; desde el centro O tírese OB paralela á AQ, que encuentra la circunferencia en B; tírese AB, y tírense las cuerdas BC y CD cada una igual á AB, tírese AD, y estará hecha la operacion.

Para demostrarla, tírese la HQ, y las BE y CF ambas perpendiculares á AD. El ángulo del centro $AOB = QAH$ (I. 330) que descansa sobre el arco AB es igual (I. 373) al ángulo BAD de la circunferencia, pues descansa dicho ángulo BAD sobre un arco duplo del primero. Por consiguiente una vez que el ángulo AQH es igual al ángulo recto AEB, los triángulos AQH, AEB, serán equiángulos, y tendremos $AB : AE :: AH : AQ$; pero en virtud de

Fig. la construccion $AH : AQ :: 2m : n - m$; luego $AB : AE ::$ $2m : n - m$, ó $AB : 2AE :: 2m : 2n - 2m$; luego $AB :$ $AB + 2 AE :: 2m : 2n :: m : n$. Pero como $AB = BC$ $= CD$, será $EF = BC = AB$, $DF = AE$ y $AD =$ $2AE + AB$. Luego $AB : AD :: m : n$.

489 Cuestion XXIX. *Dada la hypotenusa y la area de un triángulo rectilíneo rectángulo, trazar el triángulo.*

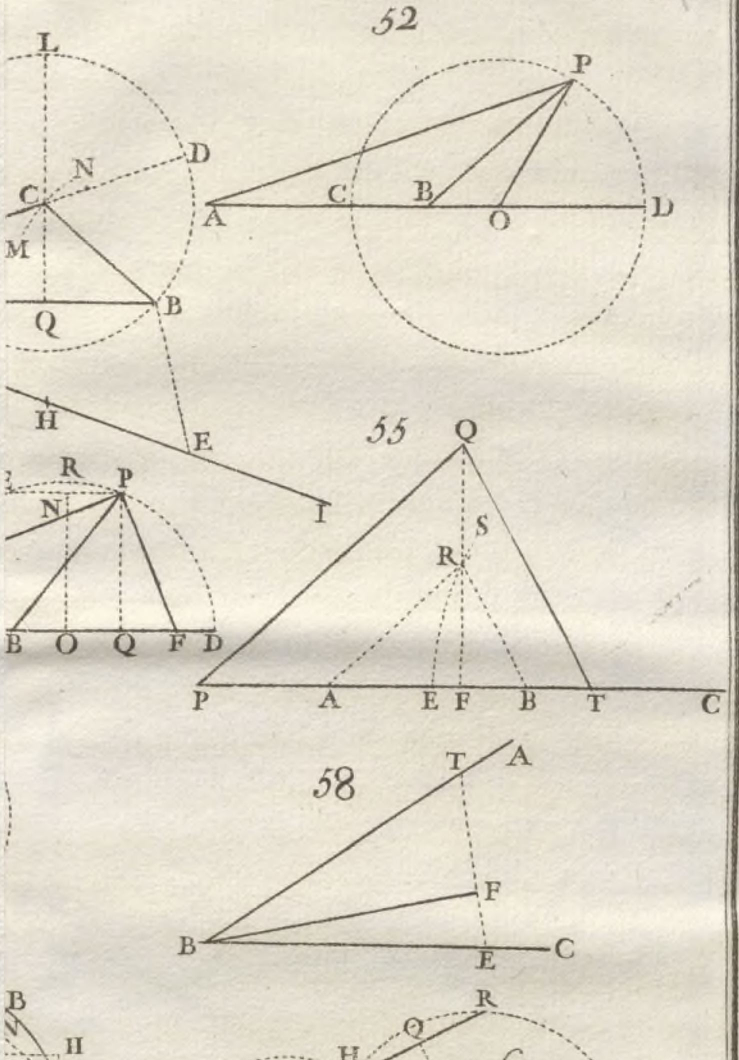
63. Sobre la hypotenusa dada *AB*, como diámetro, trácese el semicírculo *ACB*, y sobre *OB* igual á la mitad de *AB*, fórmese el rectángulo *OD* igual á la area dada del triángulo, de manera que su lado *DE* corte la circunferencia en *C*; tirando la *AC* y la *BC* estará hecha la operacion.

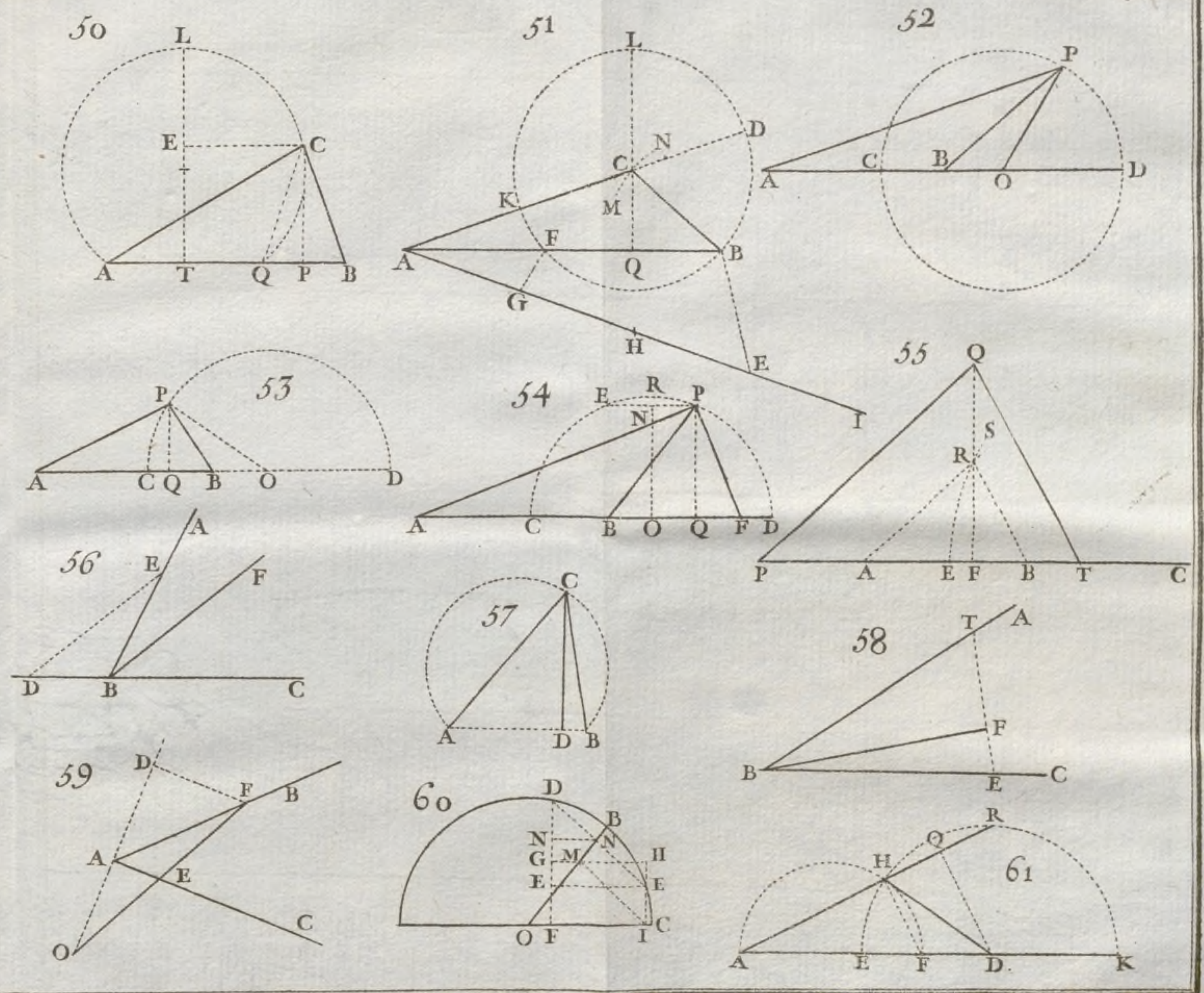
Por tener el triángulo *ABC* por base todo el diámetro *AB*, será igual al rectángulo *OD* que tiene la misma altura y por base la mitad de *AB* (I. 491); pero dicho rectángulo es igual por la construccion á la area dada; luego &c.

490 Cuestion XXX. *Trazar un triángulo rectilíneo rectángulo cuya area sea igual á un quadrado dado, y la suma de sus lados igual á una línea dada* AB.

64. Trácese sobre *AB* un semicírculo; hágase *ACD* igual á la mitad de un ángulo recto, y *CD* igual al duplo de *PQ* que es el lado del quadrado dado; tírese *DE* paralela á *AB*, que encuentre la circunferencia en *E*, y *EF* perpendicular á *AB*, que corte *AB* en *F*, en la qual prolongada tómese $FG = BF$, y tírese *AG*; será *AFG* el triángulo que se pide.

Plana 492.


52
55
58
61
L
D
N
C
M
B
Q
H
E
I
R
P
N
B O Q F D
P
C B
A O D
Q
S
R
P A E F B T C
T A
F
B
E C
B
H
E
I C
R
O
H
A E F D. K


50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61

Es evidente que $AF + FG = AB$, y tambien que la area $AFG = \frac{1}{2} AF \times FG = \frac{1}{2} AF \times FB = \frac{1}{2} (FE)^2 = \frac{1}{2} (DH)^2 = \frac{1}{4} (CD)^2 = (PQ)^2$. Fig.

Interpolaremos aquí la siguiente proposicion que se nos hace indispensable para pasar adelante.

491 *La area de un triángulo rectilíneo rectángulo* ABC, *es igual al rectángulo formado con la mitad de su perímetro, y el exceso que lleva dicha mitad á la hypotenusa, ó al lado mas largo.* 65.

Inscríbase en dicho triángulo el círculo EFG, y desde el centro D tírense á los ángulos y á los puntos de contacto las líneas DA, DB, DC, DE, DF y DG. Es patente que la suma de los tres triángulos ADB, BDC, ADC es igual á todo el triángulo ABC; y como el triángulo ADB es igual al rectángulo $\frac{1}{2} AB \times DG$, y así prosiguiendo; la suma de los rectángulos $\frac{1}{2} AB \times DG + \frac{1}{2} CB \times DF + \frac{1}{2} AC \times DE$ es igual á todo el triángulo ABC; pero la suma de estos rectángulos es igual al rectángulo hecho de la mitad del perímetro $AB + BC + AC$ y del semidiámetro DG, cuyo último rectángulo es por consiguiente igual al triángulo dado. Pero los ángulos E y G siendo rectos (I. 346), y el lado AD comun, y $DE = DG$, será tambien $AE = AG$ (I. 517). Del mismo modo $CE = CF$; por consiguiente $AC = AE + CE$ será igual á $AG + CF$; luego la hypotenusa es menor que la suma de los dos lados, de la cantidad $BG + BF$, ó del duplo del radio inscripto, y por consiguiente menor que la mitad

Fig. del perímetro de todo el radio, ó de la línea DG; luego &c.

492 Cuestion XXXI. *Dado el perímetro y la area de un triángulo rectángulo, trazar el triángulo.*

66. Tírese la AB igual al perímetro dado, partásela por el medio en C, y sobre AC fórmese el rectángulo $ACDE$ igual á la area dada; tómese $CF = CD$, y desde F tírese ácia D la línea indefinita FH, á la qual se tirará desde B la línea $BI = AF$; tíresele á la AB la perpendicular IK, y será BIK el triángulo que se pide.

Como $CD = CF$ en virtud de la construccion, será $IK = FK$, y por consiguiente $IK + IB + BK = FK + AF + BK = AB$. A mas de esto, como el exceso que lleva la mitad del perímetro AC á la hypotenusa $BI = AF$ es igual á $CF = CD$, resulta por lo dicho (I. 491) que la area del triángulo será igual á $ACDE$ igual á la area dada por construccion.

493 Cuestion XXXII. *Construir un triángulo rectángulo tal que sus lados estén en progresion arismética, y sea igual á un quadrado dado* ABCD.

67. Sobre la línea AB prolongada, hágase $BF = \frac{3AB}{2}$, y descríbase sobre AF el semicírculo AEF, que corta BC prolongada en E; hágase $BQ = \frac{4EB}{3}$; tírese la EQ, y estará hecha la operacion.

Una vez que por la construccion $QB : BE :: 4 : 3$, será $(BQ)^2 : (BE)^2 :: 16 : 9$; y $(BQ)^2 + (BE)^2 : (BE)^2 :: 16 + 9$ ó $25 : 9$, esto es (I. 517) $(EQ)^2 : (BE)^2 :: 25 : 9$. Luego $EQ : BE :: 5 : 3$; por consiguiente los

lados BE, BQ y EQ forman la misma progresion aris- Fig.
mética que los números 3, 4, 5. Y por ser $BQ = \frac{4EB}{3}$, será $EB \times \frac{BQ}{2} = \frac{2(EB)^2}{3} = 2BF \times \frac{AB}{3} = (AB)^3$.

494 Cuestion XXXIII. *En el círculo dado* CIHK, 68.
trazar tres círculos iguales E, F, G *que se toquen el uno al otro, y toquen la circunferencia del círculo dado.*

Desde el centro C tírense las rectas CH, CI, CK que dividan la circunferencia en tres partes iguales en los puntos H, I, K; tírese la IK, y tómese en la CK prolongada $KL = \frac{1}{2} IK$; tírese IL, y su paralela KF que encuentre CI en F; háganse HE y KG cada una igual á IF, y desde los puntos F, E y G trácense por los puntos I, H y K los círculos FIP, EMH, GNK, que serán los que se piden.

Antes de demostrarlo hemos de tirar las rectas FE, FG y EG. Por ser iguales en virtud de la construccion HE, IF y KG, serán tambien iguales las CE, CF y CG, y FG será paralela á IK (I. 454), y por consiguiente siendo KF paralela á IL por la construccion, los triángulos IKL y FGK serán equiángulos; luego siendo $IK = 2KL$, será (I. 459) FG igual á $2GK$ ó $2FP$; luego es evidente que cada uno de los círculos F y G toca al otro.

A mas de esto, los ángulos ECF, ECG y FCG, como tambien sus lados CE, CF y CG son iguales; serán tambien iguales las líneas EF, FG y EG (I. 407) y por consiguiente EF ó $EG = 2FI$ ó $2GK$; luego es evidente que los círculos E, F y G tambien se tocan el uno

Fig. al otro. Pero todos estos círculos tocan el círculo dado, porque todos pasan por los puntos *H*, *I*, *K* de su circunferencia, y tienen sus centros en líneas rectas que van desde el centro *C* á los puntos de contacto. Luego &c.

495 Cuestion XXXIV. *En un círculo dado* CEHG *trazar cinco círculos iguales* K, L, M, N *y* O, *tales que se toquen unos á otros, y toquen al círculo dado.*

69. Divídase toda la circunferencia *EGH* en cinco partes iguales en los puntos *E*, *F*, *G*, *H* y *I*, y tírense las líneas *CE*, *CF*, *CG*, *CH* y *CI*: tírese la *GH*, y en la *CH* prolongada tómese $HP = \frac{1}{2} GH$: tírese *PG*, y su paralela *HM*, que encuentre *CG* en *M*: hágase cada una de las *FL*, *EK*, *IO* y *HN* igual á *MG*, y desde los centros *K*, *L*, *M*, *N* y *O* descríbanse círculos por los puntos *E*, *F*, *G*, *H* y *I*, y estará hecha la operacion.

Su demostracion es muy facil para el que tuviere presente la de la última operacion.

Del mismo modo se podrian trazar seis, ocho ú diez círculos con las mismas circunstancias.

496 Cuestion XXXV. *Tirar una línea recta* PQ *que toque dos círculos* C *y* O *dados de magnitud y posicion.*

70. Sobre la recta *CO*, que vá desde el centro del un círculo dado al centro del otro, trácese el semicírculo *CDO*, en el qual se inscribirá la cuerda *CD* igual á la diferencia de los radios *CF* y *OE*; y desde el punto *B*, donde *CD* prolongada encuentra la periferia *BF*, tírese *PB* perpendicular á *CD*, tocará la *PB* ambos círculos.

Para demostrarlo, tirarémos la línea DO, y la línea OA Fig.
perperdicular á PQ. Con esto, el ángulo CDO será recto, porque coge un semicírculo; por consiguiente ya que los ángulos B y A son ambos rectos por construccion, el ángulo AOD será tambien recto, y la figura $DOAB$ un rectángulo; por consiguiente $AO = BD = BC - CD = CF - CD = OE$ por construccion. Ya que CB y OA son respectivamente iguales á CF y OE, y ambos ángulos A y B rectos, es evidente que la línea PQ toca ambos círculos.

Si se quisiera *tirar una línea recta* ab *que tocase ambos círculos, y que pasase por entre sus centros* C *y* O; enton- 70.
ces en lugar de tomar CD igual á la diferencia de los radios CF, OE, se tomaria Cd igual á su suma, y lo demás de la operacion se egecutaria como en el primer caso.

497 Cuestion XXXVI. *Tirar una línea recta* AD 71.
por dos círculos GAEF, HCSR *dados de magnitud y posicion, de manera que corte en ellos dos segmentos* AKBM, CTDN *respectivamente iguales á dos segmentos dados* EQFA′ SPRB′.

Por los centros G y H tírense á las subtensas EF, SR las perpendiculares GQ y HP, y desde los mismos centros, trácense á las distancias GQ, HP dos círculos GQK, HPT: tírese despues la recta AD que toque ambos círculos, conforme enseñamos (496), y estará hecho lo que se pide.

Porque estando las líneas FE, AB á la misma distancia del centro C, los segmentos que cortaren han de ser

Fig. iguales; lo mismo dirémos de los segmentos $SPRB$, $CTDN$.

498 Cuestion XXXVII. *Trazar una circunferencia de círculo que pase por un punto dado* P, *y toque dos líneas* AB, AC *dadas de posicion.*

72. Tírese la línea AP, y divídase por el medio el ángulo BAC con la línea recta AK, y desde un punto qualquiera Q de dicha línea, tírese QT perpendicular á AC: desde el punto Q tírese á AP la línea $QS = QT$: tírese PO paralela á QS, que encuentre AK en el punto O: desde el punto O como centro, y con el radio OP se trazará el círculo PKF, y este será el que se busca.

Si tiramos OH perpendicular á AC, y ON perpendicular á AB, por causa de las paralelas tendremos $QS : OP :: AQ : AO :: QT : OH$; luego por ser QT igual á QS, será $OH = OP$, y por consiguiente la circunferencia PKF pasará por el punto H; y como tambien AHO es un ángulo recto, AC tocará el círculo en dicho punto. Fuera de esto, los triángulos AOH y AON son equiángulos, y tienen un lado comun, será pues $ON = OH$, y el círculo tocará tambien la línea AB en el punto N.

499 Cuestion XXXVIII. *Trazar una circunferencia de círculo por dos puntos dados* D, G *que toque una línea recta* AB *dada de posicion.*

73. Tírese GD, y pártasela por el medio con la perpendicular FC que encuentre AB en C: tírese CD, y hágase FP perpendicular á AB; y desde el punto F tírese á CD prolongada la $FS = FP$: tírese DH paralela á FS,

y desde H, punto de interseccion de las líneas CF y DH, Fig. trácese con el radio DH el círculo DQG, y será el que se busca.

Si tiramos la HG y la HT paralela á FP, que encuentre AB en T, tendremos por razon de las líneas paralelas $FS : HD :: CF : CH :: FP : HT$, y por ser iguales los antecedentes FS y FP, serán tambiem iguales los consecuentes HD y HT; y por consiguiente ya que HT es perpendicular á AB, la circunferencia del círculo toca á AB en T, y tambien pasará por el punto G, porque los dos triángulos DFH, GFH tienen un ángulo igual á un ángulo, é iguales los lados que le forman, y serán por consiguiente iguales.

500 Cuestion XXXIX. *Dada la línea* AB, *y las líneas* AD *y* BG *perpendiculares á* AB, *hallar en la línea* AB *un punto* T, *tal que tirando las dos líneas* DT, GT, *el ángulo* DTG *que forman, sea el mayor que sea posible.* 74.

Trácese, conforme hemos enseñado en la última cuestion, el círculo GDQ, de manera que pase por los puntos D y G, y toque la línea AB: el punto de contacto T será el que se busca.

Tírense las GT y DT, y desde otro punto qualquiera R de la línea AB, tírense RG y RD: desde el punto Q donde GR corta el círculo, tírese QD: esto supuesto, el ángulo GQD que es esterno respecto del triángulo DQR, será mayor que GRD: luego ya que GTD está en el mismo segmento que GQD, será tambien mayor que GRD.

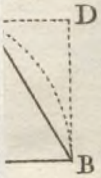
Fig. 501 Cuestion XL. *Trazar un círculo que toque dos líneas rectas* AB, AC *dadas de posicion, y otro círculo* O *dado de magnitud, y posicion.*

75. Tírese la línea AK que divida en dos partes iguales el ángulo CAB que forman las dos líneas dadas; y desde un punto qualquiera P de esta línea tírese PQ perpendicular á AB, prolongándola ácia R, de manera que QR sea igual al radio del círculo dado; por el punto R tírese paralelamente á AB la línea HM que encuentre en H la KA prolongada: tírese HO, á la qual se tirará desde P la $PV = PR$, y tírese OE paralela á PV, que encuentre AK en E, y corte en R' la circunferencia del círculo dado: finalmente desde E se trazará con el radio ER' el círculo $ER'KN$, y será el que se pide.

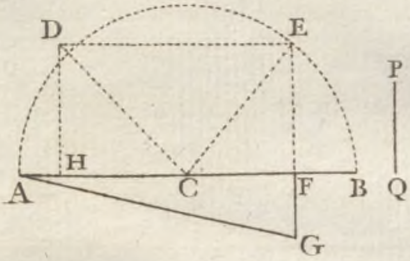
Si tiramos EG perperdicular á HM, que corte AB en F, tendremos por razon de las líneas paralelas, $PR : EG :: HP : HE :: PV : EO$; luego siendo $PR = PV$, serán tambien iguales EG y EO. Si de estas líneas restamos las cantidades iguales FG y OR', los residuos EF y ER' serán iguales; por consiguiente la circunferencia $R'KN$ pasará por F: tocará tambien AB en dicho punto, por ser EF, en virtud de la construccion, perpendicular á AB: tambien toca AC, porque AE parte por el medio el ángulo BAC: finalmente, toca el círculo O, porque la línea OE vá desde el centro O al centro E, y pasará por consiguiente por el punto R' comun á ambas circunferencias.

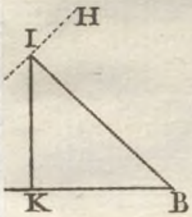
502 Cuestion XLI. *Habiendo tirado tres líneas des-*

Plana 498.

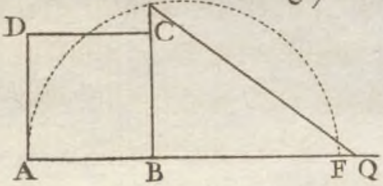


64

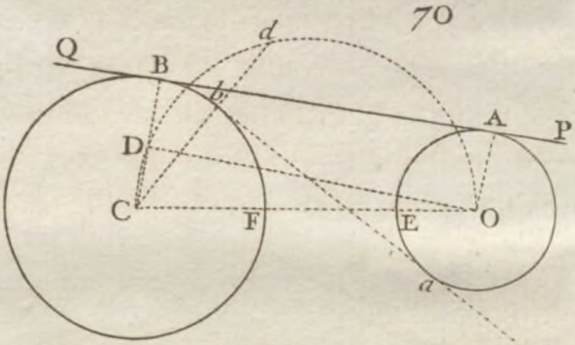


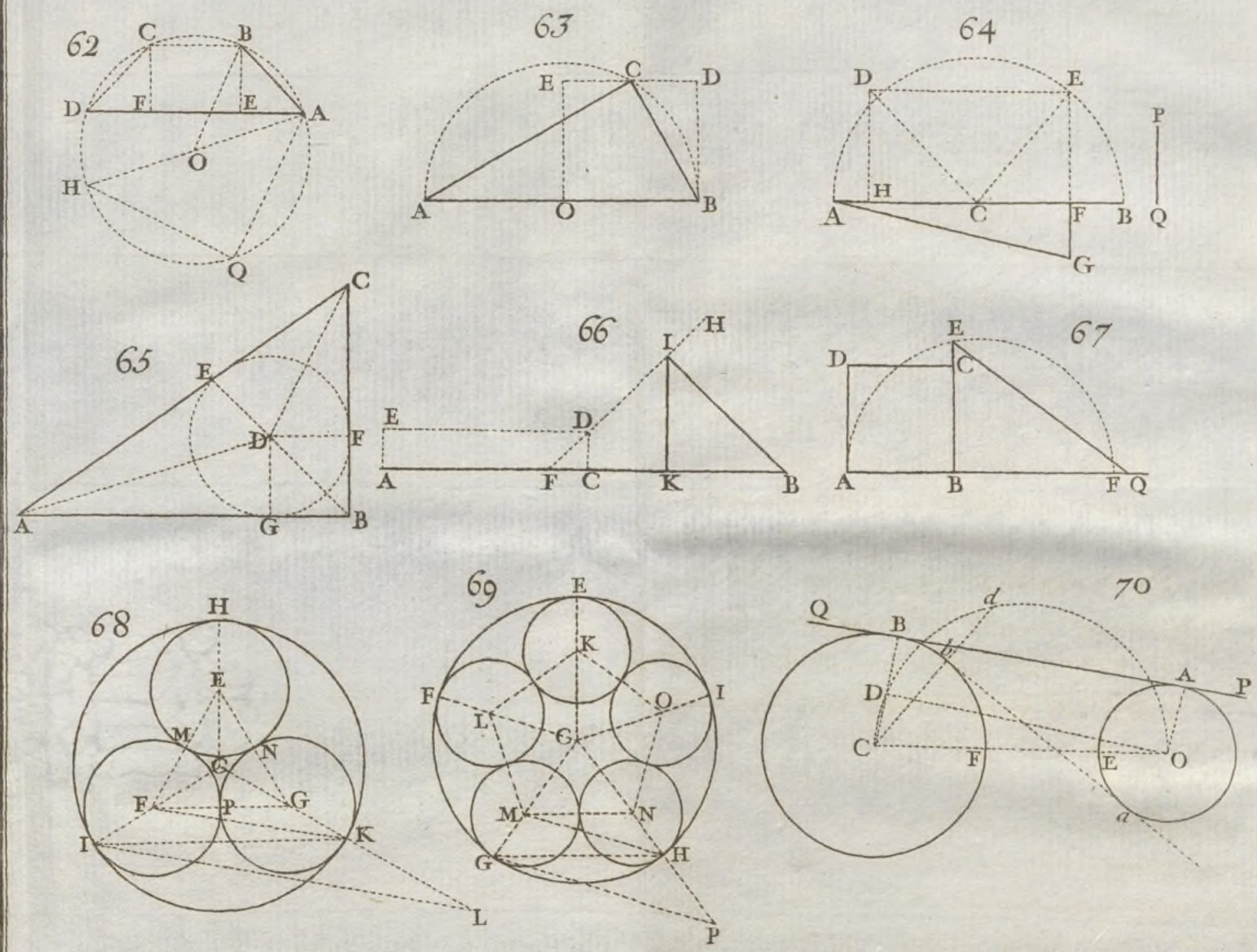


67



70




62
63
64
65
66
67
68
69
70

de los ángulos de un triángulo perpendicularmente á los lados opuestos, iguales á tres líneas dadas K, L, M, *trazar el triángulo.* Fig.

Tírese la recta indefinita RS, y tómese en ella $AB = K$: búsquese una quarta proporcional á las líneas M, L, K, con la qual como radio, y desde el punto A trácese un arco $R'CS'$; y desde B, con un radio $= L$, trácese otro arco que corte el primero en C: tírense AC y BC, y tíresele á la RS la perpendicular QC, en la qual prolongada tómese $QP = L$, y tírese PF paralela á RS, que encuentre AC prolongada en F: tírese FG paralela á CB; será AFG el triángulo que se pide. 76.

Para demostrarlo, tirarémos FE, GQ' y AV respectivamente perpendiculares á los tres lados del triángulo. Hecho esto, los triángulos ABC, AGF; AFE, AGQ'; GFE, AGV son equiángulos por construccion; por consiguiente $GQ' : FE :: AG : AF :: AB = K : AC = \left(\frac{K \times L}{M}\right) :: M : L$; luego por ser iguales por construccion los consecuentes FE y L, serán tambien iguales los antecedentes GQ' y M. Fuera de esto, $BC = L : AB = K :: FG : AG :: FE = L : AV$, y por consiguiente $K = AV$.

503 Cuestion XLII. *Dada en una línea recta la posicion de tres puntos, hallar un quarto punto, tal que las líneas que se le tiren desde los tres primeros formen ángulos iguales á ángulos dados, cada uno al suyo.*

Sean A, B, C los tres puntos dados: háganse los ángulos ACE y CAE respectivamente iguales á los ángu- 77.

Fig. los dados que, segun suponemos, han de formar las líneas tiradas desde los puntos *B*,*A* y *B*,*C*; prolónguense las *AE* y *CE* hasta que se encuentren en *E* : por *A*,*C* y *E* trácese la circunferencia de círculo *AECD*, y por *E* y *B* tírese la *EBD* que la encuentre en *D*, será *D* el punto que se busca

Si tiramos las líneas *AD* y *CD*, tendremos el ángulo *EDA* igual á *ACE*, pues descansan estos dos ángulos sobre un mismo arco, y están en la circunferencia (I. 372) por la misma razon *EDC* = *CAE* : luego &c.

504 Cuestion XLIII. *Dados tres puntos* A,B,C *como se quisiere, hallar un quarto punto, de manera que las líneas que á él se tiraren desde los tres primeros, formen unas con otras ángulos iguales á ángulos dados, cada uno al suyo.*

78. Desde uno de los puntos dados tírense á los otros líneas rectas, y sobre la línea *AB* trácese un segmento de círculo capaz de un ángulo igual al que dicha línea subtende : complétese el círculo, prolónguese *BA*, y hágase el ángulo *DAQ* igual al ángulo que *BC* subtende, y tírese *AQ* que encuentre en *Q* la circunferencia : tírese *QC* que encuentre la misma circunferencia en *P* : tírense las líneas *AP* y *BP*, y estará hecha la operacion.

El ángulo *APB* es igual por construccion al ángulo que *AB* subtende : como los ángulos *QAB* y *QPB* abrazan un mismo segmento, serán iguales : lo serán tambien sus suplementos *DAQ* y *BPC* : luego &c.

505 Cuestion XLIV. *Tirar una línea recta* EG *por el círculo* AEFD *dado de magnitud y posicion, de manera*

que tambien encuentre una línea recta QC *dada de posicion*, Fig.
con la qual forme un ángulo dado, de modo que sus partes EF, FG *interceptadas por el círculo, y dicha línea, tengan una con otra la misma razon que las dos líneas* ab *y* bc.

En el punto B de la recta QC hágase el ángulo QBA 79.
igual al ángulo dado; y tírese por el centro O perpendicularmente á AB la DQ que encuentre BA en R, y CG en Q: pártase ab por el medio en d, y tómese en la RB la línea $RP = bd$, y $PQ' = bc$, y tírense PM y $Q'N$ paralelas á DQ: desde el punto N donde $Q'N$ corta QC, tírese NL paralela á BA, que encuentre PM en M: por los puntos Q y M tírese QMF que encuentre la circunferencia del círculo en F, y tírese por F la EFG paralela á BA y estará hecho lo que se pide.

Por ser paralelas las líneas GE, BA y NL, los ángulos QGE, QBA &c. serán iguales, y tambien tendremos $SF : FG :: LM : MN$; pero LM es por construccion $= RP = bd$, y $MN = PQ' = bc$; por consiguiente $SF : FG :: db : bc$; luego $EF = 2SF : FG :: ab = 2bd : bc$.

506 Cuestion XLV. *Inscribir una línea recta* AD *entre las circunferencias de dos círculos* C *y* O *dados de magnitud y posicion, de manera que forme con la línea recta* CO *tirada desde el centro del un círculo al centro del otro un ángulo dado.*

Hágase OCB igual al ángulo dado, y CB igual á la 80.
línea dada: desde el punto B como centro y con un radio igual al del círculo C, trácese el arco NDM que corte el

Fig. círculo O en D: tírese BD, y su paralela CA que encuentre la circunferencia en A: tírese la AD, y estará hecha la operacion.

Por ser CA y DB iguales y paralelas por construccion, lo serán tambien AD, CB (I. 427).

81. 507 Cuestion XLVI. *De un rectángulo dado* ABCD *cortar la porcion* EBCDGFE, *cuyo ancho sea en todas partes uno mismo, y cuya area sea cabalmente la mitad del rectángulo.*

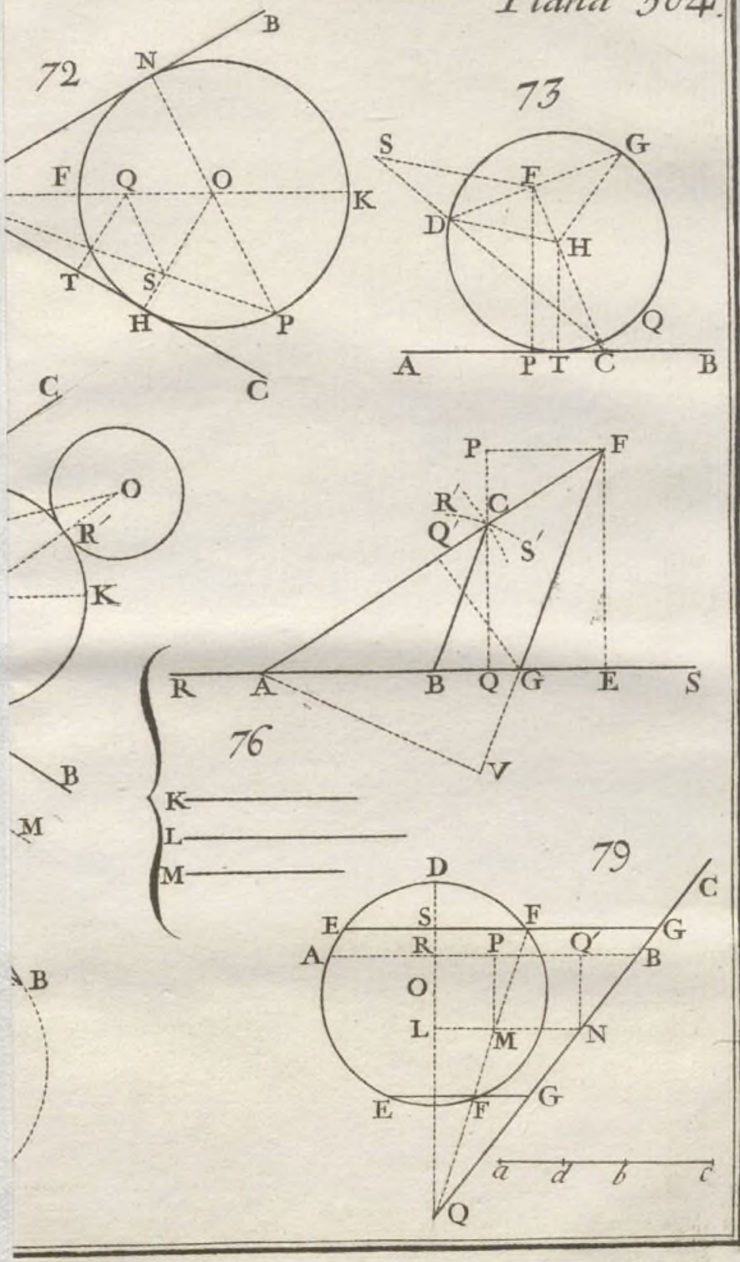
Tómese en la línea BA la BH igual á BC ó AD, y en la línea DA prolongada hágase AP media proporcional entre BA y $\frac{1}{2} AD$, de suerte que $(AP)^2$ sea igual á la area dada $AGFE$. Desde el punto P tírese al medio de AH la línea PO: hágase $OE = OP$, y $DG = BE$; conclúyase el rectángulo $EAGF$, y estará resuelta la cuestion.

Si desde el centro O se traza el semicírculo EPQ, es evidente que $AQ = EH = BH - BE = AD - DG = AG$; y por consiguiente que $AE \times AG = AE \times AQ = (AP)^2$ (I. 474).

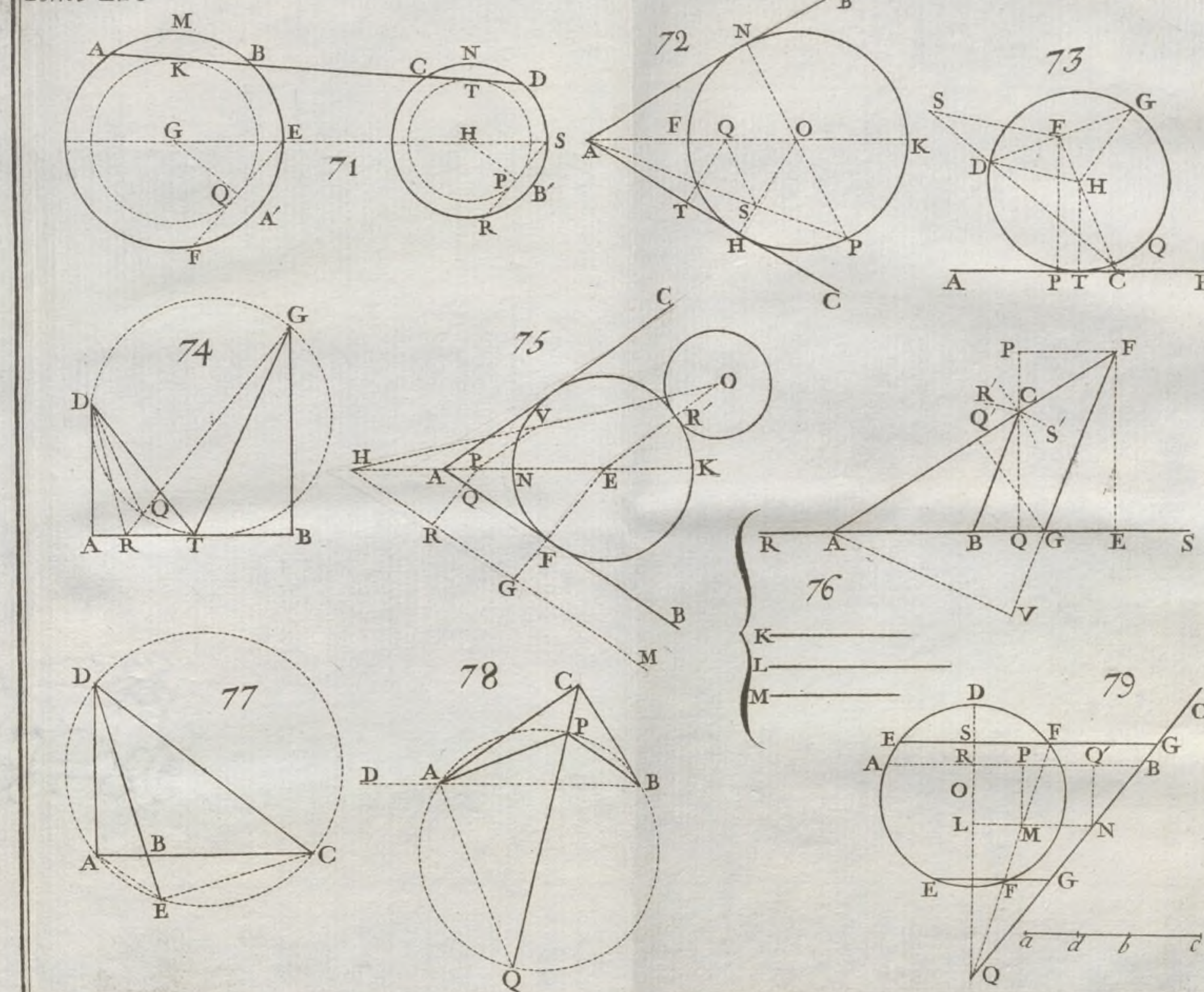
82. 508 Cuestion XLVII. *Dados tres puntos* A, B, C, *hallar otro punto* P, *tal que las líneas tiradas desde él á los otros tres, tengan respectivamente la misma razon que las tres líneas dadas* a, b, c.

Despues de tiradas líneas desde cada uno de los puntos dados á los demás, tómese en la AB la parte AF igual á la línea a, y $AI = c$: háganse tambien los ángulos AFG y AIK iguales cada uno á ACB: desde los puntos F y G

Plana 504.


72
73
76
79
N
B
F
Q
O
K
T
S
H
P
C
S
G
F
D
H
Q
A
P
T
C
B
P
F
R′
C
Q′
S′
O
R′
K
R
A
B
Q
G
E
S
V
K
L
M
D
E
S
F
R
P
Q′
G
A
B
O
L
M
N
E
F
G
a
d
b
c
Q

Tomo II. Plana 504.



como centros, y con los radios b y AK respectivamente, Fig.
trácense dos arcos que se corten en H; desde cuyo punto tírense las líneas HF y HA: tírese BP haciendo el ángulo ABP igual al ángulo AHF, y encontrará AH prolongada en el punto P que es el que se busca.

Tírense las líneas BP, CP y GH. Como los triángulos ABP, AHF son equiángulos por construccion, tendremos $AP : BP :: AF = a : FH = b$; y tambien $AB : AP :: AH : AF$; y $AB : AC :: AG : AF$, por ser tambien equiángulos los triángulos ABC y AGF; de donde es evidente por ser unos mismos los estremos de las dos últimas proporciones que $AP \times AH = AC \times AG$, ó $AC : AP :: AH : AG$; por consiguiente serán equiángulos los triángulos ACP, AHG (I. 464); y tendremos $AP : CP :: AG : GH = AK :: AF = a : AI = c$.

509 Cuestion XLVIII. *Trazar un triángulo* ABC *se-* 83.
mejante á otro triángulo dado AMN, *tal que las tres líneas* AP, BP, CP *tiradas desde sus ángulos á un mismo punto* P, *sean respectivamente iguales á tres líneas dadas* AD, AF *y* AK.

Tírense las líneas DE y KG que formen los ángulos ADE y AKG cada uno igual al ángulo dado N, y que encuentren la línea AN en los puntos E y G: desde los puntos D y E como centros, y con los radios AF y AG trácense dos arcos que se corten en H: tírese AH, en la qual se tomará $AP = AD$; y desde P tírense á las líneas AM y AN las PB y PC respectivamente iguales á AF y

Fig. AK : tirando la línea BC, será el triángulo ABC el que se pide.

Por la construccion las tres líneas AP, BP, CP son respectivamente iguales á las tres líneas dadas AD, AF, AK, luego solo nos queda por probar que el triángulo ABC es semejante al triángulo AMN. Suponiendo tiradas las líneas DH y EH, será $AP : PC$ ó $AD : AK :: AE : AG = EH$; luego los triángulos APC y AHE serán equiángulos (I.464), y por consiguiente $AC : AH :: AP = AD : AE :: AN : AM$; pero ya que los triángulos APB y ADH tienen por construccion el ángulo DAP comun, y $AP = AD$, $PB = DH$, serán (I.407) enteramente iguales; por consiguiente, substituyendo en la última proporcion AB en lugar de AH, tendremos $AC : AB :: AN : AM$; de donde resulta que los triángulos ABC y AMN son equiángulos, y semejantes.

84. 510 Cuestion XLIX. *Dados en el triángulo* ace, *además del ángulo* c, *los segmentos de los lados* ab *y* de, *y los ángulos* aeb *y* dbe *que subtenden, trazar el triángulo.*

Sobre AB *igual* á *ab* hágase un segmento de círculo capaz del ángulo *aeb* : hágase el ángulo $ABF = ace$, $BAN = dbe$, y la línea $BF = ed$; desde el punto N donde AN corta la circunferencia del círculo, tírese por el punto F la línea NFE que encuentra la circunferencia en E, tírense las líneas AE y BE, y la EC paralela á BF, que encuentre en C la AB prolongada; estará resuelta la cuestion.

Para probarlo, tirarémos BD paralela á FE. Ya que

las líneas *BD*, *EF*, y *ED*, *FB* son paralelas, será *ED* = Fig.
BF = *ed*, y el ángulo *ACE* será tambien igual á *ABF* = *ace* (I. 329). A mas de esto, el ángulo *BEN* = *DBE* es igual á *BAN* = *dbe*, porque abrazan un mismo arco *BN*. Luego &c.

511 Cuestion L. *Trazar un trapecio cuyas diagona-* 85.
les y dos lados opuestos sean todos de longitud determinada, y del qual el ángulo formado por los lados dados, quando se encuentran prolongados, sea tambien dado.

Tírese la recta indefinita *AC*, en la qual se tomará *AB* igual al uno de los dos lados dados; hágase el ángulo *CBG* igual al ángulo dado, y hágase *BG* igual al otro lado dado; desde los puntos *A* y *G* como centros, con intervalos iguales á las diagonales, trácense dos arcos que se corten en *D*; hágase *DE* igual y paralela á *GB*; tírense *DB* y *EA*, será *ABDE* el trapecio que se pide.

Lo probaremos despues de tiradas las líneas *DG*, *DA* y *BE*, y despues de prolongadas las líneas *BA* y *DE* hasta que concurran en *F*. Las líneas *BG* y *DE* son iguales y paralelas por construccion; luego *DE* = *DG*, cuya última línea es por construccion igual á la una de las diagonales dadas, como *AD* es igual á la otra; fuera de esto, los lados *AB* y *ED* = *BG* son iguales á los lados dados por construccion; y el ángulo *F* es igual al ángulo dado *CBG*, por ser *DF* paralela á *GB*.

512 Cuestion LI. *Dados los segmentos* AD, BD *de* 86.
la base, y la línea DC *que parte por el medio el ángulo*

Fig. ACB *de un triángulo rectilineo, trazar el triángulo.*

En la AB prolongada tómese DO que tenga con AD la misma razon que DB con $AD - DB$, y desde el centro O, con el radio OD, trácese el semicírculo DCQ; desde el punto D como centro, y con un radio igual á esta línea dada DC, trácese el arco MCN, y desde el punto C donde el arco corta la circunferencia DCQ, tírense las líneas CA y CB, y estará concluida la operacion.

Una vez que $DO : AD :: DB : AD - DB$, tendremos (477) $AC : CB :: AD : DB$; luego CD parte por medio el ángulo ACB (I. 453).

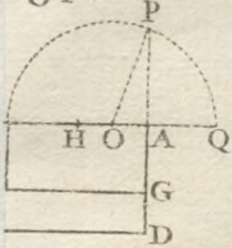
87. 513 Cuestion LII. *Dada la base, el ángulo del vértice, y una línea tirada desde el vértice que divida la base por el medio, construir el triángulo.*

Descríbase sobre la base AB el segmento de círculo ADB capaz del ángulo dado; y desde el punto F donde la perpendicular DF parte por el medio AB, con el radio FC igual á la línea que divide la base, trácese el arco MCN que encuentre la circunferencia ACB en el punto C; tírense las líneas AC y BC, y estará resuelta la cuestion.

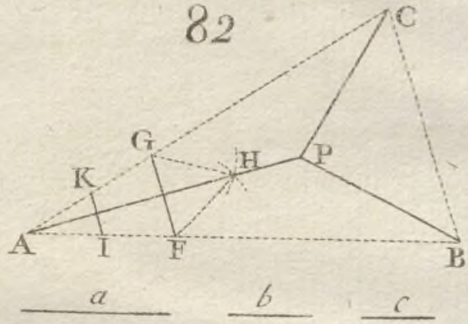
La misma construccion manifiesta los principios en que se funda.

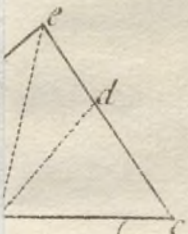
514 Cuestion LIII. *Dada la base, la diferencia de los ángulos de la base, y una línea que tirada desde el ángulo vertical divida la base por el medio, trazar el triángulo.*

81

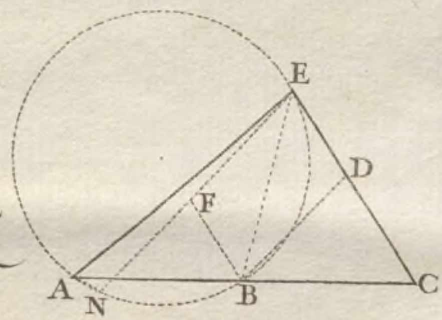


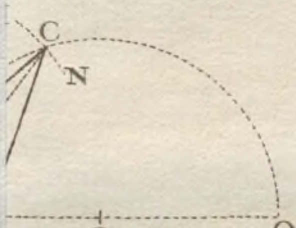
82



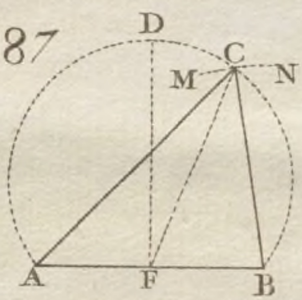


84

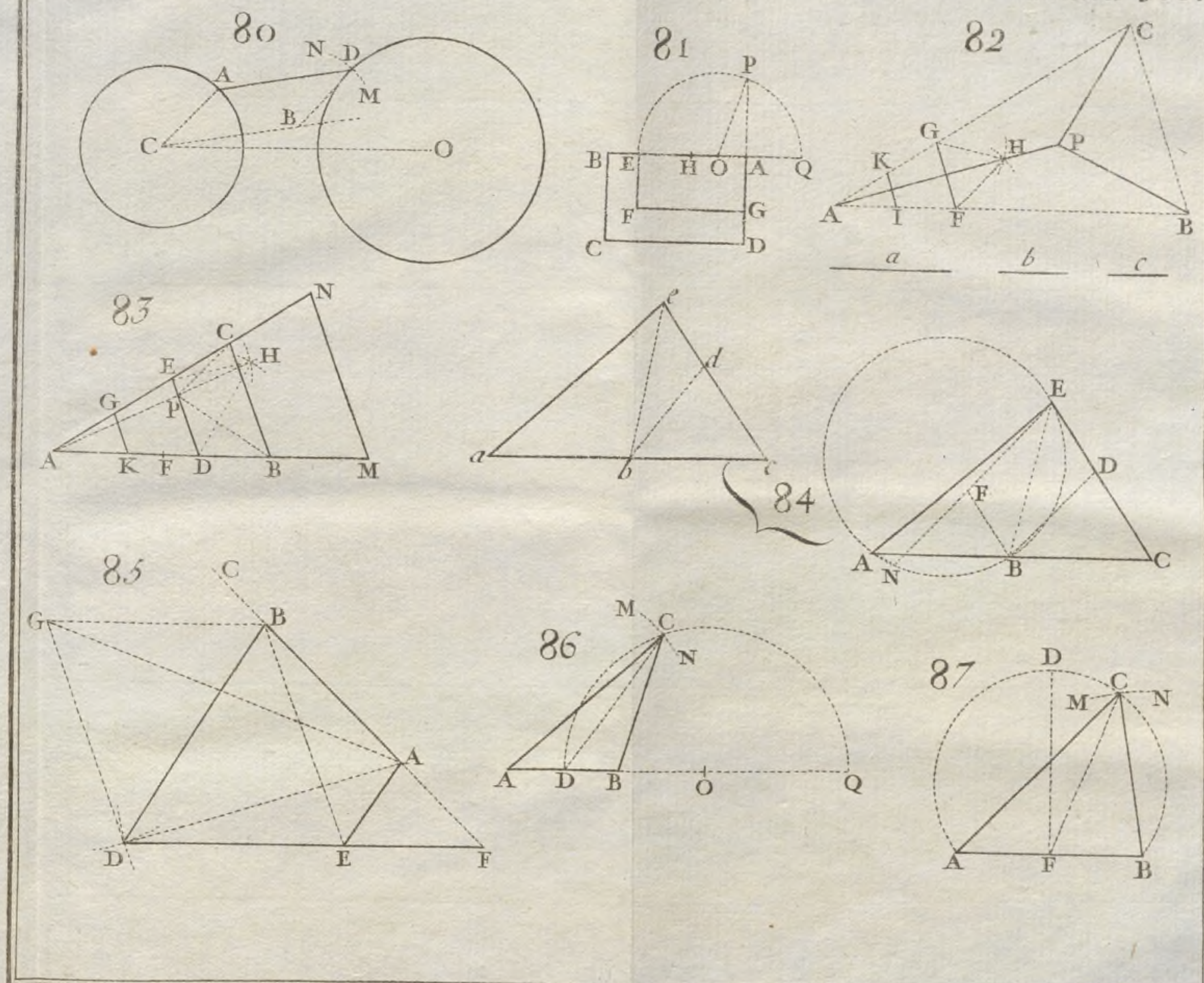




87



Tomo II. Plana 508.



Sobre AB igual á la base dada trácese un segmento Fig.
de círculo $AHEB$ capaz de un ángulo igual á la diferen- 88.
cia de los ángulos de la base; divídase AB en dos partes iguales en el punto C, y tómese CD que tenga con AC una razon duplicada de la que hay entre AC y la KL; tírense CS y DI perpendiculares á AB, que encuentren el círculo en S é I; tírese AI que corta CS en G, y por el punto G tírese la cuerda EGH paralela á AB; tírense las líneas AE y AH, y en la línea AI tómese $AN = KL$; tírese MNP paralela á EH, que encuentre AE y AH en M y P; será AMP el triángulo que se pide.

Ya que por la construccion CG es paralela á DI, y $(KL)^2 : (AC)^2 :: AC : CD$; será (I. 459) $(KL)^2 : (AC)^2 :: AG : GI :: (AG)^2 : GI \times AG$; pero $GI \times AG = EG \times GH = (EG)^2$ (I. 473 y I. 349); luego $(KL)^2 : (AC)^2 :: (AG)^2 : (EG)^2$; y por consiguiente $KL : AC :: AG : EG :: AN : NM$; pero por construccion $AN = KL$, luego $NM = AC$, y por lo mismo $MP = 2MN = AB$. A mas de esto, la diferencia de los ángulos de la base $P - M = AHE - AEH = AEB$ que por construccion es igual á la diferencia dada.

515 Cuestion LIV. *Dada la altura, el ángulo del* 89.
vértice, y la suma de los tres lados de un triángulo, trazar dicho triángulo.

Hágase AB igual á la suma de los tres lados; pártase por el medio en P, tirando PO perpendicular á AB, y haciendo el ángulo PAO igual á la mitad del ángulo

Fig. dado del vértice; desde el centro O trácese con el radio OA el círculo AHB, y en la línea OP prolongada tómese PK igual á la altura dada, y tírese KH paralela á BA, que corte el círculo en H; tírense las líneas AH y BH, y háganse los ángulos BHF y AHE iguales respectivamente á HBF y HAE; será EHF el triángulo que se pide.

Primero que lo demostremos hemos de tirar las líneas OB, OH, y la HQ perpendicular á AB. Tendremos $EFH = BHF + HBF = 2HBF$ por construccion, $= HOA$ (I. 373); y del mismo modo $FEH = HOB$; de donde se sigue que $EFH + FEH = HOA + HOB = AOB$; y restando cada una de estas cantidades iguales de la suma de dos ángulos rectos, tendremos $EHF = OAB + OBA$ (I. 393) $= 2OAB$ igual al ángulo dado por construccion. A mas de esto, $QH = PK$ igual á la altura dada, y siendo $EH = AE$, y $FH = BF$ (I. 403) será $EH + HF + EF = AB$ igual á la suma dada de los lados.

516 Cuestion LV. *Trazar un triángulo dada la suma de sus tres lados, la diferencia de los ángulos de la base, y la longitud de una línea que divida por el medio el ángulo vertical.*

90. Tómese AB igual á la suma de los lados, pártala por el medio en E la perpendicular DEN, y hágase el ángulo NER igual á la mitad de la diferencia dada de los ángulos de la base, haciendo ER igual á la línea que divide por el medio el ángulo vertical; por el punto R tíre-

se la *CNR* paralela á *AB*, que encuentre *DEN* en *N*; tírese *NA* á la qual se tirará $EM = ER$, y la *AD* paralela á *EM*, que encuentre *NED* en *D*; y desde *D* como centro y con el intervalo *DA*, trácese el círculo *ACB*, que corte en *C* la línea *RNC*; tírense las *AC* y *BC*; hágase el ángulo $BCF = CBF$, y $ACG = CAG$, y tírense *CF* y *CG* que encuentren *AB* en *F* y *G*; será *FCG* el triángulo que se pide.

Para probarlo, tirarémos á la *AB* la perpendicular *CP*; la *CQ* que divida en dos ángulos iguales el ángulo *GCF*, y la *DH* paralela á *ER*, que encontrará *CR* en *H*. Hecho esto, las líneas paralelas darán $ER : DH :: EN : DN :: EM : DA$; y como $ER = EM$ por construccion, *DH* y *DA* son tambien iguales, y está el punto *H* en la periferia del círculo. Por consiguiente, el ángulo *NDH* que está en el centro, y descansa sobre la mitad del arco *HC*, será igual al ángulo *HAC* de la periferia, que abraza todo el arco *HC*, quiero decir que será igual á la diferencia de los ángulos *ABC* y *BAC*, pero como el ángulo *GFC* es duplo de *ABC*, y *FGC* duplo de *BAC*, por construccion, la diferencia entre *GFC* y *FGC* será dupla de la diferencia entre *ABC* y *BAC*, y por consiguiente igual á $2NER = 2NDH$, que es la diferencia dada. A mas de esto, por ser $GCQ = FCQ$, será $2PCQ$ la diferencia entre *PCG* y *PCF*, que ha de ser igual á $2NER$ que es la diferencia de sus complementos *PGC* y *PFC*; luego $PCQ = NER$, y por consiguiente

Fig. $CQ = ER$. Y como el ángulo $ACG = CAG$, y $BCF = CBF$, será $CG = AG$, y $CF = FB$; y finalmente $CG + GF + FC = AB$.

91. 517 Cuestion LVI. *Reducir un triángulo dado á la forma de otro, ó hacer un triángulo que sea semejante á un triángulo é igual á otro.*

Sobre la base AB del triángulo ABC, al qual queremos que sea igual el otro triángulo, trácese el triángulo ADB semejante al triángulo que se pide; tírese CF paralela á AB, que encuentre AD en F; tómese AE media proporcional entre AD y AF; y tírese EG paralela á DB; el triángulo AGE será el que se pide.

Si tiramos FR y DQ perpendiculares á AB, será el triángulo ADB al triángulo $ACB :: DQ : FR$ (I. 508) :: $AD : AF$ (I. 507) :: $(AD)^2 : AD \times AF :: (AD)^2 : (AE)^2$ por construccion, :: el triángulo ADB: al triángulo AEG (I. 509). Y como los antecedentes de la primera y de la última de estas razones iguales son unos mismos, los consecuentes ACB y AEG serán indispensablemente iguales.

92. 518 Cuestion LVII. *Hallar en un triángulo dado* ABC *un punto* O, *tal que las líneas rectas que desde él se tiren á los ángulos del triángulo dividan todo el triángulo en tres partes* COA, AOB, BOC, *que tengan respectivamente una con otra la misma razon que las tres líneas dadas* m, n, p.

En los lados CA y AB prolongados, si fuese menes-

ter, tómense las *CE* y *AF* cada una igual á $m + n + p$, Fig.
y tírense las *EB* y *FC*: tómese $Ce = m$, $Ac = n$, y tírense *eb*, y *cf* respectivamente paralelas á *EB* y *CF*, que encuentren los lados del triángulo dado en *b* y *f*; tírense tambien *bQ* y *fP* paralelas á *AC* y *AB*, estará el punto que se busca en *O* donde concurren estas líneas.

Tiremos, para probarlo, las perpendiculares *bH* y *BD* á la línea *AC*. Los triángulos *CBE*, *Cbe* son semejantes, y sonlo tambien *CBD* y *CbH*; por consiguiente $Ce : CE$, esto es, $m : m + n + p :: Cb : CB :: dH : BD ::$ el triángulo *AOC* : triángulo *ABC*. Del mismo modo probaríamos que *AOB* es á todo el triángulo $ABC :: n : m + n + p$; de donde se inferiría que *BOC* seria á todo el triángulo :: $p : m + n + p$; y que por lo mismo dichas porciones estan una con otra en la razon dada de *m*, *n* y *p*.

519 Cuestion LVIII. *Dividir un trapecio dado* ABDC *en una razon dada por una línea* QN *que pase por un punto dado* P, *y encuentre los dos lados paralelos de la figura.* 93.

Divídase por el medio *AD* en *E*, y tírese *GH* paralela á *AB* que encuentre *BC* en *H*; divídase *GH* en *M* en la razon señalada, y tirando por *M* la línea *PQN*, estará resuelta la cuestion.

Antes de probarlo hemos de tirar *EMF* é *IKH* paralelas á *AD*, que encuentren *DC* y *AB* en *E*, *I*, *K* y *F*. Hecha esta preparacion, las líneas paralelas nos darán $GD = ME = HI$, y $AG = FM = KH$; luego por ser $GD = AG$ por construccion, será $ME = FM$, y $HI =$

Fig. *HK*; y el triángulo *EMN* = *FMQ*, é *IHC* = *BHK* (I. 407). Luego el trapecio *AQND* será tambien igual al paralelogramo *DEFA*, y el trapecio *QBCN* igual al paralelogramo *FI*; pero como estos paralelogramos tienen uno con otro la misma razon que sus bases ó la de *GM* á *MH* (I. 507) será *GM*: *MH* : : *AQND* : *QBCN*.

520 Cuestion LIX. *Cortar de un trapecio* ABCD *una porcion* AQND *igual á un rectángulo dado, con una línea que pase por un punto dado* P, *que encuentre los dos lados paralelos.*

Pártase por el medio *AD* en *G*, y tírese *GH* paralela á *AB*; constrúyase sobre la *AD* un paralelogramo *ADEF* igual al rectángulo dado, y por el punto de interseccion de *GH* y *EF* tírese *PQN*; estará hecho lo que se pide. Es evidente.

94. 521 Cuestion LX. *Dividir el quadrilátero* ABCD *en razon dada, por una línea recta* LH *que forma con los lados opuestos* AC, BD *ángulos dados.*

Prolónguense dichos lados opuestos hasta que concurran en *E*; tírese *AD*, y despues *CF* paralela á *AD*, que encuentre *BE* en *F*; divídase *BF* en *G* en la razon dada; y haciendo el ángulo *EAK* igual al ángulo dado que forma *HL* con *AC*, tómese *EH* media proporcional entre *EG* y *EK*; tirando finalmente *HL* paralela á *AK*, estará resuelta la cuestion.

La construccion nos dá *EG* : *EH* : : *EH* : *EK* : : *EL* : *EA* (I. 451); luego *EG* × *EA* = *EH* × *EL*, y por lo mismo los triángulos *EHL*, *EAG* serán iguales; si de cada uno quitamos la parte *EDC* comun á ambos, los resíduos *CDHL*, *CDGA* serán iguales, y por consiguiente *ALHB*, *AGB* que son las diferencias entre dichos resíduos y el trapecio *ABCD*, serán tambien iguales. Pero el triángulo $ADF = ACD$, porque están sobre una misma base y entre paralelas; luego añadiéndole á cada uno la parte *AGD*, será tambien $AGF = CDGA = CDHL$; pero $AGF = CDHL : AGB = ALHB :: GF : GB$ (I. 507). Luego &c. Fig.

522 Cuestion LXI. *Dadas de posicion dos líneas* AG, AH *que concurren en el punto* A, *tirar una línea* NP *que haga con dichas líneas ángulos dados, de manera que el triángulo* ANP *que resulte, sea igual al quadrado* ABCD. 95.

Sea el ángulo *ABE* igual al ángulo dado *APN*, y tírese *BE* que encuentre *AE* en *E*; tírese *EF* perpendicular á *AH*; hágase $BQ = 2EF$; sobre la *AQ* trácese el semicírculo *AMQ* que cortará *BC* en *M*; tírense *MN* paralela á *AH*, que encontrará *AG* en *N*, y *NP* paralela á *EB*; será *ANP* el triángulo que se pide.

Por ser semejantes los triángulos *AEB* y *ANP* serán el uno al otro como los quadrados de sus alturas *EF* y $MB = NS$; pero $(BM)^2 = BQ \times AB = 2\,EF \times AB$: por consiguiente el triángulo $AEB = EF \times \frac{1}{2}\,AB$: al triángulo $ANP :: (EF)^2 : 2EF \times AB :: EF : 2AB :: EF \times \frac{1}{2} AB : (AB)^2$ (I. 507); y siendo unos mismos los antecedentes, serán los consecuentes iguales, esto es, $ANP = ABCD$.

Fig. 523 Cuestion LXII. *Por un punto dado* P *tirar una*
96. *línea recta* PED *que corte dos líneas rectas* AB, AC *da-*
97. *das de posicion, de manera que el triángulo* ADE *que resulte, sea de una magnitud dada.*

Tírese *PFH* paralela á *AB*, que corte *AC* en *F*; y hágase sobre la *AF* el paralelogramo *AFHJ* igual á la area del triángulo dado; tírese *IK* perpendicular á *AI* é igual á *FP*, y desde el punto *K* tírese á *AB* la $KD = PH$, tírese finalmente *DPE*, y estará hecho lo que se pide.

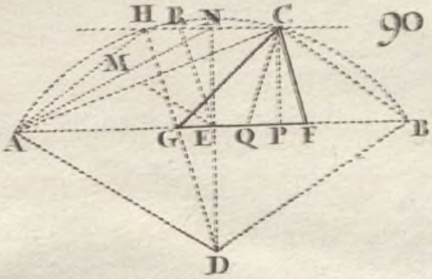
Supongamos que las *DE* é *IH* se corten en el punto *M*; es evidente por causa de las líneas paralelas que los tres triángulos *PHM*, *PFE*, y *MDI* serán equiángulos; y como los triángulos equiángulos están en la misma proporcion que los quadrados de sus lados homólogos, y la suma de los quadrados de $FP = IK$ y de *DI* es igual, por construccion, al quadrado de $PH = KD$, es evidente que la suma de los triángulos *PFE* y *DMI* será igual al triángulo *PHM*, y
96. si á dichas cantidades iguales añadimos en la fig. 96 *AFPMI*,
97. será $ADE = AFHI$; pero en la fig. 97 se restará *PFE* de *PHM*, y el resíduo *EFHM* será igual á *DMI*, y añadiendo á cada una de estas cantidades iguales la figura *AIME*, será $AFHI = ADE$, como antes.

98. 524 Cuestion LXIII. *Cortar en un polígono dado* BCIFGH *la porcion* EDBHG *igual á un rectángulo dado* KL, *con tirar una línea recta* ED *que pase por el punto dado* P.

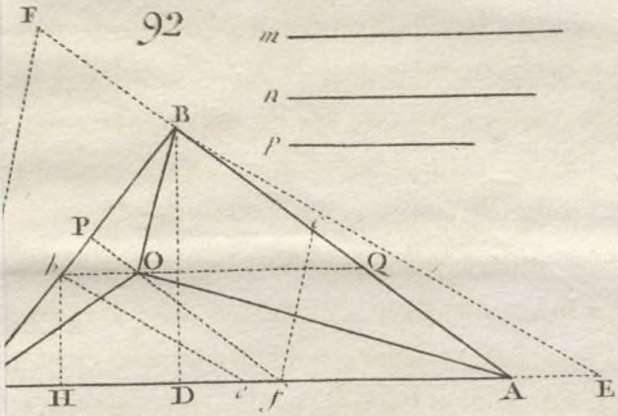
Prolónguense los lados *CB* y *FG* del polígono que ha de encontrar la línea *ED*, hasta que concurran en *A*: cons-

89

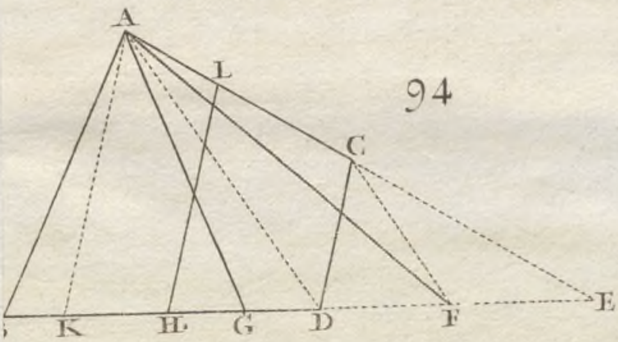
90



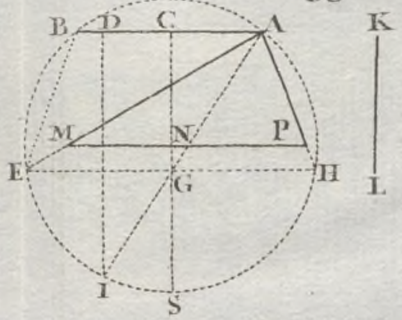
92



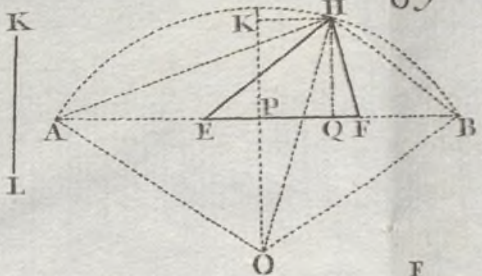
94



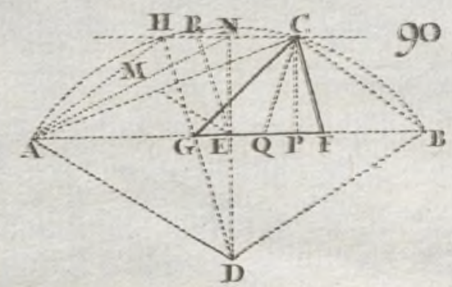
88



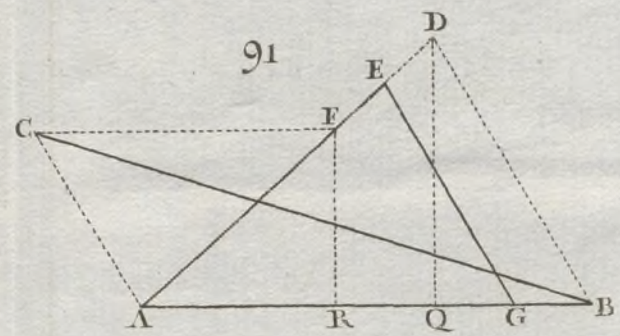
89



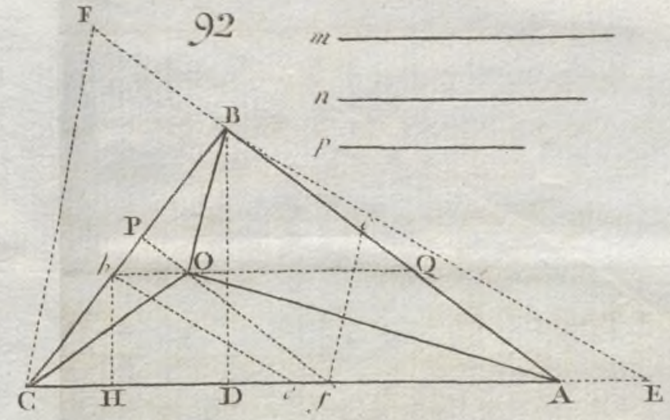
90



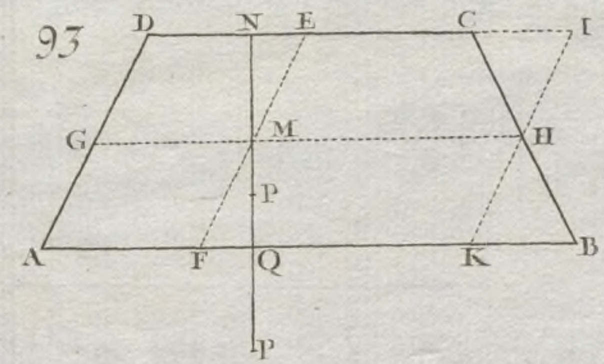
91



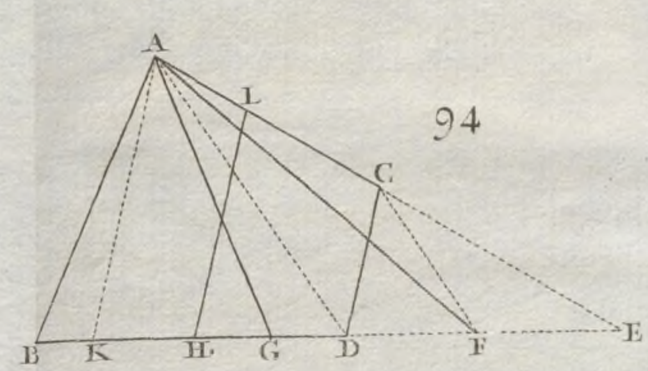
92



93



94



trúyase sobre la LM el rectángulo $MN = AGHB$, y tí- Fig.
rese, por lo dicho en la última cuestion, la línea ED por el punto P, de modo que el triángulo ADE sea igual á todo el rectángulo KN: será $EDBHG = KL$, y como $AED = KN$, restando de cada una de estas cantidades las cantidades iguales $AGHB$ y MN, el resíduo $EDBHG = KL$.

525 Cuestion LXIV. *Dada la base, el ángulo del vértice, y la longitud de una línea que divida por el medio este ángulo, y remate en la base, trazar el triángulo.*

Hágase sobre la base dada AB (I. 379) un segmen- 99.
to de círculo ACB capaz del ángulo dado, y despues de concluido el círculo, tírese desde su centro O perpendicularmente á AB el radio OE: tírese EB, y á esta la perpendicular BG igual á la mitad de la línea que divide el ángulo dado en dos partes iguales. Desde el punto G como centro, y con un radio $= BG$, trácese el círculo BHF que cortará en F y H la línea EG despues de trazada: desde E tíresele á AB la línea $ED = EF$, y prolónguesela hasta que encuentre en C la circunferencia: tírense finalmente las líneas AC, BC, y será ABC el triángulo que se pide.

Los triángulos CBE, BDE son semejantes, porque sobre ser comun á ambos el ángulo BEC, los ángulos BCE y DBE son iguales, porque descansan sobre los arcos iguales BE y AE: luego $EC : EB :: EB : ED$, y por consiguiente $ED \times EC = (BE)^2$. Pero (I. 477) $(EB)^2 = EF \times EH = ED \times EH$ por construccion. Luego $ED \times$

Fig. $EC = ED \times EH$, y por consiguiente $EC = EH$: restando de estas cantidades las líneas iguales ED y EF, los resíduos DC y FH serán iguales, y FH es igual por construccion á la línea que parte por el medio el ángulo vertical. Es tambien evidente que DC parte por el medio el ángulo ACB, porque ACD y BCD descansan sobre los arcos iguales AE y EB.

100. 526 Cuestion LXV. *Dados dos lados opuestos* ab, cd; *las dos diagonales* ac, bd, *y el ángulo* aeb *que forman*, *trazar el quadrilátero.*

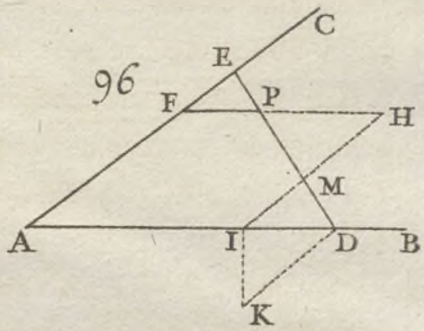
En la línea indefinita BP tómese $DB = bd$, y hágase el ángulo DBF igual al ángulo dado aeb, y $BF = ac$: desde los centros D y F, y con los radios dc y ab trácense los dos arcos mCn y rCs que se cortan en C: tírense las DC y FC; hágase BA igual y paralela á FC: tirando finalmente AD, AC y BC estará resuelta la cuestion.

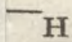
Una vez que por construccion AB es igual y paralela á CF, será AC igual y paralela á BF (I. 427), y por consiguiente el ángulo $AEB = DBF = aeb$.

FIN

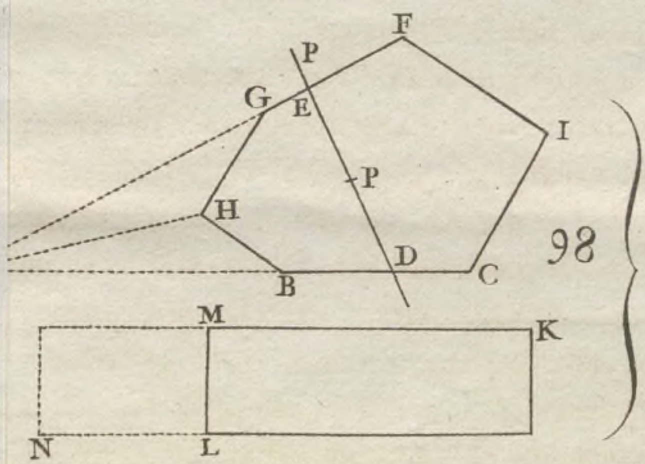
DEL TOMO SEGUNDO.

96

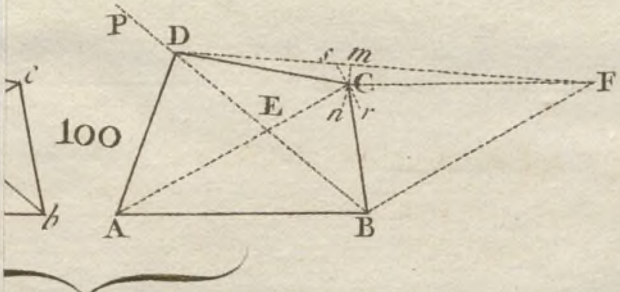


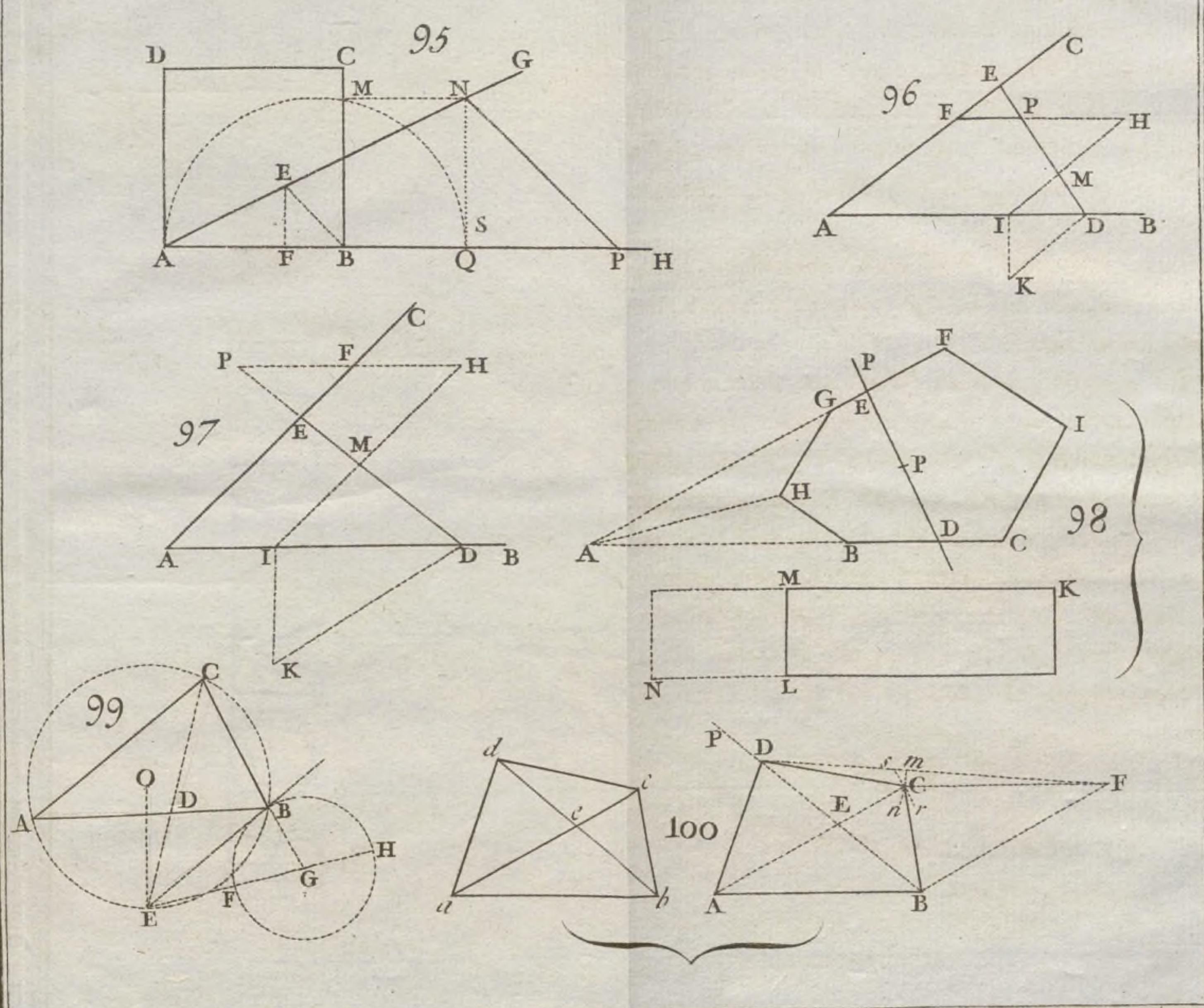


98



100




95
D C M N G
E
S
A F B Q P H
96
C E F P H M
A I D B K
97
C P F H
E M
A I D B
K
98
P F G E I
P H
D
A B C
M K
N L
99
C O D
A B H
G F E
100
d c e
a b
P D s m C F
E n r
A B