

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie Civil et Hydraulique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم : الهندسة المدنية و الري
المرجع :

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en Sciences en : Génie civil
Option: Modélisation des matériaux et structures

Formulation des éléments à champs de déformation pour l'analyse statique et dynamique des structures courbes

Présentée par :

SEKKOUR Hamida

Soutenue publiquement le : 05/06/2023

Devant le jury composé de :

Pr. Benmebarek Sadok	Professeur	Président	Université de Biskra
Pr. Belounar Lamine	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Pr. Gueraiche Khelifa	Professeur	Examineur	Université de Batna 2
Dr. Messai Abderraouf	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Setif 1

Je dédie cette thèse : À la mémoire de mes très chers parents.

À mon Mari, à mes enfants Med Amine, Issam, Ritedj Zahra et Manel.

À mon frère, mes sœurs et toute ma famille.

Hamida

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde reconnaissance à mon encadreur Monsieur **Lamine Belounar** Professeur à l'université de Biskra, pour leur soutien constant et leur aide qu'il m'a apportée tout le long de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur **Sadok BENMEBAREK**, qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que les membres : Professeur **GUERRAICHE Khelifa** et Dr. **MESSAI Abderraouf** pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude en acceptant de participer à ce jury.

J'adresse mes sincères remerciements à mes collègues, Dr. **Faïçal BOUSSEM** et Dr. **Abderahim BELOUNAR** pour leurs orientations pertinentes à ce travail et pour leurs conseils.

Résumé

Ce présent travail concerne la formulation et l'évaluation d'éléments finis triangulaires de type coque, pour l'analyse des structures. Ces éléments sont basés sur l'approche en déformation et ne possèdent que des degrés de liberté essentiels. La première partie de la thèse concerne le développement d'un élément de coque cylindrique triangulaire à trois nœuds pour analyser les structures courbes, en utilisant l'approche en déformation et la théorie des coques profondes. Ainsi, seuls cinq degrés de liberté par nœud (U , V , W , θ_x et θ_y) ont été utilisés pour l'élément développé qui est appelé **SBTDS** (**S**train **B**ased **T**riangular **D**eep **S**hell). Cet élément est basé sur des déformations supposées, qui satisfont aux équations de compatibilité, ainsi que sur les modes de déplacements de corps rigides.

La deuxième partie consiste à l'amélioration de la performance de l'élément SBTDS par la rotation supplémentaire afin d'éviter le problème rencontré lors de la modélisation de structures complexes (le besoin de compatibilité entre les degrés de liberté des différents éléments). L'élément développé nommé **SBTDSR** (**S**train **B**ased **T**riangular **D**eep **S**hell with **R**otation) à trois nœuds possède 6ddl par nœud (U , V , W , θ_x , θ_y et θ_z).

Dans la dernière partie, trois éléments sont formulés afin d'étudier l'effet des transformations effectuées sur le champ de déformation de l'élément SBTDS. Les éléments résultants **SBTDS1**, **SBTDS2** et **SBTDS3** sont simples dans leurs formulations, contiennent à chaque nœud pour chaque variante cinq degrés de liberté externes principaux. Ainsi que le champ de déplacement de chaque élément est enrichi par des termes d'ordre élevé sans qu'il soit nécessaire d'inclure des nœuds intermédiaires ou des degrés de liberté supplémentaires non essentiels.

Les performances et la précision des éléments développés ont été vérifiées avec des exemples numériques en statique et en vibration libre de structures courbes. Les résultats numériques obtenus à l'aide des éléments formulés généralement concordent bien avec ceux d'autres investigations et résultats théoriques. De plus, la forme triangulaire des éléments développés est plus avantageuse que la forme quadrilatère lorsque le domaine géométrique de la structure est déformé ou compliqué.

Mots clés: Approche en déformation, Théorie de coque profonde, Vibration libre, structure courbe, Élément fini cylindrique, Rotation supplémentaire.

Abstract

This present work deals with the formulation and evaluation of finite elements of type triangular shells for the analysis of structures. These elements, based on the strain approach, possess only essential degrees of freedom. The first part of the thesis concerns the development of a cylindrical shell element with a three-node for the analysis of curved structures, using the deformation approach and deep shell theory. Thus, only five degrees of freedom per node (U , V , W , θ_x , and θ_y) were used for the developed element, which is called **Strain Based Triangular Deep Shell (SBTDS)**. This element is based on supposed deformations, which satisfy the compatibility equations, as well as on the modes of displacements of rigid bodies.

The second part consists in improving the performance of the SBTDS element by the additional rotation in order to avoid the problem encountered during the modeling of complex structures (the need for compatibility between the degrees of freedom of the different elements). The expanded element named **Strain Based Triangular Deep Shell with Rotation (SBTDSR)** with three nodes has 6dof/node (U , V , W , θ_x , θ_y , and θ_z) for the three corner nodes.

In the last part, three elements are formulated in order to study the effect of the transformations on the strain displacement equations SBTDS element. The resulting elements **SBTDS1**, **SBTDS2**, and **SBTDS3** are simple in their formulations and contain at each node for each variant five principal external degrees of freedom. As well as the field of displacement of each element is enriched by high-order terms without necessary to include intermediate nodes or additional non-essential freedom.

The performances and the precision of the developed elements have been verified with numerical examples in static and free vibration of curved structures. The numerical results obtained using the formulated elements agree with those of other investigations and theoretical results. In addition, the triangular shape of the developed elements is more advantageous than the quadrilateral shape when the geometric domain of the structure is deformed or complicated.

Keywords: Strain approach, deep shells theory, free vibration, curved structures, cylindrical finite element, Additional rotation.

ملخص

يتعلق هذا العمل بصياغة وتقييم العناصر المحدودة من نوع غشائي، وقشرية لتحليل مختلف أنواع السلوكيات الهيكلية (الساكنة، الاهتزاز الحر). تستند هذه العناصر على مبدأ التشوه وتمتلك فقط درجات أساسية من الحرية. يتعلق الجزء الأول من الأطروحة بتطوير عنصر قشرة أسطوانية ثلاثية ذات ثلاث عقد لتحليل الهياكل المنحنية ، باستخدام نهج التشوه ونظرية القشرة العميقة. وبالتالي ، تم استخدام خمس درجات فقط من الحرية لكل عقدة ($U, V, W, \theta_x, \theta_y$) للعنصر المطور الذي يسمى القشرة

العميقة القائمة على نهج التشوه (**Strain-Based Triangular Deep Shell – SBTDS**) يعتمد هذا العنصر على التشوهات المفترضة ، والتي تقي بمعادلات التوافق ، وكذلك على أنماط إزاحة الأجسام الصلبة. الجزء الثاني يتمثل في تحسين أداء عنصر SBTDS عن طريق الدوران الإضافي من أجل تجنب المشكلة التي تمت مواجهتها أثناء نمذجة الهياكل المعقدة (الحاجة إلى التوافق بين درجات الحرية للعناصر المختلفة).

يحتوي العنصر المطور المسمى (**Strain-Based Triangular Deep Shell with Rotation**) (**SBTDSR**) بثلاث عقد على ستة درجات من الحرية ($U, V, W, \theta_x, \theta_y$ et θ_z) من أجل كل عقدة لعقد الزوايا الثلاث.

في الجزء الأخير ، تمت صياغة ثلاثة عناصر لدراسة تأثير إدخال تغيرات على مجال تشوه العنصر SBTDS. العناصر الناتجة **SBTDS1**، **SBTDS2** و **SBTDS3** بسيطة في صيغها، وتحتوي على كل عقدة لكل متغير خمسة درجات الحرية الرئيسية الخارجية. بالإضافة إلى مجال إزاحة كل عنصر يتم إثرائه بشروط عالية الترتيب دون الحاجة إلى تضمين العقد الوسيطة أو درجات الحرية الإضافية غير الضرورية.

تم التحقق من أداء ودقة العناصر المطورة بأمتلة عددية في السكون والاهتزازات الحرة والخالية للهياكل المنحنية. تتوافق النتائج العددية المتحصل عليها باستخدام العناصر المصاغة بشكل جيد مع نتائج التحقيقات والنماذج النظرية الأخرى. بالإضافة إلى ذلك، يكون الشكل الثلاثي للعناصر المطورة أكثر فائدة من الشكل الرباعي عندما يكون المجال الهندسي للهيكلم مشوهًا أو معقدًا.

الكلمات المفتاحية: مبدأ التشوه، نظرية القشرة العميقة ، الاهتزاز الحر ، الهيكلم المنحني ، العنصر المحدود الأسطواني ، الدوران الإضافي.

Table des matières

Résumé.....	i
Abstract.....	ii
ملخص.....	iii
Table des matières.....	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux.....	x
Notations.....	xii
Introduction générale	1
1. Introduction.....	1
2. Objectifs de la thèse	2
3. Plan de la thèse	3

Chapitre 1. Etude bibliographique

1.1 Introduction.....	4
1.2 Notions de la mécanique des milieux continus (<i>élasticité plane</i>)	4
1.2.1 Relation déformations-déplacements (relations cinématiques)	5
1.2.2 Équation d'équilibre.....	5
1.2.3 Équation de compatibilité	5
1.2.4 Relation contraintes-déformations (équations constitutives)	5
1.3 La modélisation par éléments fini : <i>Les modèles</i>	6
1.3.1 Déplacement	6
1.3.2 En équilibre	7
1.3.3 Hybride.....	7
1.3.4 Mixte.....	7
1.3.5 En déformation.....	8
1.4 Les avantages du modèle en déformation.....	8

1.5 Brève revue des éléments basés sur le champ de déformation	8
1.5.1 Éléments de type membrane	9
1.5.2 Éléments flexionnels	10
1.5.3 Éléments à trois dimensions.....	11
1.5.4 Éléments coques.....	12
1.6 Procédure de la formulation des éléments à champ de déformation.....	14
1.6.1 Les déformations imposées d'éléments types existants dans la littérature.....	14
1.7 Conclusion	16

Chapitre 2 : Théories des coques

2.1 Introduction	17
2.2 Les coques en général	17
2.2.1 Hypothèses cinématiques.....	18
2.2.1.1 Hypothèse de Love – Kirchhoff.....	18
2.2.1.2 Hypothèse de Mindlin – Reissner	19
2.3 Théories des coques minces	19
2.3.1 Théorie de Love	19
2.3.2 Élément de coque	20
2.3.3 Hypothèses	21
2.3.3.1 Hypothèses de linéarisation	21
2.3.3.2 Hypothèse des structures minces	21
2.3.3.3 Hypothèse de faible épaisseur.....	21
2.4 Coques cylindriques.....	22
2.4.1 Géométrie.....	22
2.4.2 Les relations de la théorie classique de Love.....	22
2.4.3 Théorie de Koiter – Sander	24
2.5 Coques surbaissées	25
2.5.1 Géométrie	25
2.5.2 Théories	26
2.5.2.1 Coques surbaissées en coordonnées curvilignes (Téorie de Donnell).....	27
2.5.2.2 Coques surbaissées en coordonnées cartésiennes (Téorie de Marguerre).....	28
2.6 Éléments de coque mince.....	28

2.6.1	Éléments basés sur la théorie des coques à forte courbure	28
2.6.2	Éléments basés sur une théorie de coque surbaissée.....	29
2.7	Élément de coque à facette planes.....	30
2.7.1	La matrice de rigidité élémentaire dans le repère local	30
2.7.2	Passage aux coordonnées globales et assemblage des éléments.....	34

Chapitre 3 : Nouvel élément de coque cylindrique triangulaire basé sur les déformations d'ordre supérieur

3.1	Introduction	37
3.2	Formulation de l'élément SBTDS	38
3.2.1	Dérivation du champ des déplacements	38
3.2.2	Évaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse	41
3.3	Validation numérique	42
3.3.1	L'analyse statique	42
3.3.1.1	cylindre pincé court à bords libres	42
3.3.1.2	Poutre console courbée.....	45
3.3.1.3	Cylindre pincé avec diaphragmes rigides	46
3.3.2	Vibrations libres des panneaux cylindriques	49
3.3.2.1	Convergence de la discrétisation du maillage.....	49
3.3.2.2	Panneau cylindrique encastré.....	49
3.3.2.3	Effet des ouvertures centrales sur les fréquences propres des panneaux cylindriques.....	50
3.4	Conclusion	51

Chapitre 4 : Variantes d'éléments finis triangulaire à champ de déformation

4.I	Amélioration de la performance de l'élément SBTDS par la rotation supplémentaire.....	53
4.I.1	Introduction.....	53
4.I.2	Formulation de l'élément SBTDSR.....	53
4.I.2.1	Dérivation du champ des déplacements.....	53
4.I.3	Évaluation de la matrice de rigidité élémentaire.....	56

4.I.4 Validation numérique.....	56
4.I.4.1 L'analyse statique	56
4.I.4.1.1 cylindre pincé court à bords libres	56
4.I.4.1.2 Poutre console courbée.....	58
4.I.4.1.3 Cylindre pincé avec diaphragmes rigides.....	59
4.II: Étude de l'effet des transformations effectuées sur le champ de déformation	
de l'élément SBTDS	61
4.II.1 Introduction.....	61
4.II.2 Formulation de la première variante SBTDS1.....	61
4.II.3 Formulation de la deuxième variante SBTDS2.....	62
4.II.4 Formulation de la troisième variante SBTDS3.....	62
4.II.5 Validation numérique.....	63
4.II.5.1 L'analyse statique.....	63
4.II.5.1.1 Cylindre pincé court à bords libres.....	63
4.II.5.2 L'analyse dynamique.....	65
4.II.5.2.1 le panneau cylindrique encastré.....	65
4.III Conclusion.....	68
Conclusion générale.....	70
Références bibliographiques.....	72
Annexes.....	80

Liste des figures

Chapitre 1 : Étude bibliographique

Figure 1.1 :	Corps solide soumis à des forces de volume (f_i) et de surfaces (ϕ_i).....	4
Figure 1.2 :	Modèle en contrainte plane (a) et modèle en déformation plane (b).....	5

Chapitre 2 : Théories des coques

Figure 2.1 :	Définition des coques :(a) coque cylindrique épaisse ; (b) coque cylindrique mince.....	18
Figure 2.2 :	Élément coque dans les lignes de courbure (vue arrière).....	20
Figure 2.3 :	Coque cylindrique.....	23
Figure 2.4 :	Les efforts de l'élément coque.....	25
Figure 2.5 :	Surface moyenne d'une coque surbaissée.....	26
Figure 2.6 :	composantes du champ des déplacements [54]	29
Figure 2.7	Elément plane soumis à des actions membranaires et flexionnelles :(a) Déplacements et forces «plane»; (b) Déplacements et force «flexion». [57]	30
Figure 2.8 :	déplacements et forces nodales après superposition. [57].....	33
Figure 2.9	Coque cylindrique par l'assemblage d'éléments rectangulaires : Les coordonnées global et local.[57].....	33
Figure 2.10 :	le système de coordonnées : (a) repère local ; (b) repère global. [57]	34

Chapitre 3 : Nouvel élément de coque triangulaire basé sur les déformations d'ordre supérieur pour l'analyse statiques et en vibrations libres

Figure 3.1 :	L'élément triangulaire cylindrique profond (SBTDS).....	39
Figure 3.2 :	Cylindre pincé court à bords libres.....	43
Figure 3.3 :	Maillage pour un cylindre pincé court à bords libres.	43
Figure 3.4 :	Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 1 : $F1=100$; $h1=0,094$	44
Figure 3.5 :	Poutre console courbée.....	45

Figure 3.6 :	Convergence du déplacement dans la direction-z.....	45
Figure 3.7 :	Cylindre pincé avec diaphragmes rigides.....	46
Figure 3.8 :	Convergence du déplacement tangentiel au point (D).....	47
Figure 3.9 :	Convergence du déplacement normal au point (C).....	47
Figure 3.10 :	Déplacement le long de DC, BC et AD de l'élément (SBTDS) pour un cylindre pincé avec diaphragmes.....	48
Figure 3.11 :	Panneau cylindrique encastré ($h = 0.013$, $E = 10^7$, $\rho = 0$, $\nu = 0.33$).....	50
Figure 3.12 :	Panneau cylindrique avec un trou central.....	51
Figure 3.13 :	Variation de la fréquence en fonction de la taille du trou central.....	51

Chapitre 4 : Variantes d'éléments finis triangulaire à champ de déformation

Figure 4.1 :	L'élément triangulaire cylindrique profond (SBTDSR).....	54
Figure 4.2 :	Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 1 : $F_1=100$; $h_1=0,094$	57
Figure 4.3 :	Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 2 : $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$	58
Figure 4.4 :	Convergence du déplacement dans la direction-z.....	59
Figure 4.5 :	Convergence du déplacement tangentiel au point (D).....	60
Figure 4.6 :	Convergence du déplacement normal au point (C).....	60
Figure 4.7:	Convergence du déplacement W_C , cas 1: $F_1=100$; $h_1=0,094$	64
Figure 4.8:	Convergence du déplacement W_C , cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$	65
Figure 4.9:	Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré.....	67
Figure 4.10:	Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré.....	68

Liste des tableaux

Chapitre 3 : Nouvel élément de coque triangulaire basé sur les déformations d'ordre supérieur pour l'analyse statique et en vibration libre

Tableau 3.1 :	Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 1: $F_1=100$; $h_1=0,094$	44
Tableau 3.2 :	Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres Cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$	44
Tableau 3.3 :	Déplacements à l'extrémité libre suivant la direction-z pour la poutre	45
Tableau 3.4 :	Convergence du déplacement tangentiel au point (D)	47
Tableau 3.5 :	Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives	49
Tableau 3.6 :	Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives	49
Tableau 3.7 :	Les fréquences propres du panneau cylindrique.	50

Chapitre 4 : Variantes d'éléments finis triangulaire à champ de déformation

Tableau 4.1 :	Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 1: $F_1=100$; $h_1=0,094$. (élément SBTDSR)	57
Tableau 4.2 :	Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres Cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$. (élément SBTDSR)	57
Tableau 4.3 :	Déplacements à l'extrémité libre suivant la direction-z pour la poutre.	58

Tableau 4.4 :	Convergence du déplacement tangential au point (D).	59
Tableau 4.5 :	Convergence du déplacement normal au point (C).	60
Tableau 4.6	Convergence du déplacement W_C d'un cylindre pincé à bords libres, cas 1: $F_1=100$; $h_1=0,094$. (V_1, V_2, V_3)	64
Tableau 4.7	Convergence du déplacement W_C d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$. (V_1, V_2, V_3)	64
Tableau 4.8 :	Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (SBTDS1)	65
Tableau 4.9 :	Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (SBTDS1)	66
Tableau 4.10 :	Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (SBTDS2)	66
Tableau 4.11 :	Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (SBTDS2)	66
Tableau 4.12 :	Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (SBTDS3)	67
Tableau 4.13 :	Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (SBTDS3)	67

Notations

L	Longueur de la plaque
ρ	Densité de matériau
ν	Coefficient de Poisson
E	Module d'Young
h	Epaisseur
D	Rigidité de flexion $=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$
G	Module de cisaillement $=E/[2(1+\nu)]$;
λ	Fréquence propre non-dimensionnelle
ω	Fréquence angulaire
α_i	Constantes d'interpolation du déplacement
U, V, W	Déplacements dans les directions x, y et z respectivement
β_x, β_y	Rotations autour des axes y et x respectivement
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotations autour des axes x, y et z respectivement
x, y, z	Système des coordonnées cartésiennes
f	Indique le comportement flexionnel
P	Indique le comportement membranaire
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normales directes
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[M^e]$	Matrice de masse élémentaire
$[K]$	Matrice de rigidité de la structure
$[M]$	Matrice de masse de la structure
$[C]$	Matrice de transformation
$[P]$	Matrice d'interpolation des déplacements
$[Q]$	Matrice d'interpolation des déformations
$\{F\}$	Vecteur des forces nodales global
$\{q\}$	Déplacements nodaux de la structure
$\{q_e\}$	Déplacements nodaux élémentaires

Introduction générale

1. Introduction

D'énormes progrès ont été réalisés durant ces dernières années dans le domaine du calcul numérique pour le dimensionnement des structures. Il est utile de souligner que lors du développement initial des méthodes d'éléments finis en statique, les chercheurs se sont principalement concentrés sur le développement de méthodes d'éléments finis spécifiques qui sont destinées surtout à trouver des solutions appropriées aux problèmes posés. Il faut noter aussi qu'après plusieurs années de recherche, cette méthode des éléments finis s'est alors imposée comme une approche particulièrement efficace et largement répandue parmi les spécialistes travaillant dans le domaine de la simulation numérique, dans plusieurs secteurs de la science et de l'ingénierie. En effet, il faut reconnaître qu'actuellement les logiciels commerciaux sont énormément utilisés pour la conception de systèmes structuraux, car ces logiciels se sont avérés assez polyvalents pour les structures présentant une forme géométrique complexe ; ils peuvent aussi être appliqués à divers problèmes non linéaires.

Par ailleurs, il faut noter qu'aujourd'hui le principal souci des chercheurs dans le domaine de l'industrie consiste à développer un modèle d'éléments finis facile à utiliser, fiable et efficace. Notons aussi que, comme autre possibilité d'utilisation des modèles en déplacement conventionnels, on peut considérer des formulations qui sont établies et fondées sur l'approche en déformation, et pouvant être utilisé pour le développement d'éléments finis puissants, simples et assez performants, par exemple les éléments d'ordre supérieur. En outre, il faut savoir que les éléments du champ de déformation offrent beaucoup d'avantages. On peut citer à ce titre la description plus simple des modes de déformation constante ainsi que ceux des corps rigides, la séparation des différentes composantes de la déformation, et enfin la probabilité d'améliorer le champ des déplacements en introduisant des termes d'ordre supérieur, sans toutefois être obligé d'inclure des nœuds internes. Ceci va certainement permettre d'avoir des solutions numériques plus précises et plus stables et aussi de se débarrasser des phénomènes de blocage.

D'autre part, il a été montré que l'analyse dynamique des structures est d'une importance capitale puisqu'elle peut être appliquée dans une large gamme de domaines tels que l'aéronautique, le génie civil et le génie mécanique. Comme les éléments considérés, comme les coques, sont des parties constituantes des structures, il est alors impératif que le concepteur connaisse au préalable les modes de vibration initiaux avant de terminer la conception de la structure envisagée. Il faut aussi noter que, dans plusieurs domaines de l'industrie, il est primordial, lors du dimensionnement et de la construction, d'identifier à la fois les contraintes que les structures auraient à supporter et les propriétés mécaniques en termes d'amortissement que ces structures peuvent présenter.

Finalement, il faut adopter une approche en déformation qui considère des déformations de telle manière que les conditions de compatibilité soient réunies. Par ailleurs, concernant les éléments fondés sur cette approche, on note que le champ des déplacements comprend deux parties distinctes. La première partie concerne les conditions de mouvement du corps rigide, alors que la seconde est fondée sur les fonctions de déformation supposées et qui satisfont aux conditions de compatibilité. Il est utile de souligner aussi que cette méthode a été appliquée dans ce travail afin d'établir des champs de déplacement d'éléments triangulaires nouveaux qui vont servir à analyser des coques cylindriques. Ces éléments ont été programmés à l'aide du code MATLAB en vue d'évaluer leurs performances et les comparer avec des éléments qui ont déjà été étudiés et publiés auparavant.

2. Objectifs de la thèse

Le but principal du présent travail est par conséquent de concevoir et approuver des éléments finis simples et robustes de type coque cylindrique. Ces éléments, auxquels des tests appropriés ont été appliqués, sont basés sur le modèle en déformation. Il faut noter que le premier élément **SBTDS** est un élément de coque cylindrique triangulaire basé sur l'approche en déformation ainsi que sur la théorie des coques profondes. Cependant, le deuxième élément **SBTDSR** est un élément courbe ayant une forme triangulaire et effectuant une rotation supplémentaire; il est basé sur l'approche en déformation et sur la théorie des coques profondes. Par contre, les trois autres éléments **SBTDS1**, **SBTDS2** et **SBTDS3**, sont des éléments courbes, de flexion de forme triangulaire, avec un polynôme d'ordre supérieur, et utilisant uniquement les degrés de liberté qui s'avèrent nécessaires.

Il faut noter aussi que les éléments développés devront servir à analyser les divers comportements des coques, comme le comportement statique et le comportement en vibrations libres. Les résultats obtenus vont nous permettre d'analyser les performances numériques de ces éléments. Ces résultats sont ensuite comparés avec ceux rapportés dans la littérature.

Par conséquent, la question qui se pose alors est de connaître le degré de précision des résultats obtenus pour les éléments développés. L'analyse de ces éléments nous aidera ainsi à choisir parmi plusieurs modèles celui qui satisfera le plus grand nombre de conditions (convergence rapide, bonne précision avec maillage grossier, convergence monotone, simple programmation, forme simplifiée). La deuxième question qui se pose ensuite consiste à identifier les approches et les théories des coques, les plus adéquates, pour l'analyse des coques cylindriques.

3. Plan de la thèse

Ce manuscrit est structuré en quatre chapitres.

Au niveau du **premier chapitre**, on a présenté un aperçu sur les notions de base des équations utilisées puis on a exposé une recherche bibliographique en présentant un aperçu sur les éléments finis à champ de déformation.

Au deuxième chapitre, on s'intéresse sur les théories des coques en général ainsi, nous insistons sur les différentes théories appliquées au développement des éléments de coques minces. Par ailleurs les structures de coques constituent l'un des types de structures qui présentent des difficultés d'analyse, parmi les différents modèles des coques on s'intéressera aux coques cylindriques profondes et surbaissées.

Au troisième chapitre, un nouveau modèle d'élément fini est développé, triangulaire à champ de déformation pour l'analyse statique et en vibration libre des coques courbes.

Le quatrième chapitre consiste à améliorer l'élément développé SBTDS par la rotation supplémentaire, l'élément résultant SBTDSR basé sur la théorie des coques profondes ainsi, l'approche en déformation. D'autre part, trois éléments de flexion (SBTDS1, SBTDS2 et SBTDS3) sont formulés pour l'étude de l'effet des transformations effectuées sur le champ de déformation de l'élément SBTDS.

Chapitre 1. Étude bibliographique

1.1 Introduction	4
1.2 Notions de la mécanique des milieux continus (<i>élasticité plane</i>)	4
1.2.1 Relation déformations-déplacements (relations cinématiques)	5
1.2.2 Équation d'équilibre.....	5
1.2.3 Équation de compatibilité	5
1.2.4 Relation contraintes-déformations (équations constitutives)	5
1.3 La modélisation par éléments fini : <i>Les modèles</i>	6
1.3.1 Déplacement	6
1.3.2 En équilibre.....	7
1.3.3 Hybride.....	7
1.3.4 Mixte.....	7
1.3.5 En déformation.....	8
1.4 Les avantages du modèle en déformation	8
1.5 Brève revue des éléments basés sur le champ de déformation	8
1.5.1 Éléments de type membrane	9
1.5.2 Éléments flexionnels	10
1.5.3 Éléments à trois dimensions.....	11
1.5.4 Éléments coques.....	12
1.6 Procédure de la formulation des éléments à champ de déformation	14
1.6.1 Les déformations imposées d'éléments types existants dans la littérature.....	14
1.7 Conclusion	16

1.1 Introduction

Depuis l'évolution du terme élément fini par Clough en 1951, la méthode des éléments finis est devenue encore plus populaire avec l'avancement des micro-ordinateurs et le développement de divers efficaces langages de programmation.

Au niveau de ce chapitre, des notions de base des équations utilisées dans le présent travail sont brièvement décrites. une présentation d'un aperçu sur l'étude bibliographique des éléments finis de type membrane, flexionnel et de coque qui sont formulés à la base de l'approche en déformation est également présenté.

1.2 Notions de la mécanique des milieux continus (*élasticité plane*) :

A un point quelconque $M(x,y,z)$, le problème d'élasticité pour les solides ,revient à déterminer les déplacements u_i et les contraintes σ_{ij} sous l'effet des forces appliquées de volume (f_i) et de surfaces (ϕ_i) (figure 1.1).

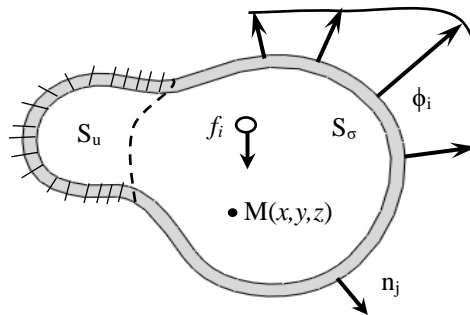


Figure 1.1. Corps solide soumis à des forces de volume (f_i) et de surfaces (ϕ_i).

Le phénomène de déformation des corps solides est régi par des équations de champ aux dérivées partielles avec des conditions aux limites. Les équations de champ et de la théorie de l'élasticité plane (élasticité 2D) sont rappelées ci-dessous. Deux types de problèmes en élasticité 2D sont considérés, le premier est le modèle en contrainte plane (figure 1.2a) définie comme une approximation qui convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan (xy) par des forces de surface et de volume avec l'axe z perpendiculaire au plan de la plaque (hypothèse $\sigma_z=0$), le deuxième est le modèle en déformation plane (figure 1.2b) qui s'applique à un corps solide dans la dimension suivant l'axe z est assez grande par rapport aux autres dimensions (du plan xy) et sollicité par des forces (de surface et de volume) ayant des composantes nulles suivant z (hypothèse $\varepsilon_z=0$).

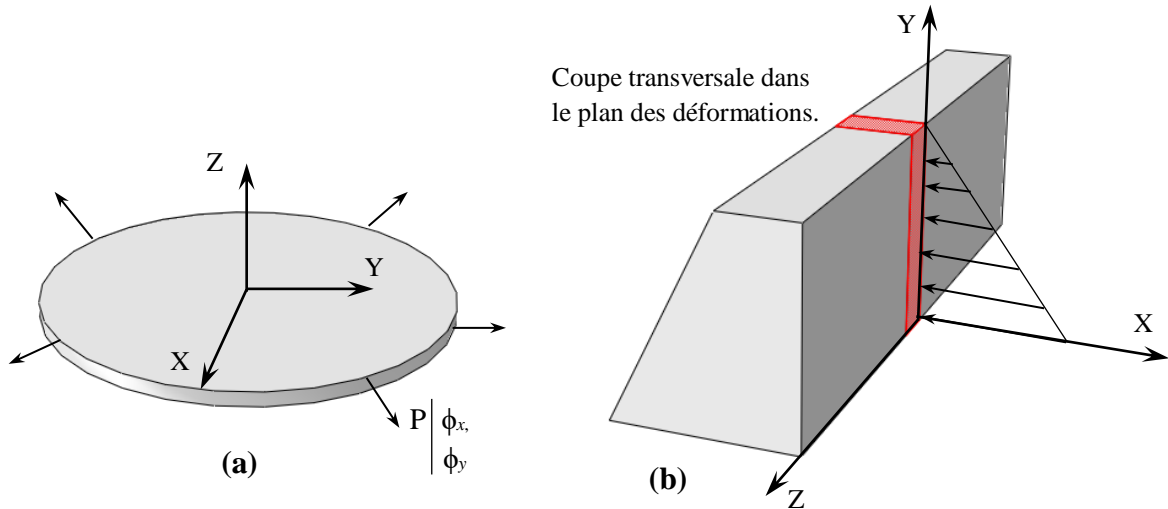


Figure 1.2. Modèle en contrainte plane (a) et modèle en déformation plane (b).

1.2.1 Relation déformations-déplacements (relation cinématique)

Les relations cinématique pour l'élasticité linéaire (petits déplacements et déformations) on a :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

1.2.2 Équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \quad (1.2)$$

1.2.3 Équation de compatibilité

Pour le cas d'élasticité 2D, les six équations de compatibilités en élasticité 3D se réduisent à une seule équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.3)$$

sachant que l'équation de compatibilité est la condition d'intégrabilité des déformations qui assure l'unicité des déplacements.

1.2.4 Relation contraintes-déformations (équations constitutives)

En cas des matériaux isotropes à comportement élastique linéaire, on a les relations d'élasticité (loi de Hooke) suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.4)$$

L'équation 1.4 peut être écrite sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1.6)$$

- ✓ Première relation en déformation plane

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.7)$$

- ✓ Deuxième relation en contrainte plane

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.8)$$

1.3 La modélisation par éléments fini : *Les modèles*

1.3.1 Déplacement

Concernant cette approche, l'approximation est faite sur le champ de déplacement et la démarche se repose sur trois principales actions :

- ✓ La discrétisation fonctionnelle qui représente la définition d'une forme paramétrique simple du champ de déplacement à l'intérieur des éléments finis de la structure.
- ✓ à chacun des éléments l'application du principe des travaux virtuels à travers la satisfaction des conditions de stationnarité de la fonctionnelle pour chacun des éléments. Ces conditions permettent de relier, par l'intermédiaire de la raideur de l'élément, les paramètres de la discrétisation aux grandeurs équivalentes des forces qui s'appliquent sur l'élément.
- ✓ ainsi obtenues l'assemblage des matrices de rigidité au niveau élémentaire conduit à un système d'équations qui traduit les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de la structure dans sa globalité.

1.3.2 En équilibre

L'approche en équilibre a été introduite par Fraeijns et Veubeke [1]. De la même manière que l'approche en déplacement, le modèle en équilibre est constitué de deux principales étapes : l'étape de discrétisation suivie de l'étape d'application du principe variationnel. Ceci consiste à choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du champ des contraintes à l'intérieur des éléments finis de la structure. Il est, ensuite, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels complémentaires (ou principe des forces virtuelles).

1.3.3 Hybride

La terminologie utilisée [2] consiste à désigner par « *hybrides* » les approches éléments finis pour plusieurs champs sont discrétisés indépendamment à l'intérieur de l'élément et sur sa frontière. Les éléments finis hybrides peuvent être développés selon deux approches conventionnelles : éléments finis hybrides en déplacement et en contraintes qui sont basés respectivement sur le principe des déplacements virtuels et celui des forces virtuelles. La première, qui porte le nom *d'approche hybride primale*, introduite par Jones [3], consiste à choisir des éléments vérifiant, à priori, les conditions de compatibilité en volume. Les conditions de continuité des déplacements entre les éléments aux frontières sont ensuite rajoutées à la fonctionnelle par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs qui représentent physiquement les tractions de surface sur les frontières sont discrétisés de manière indépendante sur chaque face de la frontière de l'élément. Cette approche conduit, généralement à une continuité faible des déplacements aux travers des frontières des éléments. La seconde, appelée « *approche hybride duale* », a été présentée pour la première fois par Pian [4]. Cette approche nécessite une discrétisation des champs de contraintes vérifiant à priori les conditions d'équilibre de volume à l'intérieur des éléments. Les conditions de continuité des champs de traction de surface sont injectées, a posteriori dans la fonctionnelle par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs représentent physiquement les champs de déplacement aux frontières des éléments. Donc, dans cette approche, des discrétisations secondaires définissent le champ des déplacements des bords de l'élément.

1.3.4 Mixte

Dans cette approche, l'approximation est faite, indépendamment, sur divers champs d'inconnues (déplacements, déformation, contraintes). Il est, ensuite, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels complémentaires (ou principe des forces virtuelles) du système, à travers la satisfaction des conditions de stationnarité de la fonctionnelle pour chacun des éléments. Cette approche permet d'obtenir des éléments d'excellente qualité. Elle

est souvent utilisée pour corriger les défauts du modèle en déplacement. Seulement la diversité des fonctions d'approximation des divers champs et leur indépendance rendent la mise en œuvre de ce modèle longue, complexe et très coûteuse.

1.3.5 En déformation

L'approche en déformation [5] a été développée, à l'origine, à l'université de Cardiff par Sabir et Ashwell [6,7]. De la même manière que l'approche en déplacement, le modèle en déformation est constitué de deux principales étapes :

L'étape de discrétisation suivie de l'étape d'application du principe variationnel. A ce niveau, la démarche en premier lieu, consiste à choisir, à l'intérieur des éléments finis de la structure. Une forme paramétrique simple du champ de déformations qui représente la discrétisation fonctionnelle. Il est, ensuite, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels à travers la satisfaction des conditions de stationnarité de la fonctionnelle pour chacun des éléments. Le champ des déplacements, continu et différentiable, est déduit par intégration du champ des déformations. Les travaux de recherches, portant sur l'utilisation de ce modèle pour l'approximation des arcs circulaires, ont donné des résultats meilleurs que ceux du modèle en déplacement : c'est ce qui constitue « la force de ce modèle ».

1.4 Les Avantages du modèle en déformation

- Une meilleure précision sur les déformations et sur les contraintes et les déplacements qui sont obtenus par intégration ; contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ choisi des déplacements.
- Obtention de champ de déplacement plus riche et avec des polynômes ayant des termes d'ordre élevé, pour un même élément fini comparativement à ceux résultant du modèle en déplacement,
- Facilité de satisfaction des deux principaux critères de convergence (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Facilité de découplage des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées). [5]

1.5 Brève revue des éléments basés sur le champ de déformation trouvée dans la littérature

Plusieurs approches existant peuvent être générées; l'approche la plus connue et largement applicable est celle en déplacement. Cette dernière est la première méthode utilisée pour le développement d'éléments finis [8,9]. Il existe également d'autres formulations parmi

d'autres, l'approche en déformation. Les performances des éléments finis établies sur l'approche en déformation par rapport aux éléments classiques fondées sur le modèle en déplacement ont été confirmées par plusieurs types d'éléments finis existant dans les travaux de recherche.

1.5.1 Éléments de type membrane

Il est largement admis que l'élément de type membrane est l'un des éléments les plus faciles à établir. Les éléments membranaires sont principalement utilisés pour l'analyse de structures auxquelles sont appliquées des contraintes dans le plan. La structure considérée se trouve dans le plan (x, y) , en chaque point de la structure les déplacements sont désignés par u , qui correspond au déplacement suivant l'axe des x , et v qui correspond au déplacement suivant l'axe des y .

Un certain nombre de travaux ont été réalisés pour la première fois par Sabir au niveau de l'Université de Cardiff (Royaume-Uni) sur l'élaboration d'une catégorie d'éléments ayant une élasticité plane qui est fondée sur l'approche en déformation [10,11]. Il faut noter que les éléments mentionnés dans les références se rapportent à des éléments ayant des coordonnées cartésiennes rectangulaires, avec deux degrés de liberté pour chaque nœud, et aussi à des éléments triangulaires et rectangulaires effectuant un mouvement rotationnel dans le plan ; ce mouvement est considéré comme un degré de liberté supplémentaire. Dans ce contexte, Sabir et Salhi ont étendu cette approche aux éléments à coordonnées polaires [12]. Par ailleurs, des éléments secteur en coordonnées polaires, qui incluent la rotation dans le plan comme degré de liberté additionnel, ont également été formulés [13-15]. D'autre part, Sabir et Sfindji [16] ont développé et proposé des éléments membranaires (rectangulaires et triangulaires) avec deux degrés de liberté pour chaque nœud. Il faut noter que le nœud interne est exclu par condensation statique. De même, Belarbi and Maalam [17] ainsi que Hamadi et al. [18] ont développé d'autres variantes d'éléments rectangulaires ayant un nœud interne. Par la suite, tout en satisfaisant les fonctions d'Airy, Himeur et al. ont proposé un nouvel élément triangulaire possédant quatre nœuds avec rotation dans le plan [19]. Notons que, comme condition additionnelle, ces deux derniers éléments [18,19] doivent vérifier les équations d'équilibre. Récemment, Rezaiee-Pajand et al. [20–23] ont mené des études dans ce contexte et ont proposé des éléments d'ordre supérieur qui sont fondés sur l'approche en déformation. Il faut souligner que là il s'agit bien d'associer le champ de déformation d'un élément avec une fonction mathématique supposée. Pour une telle fonction, le développement polynomial

de Taylor est un choix normal et fréquent. Notons que cette méthode a été appliquée en vue de formuler des éléments finis robustes avec différentes géométries [24,25,26].

1.5.2 Eléments flexionnels

Belouar et Guenfoud [27] ont formulé le premier élément de plaque en flexion qui est fondé sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin. Ils ont appliqué cette méthode pour l'étude des plaques. Cet élément de plaque en flexion s'est avéré numériquement plus efficace que son homologue qui est basé sur le modèle en déplacement. Concernant Belouar A. et al. [28], en vue d'effectuer une analyse statique et en vibration libre des plaques en flexion, ils ont développé un élément fini triangulaire possédant trois nœuds, et ce en adoptant la théorie des plaques de Reissner-Mindlin. D'autre part, afin de mener une analyse statique des vibrations libres et du flambement des plaques, deux éléments, à savoir un élément quadrilatère et un autre triangulaire, ont été développés [29], en se basant sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin. Pour leur part, Himeur et Guenfoud [30] ont formulé un élément fini de plaque triangulaire tout nouveau qui est basé sur la théorie des plaques minces basée sur les hypothèses suggérées par Kirchhoff. La formulation de cet élément a nécessité un quatrième nœud fictif, avec la condensation statique afin d'exclure le 4^{ème} nœud interne, et aussi l'intégration analytique afin d'évaluer la matrice de rigidité. Par ailleurs, le comportement statique des plaques minces a été étudié en utilisant l'élément précédemment développé.

D'autre part, Abderrahmani [31] a formulé un élément fini rectangulaire lui permettant de mener une analyse des plaques minces qui présentent un comportement élastique linéaire. En outre, la matrice de rigidité de l'élément développé a été évaluée en adoptant une intégration analytique. Quant au champ de déplacement de l'élément antérieurement établi, il a servi à avoir un élément secteur [32] et ce en passant du système de coordonnées cartésiennes à un autre de coordonnées polaires. Bien entendu, un tel élément a été élaboré afin d'analyser les plaques minces de forme circulaire. Similairement, Belouar A. et al. [33] sont parvenus à développer un élément quadrilatère qui devrait servir à investiguer la vibration libre d'une plaque en flexion. Un tel élément, qui est doté d'une grande précision et qui ne dépend pas des conditions aux limites, est exempt de tout verrouillage de cisaillement transverse. Dans le même contexte, Boussem [34,35,36] a formulé deux éléments finis de plaques en flexion en se basant sur le modèle en déformation. Il y a d'abord l'élément quadrilatère de plaque non conforme KSBQP qui est basé en même temps sur l'approche en déformation et la théorie de Kirchhoff. Ensuite, nous avons l'élément quadrilatère de plaque MSBQP qui lui est basé à la fois sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin. Il faut rappeler que cette

dernière théorie tient compte de l'effet de cisaillement transverse. Il s'est avéré que ces deux éléments donnent des résultats assez satisfaisants pour les fréquences naturelles et les charges de flambement. D'autre part, Belouar et al [37,38] ont proposé deux éléments à champ de déformation, l'un des éléments pour l'analyse des plaques fonctionnellement graduées, l'autre pour les analyses des vibrations libres et du flambement des plaques à gradient fonctionnel. Récemment, Boussem et al [39] ont réussi à développer un nouveau élément basé sur l'approche en déformation ainsi que la théorie de Reissner-Mindlin pour l'analyse dynamique des plaques rectangulaires couplées au fluide.

1.5.3 Eléments à trois dimensions

Les éléments à trois dimensions (3D), qui sont établis sur le modèle de déformation, ont été formulés aussi bien pour étudier les problèmes tridimensionnels que pour analyser les plaques minces et épaisses. Ils sont également utilisés pour une représentation correcte du cisaillement transverse sans aucun risque de verrouillage. Par ailleurs, un élément fini de type solide hexaédrique (SBH8), basé sur une approche en déformation, a été élaborée par Belarbi et Charif [40]. Notons que cet élément a 8 nœuds avec 3 degrés de liberté (u , v et w) par nœud. Il a servi à analyser des plaques minces et épaisses en flexion en utilisant une matrice d'élasticité modifiée. Il a été confirmé que cet élément est numériquement plus efficace que celui basé sur le modèle en déplacement. Quant à Maalem [41] et Belouar et Guerraiche [42], ils ont développé des éléments à trois dimensions (3D) qui vérifient les équations d'équilibre pour la flexion de plaques minces et épaisses. Concernant Guerraiche et al. [43], ils ont réussi à formuler un élément fini brique tridimensionnel tout nouveau afin d'effectuer une analyse linéaire de la flexion des plaques. Cet élément possède 3 degrés de liberté externes qui sont nécessaires aux huit nœuds de coin et au nœud de centre aussi. Il faut noter que le champ de déplacement de l'élément formulé doit vérifier les équations de compatibilité. Dans le cas présent, le nœud du centre a été éliminé en faisant appel à la technique de condensation statique. D'autre part, Messai et al. [44] ont conçu un élément brique à trois dimensions avec 9 nœuds à champ de déformation. Afin d'étudier le comportement statique et en vibration libre des plaques en flexion, il a été décidé d'implémenter cet élément dans le code Abaqus. De même, l'analyse statique des structures circulaires a été menée en développant un autre élément fini secteur à trois dimensions [45] qui a été formulé à l'aide du champ de déplacement de l'élément précédemment établi par Belarbi et Charif [40].

1.5.4 Éléments coques

Il est bien connu que l'approche en déformation a initialement été utilisée pour l'analyse des éléments courbes. Dans ce contexte, Sabir *et* Ashwell [6] ont montré que les éléments fondés sur le modèle en déplacement nécessitent que toute structure courbe soit divisée en un nombre considérable d'éléments afin d'aboutir à des résultats acceptables qui convergent rapidement. Dans le but de résoudre ces problèmes, il a été jugé utile d'utiliser les éléments finis qui sont basés sur le modèle en déformation plutôt que ceux qui sont fondés sur le modèle en déplacement car les premiers offrent une meilleure solution. Une telle formulation a déjà été appliquée par Ashwell, Sabir et Roberts [7] pour l'étude des coques cylindriques par Sabir et Ashwell [46].

L'application réussie de l'approche en déformation a poussé les chercheurs à utiliser les résultats positifs obtenus en vue de développer encore mieux les éléments finis afin d'examiner, d'une manière plus détaillée, et trouver des solutions acceptables au problème des vibrations libres des anneaux circulaires dans le plan. Par ailleurs, les fonctions de forme de divers éléments finis ont été comparées par Ashwell et Sabir [47] afin de déterminer les fréquences naturelles de l'anneau vibrant dans le plan. D'après les résultats obtenus, on peut dire que les éléments basés sur le modèle en déformation sont très efficaces. Ainsi, un élément de forme rectangulaire de coque cylindrique avec vingt degrés de liberté a été conçu et proposé [46]. Dans ce cas-là, pour éviter les problèmes liés aux degrés de liberté internes et aux nœuds internes, il a été décidé d'utiliser seulement les degrés de liberté externes, trois déplacements linéaires et deux rotations pour cet élément. Aussi, afin de s'assurer que cet élément est bien efficace, il a été jugé nécessaire de l'appliquer à l'analyse des cylindres pincés et des panneaux soumis à leur propre poids. Il s'est avéré que les résultats obtenus présentent une convergence rapide que ce soit pour les déplacements ou bien pour les contraintes.

En outre, des éléments courbes ont également été développés par Sabir et Lock [48] en vue d'analyser les non-linéarités géométriques des arcs de cercle. Cet élément s'est avéré supérieur et plus avantageux par comparaison avec les éléments à fonction de forme polynomiale. Par ailleurs, des expériences ont été menées par Sabir et Ashwell [49] en appliquant des charges sous forme de forces radiales ou de moments concentrés sur des coques minces. Il a été trouvé que les résultats expérimentaux obtenus étaient identiques à ceux donnés par la théorie.

Par ailleurs, différents éléments finis ont été établis en se basant sur l'élément développé par Sabir et Ashwell [46] en vue de le rendre encore plus performant. Au lieu de se baser sur

les hypothèses de Love-Kirchhoff qui ont été utilisées dans l'élément de Sabir et Ashwell[46], Sabir et Charchafchi[50] ont développé un autre élément en utilisant les hypothèses de Koiter, tout en conservant les mêmes perceptions géométriques. C'est une variante différente de l'élément en question; il intègre le coefficient de Poisson dans les équations des déformations dans le but de répondre aux conditions d'équilibre. Il faut noter que ces deux éléments ont servi à modéliser des coques de forme cylindrique comportant des cavités circulaires ou elliptiques. D'autre part, des versions de Bull[51], qui incluent des changements dans le champ de déformation de Sabir et Ashwell [46], ont été établies afin de créer des éléments de flexion.

Notons que pour ce qui est des éléments basés sur les hypothèses des coques surbaissées, Djoudi et Bahai[52] ont conçu et présenté un élément plus récent, de forme rectangulaire et comportant 4 nœuds avec 5 degrés de liberté au niveau de chaque nœud. La performance de cet élément a été vérifiée en effectuant des analyses linéaires et non linéaires géométriques de structures de coque. Par la suite, une estimation de cet élément a été faite en effectuant une analyse en vibrations libres des coques de forme cylindrique[53]. Plus tard, Djoudi et Bahai[54] ont présenté un élément qui permet d'étudier l'effet des trous dans les panneaux cylindriques sur le comportement dynamique des structures considérées.

Il est important de noter qu'afin de modéliser les coques courbes à l'aide d'éléments finis à facettes planes, un élément tout nouveau [55]a été établi en superposant l'élément membrane RSBE5[18], qui est basé sur l'approche en déformation, et l'élément de plaques minces en flexion ACM. Il faut savoir que cet élément a été établi en vue d'analyser des coques minces même si elles présentent des formes géométriques irrégulières. En outre, il a été montré que cet élément de coque converge rapidement et permet d'obtenir des résultats plus corrects. D'autre part, Guenfoud et al[56] ont présenté un élément fini de forme triangulaire possédant quatre nœuds de coque avec une facette plane. Notons que c'est un élément qui est basé sur la combinaison de deux éléments de membrane T43-Eq[57] et de la plaque Himeur et Guenfoud [58],en utilisant l'approche en déformation. Cet élément a été développé dans le but d'étudier le comportement statique des coques. Récemment, pour le développement d'un nouvel élément de coque SBRS, Belounar A[59] S'est basé sur l'approche à facettes planes et sur la combinaison de deux éléments, de membrane rectangulaire SBRIE et de l'élément quadrilatère plaque Mindlin SBQP à quatre nœuds et seulement les six degrés de liberté essentiels par nœud .L'élément développé a été destiné à l'analyse statique des coques cylindriques isotropes.

1.6 Procédure de la formulation des éléments à champ de déformation

Le champ des déplacements des éléments finis basés sur le modèle en déformation, contient deux composantes. La première représente les déplacements des modes rigides, la deuxième est due aux déformations imposées dans l'élément qui sont représentées par des fonctions indépendantes des différentes composantes de la déformation.

1.6.1 Les déformations imposées d'éléments types existants dans la littérature

- **Pour le cas d'éléments membranaires :**

Déformations imposées de l'élément **SBRIE** [10] rectangulaire à quatre nœuds avec deux degrés de liberté par nœud (U, V) sont :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8\end{aligned}\tag{1.9}$$

Les déformations imposées de l'élément **SBRIE1** [16] rectangulaires à cinq nœuds avec un nœud central et qui possède deux degrés de liberté par nœud sont données par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y\end{aligned}\tag{1.10}$$

- **Pour le cas d'éléments plaques :**

Concernant les deux éléments plaque de type Reissner-Mindlin avec trois degrés de liberté par nœud (W , β_x et β_y), les fonctions des déformations imposées sont données respectivement :

- ✓ Pour l'élément **SBRP** [27] :

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y, \quad \kappa_y = \alpha_6 + \alpha_7 x, \quad \kappa_{xy} = \alpha_8, \\ \gamma_{xz} &= \alpha_9 + \alpha_{10} y - (\alpha_7 y^2), \quad \gamma_{yz} = \alpha_{11} + \alpha_{12} x - (\alpha_5 x^2)\end{aligned}\tag{1.11}$$

- ✓ Pour l'élément **Pep43** [60] :

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_9 \frac{y}{2}, \quad \kappa_y = \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_{10} \frac{x}{2}, \quad \kappa_{xy} = \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y, \\ \gamma_{xz} &= \alpha_{11} - (\alpha_7 y^2), \quad \gamma_{yz} = \alpha_{12} - (\alpha_5 x^2)\end{aligned}\tag{1.12}$$

- Pour le cas d'éléments coques

Nous présentons les déformations des deux éléments coques cylindriques dans un système de coordonnées curvilignes ces éléments existants dans la littérature sont rectangulaires à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté par nœud.

✓ Le premier élément est basé sur la théorie des coques profondes [46].

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_7 + \alpha_8 \Phi \\
 \varepsilon_\Phi &= \alpha_9 + \alpha_{10} x - \left[\alpha_{12} \frac{1}{2R} x^2 + \alpha_{13} \frac{1}{6R} x^3 + \alpha_{14} \frac{1}{2R} x^2 \Phi + \alpha_{15} \frac{1}{6R} x^3 \Phi \right] \\
 \gamma_{x\Phi} &= \alpha_{11} + \left[\alpha_8 \frac{1}{R} x \right] \\
 \kappa_x &= \alpha_{12} + \alpha_{13} x + \alpha_{14} \Phi + \alpha_{15} x \Phi \\
 \kappa_\Phi &= \alpha_{16} + \alpha_{17} x + \alpha_{18} \Phi + \alpha_{19} x \Phi \\
 \kappa_{x\Phi} &= \alpha_{20} + \left[\alpha_{14} \frac{1}{R} x + \alpha_{15} \frac{1}{2R} x^2 + \alpha_{17} R \Phi + \alpha_{19} \frac{1}{2} R \Phi^2 \right]
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

✓ Le deuxième élément est basé sur la théorie des coques surbaissées [52].

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_7 + \alpha_8 y \\
 \varepsilon_y &= \alpha_9 + \alpha_{10} x - \left[\alpha_{12} \frac{1}{2R} x^2 + \alpha_{13} \frac{1}{6R} x^3 + \alpha_{14} \frac{1}{2R} x^2 y + \alpha_{15} \frac{1}{6R} x^3 y \right] \\
 \gamma_{xy} &= \alpha_{11} - \left[\alpha_{10} y \right] \\
 \kappa_x &= \alpha_{12} + \alpha_{13} x + \alpha_{14} y + \alpha_{15} xy \\
 \kappa_y &= \alpha_{16} + \alpha_{17} x + \alpha_{18} y + \alpha_{19} xy \\
 \kappa_{xy} &= \alpha_{20} + \left[2\alpha_{14} x + \alpha_{15} x^2 + 2\alpha_{17} y + \alpha_{19} y^2 \right]
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.7 Conclusion

Les objectifs recherchés dans cette section visent à mettre en relief les principes et les méthodes théoriques de base à notre développement. Ainsi, les aspects traités ont concerné le domaine de la mécanique des milieux continus qui nous intéresse dans ce travail et la méthode des éléments finis en sa qualité d'outil de résolution numérique. Parmi les modèles développés, celle dite « en déformation » est la plus récente ; mais présente au niveau de la recherche un intérêt particulier, en raison de sa simplicité et de la performance des éléments finis formulés en déformation. Nos éléments sont d'élasticité plane ; ce qui nous a orientés à prospecter au niveau de cette partie les aspects liés aux hypothèses de linéarité géométrique, aux équations cinématiques, aux équations de la statique, aux lois constitutives et aux conditions de compatibilité cinématique.

Chapitre 2. Théories des coques

2.1 Introduction	17
2.2 Les coques en général	17
2.2.1 Hypothèses cinématiques.....	18
2.3 Théories des coques minces	19
2.3.1 Théorie de love	19
2.3.2 Élément de coque.....	19
2.3.3 Hypothèses	19
2.4 Coques cylindriques	22
2.4.1 Géométrie.....	22
2.4.2 Les relations de la théorie classique de love.....	22
2.4.3 Théorie de Koiter – Sander	24
2.5 Coques surbaissées	25
2.5.1 Géométrie	25
2.5.2 Théories	26
2.6 Éléments de coque mince	28
2.6.1 Éléments basés sur la théorie des coques à forte courbure	28
2.6.2 Éléments basés sur une théorie de coque surbaissée	29
2.7 Élément de coque à facette planes	30
2.7.1 La matrice de rigidité élémentaire dans le repère local	30
2.7.2 Passage aux coordonnées globales et assemblage des éléments.....	34

2.1 Introduction

Le premier élément fini courbe pour coque de géométrie arbitraire fut proposé en 1966. Jusqu'en 1970 environ, de nombreux essais eurent lieu avec des éléments plaque-membrane et des éléments courbes. Mais on se heurta à des difficultés théoriques et numériques: théorie des coques, conformité aux frontières, modes rigides, etc.

Ce chapitre a pour but de présenter les théories des coques en général ainsi que les différentes théories appliquées au développement des éléments de coques minces. Par ailleurs les structures de coques constituent l'un des types de structures qui présentent des difficultés d'analyse, parmi les différents modèles des coques on s'intéressera aux coques cylindriques profondes et surbaissées. Le contenu de ce chapitre est inspiré des références suivantes : [61], [62], [63], [64] et [65].

2.2 Les coques en général

Une coque est définie géométriquement par une surface courbée dotée d'une épaisseur h . Cette épaisseur est supposée faible devant les autres dimensions, y compris devant le rayon de courbure minimal r_{\min} de la surface.

Si L est la plus petite longueur curviligne de la coque, les valeurs communément admises sont (figure 2.1) :

$$\frac{L}{h} \leq 4 \quad \text{et} \quad \frac{r_{\min}}{h} \leq 16 \quad (2.1)$$

-Une coque est dite épaisse si $4 \leq \frac{L}{h} \leq 20$. Elle est dite mince si $\frac{L}{h} \leq 20$ (une coque cylindrique mince $\frac{h}{r_{\min}} \leq 0.1$).

Il convient de distinguer deux grandes familles de structures de coques :

- ✓ Les structures composées de coques dont les efforts internes ne comprennent que des forces tangentielles. Les structures travaillant en tension plane sont souvent délicates à modéliser, car la théorie de membrane ne respecte pas les conditions d'appui et de chargement.
- ✓ Les structures composées de coques dont les efforts internes comprennent, en plus des forces tangentielles, des efforts de flexion (structures travaillant en flexion-membrane).

Pour certains éléments finis, les états de déformation nulle pour un déplacement d'ensemble rigide peuvent ne pas être satisfaits.

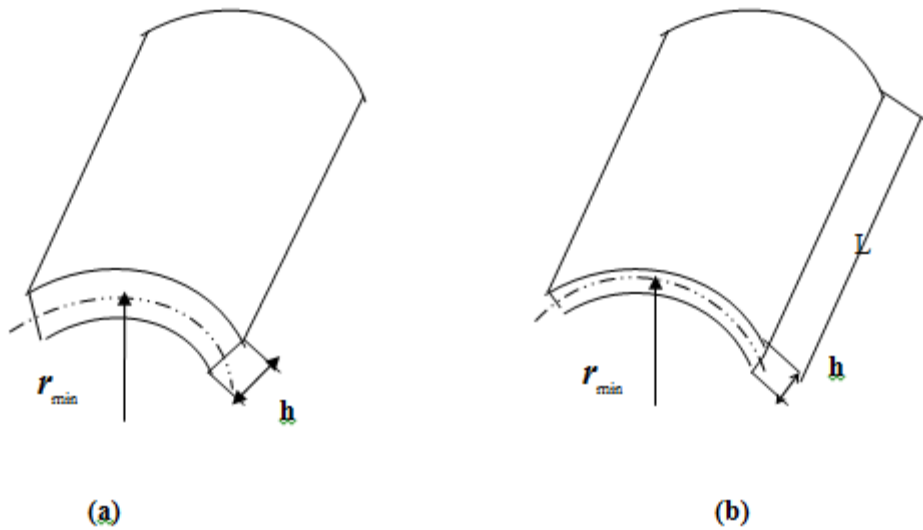


Figure 2.1. Définition des coques :

(a) coque cylindrique épaisse ; (b) coque cylindrique mince.

2.2.1 Hypothèses cinématiques

Les formulations analytiques associées aux coques dérivent des équations habituelles de la mécanique des milieux continus auxquelles sont adjointes des hypothèses particulières sur la cinématique. Ces hypothèses permettent de formuler les équations d'équilibre en termes de contraintes généralisées (efforts et moments). Les deux hypothèses les plus couramment utilisées sont les hypothèses cinématiques de conservation des normales (Love – Kirchhoff) ou celles des sections planes (Mindlin – Reissner – Naghdi – Hencky) sans prise en compte de la variation de l'épaisseur. Ces hypothèses peuvent être comparées à celles qui sont utilisées pour les éléments de poutre mince (Navier – Euler – Bernoulli) ou épaisse (Timoshenko). Les domaines de validité de chaque hypothèse dépendent de la géométrie de la coque et du chargement appliqué.

2.2.1.1 Hypothèse de Love – Kirchhoff

Les fibres rectilignes orthogonales à la surface moyenne de la coque dans la configuration de référence restent orthogonales à la surface moyenne pour toute configuration déformée et ne sont pas sujettes à la déformation.

Cette hypothèse est à la base de la construction des éléments servant à l'étude des coques minces pour lesquelles les déformations dues au cisaillement transversal peuvent être négligées. Elle est correcte si les conditions suivantes sont remplies :

-Les contraintes normales transverses à la surface moyenne peuvent être négligées devant les autres contraintes.

-L'épaisseur h de la coque est faible devant le plus petit rayon de courbure r_{\min} et la plus petite longueur curviligne L de la coque.

2.2.1.2 Hypothèse de Mindlin – Reisner

Les fibres droites, perpendiculaires à la surface de la coque dans la configuration de référence, restent droites après déformation. Une hypothèse supplémentaire sur la répartition du cisaillement transversal doit alors être rajoutée.

Le coefficient de correction (réduction) de cisaillement transversal, égal à $5/6$ pour les matériaux isotropes est introduit comme dans le cas des plaques. Pour les coques, cette correction est liée aux courbures et à la nature de l'effet étudié (flexion cylindrique, sphérique, etc.).

L'hypothèse de Mindlin- Reisner conduit naturellement à la formulation d'élément de coque épaisse. Le rapport entre l'épaisseur et une dimension caractéristique doit cependant rester inférieure à $1/4$.

L'hypothèse de Love – Kirchhoff est un cas particulier de l'hypothèse de Mindlin – Reisner quand les fibres sont normales à la surface moyenne les contraintes normales ne sont pas considérées).

2.3 Théories des coques minces

2.3.1 Théorie de love

Dans le domaine des coques, la première théorie recevable a été formulée par love en 1888. Elle est construite sur le même modèle que la théorie des plaques de Kirchhoff, à savoir exprimer les équations en se référant à la surface moyenne tout en tirant parti, à l'aide d'hypothèses raisonnables de la minceur de la structure.

La courbure de la coque pose toutefois des problèmes nouveaux et délicats, par rapport au cas de la plaque. Suite à de nombreuses recherches et controverses, la validité de la théorie simple de Love n'a finalement été confirmée que beaucoup plus tard par Koiter 1960.

2.3.2 Élément de coque

Sur la surface moyenne de la coque, on choisit les lignes de courbure comme lignes de coordonnées α et β , vu leurs propriétés remarquables. On appelle z la coordonnée mesurée selon la normale n à la surface moyenne ($-t/2 \leq z \leq t/2$).

Dans la coque d'épaisseur t , on découpe un élément par deux paires de sections droites infiniment voisines, contenues dans les sections normales associées aux lignes de courbure (figure 2.2)

Au niveau $z = 0$ de la surface moyenne, les longueurs des côtés curvilignes de l'élément sont ds_α et ds_β ; les courbures principales $1/r_{\max}$ et $1/r_{\min}$ sont désignées par $1/r_\alpha$ et $1/r_\beta$. Au niveau z , une surface parallèle à la surface moyenne coupe les faces de l'élément selon des arcs de longueur ds'_α et ds'_β .

Par similitude des secteurs circulaires situés dans les plans $(r_\alpha \cdot ds_\alpha)$ et $(r_\beta \cdot ds_\beta)$, on a :

$$ds'_\alpha = \left(1 - \frac{z}{r_\alpha}\right) ds_\alpha \qquad ds'_\beta = \left(1 - \frac{z}{r_\beta}\right) ds_\beta \qquad (2.2)$$

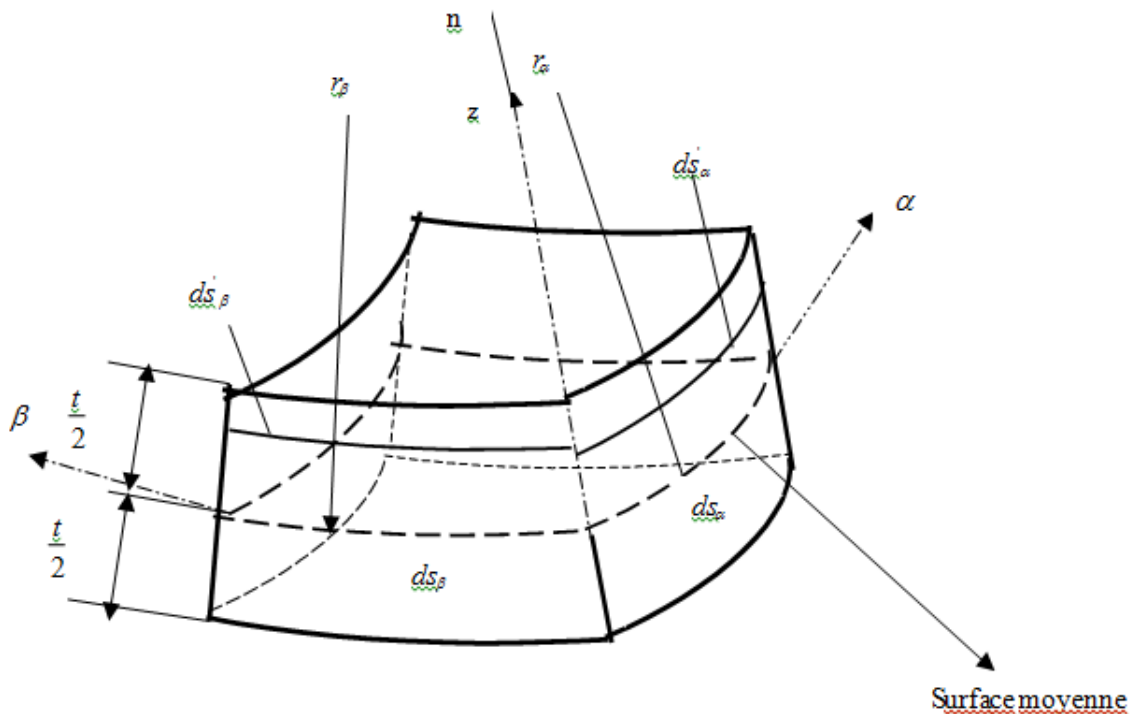


Figure 2.2. Élément coque dans les lignes de courbure (vue arrière)

2.3.3 Hypothèses

2.3.3.1 Hypothèses de linéarisation

On se place dans le cadre usuel de l'analyse linéaire des structures, acceptant

- L'hypothèse de linéarisation géométrique
- L'hypothèse de linéarisation matérielle.

La première admet que les déplacements et les déformations restent petits, en sorte que les équations cinématiques soient linéaires. Pratiquement, les dilatations et, surtout, les rotations doivent rester petites. La seconde admet que le matériau obéit à la loi de Hooke.

- La coque est constituée d'un seul matériau isotrope homogène.

2.3.3.2 Hypothèse des structures minces

Love a généralisé aux coques les hypothèses classiques propres aux poutres de Bernoulli et aux plaques de Kirchhoff. Elles peuvent s'exprimer de la manière suivante :

- Les normales à la surface moyenne de la coque non déformée restent des normales à la surface moyenne de la coque déformée et elles ne changent pas de longueur.
- La contrainte normale transversale est négligeable.

La première hypothèse est purement cinématique et s'appelle parfois loi de conservation de normales. Il en résulte d'abord que les glissements sont nuls dans tous les plans normaux à la surface moyenne.

$$\gamma_{\alpha z} = 0 \quad \gamma_{\beta z} = 0 \quad (2.3)$$

et ensuite que la dilatation perpendiculaire à la surface moyenne est nulle.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (2.4)$$

La seconde hypothèse, statique, permet d'ignorer les effets qui se manifestent à travers l'épaisseur et s'écrit.

$$\sigma_z \cong 0 \quad (2.5)$$

2.3.3.3 Hypothèse de faible épaisseur

On fait encore l'hypothèse suivante :

- L'épaisseur t de la coque est petite vis-à-vis du rayon de courbure minimal r_{\min} de la surface moyenne, soit

$$\frac{t}{r_{\min}} \ll 1 \quad (2.6)$$

L'hypothèse de faible épaisseur est importante en théorie de love, car elle conduit à une simplification formidable des équations et fixe l'ordre de grandeur des termes négligeables, soit $O(t/r_{\min})$.

Il en résulte, dans l'équation (3.2)

$$\frac{z}{r_\alpha} \ll 1 \qquad \frac{z}{r_\beta} \ll 1 \qquad (2.7)$$

D'où

$$ds'_\alpha \cong ds_\alpha \qquad ds'_\beta \cong ds_\beta \qquad (2.8)$$

Ce qui signifie que les faces de l'élément de coque peuvent être admises rectangulaires (figure 2.2)

En liaison avec l'équation (2.4), on déduit aussi qu'on peut faire agir toutes les charges au niveau de la surface moyenne.

En pratique, pour que la théorie qui suit soit valable, il est nécessaire de respecter, en tout point d'une coque, l'ordre de grandeur.

$$\frac{t}{r_{\min}} \ll \frac{1}{10} \qquad (2.9)$$

2.4 Coques cylindriques

2.4.1 Géométrie

La surface moyenne cylindrique Σ de la coque peut être engendrée par une droite, la génératrice, se déplaçant parallèlement à elle – même en suivant une courbe. La directrice est admise plane et les génératrices sont normales au plan contenant la directrice. Inversement, la surface moyenne s'obtient aussi en faisant se déplacer la directrice parallèlement à elle-même le long d'une génératrice (surface de translation). Conventionnellement, on place les génératrices à l'horizontale. La figure 2.3 montre la surface moyenne et les coordonnées ; génératrices et directrices sont lignes de courbures (x, φ) .

Si la directrice est une courbe fermée soit (cercle, ellipse), la coque est dite fermée également (tuyau). Si la directrice est ouverte (arc de cercle, demi-ellipse), la coque est dite ouverte et qualifiée de voûte.

2.4.2 Les relations de la théorie classique de love (la première approximation de la théorie des coques).

Dans la théorie classique de Love (la première approximation de la théorie de coque), les six quantités des déformations sont définies en fonction des déplacements pour une coque

cylindrique comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} & \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Les résultantes des contraintes (N_x , N_y et N_{xy}) qui correspondent aux déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} et les moments (M_x , M_y et M_{xy}) qui correspondent aux changements des courbures κ_x , κ_y et κ_{xy} sont définis comme suit(figure 2.4) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} N_x = C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) & N_y = C(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) & N_{xy} = \frac{1}{2}(1-\nu)C\gamma_{xy} \\ M_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_y) & M_y = D(\kappa_y + \nu \kappa_x) & M_{xy} = D(1-\nu)\kappa_{xy} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

D'où $C = Eh(1-\nu^2)$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

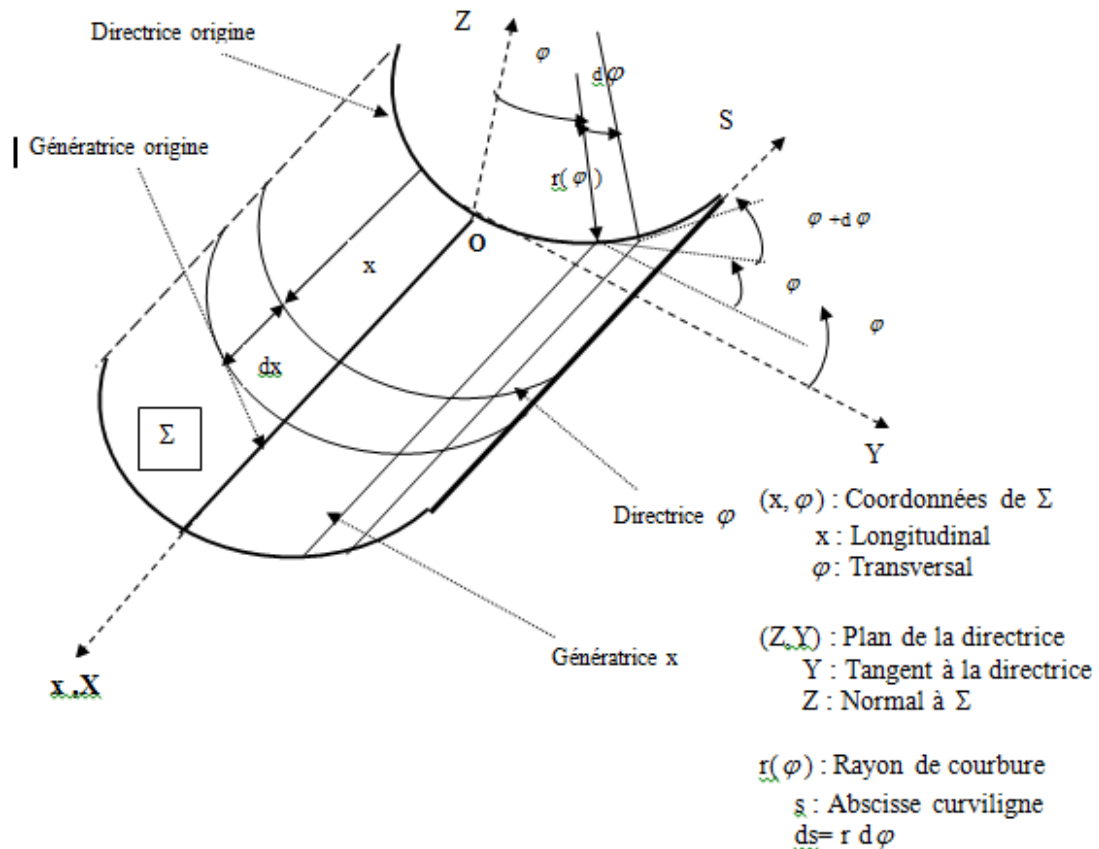


Figure 2.3. Coque cylindrique.

Dans la théorie classique, l'énergie de déformation est la somme des énergies des comportements membranaire et de flexion. Elle a la forme suivante:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{A_s} C \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{\gamma_{xy}^2}{4}) \right] + D \left[(\kappa_x + \kappa_y)^2 - 2(1-\nu)(\kappa_x \kappa_y - \kappa_{xy}^2) \right] dA_s \quad (2.12)$$

A_s : L'aire de la surface moyenne

L'énergie potentielle pour une charge répartie qui a 3 composantes q_1, q_2, q_3 par unité de surface agissant dans la direction positive de u, v, w est :

$$\Omega = - \iint_{A_s} (q_1 u + q_2 v + q_3 w) dA_s \quad (2.13)$$

Quand les intégrales des équations sont présent sur l'élément fini, les expressions de U et Ω deviennent la base pour le développement de la matrice de rigidité et le vecteur de la charge répartie.

Dans le développement des éléments de coques cylindriques, des considérations fermées sont toujours données pour la représentation du mouvement du corps rigide, il est noté que dans tel mouvement les composantes des déplacements ont la forme suivante:

$$\begin{cases} u_r = R a_2 \cos \frac{y}{R} + R a_4 \sin \frac{y}{R} + a_5 \\ v_r = (a_1 + a_2 x) \sin \frac{y}{R} - (a_3 + a_4 x) \cos \frac{y}{R} + a_6 \\ w_r = -(a_1 + a_2 x) \cos \frac{y}{R} - (a_3 + a_4 x) \sin \frac{y}{R} \end{cases} \quad (2.14)$$

2.4.3 Théorie de Koiter – Sander

Les équations déformation - déplacement de la théorie de Koiter et Sander sont compatibles avec le mouvement du corps rigide, la théorie de Koiter est basée sur les hypothèses d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

Dans la théorie de Koiter et Sander, les composantes des déformations et les changements de courbures pour une coque cylindrique circulaire sont donnés en fonction des déplacements comme suit :

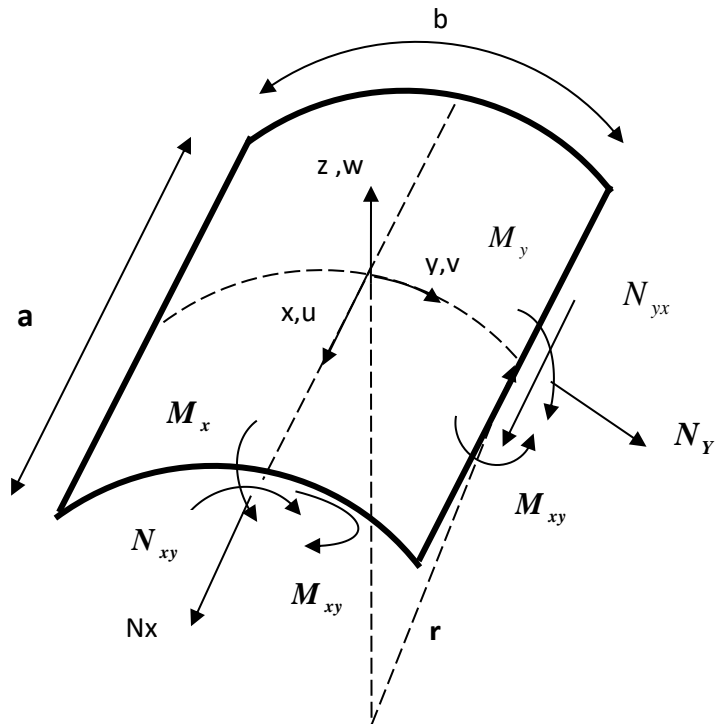


Figure 2.4. Les efforts de l'élément coque

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} & k_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R} & k_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} & k_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases} \quad (2.15)$$

Les relations constitutives pour une coque construite d'un matériau isotrope élastique sont les mêmes que les relations de la première approximation

2.5 Coques surbaissées

2.5.1 Géométrie

Lorsqu'une coque a, en tout point, une surface moyenne de très faible courbure, elle est qualifiée de coque surbaissée ; la surface moyenne est aussi dite surbaissée. On peut tracer un plan, à peu près parallèle à la surface moyenne Σ de la coque, dans lequel on dessine les axes X et Y d'un système d'axe cartésien (X, Y, Z) (Figure 2.5), et définir Σ par rapport à ce plan, explicitement, par

$$Z = Z(X, Y) \quad (2.16)$$

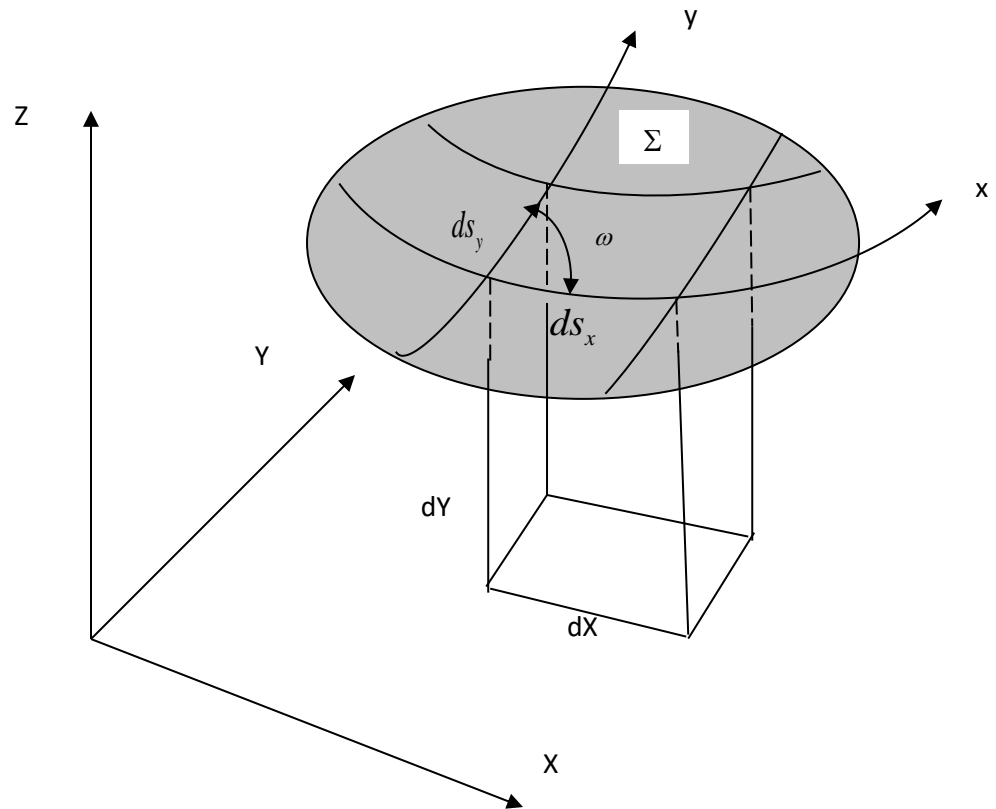


Figure 2.5. Surface moyenne d'une coque surbaissée.

La surface moyenne de la coque est surbaissée si, par rapport au plan de référence (X, Y) , les pentes $\frac{\partial Z}{\partial X}$ et $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ sont petites, c'est-à-dire si les carrés et produits des dérivées premières de $Z(X, Y)$ sont négligeables devant l'unité.

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 \ll 1 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 \ll 1 \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial Z}{\partial Y}\right| \ll 1 \quad (2.17)$$

En pratique, ces pentes ne devraient pas dépasser 0.1 radian, mais les résultats peuvent encore être intéressants jusqu'à 0.5 radian ($\approx 30^\circ$), on déduit :

$$ds_x \cong dX \quad ds_y \cong dY \quad \cos \omega \cong 1 \quad dA \cong dXdY \quad (2.18)$$

Remarque

La langue scientifique anglaise possède deux qualificatifs permettant de distinguer les coques surbaissées des autres : *shallow* et *deep*. La langue française n'a pas de terme pour *deep*. On emploie parfois les expressions à faible courbure et à forte courbure.

2.5.2 Théories

Deux théories de coques surbaissées sont couramment utilisées : l'une, dite de Donnell,

s'exprime en coordonnées curvilignes (x, y) , l'autre, de Marguerre, en coordonnées cartésiennes (X, Y) . La différence est insignifiante pour les résultats pratiques, mais essentielle pour les techniques numériques.

Dans l'un et l'autre cas, la théorie s'appuie sur l'hypothèse, de type géométrique, postulant que la surface moyenne est surbaissée. Puis, selon la théorie, une hypothèse complémentaire, de type cinématique, est nécessaire ou non ; c'est à ce stade que s'exprime la différence entre les deux théories.

Au reste, la structure de la loi constitutive ne change pas, que la coque soit surbaissée ou non, que l'on soit en coordonnées curvilignes ou cartésiennes. Cette structure est donnée par les équations (2.11).

2.5.2.1 Coques surbaissées en coordonnées curvilignes (Théorie de Donnell)

Toutes les grandeurs et équations s'expriment dans les coordonnées curvilignes (x, y) de la surface moyenne. La normale est désignée par z .

Dans cette théorie, une hypothèse complémentaire, de caractère cinématique, est nécessaire ; elle postule que les composantes membranaires u et v du déplacement sont négligeable devant la composante transversale w : elles peuvent être ignorées dans l'expression des rotations, et disparaissent donc aussi de celles des courbures.

Les rotations sont simplement :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.19)$$

Les six équations cinématiques sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2w \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad k_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

L'équilibre produit cinq équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0 \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0 \\ N_x \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p_z = 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - V_y = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

2.5.2.2 Coques surbaissées en coordonnées cartésiennes (Théorie de Marguerre)

On travaille dans les axes cartésiens (X,Y,Z) et toutes les grandeurs s'y réfèrent .La correspondance entre la coque surbaissée et son plan (X,Y) de référence a lieu par projection orthogonale sur (X,Y) .Aucune hypothèse complémentaire n'est nécessaire .

Les rotations sont :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial X} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial Y} \quad (2.22)$$

La cinématique s'exprime par les six équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial Z}{\partial X} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial Z}{\partial Y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial Z}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial Z}{\partial X} \\ k_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial X} = \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \quad k_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial Y} = \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \quad k_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial Y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial X} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial Y} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

L'équilibre fournit cinq équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial X} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial Y} + p_x = 0 \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial N_y}{\partial Y} + p_y = 0 \\ N_x \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + N_y \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} + \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} + p_z - p_x \frac{\partial Z}{\partial X} - p_y \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial Y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial X} - V_y = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} - V_x = 0 \end{array} \right. \quad (2.24)$$

2.6 Éléments de coque mince

2.6.1 Éléments basés sur la théorie des coques à forte courbure

La formulation d'élément basés sur une théorie de coque à forte courbure est à la fois la plus élégante, la plus délicate et la plus difficile .Partant de la théorie de Love-Koiter , on peut exprimer le champ des déplacements de deux façons différentes , en fonction (figure 2.6).

- Des composantes curvilignes u , v et w des déplacements de la surface moyenne , elle-même défini par le rayon vecteur $x(\alpha, \beta)$.
- Des composantes cartésiennes u_x , v_y et w_z des déplacements de la surface moyenne définie semblablement par une fonction $Z=Z(X, Y)$ par rapport à un plan (X, Y) de la normale , ou encore la rotation de la tangente transversale à la frontière , soit continue .Or cette rotation n'est pas égale à la simple pente du déplacement transversal w , car elle

dépend aussi des rayons de courbure. Pour une coque cylindrique, la rotation de la tangente à la directrice vaut :

$$\theta_\varphi = \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial s} \quad (2.25)$$

et non pas simplement (comme dans les plaques et poutres droites)

$$\theta_\varphi = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (2.26)$$

2.6.2 Éléments basés sur une théorie de coque surbaissée

Les théories des coques surbaissées sont nettement plus simples que la théorie de love ; en particulier, les rotations sont assimilables aux pentes de la composante transversale w de la déformée. On peut alors construire des éléments finis de coques surbaissées selon les deux théories décrites à la section 2.5.2 (Donnell en composantes curvilignes et Marguerre en composantes cartésiennes).

La solution théorique d'un problème de coque surbaissée est évidemment différente de celle du même problème exprimé en coque à forte courbure ; plus la coque est surbaissée, plus cette différence s'atténue.

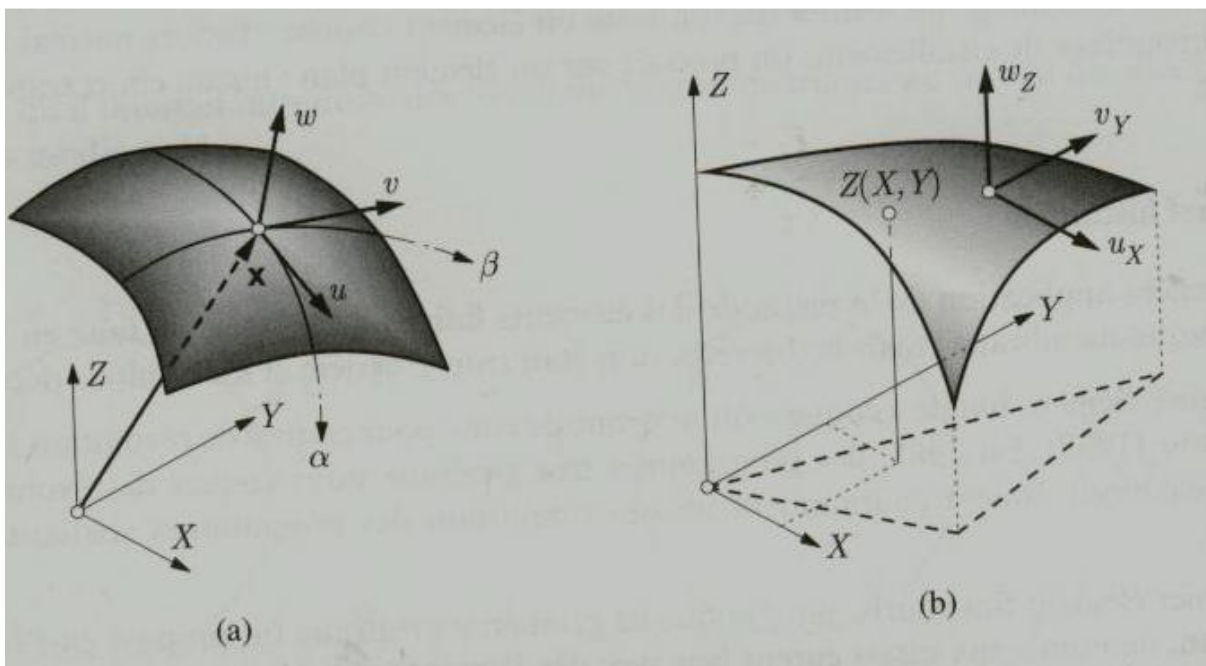


Figure 2.6. Composantes du champ des déplacements : (a) Coordonnées curvilignes ; (b) Coordonnées cartésiennes. [62]

2.7 Élément de coque à facette plane

Les éléments d'une coque plane sont soumis à des charges agissant dans son plan et normales celui-ci donnant à la fois une action dans le plan (comportement membranaire) et une action normale au plan (comportement flexionnel).

Pour des petits mouvements, ces deux actions sont complètement indépendantes donc le Comportement de l'élément pris sur une plaque peut être considéré de deux façons indépendantes, une action élastique dans le plan et une action de flexion normale au plan.

On suppose donc que les mouvements de flexion et les rotations de l'élément sont rapportés uniquement aux forces normales au plan et que les déplacements plans sont seulement rapportés aux forces planes. En respectant ces hypothèses, on peut alors faire l'étude des plaques pliées en superposant les deux comportements.

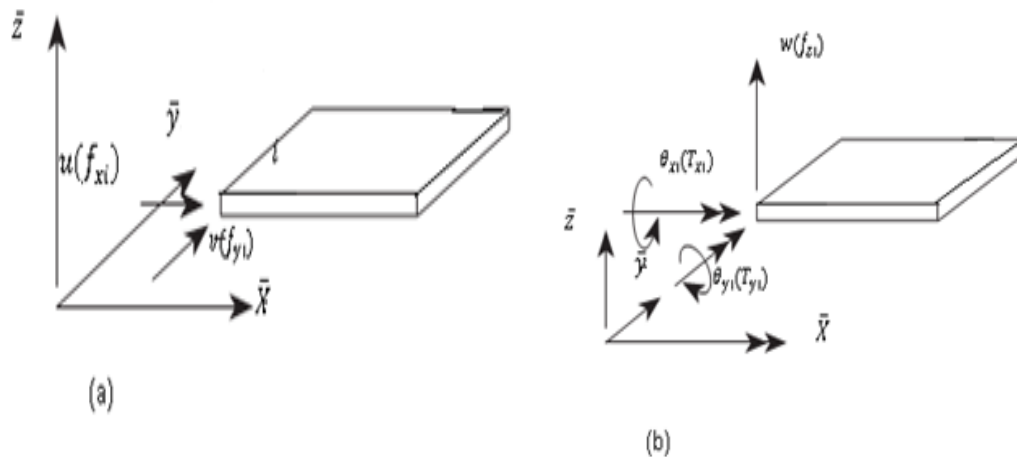


Figure. 2.7 Élément plane soumis à des actions membranaires et flexionnelles :(a) Déplacements et forces «plane»; (b) Déplacements et force «flexion». [65]

2.7.1 La matrice de rigidité élémentaire dans le repère local

D'abord, on considère l'effet membranaire «en contraintes planes». Nous savons que l'état de déformations est défini par le champ de déplacements uniforme dont les composantes sont les deux translations (U et V)

En considérant la matrice de rigidité reliant les forces et les déplacements plans aux nœuds, on a:

$$\{F_e^p\} = [K_e^p] \{\delta_e^p\} \quad (2.27)$$

$$\{F_e^p\} = \begin{Bmatrix} \{F_1^p\} \\ \{F_2^p\} \\ \{F_3^p\} \\ \{F_4^p\} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\text{Avec : } \{F_i^p\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Et le vecteur déplacement est donné par :

$$\{\delta_e^p\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^p\} \\ \{\delta_2^p\} \\ \{\delta_3^p\} \\ \{\delta_4^p\} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\text{Avec : } \{\delta_i^p\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

On peut écrire alors pour un nœud (i) :

$$\{F_i^p\} = [K_{ii}^p] \{\delta_i^p\} \quad (2.32)$$

$[K_{ii}^p]$ est la sous matrice qui relie les forces du nœud (i) aux déplacements de se même nœud :

Pour tout l'élément, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{X3} \\ F_{Y3} \\ F_{X4} \\ F_{Y4} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Da la même manière, quand on considère le comportement flexionnel, on aboutit à la relation suivante :

$$\{F_e^f\} = [K_e^f] \{\delta_e^f\} \quad (2.34)$$

On peut écrire alors pour un nœud (i) les vecteurs force et déplacement :

$$\{F_i^f\} = \begin{Bmatrix} F_{zi} \\ T_{xi} \\ T_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\{\delta_i^f\} = \begin{Bmatrix} W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Avant d'effectuer la superposition des deux comportements, on doit faire les remarques suivantes :

- On suppose que l'action membranaire et l'action flexionnelle soient parfaitement découplées pour avoir un élément de coque plane par superposition.
- Les deux déplacements dans le plan (u et v) et les trois degrés de liberté dus à la flexion (w, θ_x , et θ_y), l'élément peut être aussi sujet à des rotations dans son plan (θ_z) autour de l'axe z.

Bien que la plaque soit très rigide dans son plan de telle sorte que ces rotations soient très petites et donc négligeables devant les autres degrés de liberté, il est commode, pour des raisons qui apparaîtront plus loin (au niveau de l'assemblage). De prendre en compte cette rotation en l'associant à un couple fictif (T_z)

Pour inclure le terme θ_z , que l'on sait négligeable et qui n'affecte pas les autres termes dans la matrice de rigidité de l'élément, la relation entre les quantités θ_z et T_z peuvent être exprimées par la pseudo-équation :

$$(T_z)_i = 0. (\theta_z)_i \quad (2.37)$$

Donc, on obtient finalement en chaque nœud les déplacements et les forces suivants : (Figure 2.8)

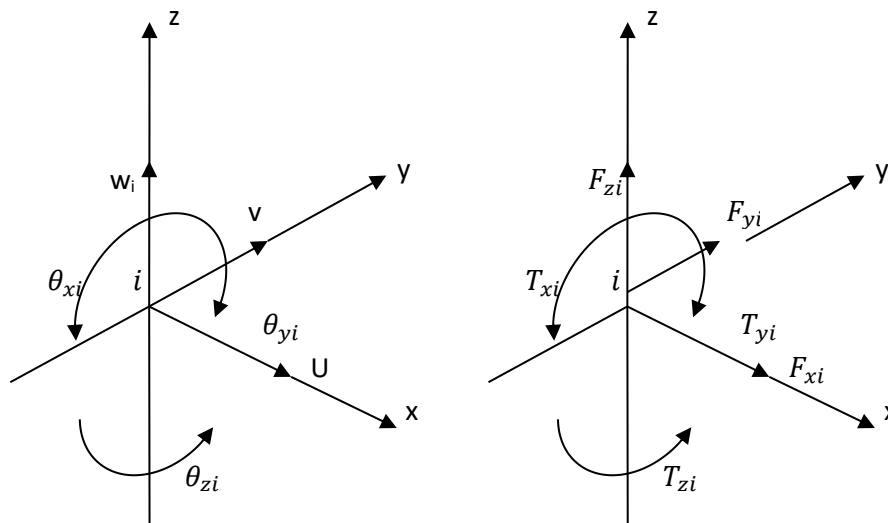


Figure 2.8. Déplacements et forces nodales après superposition. [65]

Pour le nœud(i) on a :

$$\{F_i\} = \begin{bmatrix} K_{ii}^p & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_i^p\} \\ \{\delta_i^f\} \\ \{\theta_{zi}\} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

On peut généraliser ces équations afin d'obtenir la matrice de rigidité $[K_e]$ de l'élément de plaque pliée (Figure.2.9).

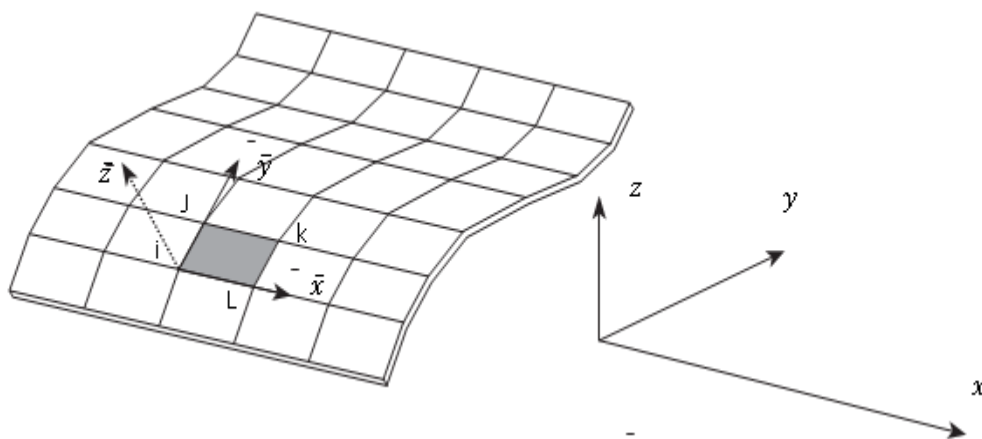


Figure.2.9 Coque cylindrique par l'assemblage d'éléments rectangulaires : Les coordonnées global et local. [65]

2.7.2 Passage aux coordonnées globales et assemblage des éléments

Dans les problèmes d'élasticité plane et de flexion des plaques, tous les éléments étaient coplanaires, cependant pour les plaques pliées types et les coques, les éléments adjacents sont inclinés les uns aux autres.

Par conséquent, avant d'effectuer l'assemblage des éléments et de former ainsi la matrice de rigidité globale, on doit exprimer les matrices et vecteurs élémentaires dans le système de coordonnées globales (X, Y et Z).

Ce changement de repère a un intérêt important, car les déplacements qu'on calculera par la suite seront rapportés au système global, c'est-à-dire qu'ils n'auront une signification que dans ce système de coordonnées (Figure.2.10).

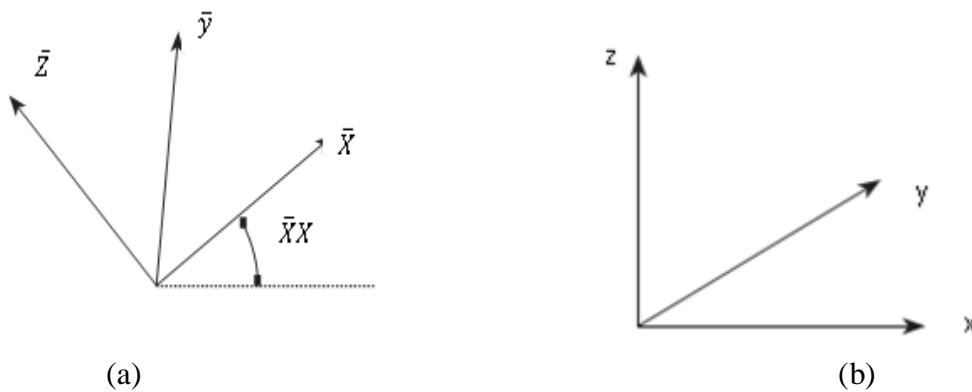


Figure 2.10. Le système de coordonnées : (a) repère local ; (b) repère global. [65]

Les raisons d'inclure le sixième degré de liberté (θ_z) dans les équations d'équilibre (dans le repère local), sont maintenant apparentes car ceci permet d'avoir une matrice $[T]$ symétrique carrée, ce qui va rendre les opérations d'assemblage plus faciles.

Sachant que les inclinaisons entre le repère local et le repère global sont exactement les mêmes au nœud (i) qu'aux autres nœuds de l'élément, on peut écrire :

$$\{\bar{\delta}_e\} = [R]\{\delta_e\} \quad (2.39)$$

$$\{\bar{F}_e\} = [R]\{F_e\} \quad (2.40)$$

$$\{F_e\} = [R]^{-1}\{\bar{F}_e\} \quad (2.41)$$

Et vu que $[R]$ est une matrice orthogonale, on; peut écrire $[R]^{-1} = [R]^T$ où $[R]$ est la matrice symétrique carrée d'ordre 24 et qui s'écrit comme suit :

$$[R] = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

On exprime maintenant la matrice de rigidité d'un élément dans le repère global on a :

$$\{\bar{F}_e\} = [k_e] \{\bar{\delta}_e\} \quad (2.43)$$

Soit

$$[R] \{F_e\} = [\bar{K}_e] [R] \{\delta_e\} \quad (2.44)$$

On effectue le changement de repère par une matrice de rotation $[T]$, telle que pour le nœud (i), on a :

$$\{\bar{\delta}_i\} = [T] \{\delta_i\} \quad (2.45)$$

$$\{\bar{F}_i\} = [T] \{F_i\} \quad (2.46)$$

Avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Ou :

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{X}X} & \lambda_{\bar{X}Y} & \lambda_{\bar{X}Z} \\ \lambda_{\bar{Y}X} & \lambda_{\bar{Y}Y} & \lambda_{\bar{Y}Z} \\ \lambda_{\bar{Z}X} & \lambda_{\bar{Z}Y} & \lambda_{\bar{Z}Z} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$\lambda_{\bar{ii}}$ est le cosinus de l'angle que forment les axes \bar{X} et X (fig.2.10.a)

D'ou :

$$[k_e] = [R]^T [\bar{k}_e] [R] \quad (2.49)$$

Chapitre 2. Théories des coques

Une fois les matrices de rigidité de tous éléments sont exprimées dans le repère global, l'assemblage et la prise en compte des conditions aux limites ainsi que la résolution du système d'équations final suivront les mêmes démarches standards.

Chapitre 3. Nouvel élément de coque cylindrique triangulaire basé sur les déformations d'ordre supérieur

Sommaire

3.1 Introduction	37
3.2 Formulation de l'élément SBTDS	38
3.2.1 Dérivation du champ des déplacements	38
3.2.2 Évaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse	41
3.3 Validation numérique	42
3.3.1 L'analyse statique	42
3.3.2 vibrations libres des panneaux cylindriques.....	49
3.4 conclusions	51

3.1 Introduction

Les éléments de coque sont très efficaces pour modéliser le comportement des structures courbes. De nombreux chercheurs ont adopté la méthode des éléments finis comme outil numérique puissant pour simuler les comportements des structures courbes [66].

Trois types d'éléments finis sont utilisés. Il y a d'abord les éléments de coque courbes qui sont développés à partir de la théorie générale des coques, telle que celles établies par Zienkiewicz [67], et Liang et Izzuddin [68]. Ensuite, on trouve les éléments de coque dégénérés qui sont obtenus à partir de la théorie tridimensionnelle du solide, comme celle développée par Abed-Meraim et Combescure [69], et Trinh et al. [70]. Enfin viennent les éléments de coque à facette plane ayant une représentation géométrique approximative [71 - 73], ces éléments ont été formulés en combinant un élément de membrane élastique plan et des éléments de flexion de plaque.

Les éléments de coque peuvent également être classés en fonction de la courbure en tant qu'éléments de coque profonde et des éléments de coque peu profonds. Il est important de noter que l'utilisation des éléments de coques courbes offre de nombreux avantages, comme cela a été rapporté par Jones et Strome [74]. Dans ce cas-là, par exemple, la dérivation des équations de la rigidité structurelle ne nécessite aucune approximation géométrique supplémentaire ni aucune transformation de coordonnées. De plus, l'utilisation d'éléments de coques courbes engendre des éléments utiles et permet d'éviter des problèmes tels que la convergence lente pour les coques de forte courbure.

Dans le présent chapitre, un élément de coque cylindrique triangulaire à trois nœuds a été développé en vue d'analyser les structures courbes, en utilisant l'approche en déformation et la théorie des coques profonde. Ainsi, seuls cinq degrés de liberté par nœud ont été utilisés pour l'élément développé qui est appelé coque profonde triangulaire basée sur la déformation (Strain-Based Triangular Deep Shell - SBDTS). Cet élément est basé sur des déformations supposées, qui satisfont aux équations de compatibilité, ainsi que sur les modes de déplacements de corps rigides. Par ailleurs, l'intégration numérique a été utilisée pour calculer les matrices de rigidité et de masse pour l'élément coque développé. Divers exemples d'analyse statiques et vibrations libres, de structures courbes, ont été utilisés afin d'évaluer l'élément (SBTDS). Les résultats obtenus ont ensuite été comparés avec d'autres, précédemment publiés.

3.2 Formulation de l'élément SBTDS

3.2.1 Dérivation du champ des déplacements

Considérons l'élément triangulaire courbe illustré sur la figure 1. Le centre (O) de l'hypoténuse de l'élément est l'origine des coordonnées curvilignes x , y et z ($y=R\phi$). Le présent élément est formulé en utilisant la théorie des coques profondes, les équations de déformation pour un élément de coque profonde cylindrique dans un système de coordonnées curvilignes [46] sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \varepsilon_\phi = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{W}{R}, \gamma_{x\phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ k_x &= -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, k_\phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}, k_{x\phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \phi} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Les déplacements U , V et W sont utilisés pour représenter les six déformations données dans l'équation (1), ces déplacements ne peuvent pas être considérés comme indépendantes et doivent donc vérifier les équations de compatibilité écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_\phi}{\partial x^2} + \frac{k_x}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \phi^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_{x\phi}}{\partial x \partial \phi} &= 0, \frac{\partial k_{x\phi}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial k_x}{\partial \phi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \phi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_{x\phi}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial k_\phi}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial k_{x\phi}}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

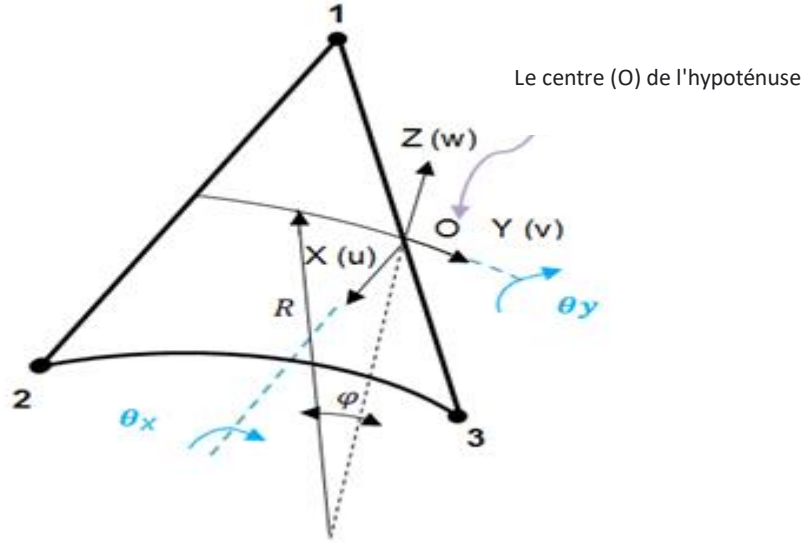


Figure 3.1. L'élément triangulaire cylindrique profond (SBTDS).

Le champ des déplacements de corps rigide peut être déterminé en égalisant à zéro les six déformations données par l'équation (3.1), après intégration, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 U &= R\alpha_2 \cos \varphi + R\alpha_4 \sin \varphi + \alpha_5 \\
 V &= (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \varphi + \alpha_6 \\
 W &= -(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \varphi
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Le présent élément possède cinq degrés de liberté ($U, V, W, \theta_y = \frac{\partial W}{\partial x}, \theta_x = \frac{\partial W}{R \partial \varphi} - \frac{V}{R}$) à chacun des trois nœuds. Ce qui en résulte que le champ des déplacements doit contenir que 15 constantes indépendantes où six constantes ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$) ayant été utilisées pour les modes de corps rigides, et les constantes restantes ($\alpha_7, \alpha_8, \dots, \alpha_{15}$) sont réparties entre les six déformations comme suite :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_7, \quad \varepsilon_\varphi = \alpha_8 + \left[-\frac{1}{2R} \alpha_{10} x^2 - \frac{1}{6R} \alpha_{11} x^3 - \frac{1}{6R^2} \alpha_{12} x^3 y \right] \\
 \gamma_{x\varphi} &= \alpha_9, \quad k_x = \alpha_{10} + \alpha_{11} x + \frac{1}{R} \alpha_{12} xy \\
 k_\varphi &= \alpha_{13} + \frac{y}{R} \alpha_{14}, \quad k_{x\varphi} = \alpha_{15} + \left[\frac{\alpha_{12}}{2R} x^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Pour satisfaire les équations de compatibilité (Équation (3.2)), les termes entre parenthèses des déformations (Équation (3.4)) sont ajoutés. les fonctions de déformation exprimées dans l'équation (3.4) sont remplacées dans l'équation (3.1) et les fonctions de déplacement obtenues après intégration sont ajoutées aux expressions correspondantes dans l'équation (3.3) pour obtenir les fonctions des déplacements finales :

$$\begin{aligned}
 U &= R\alpha_2 \cos \varphi + R\alpha_4 \sin \varphi + \alpha_5 + x\alpha_7 + y\alpha_9 - Ry\alpha_{15} \\
 V &= (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \varphi + \alpha_6 + Ry\alpha_{13} + \frac{y^2}{2} \alpha_{14} + Rx\alpha_{15} \\
 W &= -(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \varphi + R\alpha_8 - \frac{x^2}{2} \alpha_{10} - \frac{x^3}{6} \alpha_{11} - \frac{yx^3}{6R} \alpha_{12} - R^2 \alpha_{13} - Ry\alpha_{14} \\
 \theta_x &= -\frac{1}{R} \alpha_6 - \frac{x^3}{6R} \alpha_{12} - \alpha_{13} y - \left(R + \frac{y^2}{2R}\right) \alpha_{14} - x\alpha_{15} \\
 \theta_y &= -\alpha_2 \cos \varphi - \alpha_4 \sin \varphi - x\alpha_{10} - \frac{x^2}{2} \alpha_{11} - \frac{yx^2}{2R} \alpha_{12}
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les fonctions de déplacement et de déformation de l'élément développé données par les équations. (3.5) et (3.4) s'écrivent respectivement sous forme matricielle :

$$\{U\} = [P]\{\alpha\} \quad (3.6)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} \quad (3.7)$$

$$\text{Avec } \{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{15}\}^T$$

Où les matrices $[P]$ et $[Q]$ sont données par :

$$[P] = \begin{bmatrix}
 0 & R\cos\varphi & 0 & R\sin\varphi & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ry \\
 \sin\varphi & x\sin\varphi & -\cos\varphi & -x\cos\varphi & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ry & \frac{y^2}{2} & Rx \\
 -\cos\varphi & -x\cos\varphi & -\sin\varphi & -x\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & R & 0 & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -\frac{yx^3}{6R} & -R^2 & -Ry & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x^3}{6R} & -y & -\left(R + \frac{y^2}{2R}\right) & -x \\
 0 & -\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & -\frac{x^2}{2} & -\frac{yx^2}{2R} & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x^2}{2R} & -\frac{x^3}{6R} & -\frac{yx^3}{6R^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \frac{xy}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{y}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2R} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Le vecteur des déplacements nodaux de l'élément $\{q_e\}$ est relié au vecteur des constantes par la matrice de transformation $[C]$, qui est donnée en annexe (A.1), (A.2), comme suit :

$$\{q_e\} = [C]\{\alpha\} \quad (3.10)$$

L'équation (10) peut être utilisée pour dériver le vecteur de paramètres constants $\{\alpha\}$ comme suit :

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{q_e\} \quad (3.11)$$

En substituant l'équation (3.6) et (3.7) dans l'équation (3.11) pour obtenir les résultats suivants :

$$\{U\} = [P][C]^{-1}\{q_e\} = [N]\{q_e\} \quad (3.12)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q][C]^{-1}\{q_e\} = [B]\{q_e\} \quad (3.13)$$

Avec:

$$[N] = [P][C]^{-1}; [B] = [Q][C]^{-1} \quad (3.14)$$

3.2.2 Évaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse

En utilisant l'expression conventionnelle, les matrices élémentaires de rigidité et de masse

$[K^e]$, $[M^e]$ peuvent être dérivées, respectivement :

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = [C]^{-T} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \int [Q]^T [D] [Q] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[K_0]} [C]^{-1} \quad (3.15)$$

$$[M^e] = \rho h \int_{S_e} [N]^T [N] dS = [C]^{-T} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \rho h \int [P]^T [P] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[M_0]} [C]^{-1} \quad (3.16)$$

D'où $[D]$, $[D_m]$ et $[D_b]$ sont respectivement les matrices d'élasticité, élasticité de membrane et élasticité en flexion.

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_m] & 0 \\ 0 & [D_b] \end{bmatrix}, \quad [D_m] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad [D_b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Les matrices $[k_0]$ et $[M_0]$ données dans les équations. (3.15), (3.16) sont calculés numériquement. Les matrices de masse et de rigidité des éléments ($[k_e]$ et $[M_e]$) sont alors obtenues. Elles sont ensuite assemblées pour calculer les matrices globales de rigidité et de masse de la structure ($[k]$ et $[M]$). Les équations suivantes sont ensuite utilisées pour l'analyse statique et l'analyse des vibrations libres, respectivement :

$$[K]\{q\} = \{F\} \quad (3.18)$$

$$([K] - \omega^2 [M])\{q\} = 0 \quad (3.19)$$

D'où $\{q\}$ et $\{F\}$ sont respectivement les vecteurs de déplacement et forces nodales de la structure et ω est la fréquence angulaire .

3.3 Validation numérique

Plusieurs exemples numériques sont étudiés pour l'analyse statique et vibration libre afin d'évaluer la précision et les performances de l'élément formulé (SBTDS).

3.3.1 L'analyse statique

3.3.1.1 cylindre pincé court à bords libres

Le premier problème considéré est le cylindre pincé représenté sur la figure 3.2. C'est l'un des exemples les plus répandus dans la littérature pour évaluer la convergence des éléments de coque. Par raison de double symétrie, seul un huitième du cylindre est modélisé pour différents maillages (Figure 3.3); les caractéristiques géométriques, mécaniques, les conditions

Chapitre 3. Nouvel élément de coque cylindrique triangulaire basé sur les déformations d'ordre supérieur

aux limites et de symétrie sont représentées sur la figure 3.2, où deux cas sont considérées pour l'épaisseur du cylindre et les charges appliquées.

Les tableaux 3.1 et 3.2 montrent les résultats de déplacement normal WC au point C, qui illustrent la haute précision obtenue par le présent élément. Les résultats de l'élément développé (figure 3.4) sont très proches de la solution analytique [75]. Cependant, une divergence de résultats est observée pour l'élément Djoudi [52], qui est basé sur la théorie de coque peu profonde.

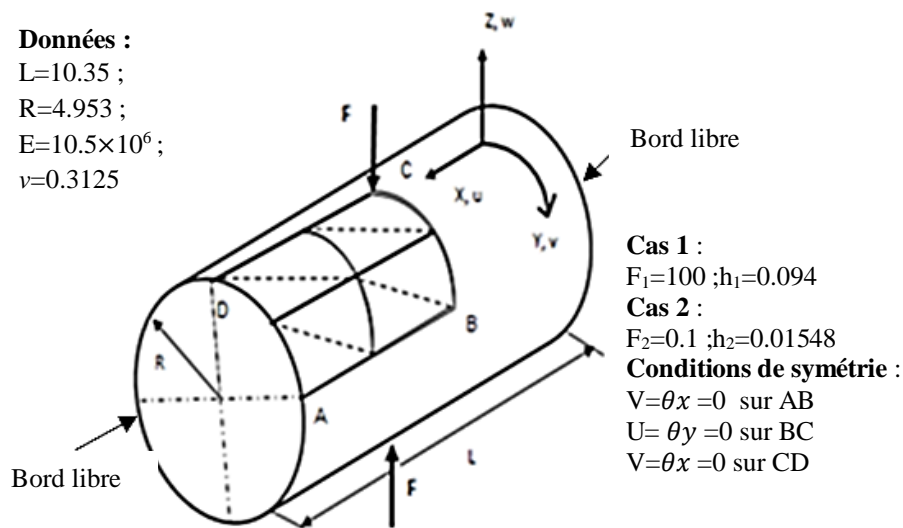


Figure 3.2. Cylindre pincé court à bords libres.

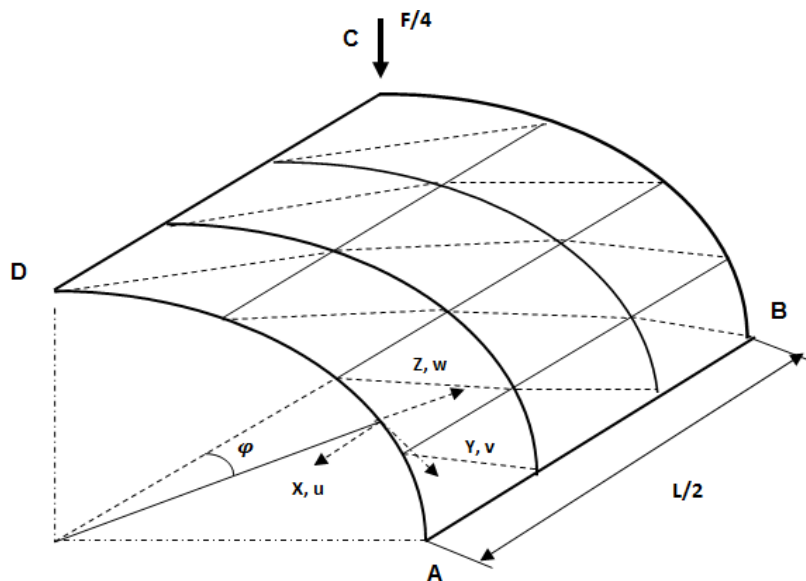


Figure 3.3. Maillage 3×8 pour un cylindre pincé court à bords libres.

Chapitre 3. Nouvel élément de coque cylindrique triangulaire basé sur les déformations d'ordre supérieur

Tableau 3.1. Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 1: $F_1=100$; $h_1=0,094$.

Maillage	Élément ASH(46)	Élément Djoudi (52)	SBTDS
2×2	0.1104	0.0641	0.1076
4×4	0.1132	0.0662	0.1134
6×6	0.1138	0.0667	0.1136
8×8	0.1140	0.0669	0.1139
10×10	0.1141	0.0669	0.1143
Ref solution [75]	0.1139		

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation des formulations des élément : Djoudi et ASH.

Tableau 3.2. Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres Cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$.

Maillage	Élément ASH (46)	Élément Djoudi(52)	SBTDS
1×4	0.02431	0.01409	0.0243
2×2	0.02330	0.01406	0.0239
2×4	0.02437	0.01415	0.0244
2×8	0.02442	0.01420	0.0246
3×4	0.02443	0.01418	0.0243
4×4	0.02448	0.01420	0.0242
6×6	0.02456	0.01427	0.0247
Ref solution [75]	0.02439		

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation des formulations des élément : Djoudi et ASH.

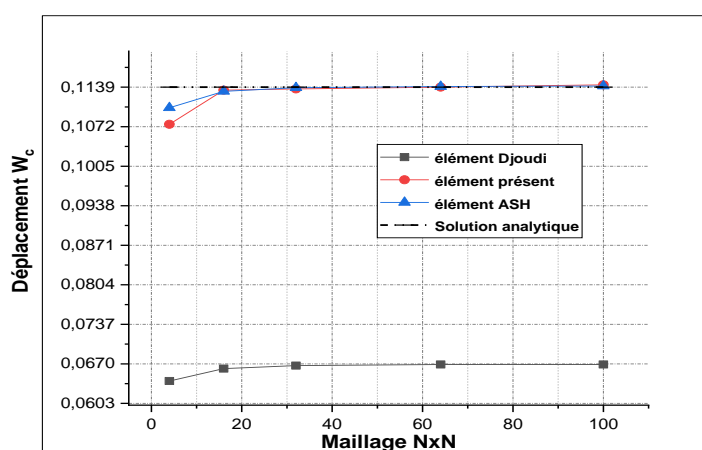


Figure 3. 4. Convergence du déplacement WC d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 1 : $F_1=100$; $h_1=0,094$

3.3.1.2 Poutre console courbé

Le deuxième exemple est une poutre console courbe chargée à l'extrémité libre (Figure 3.5). Les résultats obtenus pour les déplacements suivant la direction-z (tableau 3.3) sont comparés avec les résultats théoriques donnés par Macneal et Harder [76] et à d'autres éléments finis [46], [52] et [77]. La figure 6 montre la convergence du déplacement suivant la direction-z pour la poutre. Les résultats obtenus par le présent élément dans ce test montrent les performances satisfaisantes du présent élément. La figure 3.6 montre que l'élément SBTDS produit des résultats plus précis que ceux donnés par l'élément Djoudi [52].

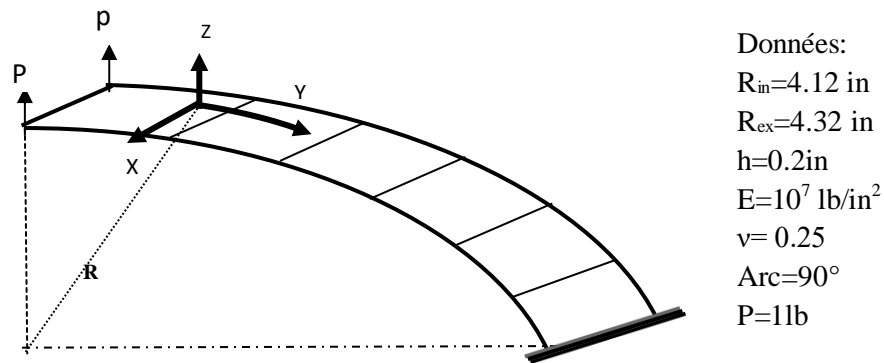


Figure 3.5. Poutre console courbée.

Tableau 3.3. Déplacements à l'extrémité libre suivant la direction-z pour la poutre.

Maillage	Élément SAB[77]	Elément ASH [46]	Elément Djoudi[52]	SBTDS
1×6	0.0848	0.0880	0.0626	0.0879
Solution théoriques [76]		0.0886		

résultats sont obtenus en utilisant la programmation des formulations des élément : Djoudi, ASH et SAB

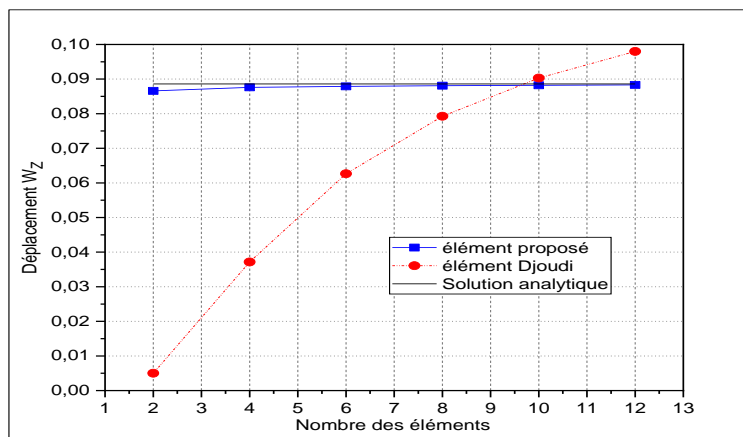


Figure 3. 6. Convergence du déplacement dans la direction-z.

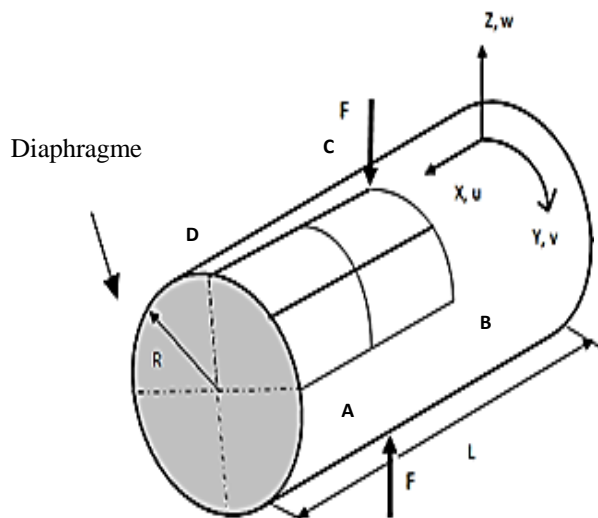
3.3.1.3 Cylindre pincé avec diaphragmes rigides

Un autre problème classique est celui d'un cylindre soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées et qui repose à ses extrémités sur deux diaphragmes rigides dans leur plan. Les données géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure 3.7. Cet exemple de coque mince constitue un des tests les plus sévères pour étudier la capacité d'un élément de coque à décrire des champs de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne. Par raison de symétrie, seul un huitième de la coque est discrétisé.

Les résultats obtenus pour les déplacements normaux au point C et les déplacements tangentiels au point D sont comparés avec la solution théorique [78] et avec d'autres éléments finis élément CHA [50]), élément ASH [46] et élément Djoudi [52]. Les résultats de l'élément SBTDS (le Tableau 3.4) sont similaires à ceux des autres éléments exceptionnels l'élément de Djoudi.

Des représentations graphiques de ces résultats sont présentées dans les figures (3.8-3.9) le nouvel élément triangulaire (SBTDS) et les autres éléments rectangulaires donnent presque les mêmes résultats pour la flèche.

L'allure des courbes qui représentent les déplacements verticaux (Figure 3.9a), (Figure 3.9b) et longitudinaux (Figure 3.9c) de l'élément SBTDS est identique à celle des courbes qui représentent les solutions de référence [71].



Données :

$L=6\text{m}$, $R=3\text{m}$, $E=3 \times 10^{10}\text{ Pa}$

$\nu=0.3$, $h=0.03\text{m}$, $F=1\text{N}$

Conditions de symétrie :

$V=\theta_x=0$ sur AB

$U=\theta_y=0$ sur BC

$V=\theta_x=0$ sur CD

Conditions aux limites :

$W=V=\theta_x=0$ sur AD

Figure 3.7. Cylindre pincé avec diaphragmes rigides.

Table 3.4. Convergence du déplacement tangentiel au point (D).

Maillage	Élément ASH [46]	Element CHA[50]	Élément Djoudi[52]	SBTDS
2×2	3.356	3.114	3.484	0.603
4×4	5.173	5.087	4.878	3.663
6×6	4.570	4.541	4.294	4.040
8×8	4.392	4.377	4.116	4.049
10×10	4.314	4.304	4.036	4.087
12 × 12	4.273	4.266	3.995	4.122
14 × 14	4.244	4.239	3.968	4.148
Solution théorique [78]			4.114	

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation des formulations des élément : Djoudi, ASH et CHA

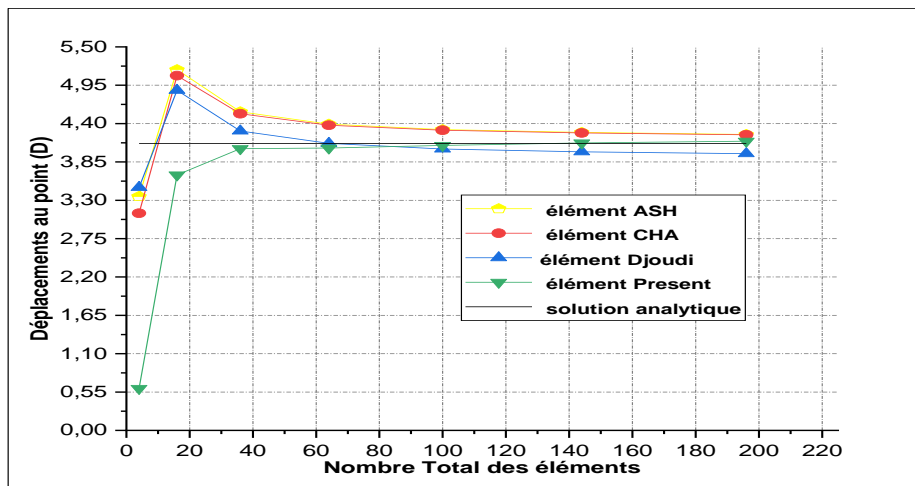


Figure 3.8. Convergence du déplacement tangentiel au point (D)

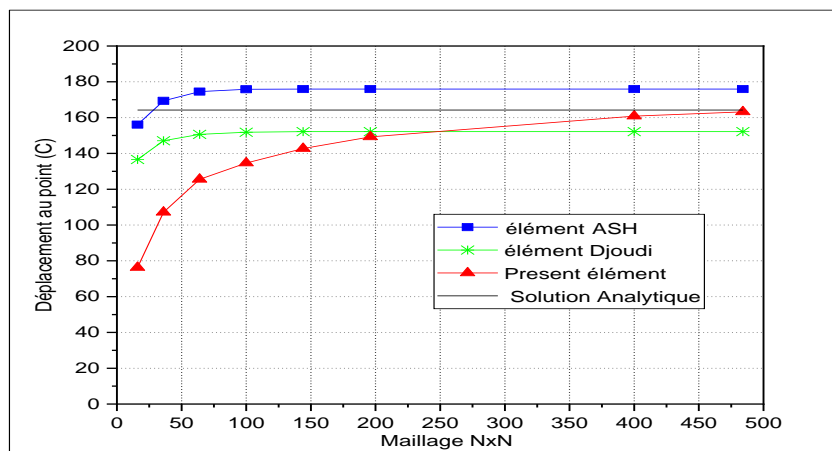
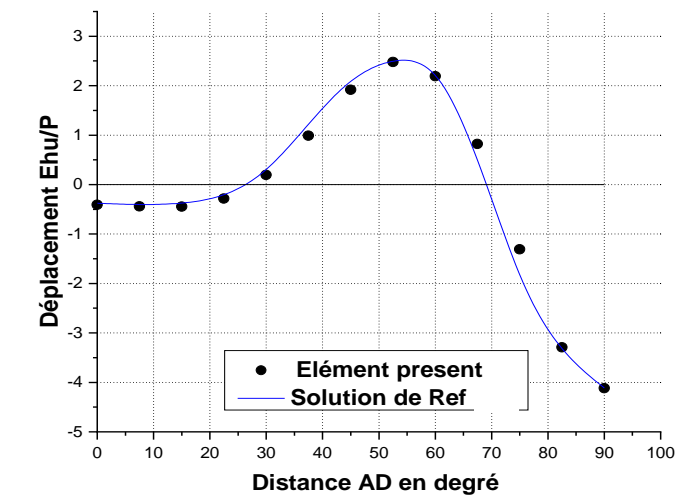
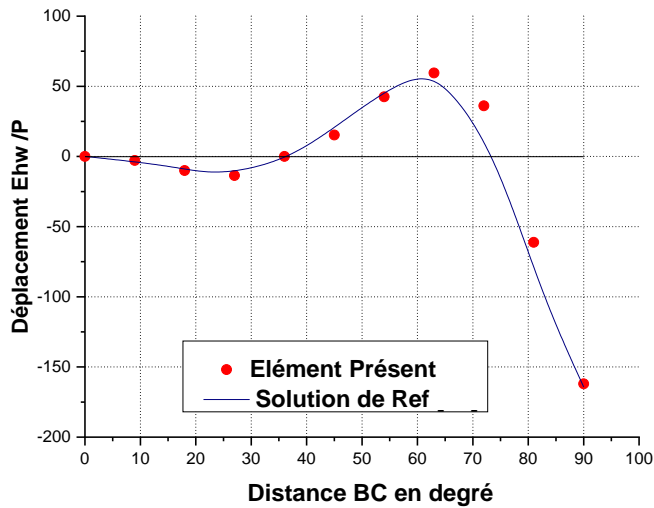


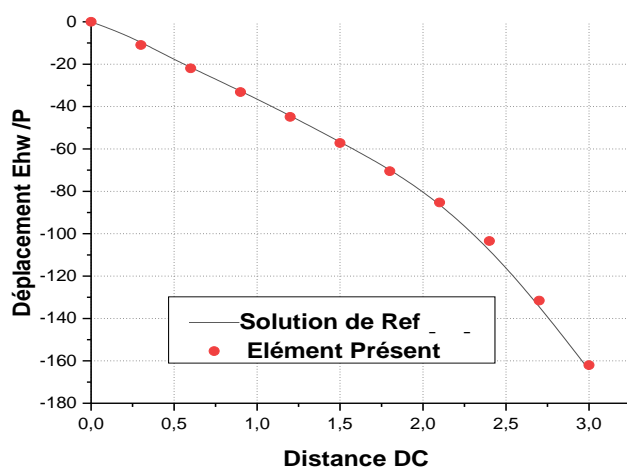
Figure 3.9. Convergence du déplacement normal au point (C)



(a) Déplacement tangentiel
le long de AD



(b) Déplacement normal
le long de BC



(c) Déplacement normal
le long de DC

Figure 3.10. Déplacement le long de DC, BC et AD en utilisant l'élément SBTDS pour un maillage 10×10 d'un cylindre pincé avec diaphragmes.

3.3.2 vibrations libres des panneaux cylindriques

3.3.2.1 Convergence de la discrétisation du maillage

Dans ce test, nous étudions le taux de convergence de l'élément présent dû à la discrétisation de domaine d'un panneau cylindrique encastré. Les caractéristiques géométriques et mécaniques du panneau sont les suivantes: $l = 1$ m, $r = 2$ m, $t = 0.005$ m, $\varphi = 0.5$ rad, $E = 208 \times 10^9$ N/m², $\rho = 7833$ kg/m², et $\nu = 0.29$.

Les résultats sont comparés avec ceux obtenus à partir de l'élément Djoudi [53] et avec la solution théorique [79] (Tableaux 3.5 et 3.6). Dans ce test, on remarque la grande précision obtenue par le présent élément, et sa convergence vers la solution théorique est plus rapide que celle de l'élément Djoudi [53].

Table 3.5. Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives.

Maillage	Élément Djoudi [53]	Erreur (%)	SBTDS	Erreur (%)
6×6	170.08	2.42	183.53	5.29
7×7	171.17	1.80	179.07	2.73
8×8	171.29	1.37	176.52	1.27
10×10	172.15	1.23	173.88	0.24
Solution théorique [79]		178.75		

Table 3.6. Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives.

Maillage	Élément Djoudi [53]	Erreur (%)	SBTDS	Erreur (%)
6×6	175.52	2.92	185.66	2.68
7×7	178.67	1.18	183.30	1.38
8×8	179.83	0.54	181.83	0.56
10×10	179.95	0.47	180.20	0.33
Solution théorique [79]		180.80		

3.3.2.2 Panneau cylindrique encastré

Un autre cas de test considéré est un panneau cylindrique encastré, la géométrie et les propriétés du matériau sont illustrées sur la figure 3.9. Les résultats des fréquences du

panneau obtenus à l'aide d'un maillage de 10×10 sont présentés sur le tableau 3.7 avec la solution analytique [80], solution numérique[81], et autres éléments finis, LAG9 ; élément de coque à neuf nœuds[82], ASL9 ;élément de coque à déformation supposée[83] et élément de coque dégénéré à neuf nœuds [84]. Les fréquences obtenues avec l'élément proposé sont meilleures que celles obtenues avec LAG9, ASL9 et l'élément coque dégénéré à neuf nœuds, qui est un élément très coûteux.

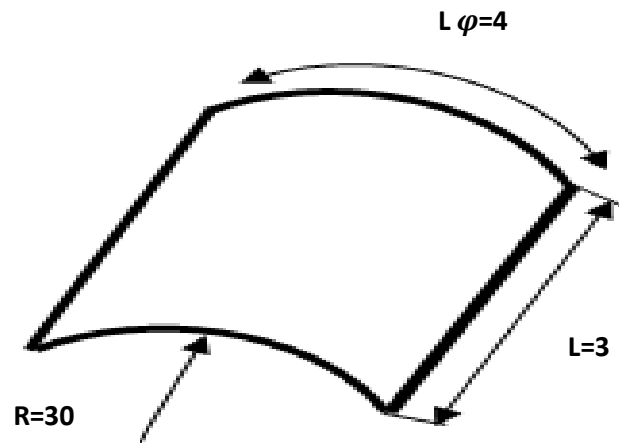


Figure 3.11. Panneau cylindrique encastré ($h = 0.013$, $E = 10^7$, $\rho = 0.096$, $\nu = 0.33$).

Table 3.7. Les fréquences propres du panneau cylindrique.

Mode	Solution analytique[80]	Solution numérique[81]	LAG9 [82]	ASL9 [75]	Nine node element [84]	SBTDS
1	870	869.560	897.142	879.244	878.253	865.460
2	958	957.560	989.541	968.427	966.972	964.244

3.3.2.3 Effet des ouvertures centrales sur les fréquences propres des panneaux cylindriques

Cet exemple de panneaux cylindriques avec une ouverture centrale (Figure 3.12) encastré le long des quatre bords, traités par l'élément Djoudi [52] est analysé pour étudier l'effet des ouvertures sur les fréquences propres. La géométrie et les propriétés matérielles du panneau sont illustrées sur la figure 3.12. Les fréquences propres du présent élément SBTDS sont comparées à celles de l'élément Djoudi [52] et présentées sur la figure 3.13. Il convient de noter que la largeur du trou central a le même impact sur la fréquence propre pour les deux éléments et que les résultats numériques de l'élément courant sont en accord raisonnable avec les résultats de l'élément Djoudi[52].

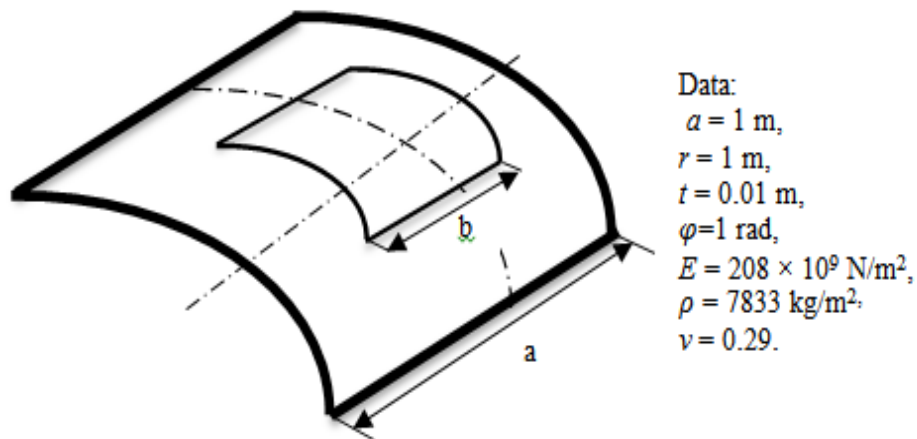


Figure 3.12. Panneau cylindrique avec un trou central.

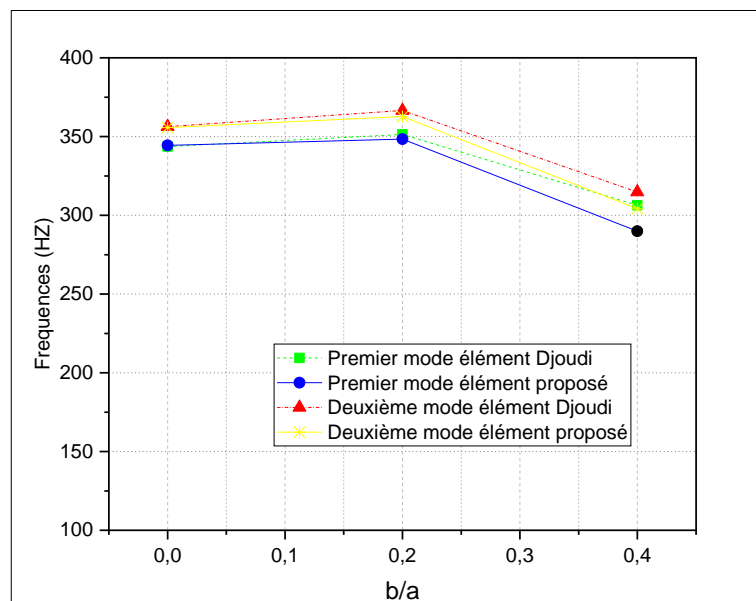


Figure 3.13. Variation de la fréquence en fonction de la taille du trou central.

3.4 Conclusion

L'élément fini de coque cylindrique triangulaire proposé est basé sur l'approche en déformations et la théorie des coques profondes. Cet élément n'a que des degrés de liberté externes, trois translations et deux rotations à chaque nœud d'angle. La fonction de déplacement de cet élément est obtenue en intégrant la fonction de déformation supposée. L'intégration numérique est utilisée pour évaluer les matrices de rigidité et de masse

Chapitre 3. Nouvel élément de coque cylindrique triangulaire basé sur les déformations d'ordre supérieur

d'éléments. La forme triangulaire de cet élément est plus avantageuse que la forme quadrilatère, car elle facilite le maillage lorsque le domaine géométrique de la structure est compliqué. La formulation de cet élément est plus simple que les autres éléments et présente l'avantage d'utiliser les cinq degrés de liberté essentiels.

Les performances et la précision de l'élément développé ont été vérifiées avec divers exemples numériques en statique et vibration libre de structures courbes. Pour tous les résultats numériques, il convient de mentionner que le présent élément montre une convergence monotone et rapide vers la solution de référence. Les résultats de cet élément de coque triangulaire sont en accord avec les solutions analytiques et les résultats de divers éléments disponibles dans la littérature. En perspective, cet élément peut encore être étendu pour une application à des problèmes non linéaires de structures courbes.

Chapitre 4. Variantes d'éléments finis triangulaires à champ de déformation

Sommaire

4.I Amélioration de la performance de l'élément SBTDS par la rotation	53
Supplémentaire	
4.I.1 Introduction	53
4.I.2 Formulation de l'élément SBTDSR	53
4.I.2.1 Dérivation du champ des déplacements	53
4.I.3 Évaluation de la matrice de rigidité élémentaire	56
4.I.4 Validation numérique	56
4.I.4.1 L'analyse statique	56
4.II Étude de l'effet des transformations effectuées sur le champ de déformation de	61
l'élément SBTDS	
4.II.1 Introduction	61
4.II.2 Formulation de la première variante SBTDS1	61
4.II.3 Formulation de la deuxième variante SBTDS2	62
4.II.4 Formulation de la troisième variante SBTDS3	62
4.II.5 Validation numérique	63
4.II.5.1 L'analyse statique.....	63
4.II.5.2 L'analyse dynamique.....	65
4.III Conclusion	68

4. I Amélioration de la performance de l'élément SBTDS par la rotation supplémentaire

4.I.1 Introduction

Le besoin de compatibilité entre les degrés de liberté des différents éléments est un problème majeur rencontré en pratique lors de la modélisation de structures complexes ; le problème est généralement résolu par un degré de liberté de rotation supplémentaire [85, 86,87]. Afin d'améliorer la performance des éléments finis des coques, en se basant sur l'approche en déformation, Bourezane [88] a proposé un élément de coque de forme rectangulaire et cylindrique, avec rotation supplémentaire. Il a été montré que ces éléments efficaces ont permis d'atteindre un niveau de précision acceptable sans utiliser un nombre important d'éléments.

Ce présent travail étudie les améliorations possibles des performances des éléments finis coques cylindriques en proposant un élément de coque de forme triangulaire cylindrique. L'élément résultant à 18 degrés de liberté, six externes essentiels degrés de liberté à chacun des trois nœuds et ainsi éviter les difficultés associées à des degrés de liberté internes (les trois translations et les trois rotations) et les fonctions de déplacement de l'élément développé satisfont exactement la représentation du mouvement du corps rigide et des déformations constantes (dans la mesure où cela est permis par équations de compatibilité).

Dans cette étude, l'approche de déformation et la théorie des coques profondes sont également utilisées pour développer un nouvel élément fini cylindrique basé sur la théorie de (Kirchhoff-Love) pour résoudre les problèmes de coque cylindrique. Des expériences numériques ont été menées pour évaluer l'exactitude et la fiabilité du présent élément nommé (Strain-Based Triangular Deep Shell avec Rotation - **SBTDSR**). La précision de cet élément(SBTDSR) est évaluée à travers une série de tests liés à des coques minces. Les résultats obtenus ont ensuite été comparés avec d'autres, précédemment publiées.

4.I.2 Formulation de l'élément SBTDSR

4.I.2.1 Dérivation du champ des déplacements

Considérons l'élément triangulaire courbe illustré sur la figure 4.1 Le centre (O) de l'hypoténuse de l'élément est l'origine des coordonnées curvilignes x , y et z ($y=R\phi$). Le présent élément est formulé en utilisant la théorie des coques profondes, les équations de déformation pour un élément de coque profond cylindrique dans un système de coordonnées curvilignes [43] sont données comme dans l'équation (3.1).

Les déplacements U , V et W sont utilisés pour représenter les six déformations données dans l'équation (3.1), ces déplacements ne peuvent pas être considérés comme indépendantes et doivent donc vérifier les équations de compatibilité écrites comme dans l'équation (3.2)

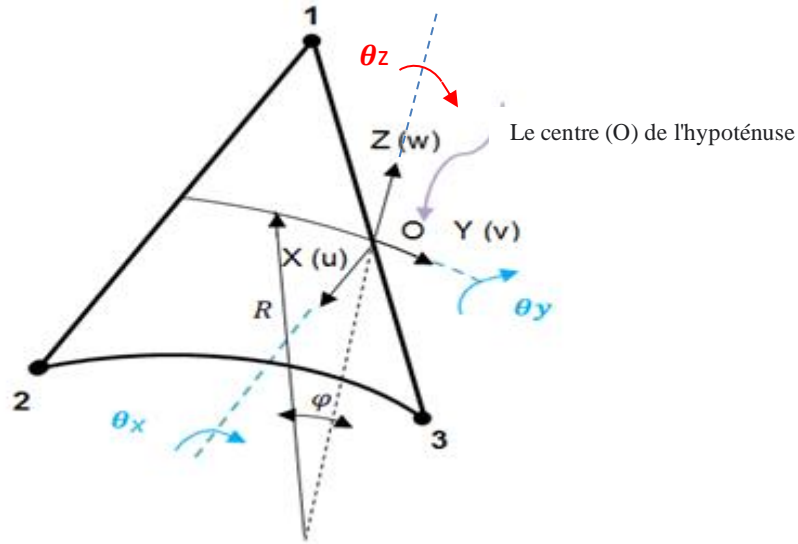


Figure 4.1. L'élément triangulaire cylindrique profond (SBTDSR).

Le champ des déplacements du corps rigide peut être déterminé en égalisant à zéro les six déformations données par l'équation (3.1), après intégration, nous obtenons les expressions données par l'équation (3.3).

Le présent élément possède six degrés de liberté (U , V , W , $\theta_y = \frac{\partial W}{\partial x}$, $\theta_x = \frac{\partial W}{R \partial \varphi} - \frac{V}{R}$,

$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ à chacun des trois nœuds. Ce qui en résulte que le champ des déplacements doit contenir que 18 constantes indépendantes ou six constantes ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$) ayant été utilisées pour les modes de corps rigides, et les constantes restantes ($\alpha_7, \alpha_8, \dots, \alpha_{18}$) sont réparties entre les six déformations données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_7 + \alpha_{16} \frac{y}{R}, & \varepsilon_\varphi &= \alpha_8 + \left[-\frac{1}{2R} \alpha_{10} x^2 - \frac{1}{6R} \alpha_{11} x^3 - \frac{1}{6R^2} \alpha_{12} x^3 y \right] + \alpha_{17} x \\ \gamma_{x\varphi} &= \alpha_9 + \alpha_{16} \frac{x}{R} + \alpha_{18} \frac{y}{R}, & k_x &= \alpha_{10} + \alpha_{11} x + \frac{1}{R} \alpha_{12} xy \\ k_\varphi &= \alpha_{13} + \frac{y}{R} \alpha_{14}, & k_{x\varphi} &= \alpha_{15} + \left[\frac{\alpha_{12}}{2R} x^2 \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pour satisfaire les équations de compatibilité Équation (3.2), les termes entre parenthèses des déformations Équation (4.1) sont ajoutées. Le champ proposé satisfait les équations de compatibilité, et après l'intégration on obtient les fonctions des déplacements finales :

$$\begin{aligned}
 U &= R\alpha_2 \cos \varphi + R\alpha_4 \sin \varphi + \alpha_5 + x\alpha_7 + y\alpha_9 - Ry\alpha_{15} + \frac{xy}{R}\alpha_{16} + \frac{y^2}{2R}\alpha_{18} \\
 V &= (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \varphi + \alpha_6 + Ry\alpha_{13} + \frac{y^2}{2}\alpha_{14} + Rx\alpha_{15} \\
 W &= -(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \varphi + R\alpha_8 - \frac{x^2}{2}\alpha_{10} - \frac{x^3}{6}\alpha_{11} - \frac{yx^3}{6R}\alpha_{12} - R^2\alpha_{13} - Ry\alpha_{14} + Rx\alpha_{17} \\
 \theta_x &= -\frac{1}{R}\alpha_6 - \frac{x^3}{6R}\alpha_{12} - \alpha_{13}y - (R + \frac{y^2}{2R})\alpha_{14} - x\alpha_{15} \\
 \theta_y &= -\alpha_2 \cos \varphi - \alpha_4 \sin \varphi - x\alpha_{10} - \frac{x^2}{2}\alpha_{11} - \frac{yx^2}{2R}\alpha_{12} \\
 \theta_z &= -\alpha_2 \sin \varphi + \alpha_4 \cos \varphi - R\alpha_{15} - \frac{x}{2}\alpha_{16} - \frac{y}{2R}\alpha_{18}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Les fonctions de déplacement et de déformation de l'élément développé données par les équations. (4.1) et (4.2) s'écrivent respectivement sous forme matricielle (voir les équations (3.6), (3.7)).

Avec :

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{18}\}^T \tag{4.3}$$

Où les matrices $[P]$ et $[Q]$ sont données par :

$[P]=$

$$\begin{bmatrix}
 0 & R \cos \varphi & 0 & R \sin \varphi & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ry & xy/R & 0 & \frac{y^2}{2R} \\
 \sin \varphi & x \sin \varphi & -\cos \varphi & -x \cos \varphi & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ry & \frac{y^2}{2} & Rx & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos \varphi & -x \cos \varphi & -\sin \varphi & -x \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & R & 0 & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -\frac{x^3 y}{6R} & -R^2 & -Ry & 0 & 0 & Rx & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x^3}{6R} & -y & R + \frac{y^2}{2R} & -x & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & -\frac{x^2}{2} & -\frac{yx^2}{2R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & \frac{x}{2} & 0 & \frac{y}{2R}
 \end{bmatrix}$$

(4.4)

$$[Q]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x^2}{2R} & -\frac{x^3}{6R} & -\frac{x^3y}{6R^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{R} & 0 & \frac{y}{R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & \frac{xy}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2R} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Le vecteur des déplacements nodaux de l'élément $\{q_e\}$ est relié au vecteur des constantes (équation (3.10)) par la matrice de transformation $[C]$ qui est donnée en annexe (A.3) . Et la matrice $[P_1](6 \times 18)$ est évalué de l'équation (4.4) est donnée en annexe (A.4) . Les vecteurs de déplacement et déformation sont donnés par les équations (3.12), (3.13).

4.1.3 Évaluations de la matrice de rigidité élémentaires

En utilisant l'expression conventionnelle, la matrice de rigidité élémentaire est donnée par l'équation (3.15). La matrice $[k_0]$ donnée dans les équations. (3.15) est calculés numériquement, les matrices de rigidité des éléments $[k_e]$ sont alors obtenues. Ils sont ensuite assemblés pour calculer la matrice de rigidité globale de la structure $[k]$ L'équation (3.18) est ensuite utilisée pour l'analyse statique des structures.

4.1.4 Validation numérique

4.1.4.1 L'analyse statique

Concernant cette partie d'étude ,trois testes numériques sont effectués pour valider l'élément SBTDSR qui sont :Cylindre pincé court à bords libres ,Poutre console courbée et Cylindre pincé avec diafragmes rigides .les caractéristiques géométriques et mécaniques ainsi que les conditions aux limites et de symétries des exemples de testes choisis sont illustrées respectivement sur les figures :(3.2, 3.5 et 3.7) section 3.3.1.

4.1.4.1.1 Cylindre pincé court à bords libres

Pour le premier teste cylindre pincé court à bords libres les résultats de déplacement normal WC au point C pour les deux cas mince et très mince sont représentés sur les deux tableaux 4.1 et 4.2

La convergence rapide vers la solution analytique [75] est illustré sur Les figures 4.2 et 4.3 Cependant, une divergence de résultats est encore observée par l'élément Djoudi[52]. les résultats illustrent que la haute précision est obtenue par l'élément SBTDSR pour les deux cas.

Chapitre 4. Variantes d'éléments finis triangulaires à champ de déformation

Tableau 4.1. Convergence du déplacement W_c d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 1: $F_1=100$; $h_1=0,094$.

Maillage	Élément ASH[46]	Élément Djoudi[52]	SBTDSR
2×2	0.1104	0.0641	0.1094
4×4	0.1132	0.0662	0.1121
6×6	0.1138	0.0667	0.1143
8×8	0.1140	0.0669	0.1169
10×10	0.1141	0.0669	0.1186
Solution analytique [75]		0.1139	

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation de la formulations des élément : Djoudi et ASH.

Tableau 4.2. Convergence du déplacement W_c d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$.

Maillage	Élément ASH[46]	Élément Djoudi[52]	SBTDSR
1×4	0.02431	0.01409	0.02410
2×2	0.02330	0.01406	0.02390
2×4	0.02437	0.01415	0.02410
2×8	0.02442	0.01420	0.02540
3×4	0.02443	0.01418	0.02410
4×4	0.02448	0.01420	0.02400
6×6	0.02456	0.01427	0.02400
Solution analytique [75]		0.02439	

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation de la formulation des élément : Djoudi et ASH.

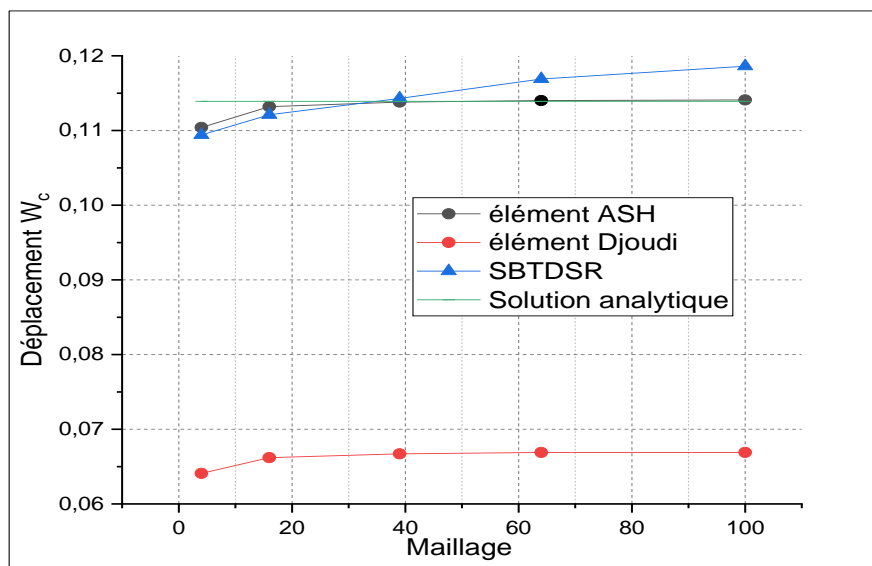


Figure 4. 2. Convergence du déplacement W_c d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 1 : $F_1=100$; $h_1=0,09$

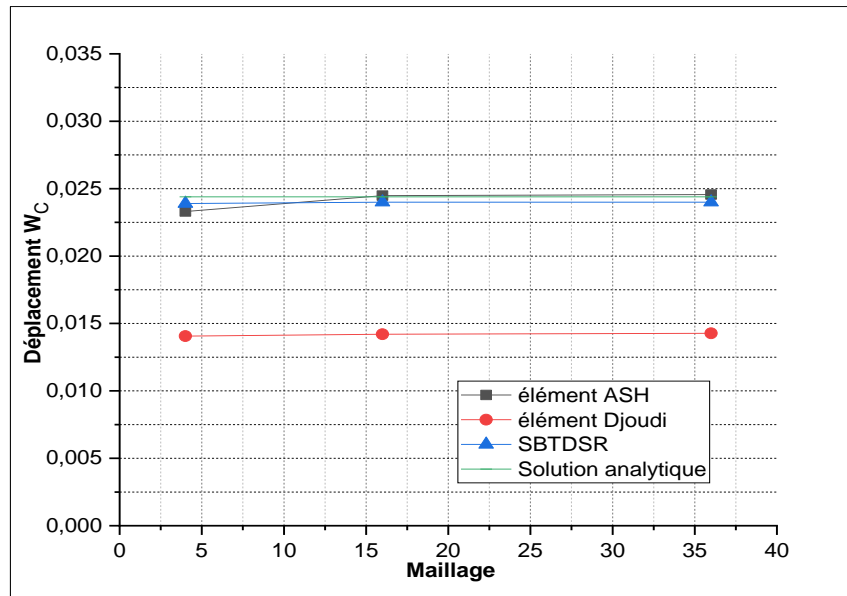


Figure 4.3. Convergence du déplacement W_C d'un cylindre pincé à bords libres, Cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$.

4.I.4.1.2 Poutre console courbée

Concernant les résultats du deuxième exemple la poutre console courbée chargée à l'extrémité libre sont illustrés sur le tableau 4.3 et comparés avec la solution de référence [68] et à d'autres éléments finis ASH[46], SAB[77] et Djoudi[52].

On constate que les résultats de l'élément SBTDSR sont plus proche de La solution de référence [76] par rapport aux résultats de l'élément SAB et sont en accord avec les résultats d'ASH par contre une divergence est observée pour l'élément Djoudi[52], ce qui est illustré sur la figure 4.4 qui représente la convergence du déplacement suivant z , ou on peut observer qu'une convergence rapide vers la solution analytique [76] est obtenue en utilisant seulement un petit nombre d'éléments, ce qui indique que la performance de l'élément SBTDSR est satisfaisante.

Tableau 4.3. Déplacements à l'extrémité libre suivant la direction z pour la poutre.

Maillage	Élément ASH[46]	Élément SAB [77]	Élément Djoudi[52]	SBTDSR
1×6	0.0880	0.0848	0.0626	0.0902
Solution théoriques [76]		0.0886		

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation de la formulation des éléments : Djoudi, SAB et ASH.

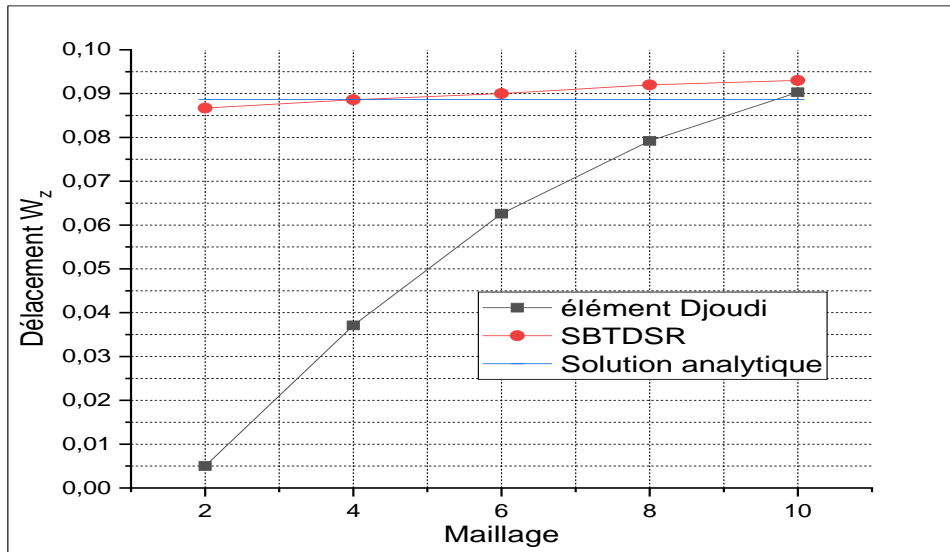


Figure 4.4. Convergence du déplacement dans la direction z.

4.I.4.1.3 Cylindre pincé avec diaphragmes rigides

Concernant le troisième teste, les deux tableaux 4.4 et 4.5 représentent les déplacements normaux au point C et les déplacements tangentiels au point D qui correspondent respectivement aux comportements flexionnel et membranaire, sont obtenus de l'élément SBTDSR et qui sont comparés avec la solution théorique[78] et d'autres éléments finis ASH[38] et Djoudi[52].

Les résultats obtenus permettent d'observer qu'une convergence monotone vers la solution théorique est obtenue pour les deux cas de déplacements (figure : 4.5 et 4.6), ce qui permet de constater que pour les deux comportements les performances sont obtenues pour ce deuxième élément développé SBTDSR.

Tableau 4.4. Convergence du déplacement tangentiel au point (D).

Maillage	Elément ASH[46]	Element Djoudi[52]	SBTDSR
2×2	3.356	3.484	0.49
4×4	5.173	4.878	1.807
6×6	4.570	4.294	3.248
8×8	4.392	4.116	3.705
10×10	4.314	4.036	3.878
Solution théorique [78]		4.114	

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation de la formulation des éléments : Djoudi et ASH.

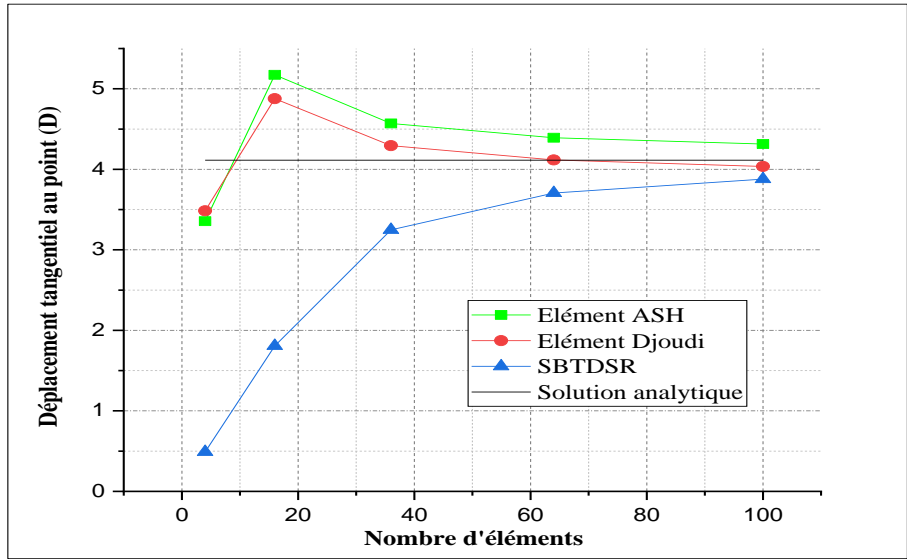


Figure .4.5 Convergence du déplacement tangentiel au point (D).

Tableau 4.5. Convergence du déplacement normal au point (C).

Maillage	Elément ASH [46]	Élément Djoudi [52]	SBTDSR
2×2	100.62	136.62	27.0558
4×4	156.06	147.06	116.208
6×6	169.38	150.66	171.207
Solution théorique [78]	164.24		

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation de la formulation des élément : Djoudi et ASH.

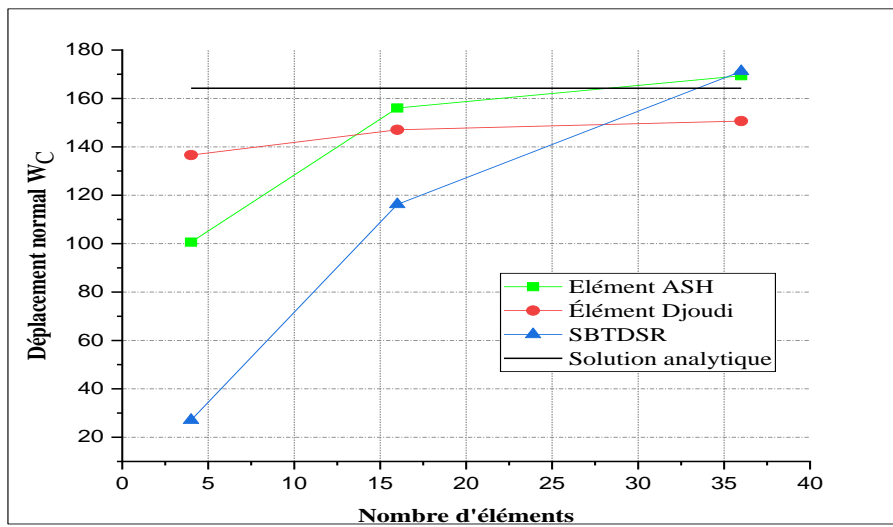


Figure.4.6 Convergence du déplacement normal au point (C).

4.II Étude de l'effet des transformations effectuées sur le champ de déformation de l'élément SBTDS

4.II.1 Introduction

On va essayer dans cette partie de développer trois éléments triangulaires basés sur l'approche en déformation en se basant sur les attributions des termes polynômes dans les fonctions de déformations qui peuvent produire des éléments donnant de bons résultats. Des transformations sont introduites sur le champ des déformations de l'élément SBTDS. Les éléments résultants ont les mêmes représentations géométriques que l'élément SBTDS.

4.II.2 Formulation de la première variante SBTDS1

La première transformation des termes α_i (élément **SBTDS1**) est effectuée en augmentant l'ordre des termes de déformation k_θ , en remplaçant les termes α_{10} dans l'équation (3.4) comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_7 \\
 \varepsilon_\varphi &= \alpha_8 + \left(\left[-\frac{1}{6R} \alpha_{10} x^2 y^3 \right] - \frac{1}{6R} \alpha_{11} x^3 - \frac{1}{6R^2} \alpha_{12} x^3 y \right) \\
 \gamma_{x\varphi} &= \alpha_9 \\
 k_x &= \alpha_{11} x + \frac{1}{R} \alpha_{12} xy + \left[\frac{1}{3R} \alpha_{10} y^3 \right] \\
 k_\varphi &= \alpha_{13} + \frac{y}{R} \alpha_{14} + \left[\frac{1}{R} \alpha_{10} y x^2 \right] \\
 k_{x\varphi} &= \alpha_{15} + \left(\frac{\alpha_{12}}{2R} x^2 + \left[\frac{1}{R} \alpha_{10} xy^2 \right] \right)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour satisfaire les équations de compatibilité, les termes entre parenthèses des déformations (Équation (4.6)) sont ajoutées et les termes entre deux crochets sont l'objet des modifications.

Après ces transformations et intégrations, les fonctions finales des déplacements de l'élément **SBTDS1** sont :

$$\begin{aligned}
 u &= R\alpha_2 \cos \varphi + R\alpha_4 \sin \varphi + \alpha_5 + x\alpha_7 + y\alpha_9 - Ry\alpha_{15} \\
 v &= (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \varphi + \alpha_6 + Ry\alpha_{13} + \frac{y^2}{2}\alpha_{14} + Rx\alpha_{15} \\
 w &= -(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \varphi + R\alpha_8 - \left[\frac{y^3 x^2}{6R} \alpha_{10} \right] - \frac{x^3}{6} \alpha_{11} - \frac{yx^3}{6R} \alpha_{12} - R^2 \alpha_{13} - Ry\alpha_{14} \\
 \theta_x &= -\frac{1}{R} \alpha_6 - \left[\frac{y^2 x^2}{2R} \alpha_{10} \right] - \frac{x^3}{6R} \alpha_{12} - \alpha_{13} y - \left(R + \frac{y^2}{2R} \right) \alpha_{14} - x\alpha_{15} \\
 \theta_y &= -\alpha_2 \cos \varphi - \alpha_4 \sin \varphi - \left[\frac{y^3 x}{3R} \alpha_{10} \right] - \frac{x^2}{2} \alpha_{11} - \frac{yx^2}{2R} \alpha_{12}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.II.3 Formulation de la deuxième variante SBTDS2

La deuxième transformation donne l'élément (SBTDS2) en supprimant les termes α_{14} de l'équation (3.4) et les remplacés par les termes entre deux crochets :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_7 \\
 \varepsilon_\varphi &= \alpha_8 + \left(-\frac{1}{2R} \alpha_{10} x^2 - \frac{1}{6R} \alpha_{11} x^3 - \frac{1}{6R^2} \alpha_{12} x^3 y - \left[\frac{1}{6R} \alpha_{14} x^2 y^3 \right] \right) \\
 \gamma_{x\varphi} &= \alpha_9 \\
 k_x &= \alpha_{10} + \alpha_{11} x + \frac{1}{R} \alpha_{12} xy + \left[\frac{1}{3R} \alpha_{14} y^3 \right] \\
 k_\varphi &= \alpha_{13} + \left[\frac{1}{R} \alpha_{14} y x^2 \right] \\
 k_{x\varphi} &= \alpha_{15} + \left(\frac{\alpha_{12}}{2R} x^2 + \left[\frac{1}{R} \alpha_{14} x y^2 \right] \right)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Après transformations et intégrations, les fonctions finales des déplacements de l'élément **SBTDS2** sont :

$$\begin{aligned}
 u &= R\alpha_2 \cos \varphi + R\alpha_4 \sin \varphi + \alpha_5 + x\alpha_7 + y\alpha_9 - Ry\alpha_{15} \\
 v &= (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \varphi + \alpha_6 + Ry\alpha_{13} + Rx\alpha_{15} \\
 w &= -(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \varphi + R\alpha_8 - \frac{x^2}{2} \alpha_{10} - \frac{x^3}{6} \alpha_{11} - \frac{yx^3}{6R} \alpha_{12} - R^2 \alpha_{13} - \left[\frac{y^3 x^2}{6R} \alpha_{14} \right] \\
 \theta_x &= -\frac{1}{R} \alpha_6 - \frac{x^3}{6R} \alpha_{12} - \alpha_{13} y - \left[\frac{y^2 x^2}{2R} \alpha_{14} \right] - x\alpha_{15} \\
 \theta_y &= -\alpha_2 \cos \varphi - \alpha_4 \sin \varphi - x\alpha_{10} - \frac{x^2}{2} \alpha_{11} - \frac{yx^2}{2R} \alpha_{12} - \left[\frac{y^3 x}{3R} \alpha_{14} \right]
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.II.4 Formulation de la troisième variante SBTDS3

La troisième transformation donne un autre élément (**SBTDS3**) de flexion en supprimant

tous les termes α_{12} dans l'équation (3.4), puis les remplacés par les termes indiqués comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_7 \\
 \varepsilon_\varphi &= \alpha_8 + \left(-\frac{1}{2R} \alpha_{10} x^2 - \frac{1}{6R} \alpha_{11} x^3 - \left[\frac{1}{6R} \alpha_{12} x^2 y^3 \right] \right) \\
 \gamma_{x\varphi} &= \alpha_9 \\
 k_x &= \alpha_{10} + \alpha_{11} x + \left[\frac{1}{3R} \alpha_{12} y^3 \right] \\
 k_\varphi &= \alpha_{13} + \left[\frac{1}{R} \alpha_{12} y x^2 \right] \\
 k_{x\varphi} &= \alpha_{15} + \left[\frac{1}{R} \alpha_{12} x y^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ces transformations dans les équations de déformations (équation 4.10) mènent aux changements suivants dans le champ des déplacements de (l'équation 3.5) :

$$\begin{aligned}
 u &= R\alpha_2 \cos \varphi + R\alpha_4 \sin \varphi + \alpha_5 + x\alpha_7 + y\alpha_9 - Ry\alpha_{15} \\
 v &= (\alpha_1 + \alpha_2 x) \sin \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \cos \varphi + \alpha_6 + Ry\alpha_{13} + \frac{y^2}{2} \alpha_{14} + Rx\alpha_{15} \\
 w &= -(\alpha_1 + \alpha_2 x) \cos \varphi - (\alpha_3 + \alpha_4 x) \sin \varphi + R\alpha_8 - \frac{x^2}{2} \alpha_{10} - \frac{x^3}{6} \alpha_{11} - \left[\frac{y^3 x^2}{6R} \alpha_{12} \right] - R^2 \alpha_{13} - Ry\alpha_{14} \\
 \theta_x &= -\frac{1}{R} \alpha_6 - \alpha_{13} y - \left(R + \frac{y^2}{2R} \right) \alpha_{14} - x\alpha_{15} - \left[\frac{y^2 x^2}{2R} \alpha_{12} \right] \\
 \theta_y &= -\alpha_2 \cos \varphi - \alpha_4 \sin \varphi - x\alpha_{10} - \frac{x^2}{2} \alpha_{11} - \left[\frac{y^3 x}{3R} \alpha_{12} \right]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.II.5 Validation numérique

Dans cette partie, deux exemples numériques sont effectués pour montrer la performance des variantes d'éléments **SBTDS1**, **SBTDS2** et **SBTDS3** en comparant avec d'autres éléments coques ainsi que les solutions de référence des problèmes des coques cylindriques. Les tests choisis pour valider sont le cylindre pincé court à bords libres pour l'analyse statique et le panneau cylindrique encastré pour l'analyse dynamique.

4.II.5.1 L'analyse statique

4.II.5.1.1 Un cylindre pincé court à bords libres

Dans cet exemple, les tableaux 4.6 et 4.7 montrent les résultats de déplacement normal W_C au point C, qui illustre les résultats obtenus par les trois variantes. Ces résultats des variantes développés sont proches de la solution analytique [75]. Ainsi une divergence de résultats est observée pour l'élément Djoudi, qui est basé sur la théorie de coque peu profonde.

Chapitre 4. Variantes d'éléments finis triangulaires à champ de déformation

Tableau 4.6. Convergence du déplacement W_C d'un cylindre pincé à bords libres, cas 1: $F_1=100$; $h_1=0,094$.

Maillage	V1	V2	V3	SBDTS	Djoudi[52]
2×2	0.1095	0.0826	0.1132	0.1076	0.0641
4×4	0.1149	0.1074	0,1230	0.1134	0.0662
6×6	0.1161	0.1106	0.1236	0.1136	0.0667
8×8	0.1158	0.1116	0.1218	0.1139	0.0669
10×10	0.1156	0.1122	0.1205	0.1143	0.0669

Solution analytique[75] 0.1139

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation de la formulation de l'élément Djoudi .

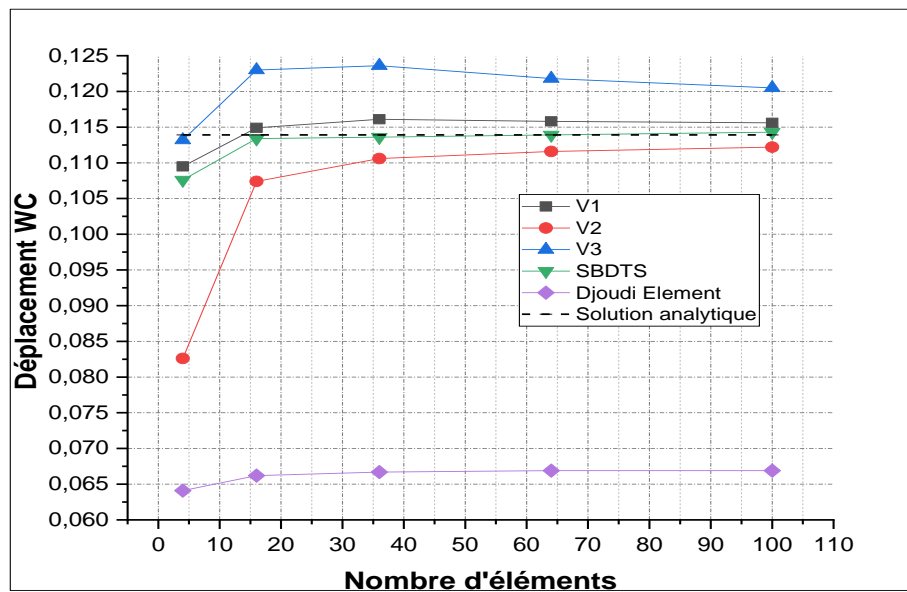


Figure 4.7. Convergence du déplacement W_C d'un cylindre pincé à bords libres, cas 1: $F_1=100$; $h_1=0,094$.

Tableau 4.7. Convergence du déplacement W_C d'un cylindre pincé à bords libres, cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$.

Maillage	V1	V2	V3	SBTDS	Djoudi[52]
2×2	0.0242	0.0178	0.0242	0.0233	0.01406
4×4	0.0246	0.0228	0.0250	0.0244	0.01420
6×6	0.0253	0.0240	0.0260	0.0245	0.01427

Solution analytique [75] 0.02439

Les résultats sont obtenus en utilisant la programmation de la formulation de l'élément Djoudi.

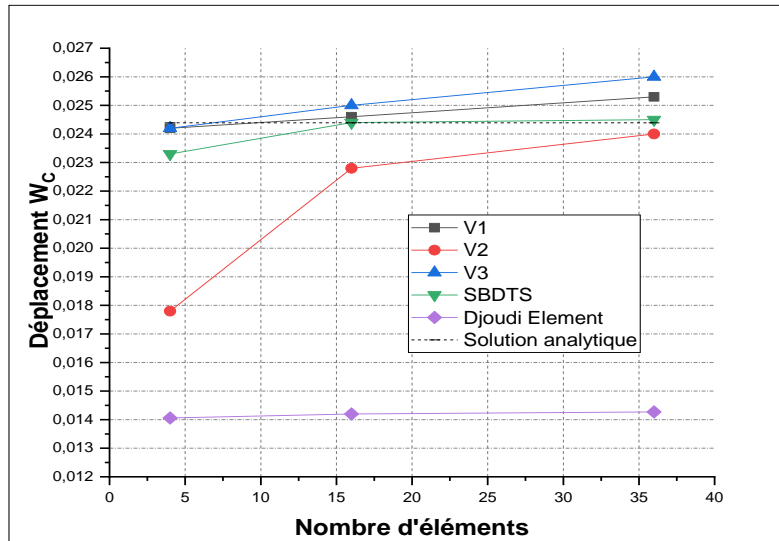


Figure 4.8. Convergence du déplacement W_c d'un cylindre pincé à bords libres, cas 2: $F_2=0.1$; $h_2=0,01548$.

4.II.5.2 L'analyse dynamique

4.II.5.2.1 Le panneau cylindrique encastré

Dans ce test, nous étudions le taux de convergence de l'élément présent dû à la discrétisation de domaine d'un panneau cylindrique encastré. Les caractéristiques géométriques et mécaniques du panneau sont les suivantes: $l = 1$ m, $r = 2$ m, $t = 0.005$ m, $\varphi=0.5$ rad, $E = 208 \times 10^9$ N/m², $\rho = 7833$ kg/m³, et $\nu = 0.29$. Les résultats obtenus pour les différentes variantes sont reportés sur les tableaux (4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13) et comparés avec ceux obtenus à partir de la solution théorique [79] et l'élément développé (SBTDS). Dans ce test, on remarque que la précision est obtenue par les trois variantes d'éléments.

Tableau 4.8. Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (V1 : SBTDS1)

Maillage	V1	Erreur (%)	SBTDS	Erreur (%)
6×6	183.34	5.18	183.53	5.29
7×7	178.80	2.58	179.07	2.73
8×8	176.46	1.23	176.52	1.27
10×10	174.28	0.01	173.88	0.24
Solution théorique [79]			174.30	

Chapitre 4. Variantes d'éléments finis triangulaires à champ de déformation

Tableau 4.9. Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (V1 : SBTDS1)

Maillage	V1	Erreur (%)	SBTDS	Erreur (%)
6×6	189.36	4.73	185.66	2.68
7×7	186.20	2.98	183.30	1.38
8×8	184.55	2.07	181.83	0.56
10×10	183.01	1.22	180.20	0.33
Solution théorique [79]			180.80	

Table 4.10. Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (V2 : SBTDS2)

Maillage	V 2	Erreur (%)	SBTDS	Erreur (%)
6×6	172.73	0.90	183.53	5.29
7×7	168.03	3.59	179.07	2.73
8×8	166.135	4.68	176.52	1.27
10×10	165.328	5.14	173.88	0.24
Solution théorique [79]			174.30	

Tableau 4.11. Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (V2 : SBTDS2)

Maillage	V2	Erreur (%)	SBTDS	Erreur (%)
6×6	181.20.	0.22	185.66	2.68
7×7	178.78	1.11	183.30	1.38
8×8	177.28	1.94	181.83	0.56
10×10	176.139	2.57	180.20	0.33
Solution théorique [79]			180.80	

Table 4.12. Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (V3 : SBTDS3)

Maillage	V3	Erreur (%)	SBTDS	Erreur (%)
6×6	182.037	4.43	183.53	5.29
7×7	177.31	1.72	179.07	2.73
8×8	174.71	0.23	176.52	1.27
10×10	172.28	1.15	173.88	0.24
Solution théorique [79]			174.30	

Tableau 4.13. Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encastré et les erreurs relatives. (V3 : SBTDS3)

Maillage	V3	Erreur (%)	SBTDS	Erreur (%)
6×6	187.18	3.52	185.66	2.68
7×7	183.88	1.70	183.30	1.38
8×8	181.94	0.63	181.83	0.56
10×10	179.97	0.45	180.20	0.33
Solution théorique [79]			180.80	

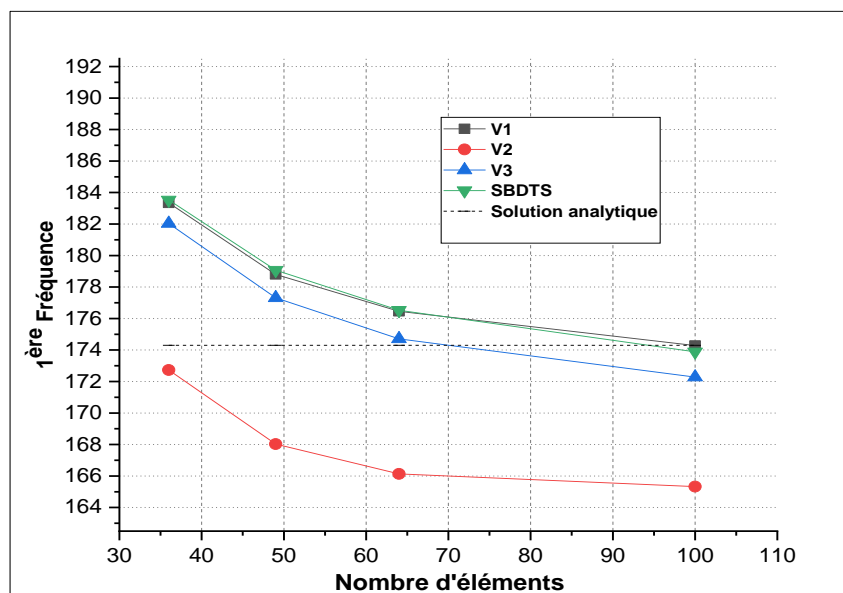


Figure.4.9 Convergence des premières fréquences propres du panneau cylindrique encastré

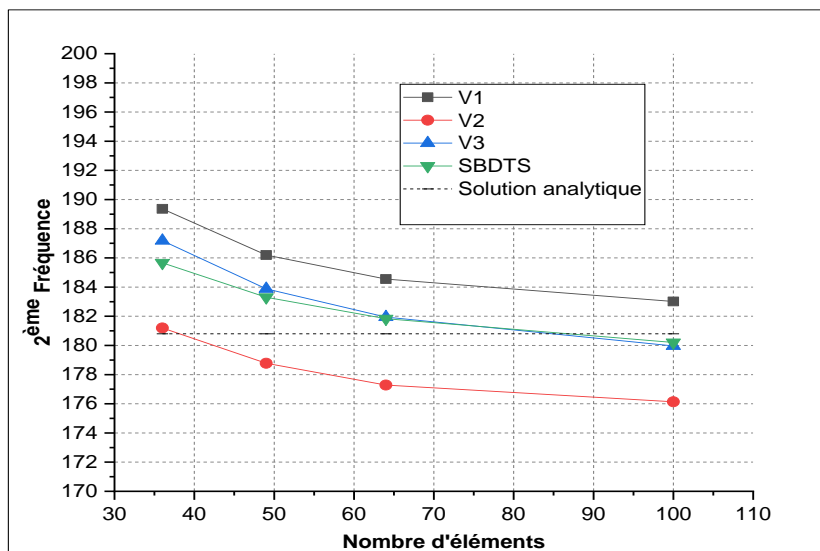


Figure.4.10 Convergence des deuxièmes fréquences propres du panneau cylindrique encasté

4.III Conclusion

Nous avons développé, dans ce chapitre, un certain nombre d'éléments de coque cylindrique triangulaire basé sur l'approche en déformations et la théorie des coques profondes.

Au départ, on a formulé un élément de coque qui ne possède que les cinq degrés de liberté externes principaux ainsi qu'un sixième degré de liberté supplémentaire représentant la rotation dans le plan. L'élément est donc entièrement compatible et peut être utilisé en conjonction avec des éléments de poutre en arc ayant tous les six degrés de liberté essentiels. L'utilisation de l'approche en déformation pour le développement de l'élément SBTDSR conduit à la représentation exacte des mouvements de corps rigides, conduit également à des termes polynomiaux d'ordre supérieur sans avoir besoin de l'ajout de degrés de liberté internes et a permis d'éviter l'utilisation d'éléments finis d'ordre supérieur. La fonction de déplacement de cet élément est obtenue en intégrant la fonction de déformation supposée. L'intégration numérique est utilisée pour évaluer les matrices de rigidité de l'élément.

Les performances et la précision de l'élément développé ont été vérifiées avec divers exemples numériques en statique de structures courbes. Les résultats numériques obtenus à l'aide de cet élément généralement concordent bien avec ceux d'autres investigations et résultats théoriques. Enfin, il convient de mentionner que le présent élément(SBTDSR) est le premier élément de coque cylindrique triangulaire avec la rotation supplémentaire, basé sur

l'approche en déformations et la théorie des coques profondes.

Par la suite, nous avons essayé d'améliorer le comportement de l'élément SBTDS en proposant les trois éléments de coque SBTDS1, SBTDS2, SBTDS3. Ces variantes d'éléments finis de coque cylindrique triangulaire proposée sont testées afin de confirmer leurs performances et précisions en se basant sur des exemples numériques en analyse statique et en vibrations libres des structures courbées. Les résultats obtenus à travers les tests choisis, permis de noter que :

La capacité de développer avec succès des variantes d'éléments finis de coque mince cylindrique (SBTDS1, 2,3) basées sur des fonctions généralisées de déformation a été démontrée,

- Les variantes convergent vers la solution de référence (Tableaux 4.6 et 4.7) pour un faible nombre d'éléments.
- Les performances et la précision des éléments développés ont été vérifiées avec les exemples numériques en statique et vibration libre de structures courbes
- Pour tous les résultats numériques, il convient de mentionner que les variantes montrent une convergence rapide vers la solution de référence. Les résultats de ces éléments de coque triangulaire sont en accord avec les solutions analytiques et les résultats de divers éléments disponibles dans la littérature.
- L'approche en déformation s'est avérée simple en produisant un grand nombre d'éléments performants.

Conclusion générale

Ce travail de recherche a pour objectif principal de mener une analyse structurale des coques cylindriques et isotropes en utilisant la méthode des éléments finis à champs de déformation. Ces éléments doivent satisfaire les équations de compatibilité et doivent aussi donner une représentation correcte des mouvements d'un corps rigide.

Au cours de cette étude, différentes versions d'éléments finis triangulaires ont été développés en se basant sur l'approche en déformation des coques courbes.

En s'appuyant sur la théorie des coques profondes, un premier élément, triangulaire à trois nœuds, a été développé en vue d'analyser des problèmes relatifs aux coques courbes. Cet élément tout nouveau est nommé par **SBTDS** (Strain-Based Triangular Deep Shell). Il possède cinq degrés de liberté ($U, V, W, \theta_y, \theta_x$), pour chaque nœud.

Il est intéressant de noter que cet élément (**SBTDS**) présente une convergence monotone et rapide vers la solution de référence. En outre, il faut souligner que les résultats obtenus pour cet élément de coque triangulaire sont cohérents avec ceux fournis par la solution analytique et aussi avec ceux des différents éléments rapportés dans la littérature.

D'un autre côté, l'influence des ouvertures centrales sur les fréquences propres d'un panneau cylindrique a également été examinée. Par ailleurs, les résultats numériques obtenus pour l'élément (**SBTDS**) avec une ouverture concordent assez bien avec ceux des éléments sans ouvertures, ce qui indique que les ouvertures n'affectent pas les fréquences naturelles.

Par la suite, un autre élément fini triangulaire avec trois nœuds, appelé **SBTDSR** (Strain-Based Triangular Deep Shell Avec Rotation), a été développé. Il est basé sur la théorie des coques profondes, et possède cinq degrés de liberté principaux externes pour chaque nœud, ainsi qu'un sixième degré de liberté additionnel ($U, V, W, \theta_x, \theta_y, \theta_z$).

Ainsi, on peut dire que l'élément en question est totalement compatible et peut donc être utilisé en combinaison avec des éléments de poutre en arc avec les six degrés de liberté principaux.

Il faut bien noter que les performances et la précision de l'élément (**SBTDSR**) ont été confirmées en prenant différents exemples numériques en analyse statique des structures

courbes. Il s'est avéré que les résultats numériques obtenus pour cet élément concordent bien avec les résultats théoriques et avec ceux trouvés dans d'autres travaux de recherche.

D'autre part, nous avons tenté également d'améliorer le comportement en flexion de l'élément (**SBTDS**) en suggérant d'inclure des transformations sur le champ de déformation.

Nous tenons à préciser que la formulation des éléments (**SBTD1**, **SBTD2** et **SBTD3**) est assez simple. Ils possèdent chacun cinq degrés de liberté principaux externes à chaque nœud. En outre, le champ de déplacement de chacun de ces éléments peut être amélioré en ajoutant des termes d'ordre supérieur, sans toutefois inclure des nœuds intermédiaires ou des degrés de liberté supplémentaires inutiles.

Il faut ajouter aussi que les performances et la précision des éléments proposés ont été confirmées en se basant sur des exemples numériques en analyse statique et en vibrations libres des structures courbes.

Ainsi, les résultats obtenus indiquent que, pour un nombre d'éléments limité, les variantes convergent de manière rapide vers la solution de référence. Soulignons aussi que les résultats de l'analyse statique et dynamique relative aux trois variantes (**SBTDS1**, **SBTDS2**, **SBTDS3**), sont satisfaisantes.

Enfin, il est important de souligner que la capacité de développer des éléments finis cylindriques à coque mince performants, basés sur des fonctions de déformation et de coque profonde, a bien été confirmée.

De plus, il a été trouvé que l'approche en déformation est simple lorsqu'on produit de nombreux éléments hautement performants. Il s'est avéré aussi que la forme triangulaire des éléments développés est plus intéressante que la forme quadrilatère, car elle rend le maillage plus facile et plus simple lorsque la forme géométrique de la structure est complexe.

Pour une perspective ultérieure, les variantes développées (**SBTDS1**, **SBTDS2**, **SBTDS3**) sont des éléments de flexions il est hautement recommandé d'améliorer leurs comportements membranaires, et de faire avancer les travaux consiste à examiner tous les éléments développés dans l'étude dynamique forcée et sur la non-linéarité matérielle et géométrique.

Références bibliographiques

- [1] Fraeijs de Veubeke, B., Displacements and equilibrium models in the finite elements method. In O. C. Zienkiewicz et G. S. Holister, editeurs : Stress analysis, chapitre 9. John Wiley & Sons, London, 1965.
- [2] Pian, T. H. H., Reactions and remarks on hybrid and mixed finite element methods. In S. N. Atluri, R. H. Gallagher et O. C. Zienkiewicz, editeurs : Hybrid and mixed finite element methods, chapitre 29. John Wiley & Sons, Ltd, 1983.
- [3] Jones, R. E., A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis. AIAA Journal, 2:821-826, 1964.
- [4] Pian, T. H. H., Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. AIAA Journal, 2:1333-1336, 1964.
- [5] Belarbi, M. T., et Charif, A., Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan, revue européenne des éléments finis, Vol 7, n°4, pp 439-458, 1998.
- [6] Ashwell, D. G., and Sabir, A. B., Limitations of Certain Curved Finite Elements When Applied to Arches, International Journal of Mechanical Sciences, 13(2), pp. 133–139, 1971.
- [7] Ashwell, D. G., Sabir, A. B., and Roberts, T. M., Further Studies in the Application of Curved Finite Elements to Circular Arches, International Journal of Mechanical Sciences, 13(6), pp. 507–517, 1971.
- [8] Dawe, D. J., High-order triangular finite element for shell analysis, International Journal of Solids and Structures, vol. 11, no. 10, pp. 1097–1110, 1975. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90089-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90089-X) .
- [9] Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R. L., The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Elsevier Science, 2005.
- [10] Sabir, A. B., A new class of Finite Elements for plane elasticity problems, CAFEM 7th, International Conference of Structural Mechanics In Reactor Technology, Chicago, 1983.
- [11] Sabir, A. B., A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, Chapter 9 in Proceeding of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering, Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.
- [12] Sabir, A. B., and Salhi, H. Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, Res. mechanica, vol. 19, pp. 1-16, 1986.

- [13] Ayad, R., Zouari, W., Meftah, K., Ben Zineb, T., and Benjeddou, A., Enrichment of linear hexahedral finite elements using rotations of a virtual space fiber, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 95, no. 1, pp. 46–70, 2013. doi: 10.1002/nme.4500.
- [14] Bouzrira, C., Sabir, A. B., and Nemouchi, Z., A sector inplane finite element in polar coordinates with rotational degree of freedom, *Archives of Civil Engineering*, vol. 51 pp. 471-483, 2005.
- [15] Bouzriba, A., and Bouzrira, C., Sector element for analysis of thick cylinders exposed to internal pressure and change of temperature, *Gradevinar*, vol. 67 pp. 547-555, 2015.
- [16] Sabir, A. B., and Sfindji, A., *Triangular and Rectangular Plane Elasticity Finite Elements. Thin-Walled Structures*, vol. 21, pp. 225-232, 1995.
- [17] Belarbi, M. T., and Maalam, T., On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 14, pp. 985-997, 2005.
- [18] Hamadi, D., Ayoub, A., and Maalem, T., A new strain-based finite element for plane elasticity problems, *Engineering Computations*, vol. 33, pp.562-579, 2016.
- [19] Himeur, M., Zergua, A., and Guenfoud, M., A Finite Element Based on the Strain Approach Using Airy's Function, *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 40, pp. 719–733, 2015.
- [20] Rezaiee-Pajand, M., Gharaei-Moghaddam, N., and Ramezani, M., A New Higher-Order Strain-Based Plane Element, *Scientia Iranica*, 26(0), pp. 2258–2275, 2019.
- [21] Rezaiee-Pajand, M., and Yaghoobi, M., Formulating an Effective Generalized Four-Sided Element, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 36, pp. 141–155, 2012.
- [22] Rezaiee-Pajand, M., Gharaei-Moghaddam, N., and Ramezani, M., Two Triangular Membrane Elements Based on Strain, *International Journal of Applied Mechanics*, 11(1), 2019.
- [23] Rezaiee-Pajand, M., Ramezani, M., and Gharaei-Moghaddam, N., Using Higher-Order Strain Interpolation Function to Improve the Accuracy of Structural Responses, *International Journal of Applied Mechanics*, 12(3), 2020.
- [24] Bouzidi, L., Belounar, L., and Guerraiche, K., Presentation of a new membrane strain-based finite element for static and dynamic analysis, *International Journal of Structural Engineering*, vol. 10, no. 1, pp. 40–60, 2019. doi: 10.1504/IJSTRUCTE.2019.101431.
- [25] Fortas, L., Belounar, L., and Merzouki, T., Formulation of a new finite element based on assumed strains for membrane structures, *International Journal of Advanced Structural Engineering*, vol. 11, pp. 9–18, 2019. doi: 10.1007/s40091-019-00251-9.

- [26] Belounar, L., Messai, A., Merzouki, T., and Fortas, L., A Comparative Study of Membrane Finite Elements Based on the Strain Approach, *Academic Journal of Civil Engineering*, 34(1), pp. 66–72, 2016.
- [27] Belounar, L., and Guenfoud, M., A New Rectangular Finite Element Based on the Strain Approach for Plate Bending, *Thin-Walled Structures*, 43(1), pp. 47–63, 2005.
- [28] Belounar, A., Benmebarek, S., and Belounar, L., Strain Based Triangular Finite Element for Plate Bending Analysis, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(8), 2020, pp. 620-632.
- [29] Belounar, A., Benmebarek, S., Houhou, M. N., and Belounar, L., Static, Free Vibration, and Buckling Analysis of Plates Using Strain-Based Reissner–Mindlin Elements, *International Journal of Advanced Structural Engineering*, 11(2), pp. 211–230, 2019.
- [30] Himeur, M., and Guenfoud, M., Bending Triangular Finite Element with a Fictitious Fourth Node Based on the Strain Approach, *European Journal of Computational Mechanics*, 20(7–8), pp. 455–485, 2011.
- [31] Abderrahmani, S., Maalem, T., and Hamadi, D., On Improved Thin Plate Bending Rectangular Finite Element Based on the Strain Approach, *International Journal of Engineering Research in Africa*, 27, pp. 76–86, 2016.
- [32] Boussem, F., and Belounar, L., A Plate Bending Kirchhoff Element Based on Assumed Strain Functions, *Journal of Solid Mechanics*, Vol 12 No. 4, pp. 935–952, 2020. doi: 10.22034/jsm.2020.1901430.1601.
- [33] Boussem, F., Belounar, A., and Belounar, L., Assumed Strain Finite Element for Natural Frequencies of Bending Plates, *World Journal of Engineering*, Vol. 19 No. 5, pp. 620-631, 2021.
- [34] Belounar, A., Boussem, F., Houhou, M. N., Tati, A., and Fortas, L., Strain-based finite element formulation for the analysis of functionally graded plates, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 92, pp. 2061–2079, 2022. <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02160-y>.34.
- [35] Belounar, A., Boussem, F., and Tati, A., A Novel C0 Strain - Based Finite Element for Free Vibration and Buckling Analyses of Functionally Graded Plates, *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, Vol. 11, pp. 281–300, 2022. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00577-x>.
- [36] Boussem, F., Belounar, A., Belounar, L., and Fortas, L., Strain-Based Mindlin Finite Element for Vibration Analysis of Rectangular Plates Coupled with a Fluid, *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, Vol. 19, No. 2, pp. 93–100, Mar. 2023. <https://rjav.sra.ro/index.php/rjav/article/view/301>.

- [37] Abderrahmani, S., Maalem, T., Zatar, A., and Hamadi, D., A New Strain Based Sector Finite Element for Plate Bending Problems, *International Journal of Engineering Research in Africa*, 31, pp. 1–13, 2017.
- [38] Belouнар, A., Benmebarek, S., Houhou, M. N., and Belouнар, L., Free Vibration with Mindlin Plate Finite Element Based on the Strain Approach,” *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, 101(2), pp. 331–346, 2020.
- [39] Boussem, F., Formulation des éléments finis à champ déformation pour l'étude dynamique des structures minces, Thèse de doctorat en Sciences (en Génie Mécanique), 2021.
- [40] Belarbi, M. T., and Charif, A., Développement d'un Nouvel Élément Hexaédrique Simple Basé Sur Le Modèle En Déformation Pour l'étude Des Plaques Minceѕ et Épaisses, *Revue Européenne des Eléments*, 8(2), pp. 135–157, 1999.
- [41] Hamadi, D., and Maalem, T., Presentation of an Efficient Parallelepiped Finite Element Based on the Strain Approach ‘SBP8C, WCE - World Congress on Engineering 2010, 3, pp. 1761–1764, 2010.
- [42] Guerraiche, K. H., Belouнар, L., and Bouzidi, L., A New Eight Nodes Brick Finite Element Based on the Strain Approach,” *Journal of Solid Mechanics*, 10(1), pp. 186–199, 2018.
- [43] Belouнар, L., and Guerraiche, K., A New Strain Based Brick Element for Plate Bending, *Alexandria Engineering Journal*, 53(1), pp. 95–105, 2014.
- [44] Messai, A., Belouнар, L., and Merzouki, T., Static and Free Vibration of Plates with a Strain Based Brick Element, *European Journal of Computational Mechanics*, 00(00), pp. 1–21, 2018. <https://doi.org/10.1080/17797179.2018.1560845>.
- [45] Khiouani, H. E., Belouнар, L., and Houhou, M. N., A New Three-Dimensional Sector Element for Circular Curved Structures Analysis, *Journal of Solid Mechanics*, 12(1), pp. 165–174, 2020.
- [46] Ashwell, D.G. and Sabir, A. B., A New Cylindrical Shell Finite Element Based on Simple Independant Strain Functions, *Int.J.mech.Sci*, 14, pp. 171–183, 1972.
- [47] Ashwell, D. G., Sabir, A. B., and Roberts, T. M., Further Studies in the Application of Curved Finite Elements to Circular Arches, *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(6), pp. 507–517, 1971.
- [48] Sabir, A. B., and Lock, A. C., Large Deflexion , Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis of Circular Arches, *International Journal of Mechanical Sciences*, 15, pp. 37–47, 1973.

- [49] Sabir, A.B., and Ashwell, D. G., 1979, Diffusion of Concentrated Loads into Thin Cylindrical Shells, *The mathematics of finite elements and application III*, 33, pp. 379–389, 1979.
- [50] Charchafchi, T.A., and Sabir, A. B., Curved Rectangular and General Quadrilateral Shell Elements for Cylindrical Shells, *The Mathematics of Finite Elements and Application IV*, J.R Whiteman, ed., Academic Press, pp. 231–239, 1982.
- [51] Bull, J. W., The Strain Approach to the Development of Thin Cylindrical Shell Finite Elements, *Thin-Walled Structures*, 2(3), pp. 195–205, 1984.
- [52] Djoudi, M. S., and Bahai, H., A Shallow Shell Finite Element for the Linear and Non-Linear Analysis of Cylindrical Shells, *Engineering Structures*, 25(6), pp. 769–778, 2003.
- [53] Djoudi, M.S., and Bahai, H., A Cylindrical Strain-Based Shell Element for Vibration Analysis of Shell Structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, 40, pp. 1947–1961, 2024.
- [54] Djoudi, M. S., and Bahai, H., Strain Based Finite Element for the Vibration of Cylindrical Panels with Openings, *Thin-Walled Structures*, 42(4), pp. 575–588, 2004.
- [55] Hamadi, D., Ayoub, A., and Abdelhafid, O., A New Flat Shell Finite Element for the Linear Analysis of Thin Shell Structures, *European Journal of Computational Mechanics*, 24(6), pp. 232–255, 2015.
- [56] Guenfoud, H., Himeur, M., Ziou, H., and Guenfoud, M., A Consistent Triangular Thin Flat Shell Finite Element with Drilling Rotation Based on the Strain Approach, *International Journal of Structural Engineering*, 9(3), pp. 191–223, 2018.
- [57] Himeur, M., Contribution à La Formulation de Quelques Éléments de Coques Basés Sur La Formulation En Déformation, Université 08 mai 1945 de Guelma, 2014.
- [58] Himeur, M., and Guenfoud, M., Bending Triangular Finite Element with a Fictitious Fourth Node Based on the Strain Approach, *European Journal of Computational Mechanics*, 20(7–8), pp. 455–485, 2011.
- [59] Belouнар, A., Eléments finis membranaires et flexionnels à champ de déformation pour l'analyse des structures, Thèse de doctorat LMD en Génie Civil, 2019.
- [60] Himeur, M., Benmarce, A., and Guenfoud, M., A new finite element based on the strain approach with transverse shear effect, *Structural Engineering Mechanics*, vol. 49, pp. 793–810, 2014.
- [61] Prat Michel, la modélisation des ouvrages, Hermès, Paris, 1995.

- [62] Frey Francois , Marc – André Studer , Analyse des structures et milieux continus, Coques ,Volume 5 , Presses Polytechniques et Universitaires Romandes Lausanne , 2003.
- [63] Karde Stuncer H., finite element handbook, Mc Graw – Hill, 1987.
- [64] Morley, L.S.D et Marrifield, B.C., Polynomial comparison solutions in the sanders koiter theory of circular cylindrical shells p 42-43. Of D. G. Ashwell and R.H Gallagher (Ed). Finite elements for Thin Shells and Curved Members. John Wiley and Sons, London, 1976.
- [65] Taylor, R.L., & O.C., The finite element method , Fifth edition, Vol2:Solid Mechanics, 2000.
- [66] Yang, H. T.Y., Saigal, S., Masud, A., and apania, R.K.K., A survey of recent shell finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.47, no.1–3, pp. 101–127,2000.doi:10.1002/(SICI)1097-0207(20000110/30)47:1/3<101:AID-NME763>3.0.CO;2-C.
- [67] Zienkiewicz, O.C., and Cheung, Y. K., The finite element method in structural and continuum mechanics: numerical solution of problems in structural and continuum mechanics; London; New York: McGraw-Hill, 1967.
- [68] Liang, Y., and Izzuddin, B. A., Locking-free 6-noded triangular shell elements based on hierarchic optimisation, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 204, p. 103741, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.finel.103741>.
- [69] Abed-Meraim, F., and Combescure, A., A physically stabilized and locking-free formulation of the (SHB8PS) solid-shell element, European Journal of Computational Mechanics, vol. 16, no. 8, pp. 1037–1072, 2007. doi: 10.3166/REM.16.1037-1072.
- [70] Trinh, V. D., Abed-Meraim, F., and Combescure, A., A new assumed strain solid-shell formulation 'SHB6' for the six-node prismatic finite element, Journal of Mechanical Science and Technology, vol. 25, no. 9, pp. 2345–2364, 2011. doi: 10.1007/s12206-011-0710-7.
- [71] Batoz, J.L ., and Ben Tahar, M., Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, no. 11, pp. 1655–1677, 1982. doi: 10.1002/nme.1620181106.
- [72] Yang, H. T. Y., Saigal, S., and Liaw, D., Advances of thin shell finite elements and some application,version I, Computers and StructuresStructures, vol. 35, pp. 481–504, 1990. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90071-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90071-9).
- [73] Dagade, V. A ., and Kulkarni, S. D., Static and free vibration analysis of sandwich shell panels using quadrilateral flat shell finite element, Materials Today: Proceedings, vol. 63, pp. 295–301, 2022. doi: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.03.084>.

- [74] Jones, R. E., and Strome, D. R., Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curved elements., *AIAA Journal*, vol. 4, no. 9, pp. 1519–1525, 1966. doi: 10.2514/3.3729.
- [75] Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, 1959.
- [76] Macneal, R.H., and Harder, R. L., A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 1, pp. 3–20, 1985. doi: 10.1016/j.finel.2003.10.001.
- [77] Sabir, A. B., and Lock, A. C., A curved, cylindrical shell, finite element, vol. 14, no. July 1971. pp. 125–135, 1972. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90093-8](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90093-8).
- [78] Lindberg, G.M., Olson, M.D., and Cowper, G.R., New Developments in the finite element Analysis of Shells, *Nat Res Counc Can, Div Mech Eng, Quart Bull, Rep DME/NAE 4*, pp. 1–38, 1969.
- [79] Soedel, W., *Vibrations of shells and plates*, third edition. 2004. <https://doi.org/10.4324/9780203026304>.
- [80] Lim, C. W., and Liew, K.M., A higher-order theory for vibration of shear deformable cylindrical shallow shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 37, pp. 277–295, 1995. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)93521-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)93521-7).
- [81] Petyt, M., Vibration of curved plates, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 15, no. 3, pp. 381–395, 1971. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(71\)90432-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90432-9).
- [82] Kanok-Nukulchai, W., A simple and efficient finite element for general shell analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 179–200, 1979. <https://doi.org/10.1002/nme.1620140204>.
- [83] Huang, H. C., and Hinton, E., A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, no. 1, pp. 73–92, 1986. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620220107>.
- [84] Lee, S. J., and Han, S. E., Free-vibration analysis of plates and shells with a nine-node assumed natural degenerated shell element, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 241, no. 4, pp. 605–633, 2001. doi:10. 1006/jsvi.2000.3313.
- [85] Belarbi, M.T., *Developpement de Nouvel Element Fini Base Sur le Modele en Deformation, Application Lineaire et Non Lineaire*, Phd Thesis, University of Constantine, Algeria, 2000.

Références bibliographiques

- [86] Bourezane, M., Utilisation of the Strain Model in the Analysis of the Structures, Phd Thesis, University of Biskra, Algeria, 2006.
- [87] Belarbi, M. T., and Bourezane, M., On improved Sabir triangular element with drilling rotation, *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 9, pp. 1151-1175, 2005.
- [88] Bourezane, K .M., An efficient strain based cylindrical shell finite element, *Journal of Solid Mechanics*, vol. 9, no. 3, pp. 632–649, 2017. doi: 20.1001.1.20083505.2017.9.3.14.3.
- [89] Sekkour, H., Belounar, L., Belounar, A., Boussef, F., and Fortas, L., A Triangular Shell Element Based on Higher-order Strains for the Analysis of Static and Free Vibration, *Civil Engineering Journal*, Vol. 8, No. 10, pp. 2096–2109, 2022. doi: 10.28991/CEJ-2022-08-10-06.

Annexes

✓ La matrice de transformation [C] (15x15) de l'élément **SBTDS** [89] est donnée comme suit :

$$[C] = \begin{bmatrix} P_1(x_1, \varphi_1, y_1) \\ P_2(x_2, \varphi_2, y_2) \\ P_3(x_3, \varphi_3, y_3) \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Où la matrice [P_i] (5x15) avec les coordonnées (x_i, φ_i, y_i), du nœud i (i=1, 2,3) est :

$$[P_i(x_i, \varphi_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 0 & R \cos \varphi_i & 0 & R \sin \varphi_i & 1 & 0 & x_i & 0 & y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ry_i \\ \sin \varphi_i & x \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ry_i & \frac{y_i^2}{2} & Rx_i \\ -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & -x \sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & R & 0 & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x_i^3}{6} & -\frac{y_i x_i^3}{6R} & -R^2 & -Ry_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x_i^3}{6R} & -y_i & -\left(R + \frac{y_i^2}{2R}\right) & -x_i \\ 0 & -\cos \varphi_i & 0 & -\sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{y_i x_i^2}{2R} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

✓ La matrice de transformation [C] (18x18) de l'élément **SBTDSR** est donnée comme suit :

$$[C] = [P_1(x_1, \varphi_1, y_1), P_2(x_2, \varphi_2, y_2), P_3(x_3, \varphi_3, y_3)]^T \quad (A.3)$$

Où la matrice [P_i] (6x18) avec les coordonnées (x_i, φ_i, y_i), du nœud i (i=1, 2,3) est :

$$[P_i(x_i, \varphi_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 0 & R \cos \varphi_i & 0 & R \sin \varphi_i & 1 & 0 & x_i & 0 & y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ry_i & x_i y_i / R & 0 & \frac{y_i^2}{2R} \\ \sin \varphi_i & x \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ry_i & \frac{y_i^2}{2} & Rx_i & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & -x \sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & R & 0 & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x_i^3}{6} & -\frac{x_i^3 y_i}{6R} & -R^2 & -Ry_i & 0 & 0 & Rx_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x_i^3}{6R} & -y_i & R + \frac{y_i^2}{2R} & -x_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi_i & 0 & -\sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{y_i x_i^2}{2R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_i & 0 & \cos \varphi_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & \frac{x_i}{2} & 0 & \frac{y_i}{2R} \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

Annexes

✓ La matrice de transformation [C] (15x15) des variantes d'éléments : **SBTDS1**, **SBTDS2** et **SBTDS3** est comme suit :

$$[C] = [P_1(x_1, \varphi_1, y_1), P_2(x_2, \varphi_2, y_2), P_3(x_3, \varphi_3, y_3)]^T \quad (A.5)$$

Tel que la matrice [P_i] (5x15) pour la variante **SBTDS1** est donnée par :

$$[P_i(x_i, \varphi_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 0 & R \cos \varphi_i & 0 & R \sin \varphi_i & 1 & 0 & x_i & 0 & y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ry_i \\ \sin \varphi_i & x \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ry_i & \frac{y_i^2}{2} & Rx_i \\ -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & -x \sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & R & 0 & -\frac{y_i^3 x_i^2}{6R} & -\frac{x_i x^3}{6} & -\frac{y_i x^3}{6R} & -R^2 & R y_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_i^2 x_i^2}{2R} & 0 & -\frac{x_i^3}{6R} & -y_i & -R - \frac{y_i^2}{2R} & -x_i \\ 0 & -\cos \varphi_i & 0 & -\sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x_i y_i^3}{3R} & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{y_i x_i^2}{2R} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

Pour la variante **SBTDS2** :

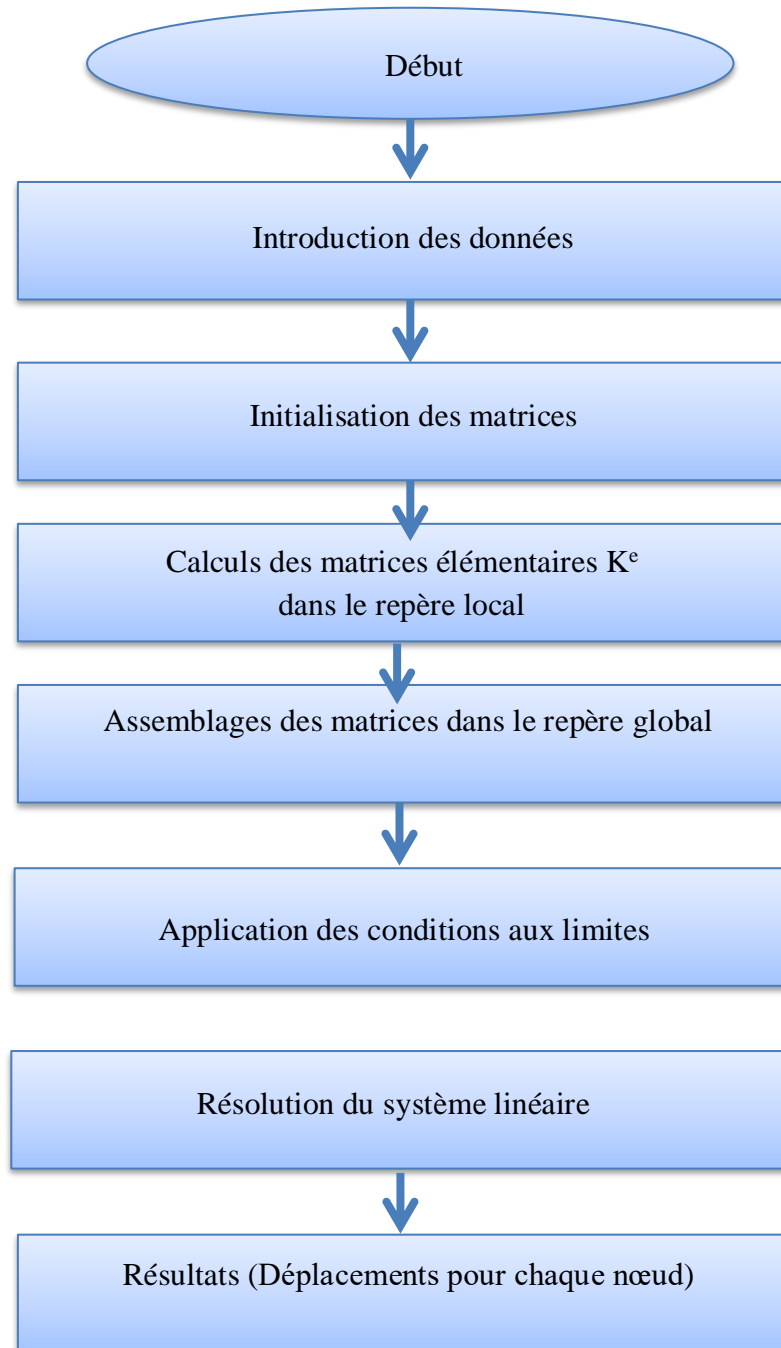
$$[P_i(x_i, \varphi_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 0 & R \cos \varphi_i & 0 & R \sin \varphi_i & 1 & 0 & x_i & 0 & y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ry_i \\ \sin \varphi_i & x \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ry_i & 0 & Rx_i \\ -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & -x \sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & R & 0 & -\frac{x_i}{2} & -\frac{x_i^3}{6} & -\frac{y_i x^3}{6R} & -R^2 & -\frac{y_i^3 x_i^2}{6R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x^3}{6R} & -y_i & -\frac{y_i^2 x_i^2}{2R} & -x_i \\ 0 & -\cos \varphi_i & 0 & \sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{y_i x_i^2}{2R} & 0 & -\frac{x_i y_i^3}{3R} & 0 \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

Pour la variante **SBTDS3** :

$$[P_i(x_i, \theta_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 0 & R \cos \varphi_i & 0 & R \sin \varphi_i & 1 & 0 & x_i & 0 & y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ry_i \\ \sin \varphi_i & x \sin \varphi_i & -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ry_i & \frac{y_i^2}{2} & Rx_i \\ -\cos \varphi_i & -x \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & -x \sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & R & 0 & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x_i^3}{6} & -\frac{y_i^3 x_i^2}{6R} & -R^2 & R y_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_i^2 x_i^2}{2R} & -y_i & -R - \frac{y_i^2}{2R} & -x_i \\ 0 & -\cos \varphi_i & 0 & -\sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x y_i^3}{3R} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

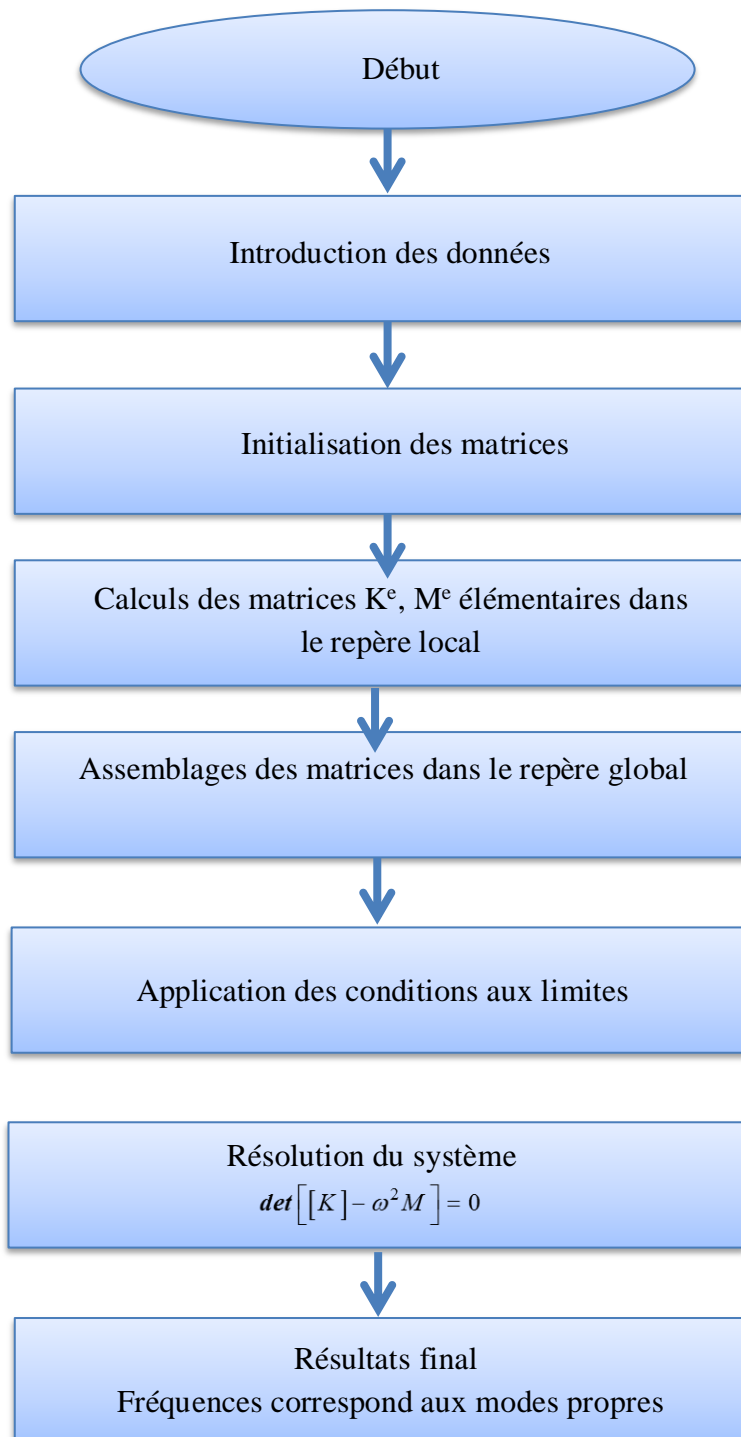
Organigrammes :

1- Statique



(B.1)

2- Vibration libre



(B.2)