

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UN LIBRO DE TEXTO PARA EL ESTUDIO DEL DIFERENCIAL

ANALYSIS OF THE DIDACTIC SUITABILITY OF A TEXTBOOK FOR THE STUDY OF THE DIFFERENTIAL

Manuel Alejandro Verón¹, Belén Giacomone²

¹Universidad Nacional de Misiones, ²Universidad de la República de San Marino

alejandroveron@fceqyn.unam.edu.ar, belen.giacomone@unirmsm.sm

Resumen

Diversas investigaciones han reportado que la presentación y tratamiento del concepto de diferencial en los libros de texto no tiene en cuenta los significados parciales de este concepto y su complejidad ontosemiótica, generando de esta manera conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales. En esta investigación, se presenta un análisis y valoración de la idoneidad didáctica de unas actividades de un libro de texto fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico; el objetivo que se persigue es identificar potenciales conflictos y mejorar el aprendizaje de los significados del diferencial pretendidos en el libro de texto. Se considera que los criterios de idoneidad didáctica, que se han particularizado para el estudio del diferencial, constituyen una herramienta fundamental para orientar la reflexión del profesor, la toma de decisiones y la gestión de todo el proceso de instrucción, ya que permiten tener en cuenta las posibilidades y limitaciones de los libros de textos.

Diferencial, idoneidad didáctica, conflictos semióticos, libro de texto, reflexión del profesor.

Abstract

Several investigations have reported that the presentation and treatment of the differential in textbooks do not take into account the partial meanings of this mathematical concept and its onto-semiotic complexity, thus generating epistemic, cognitive, and instructional conflicts. This research presents an analysis and assessment of the didactic suitability of some activities proposed in a textbook based on the Onto-semiotic Approach; the objective is to identify possible conflicts and enhance the learning of the differential meanings that are intended in the textbook. The criteria of didactic suitability, which have been particularized for the study of the differential, constitute a fundamental tool to guide reflection, decision-making and class management. In addition, they allow the teacher to take into account the possibilities and limitations of the textbooks that will be used in the instruction process.

Differential, didactic suitability, semiotic conflicts, textbook, reflective teacher.

INTRODUCCIÓN

Un tema de interés dentro de la investigación en didáctica de las matemáticas es el análisis de libros de texto, considerando que este recurso constituye un plan de acción, una guía, una planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje (Frank y Thompson, 2021) que usan con frecuencia los profesores condicionando, en gran parte, lo que acontece en las aulas (Castillo, Burgo y Godino, 2022). Por tal motivo, deben ser objeto de revisión continua para evaluar su carácter disciplinar y relevancia didáctica (Konic, Godino y Rivas, 2010).

El diferencial es uno de los conceptos fundamentales en el estudio del cálculo, tanto en el bachillerato como en diversas carreras universitarias. Los docentes y futuros docentes deben afrontar complejos desafíos para abordar los problemas didácticos asociados a este concepto e intentar cubrir las

demandas que reclama la comunidad científica. Sin bien existe una gran cantidad de investigaciones sobre las dificultades que presentan los estudiantes al abordar este concepto (Gómez, 2019; López-Gay y Martínez Torregrosa, 2005), no son tantas las que abordan cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos que debería tener en cuenta el profesor para su enseñanza (Castro y Pino-Fan, 2021).

Investigaciones como las de Gómez (2019), Oldenburg (2016), López-Gay et al. (2015), Pulido (1997), Pulido (2010), entre otros, mencionan que existen varias dificultades, principalmente en la forma en que se presenta el estudio del diferencial en los libros de textos, tanto antiguos como los actuales. Estos autores reportan que se genera un conflicto instruccional debido al uso de diferentes definiciones del diferencial en varias secciones del libro sin explicar los cambios considerados. Además, Frank y Thompson (2021) plantean que se generan conflictos instruccionales en la gestión de la generalización y/o complejidad del concepto según el significado que se pretenda estudiar con los estudiantes

Frente a este problema, resulta importante indagar cómo se presenta este concepto en los distintos libros de texto. Partiendo de la base que una lección de un libro de texto “es un proceso de instrucción (potencial o planificado) que se compone de la secuencia de prácticas matemáticas y didácticas que propone el autor para el estudio del tema en cuestión” (Burgos et al., 2020, p. 42), resulta posible valorar su idoneidad didáctica (Godino, 2013; 2021). La valoración de las lecciones del libro de texto se realiza teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos en relación al diferencial de una función (Verón y Giacomone, 2021), los cuales permiten la reconstrucción de los significados parciales del concepto.

El objetivo de este artículo es mostrar el análisis de algunas lecciones sobre el diferencial para identificar elementos que puedan ser potencialmente conflictivos, desde el punto de vista de los conocimientos matemáticos pretendidos, de las posibilidades de los estudiantes, y del proceso de instrucción que se propone. Cabe destacar que este trabajo es parte de una investigación más amplia que pretende analizar las trayectorias didácticas propuestas en un libro de texto de cálculo que aborda el estudio del diferencial con el objetivo de valorar la idoneidad didáctica del libro como proceso de estudio planificado para la enseñanza.

La información que se obtiene de la valoración de los procesos instruccionales es muy útil para el profesor ya que permiten el rediseño de las propuestas educativas, la toma de decisiones en relación a la gestión de la clase según las limitaciones y posibilidades de los libros de textos y según los conflictos que se pueden presentar.

A continuación, en la segunda sección se sintetizan las nociones teórico metodológicas que sirven de fundamento para abordar el problema de investigación; en la tercera sección, se presenta el análisis de algunas lecciones del libro; finalmente, se discuten algunas implicaciones para la formación de profesores de matemáticas de cualquier nivel educativo.

MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

A partir de considerar que una lección de un libro de texto es un proceso de instrucción planificado, resulta útil emplear algunas herramientas teóricas y metodológicas que se proponen en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2007; 2020) para realizar análisis sistemáticos.

La herramienta Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2018; Godino, 2013; 2021) permite abordar el problema del análisis didáctico de cualquier proceso instruccional, en particular de los libros de textos. Su aplicación permite caracterizar la idoneidad de las trayectorias didácticas e identificar posibles mejoras para los aprendizajes pretendidos en las propuestas de los libros. Se la considera como un criterio sistémico de optimización de un proceso de enseñanza de las matemáticas y se define como:

el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). (Godino et al., 2020, p. 11)

Un proceso de enseñanza y aprendizaje tendrá mayor grado de idoneidad en la medida en que se tenga en cuenta los diversos significados de los objetos matemáticos del contenido en estudio. Por lo tanto, la valoración de este proceso se realizará teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos en relación al diferencial de una función (Verón y Giacomone, 2021), los cuales permiten la reconstrucción de los significados parciales del concepto.

Las nociones de significado pragmático y configuración ontosemiótica (Godino et al., 2017; Verón 2020) son las herramientas metodológicas que permiten identificar la trama de objetos y procesos que intervienen y emergen de las prácticas matemáticas que se realizan y, de consecuencia, ayudan a identificar potenciales conflictos en la implementación de la lección. A partir de este análisis, es posible identificar: conflictos epistémicos, relacionados a los significados y objetos institucionales presentes en la lección; potenciales conflictos cognitivos, relativos a los conocimientos previos; y potenciales conflictos instruccionales, relacionados a los modos de interacción y uso de los recursos didácticos) (Burgos et al., 2020).

La noción de Configuración Didáctica (CD) permite descomponer el proceso de instrucción en unidades de análisis, en las cuales se identifican hechos didácticos significativos (Godino et al., 2014) en relación a las facetas, componentes e indicadores de idoneidad. La noción de CD fue ampliando su foco de análisis; en Godino, Contreras y Font (2006) se asocia a una situación problema, donde se tiene en cuenta los conocimientos implicados, el uso de los recursos y las acciones de los docentes y estudiantes. Pero en Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2020) se considera que las CD pueden ser de diferentes tipos de objetos primarios, por ejemplo, la introducción de un concepto, un procedimiento, entre otros.

En este trabajo seleccionamos para analizar tres lecciones, o bien tres configuraciones didácticas (CD), en términos del EOS, en relación al concepto del diferencial de una función tomada del libro de texto de cálculo Stewart (2012).

En síntesis, la investigación emplea una metodología cualitativa utilizando las nociones de significados y configuración ontosemiótica como herramientas teóricas y metodológicas del EOS para analizar la idoneidad didáctica de tres configuraciones didácticas sobre el estudio del diferencial.

Análisis de una configuración didáctica

Para el análisis de las facetas epistémicas y cognitivas, en primer lugar, se describen brevemente las prácticas matemáticas operativas, discursivas y/o normativas que se proponen en cada lección, identificando los objetos matemáticos primarios que intervienen en las mismas. Luego se describen los principales procesos y se identifican los potenciales conflictos epistémicos y cognitivos, teniendo como referencia los diversos significados del diferencial (Verón y Giacomone, 2021) y los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el concepto.

A continuación, se analizan tres configuraciones didácticas del libro de texto de cálculo de Stewart (2012). La primera CD se denomina “Uso del símbolo diferencial d ” (Figura 1) y se asocia con las primeras conceptualizaciones del concepto y sus conexiones con la derivada. La segunda CD (Figura 2) presenta la definición de la diferencial. La tercera CD (Figura 3) muestra el significado geométrico de la diferencial.

Figura 1.

CD1 (Conceptualización): Uso del símbolo diferencial “ d ”.

Otras notaciones

Si usamos la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y , entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman operadores de derivación porque indican la operación de derivación, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx , introducido por Leibniz, no debe considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con base en la ecuación 2.7.6, puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico $x = a$, use la notación

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \quad \text{o bien} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

Nota. Stewart (2012, p. 157).

Prácticas

En esta configuración didáctica se observa como el libro de texto introduce una práctica matemática del tipo normativo porque plantea:

P1: $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$ son otras notaciones de la derivada.

P2: d/dx es un símbolo que se denomina operador de derivación e indica la operación de la derivación.

P3: dy/dx es un símbolo, no una razón y es sinónimo de $f'(x)$, es una derivada.

P4: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ definición de la derivada en notación de Leibniz.

Objetos

Lenguajes: se destaca el lenguaje simbólico y uso de la característica d que se muestran en las prácticas.

Conceptos: derivada, límite, operador, razón, función, punto.

Proposiciones: P1, P2 y P3.

Procedimientos: d/dx es indica la operación de la derivación.

Argumentos: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ definición de la derivada en notación de Leibniz.

Procesos

Definición/conceptualización: la CD1 tiene por objetivo conceptualizar otras notaciones de la derivada y dejar en forma explícita que el símbolo d/dx es un indicador de la operación de derivación; además se resalta que el símbolo dy/dx es sinónimo de la derivada y que no es una razón.

Representación/interpretación: se destaca la representación simbólica y las interpretaciones o lecturas de cada uno según la notación, por ejemplo dy/dx es una función derivada, pero el valor de una derivada en un punto es $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$

Potenciales conflictos

Al escribir $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ se establecen relaciones complejas dado que se expresa el límite de un cociente de incrementos igual a “un símbolo” que no debe considerarse una razón. Este hecho es potencialmente conflictivo ya que el símbolo dy/dx se escribe como una razón. Además, el libro resalta que el símbolo dy/dx por ahora no debe considerarse como una razón, planteando al estudiante una ambigüedad ya que no se aclara cuando se puede considerar como razón o no. Este hecho manifiesta dos conflictos claves. Por un lado, constituye un potencial conflicto epistémico en relación a los significados de los conceptos de derivada y diferencial y sus representaciones simbólicas (Burgos et al., 2021; Ely, 2017; Jones, 2015). Por otro lado, es un potencial conflicto cognitivo porque en las interpretaciones de los símbolos entran en juego los conocimientos previos de los estudiantes con lo cual se genera una disparidad de significados en relación a la razón.

Figura 2.

CD2 (Conceptualización): Definición de la diferencial.

Diferenciales

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales se formulan en ocasiones en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la diferencial dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La diferencial dy es entonces definida en términos de dx mediante la ecuación

$$dy = f'(x)dx$$

Así que dy es una variable dependiente: depende de los valores de x y dx . Si a dx se le da un valor específico, y x se considera como algún número específico en el dominio de f , entonces se determina el valor numérico de dy .

Si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una razón de diferenciales.

Nota. Stewart (2012, p. 253).

Prácticas

P1: la diferencial dx es una variable independiente.

P2: dx es cualquier número real.

P3: la diferencial dy se define en términos de dx mediante la ecuación $dy = f'(x)dx$

P4: la diferencial dy es una variable dependiente, depende de los valores de x y dx .

P5: si $dx \neq 0$ se puede dividir a ambos miembros de la ecuación $dy = f'(x)dx$ para obtener $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

P6: el símbolo $\frac{dy}{dx}$ se puede interpretar como una razón de diferenciales.

Objetos

Lenguajes: se destaca el lenguaje simbólico, algebraico, funcional y uso del término “diferencial”.

Conceptos: derivada, aproximación lineal, diferencial, número real, variable independiente y dependiente, ecuación, función de dos variables, razón de diferenciales.

Proposiciones: P1, P2, P4 y P6

Procedimientos: la ecuación $dy = f'(x)dx$ relaciona el dy con x y dx . Para obtener dy/dx hay que dividir a ambos miembros de la ecuación anterior por $dx \neq 0$.

Argumentos: definición de función, variables independiente y dependiente, ecuación y propiedad de la monotonía de la multiplicación.

Procesos

Definición/Conceptualización: la CD tiene por objetivo conceptualizar varias cuestiones, primero que los diferenciales son variables, el dx es una variable independiente que puede tomar cualquier número real, de esta manera se determina el dominio. El dy es una variable dependiente que depende de los valores de x y dx , de esta manera se define como una función de dos variables independientes.

Generalización: el diferencial dx y dy se relacionan por la ecuación $dy = f'(x)dx$.

Representación/interpretación: se reconoce al diferencial como un concepto matemático con notación dx o dy . La representación de la derivada como $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ahora es reconocida como un cociente de diferenciales.

Potenciales conflictos

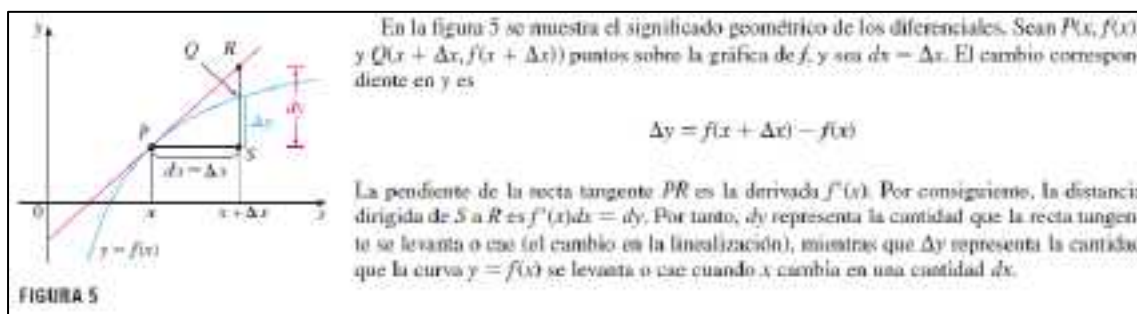
En la CD1 se plantea que una representación alternativa de la derivada es el símbolo dy/dx pero a partir de la CD2 esta expresión simbólica adquiere nuevas interpretaciones; la primera es que se la considera como una razón de diferenciales; la segunda, que dx y dy son variables y existe una relación funcional entre ellos por medio de la ecuación $dy = f'(x)dx$.

Las nuevas conceptualizaciones e interpretaciones que realiza el libro de texto sobre el diferencial y sus relaciones con la derivada pueden generar conflictos epistémicos en relación a los significados parciales del diferencial, es decir, pasan de ser considerados como un símbolo alternativo de la derivada a ser considerados como variables.

Es importante notar que este pasaje de conceptualizaciones genera un potencial conflicto cognitivo ya que las interpretaciones que realiza el estudiante en relación al uso del diferencial van cambiando a medida que se avanza con las lecciones en el libro. De esta manera no queda claro cuando dy/dx es un símbolo para la derivada o una razón de diferenciales.

Figura 3.

CD3 (Conceptualización/Representación): Interpretación geométrica de la diferencial.



Nota. Stewart (2012, p. 253).

Prácticas

P1: se considera $dx = \Delta x$

P2: el cambio en y es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

P3: la pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$

P4: la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$

P5: dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización).

P6: Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx .

Objetos

Lenguajes: se destaca el lenguaje simbólico, funcional y geométrico.

Conceptos: cantidad, cambio, distancia, puntos, pendiente, recta tangente, derivada, linealización, diferenciales.

Proposiciones: P1, P2, P3, P4, P5 y P6.

Procedimientos: se plantea que para calcular la cantidad de dy hay que realizar el producto entre la derivada de la función y el dx , es decir: $dy = f'(x)dx$

Argumentos: se considera que PSR es un triángulo rectángulo, donde el lado PR representa la pendiente de la recta tangente, haciendo uso de la interpretación geométrica de la derivada. De esta manera se establece de manera implícita que la tangente trigonométrica es la derivada y se podrá determinar por medio de la razón de las longitudes de los lados PS y SR, siendo que éstos representan gráficamente a dx y dy , respectivamente.

Procesos

Definición/conceptualización: el principal objetivo de la CD3 es mostrar la interpretación geométrica del diferencial, y para lograrlo, considera en primer lugar la igualdad entre el dx y el incremento o cambio en x , mediante la ecuación $dx = \Delta x$.

Se presenta dos nuevas definiciones geométricas del diferencial dy , como equivalentes; la primera como una cantidad en que la recta tangente se eleva o cae, pero también se define como cambio en la linealización. También, se presenta una diferenciación entre dy y Δy ; primero se conceptualiza como la cantidad que la recta tangente se levanta o cae, pero luego, se define como la cantidad que la curva de la función se eleva o cae cuando x cambia en una cantidad dx .

Representación/interpretación: se considera que los diferenciales dx y dy pueden representar cantidades, longitudes de segmentos o distancias entre puntos. Además, se plantea la interpretación de dy como una cantidad que representa cuanto la recta tangente se levante o cae sobre una función.

Potenciales conflictos

La expresión $dx = \Delta x$ puede agregar una nueva interpretación al diferencial; recordemos que, en CD anteriores, el diferencial pasó de considerarse como un símbolo, una variable y ahora como una cantidad, un incremento de x que lo puede reemplazar. Este hecho es potencialmente conflictivo desde el punto de vista epistémico ya que dos símbolos diferentes, d y Δ , se están utilizando como equivalentes.

En la práctica matemática P5 se puede observar que dy se puede considerar como una cantidad o cambio. Dichos conceptos se emplean como sinónimos o equivalentes. Pero cabe destacar que varias investigaciones plantean que los estudiantes tienen dificultades con el uso de estos conceptos en la resolución de problemas de física, ya que, dependiendo del fenómeno físico en estudio, el diferencial se puede considerar como una cantidad de una magnitud física, un cambio de una cantidad o un producto (Hu y Rebello, 2013; Von Korff y Rebello, 2014). A partir de estos estudios, podemos considerar que este hecho puede convertirse en un potencial conflicto epistémico.

Teniendo en cuenta que en el libro de texto se considera que $dx = \Delta x$, y que Δy representa el cambio en y , y la dy representa el cambio en la linealización, es posible que se pueda generar un potencial conflicto cognitivo en las interpretaciones de estos símbolos.

Por otro lado, una posible interpretación que puede concluir el estudiante en relación a la interpretación gráfica del diferencial es que a partir del gráfico se puede extraer como conclusión que dy es mayor que Δy , es decir $dy > \Delta y$. Si bien, no siempre dy será mayor que el incremento en y , la relación entre ellos se establecerá según sea la función involucrada. Pero esta posibilidad no se presenta o se menciona en el texto del libro.

REFLEXIONES

En este artículo hemos presentado el análisis de tres lecciones sobre el diferencial, presentada en un libro de texto de cálculo, con el objetivo de identificar hechos didácticos significativos que puedan ser potencialmente conflictivos para la enseñanza. Si bien este análisis es el punto de partida de un trabajo de investigación más amplio, estos primeros resultados cobran importancia a la hora de reflexionar sobre un determinado proceso de estudio, sea diseñado, planificado o efectivamente implementado.

Respecto al objetivo pretendido, se pudo avanzar en la identificación de potenciales conflictos semióticos, gracias a la aplicación de herramientas del Enfoque Ontosemiótico, particularmente a la noción de configuración didáctica que permite hacer un análisis microscópico sobre una lección, y la noción de trayectoria didáctica, que permite realizar un análisis macroscópico de la organización y secuenciación de las lecciones.

Para el análisis de las tres configuraciones didácticas (CD1-CD2-CD3), seleccionadas del libro de texto, se han identificado las prácticas matemáticas, y los objetos y procesos matemáticos que se proponen en el texto, que, a su vez, caracterizan a los significados parciales institucionales.

Respecto a los significados movilizados, en las tres CD se presentan elementos que se asocian al Diferencial de Cauchy (Verón y Giacomone, 2021) ya que se caracteriza principalmente por la expresión $dy = f'(x)dx$ y la consideración del diferencial como variables. En la CD3, donde se aborda la interpretación geométrica de la diferencial, se emplean conceptos, lenguajes, proposiciones y procedimientos que se asocian con el significado parcial del Diferencial de Fréchet, pero cabe aclarar que en esta CD predominan objetos matemáticos asociados al Diferencial de Cauchy.

Los resultados permiten describir y caracterizar potenciales conflictos epistémicos, relacionados con los significados parciales del diferencial, donde cobra un papel central el uso del lenguaje símbolo y su relación con la derivada; también, se identifican potenciales conflictos cognitivos, relacionados principalmente con los saberes previos de los estudiantes. La identificación de prácticas normativas podría dar lugar a que el docente tenga poca autonomía en la toma de decisiones y la gestión del conocimiento. Teniendo en cuenta tales conflictos, con este análisis el docente puede reflexionar sobre la organización del contenido, sobre el orden de la secuencia de actividades y proponer cambios en la conceptualización del diferencial en las diferentes CD, evitando así generar nuevos conflictos de tipo instruccionales.

Si bien en este trabajo se presenta un análisis que es parcial, es importante darlo a conocer para brindar información a profesores, pues se considera que deben tener cierto nivel de competencia para valorar una propuesta de un libro de texto para tomar decisiones y proponer mejoras en función de la idoneidad didáctica del mismo (Castillo y Burgos, 2022; Giacomone et al., 2018). Además, se considera que el profesor tiene que ser competente en seleccionar y diseñar tareas apropiadas y que haga referencia a una muestra representativa de los significados parciales del diferencial que deben abordar los cursos de cálculo.

Para finalizar, creemos importante destacar la importancia de realizar este tipo de análisis desde la formación inicial y continua de profesores de matemáticas. El profesor debe conocer y saber usar herramientas que le permitan reflexionar en forma competente sobre la propia práctica. Es el profesor quien utiliza el libro de texto como un recurso para orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje del diferencial y, por lo tanto, debe tener en cuenta la importancia del análisis de la lección del libro de texto, anticipar y resolver potenciales conflictos, como así también proponer alternativas para mejorar los aprendizajes de los estudiantes. Debe conocer los distintos significados que pone en juego el diferencial, y comprender cuál de estos se está movilizando en cada problema, lección o configuración didáctica.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos PFID-FID-2021-45 (Panamá), 16/Q1706-PI y 16/Q1746-TI (FCEQyN – UNaM, Argentina).

Referencias

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 40-68. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>

Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O. y Godino, J. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. *Journal of Research in Mathematics Education*, 10(1), 4-40. <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2021.6778>

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Reflexiones de futuros maestros sobre la idoneidad didáctica y modo de uso de una lección de libro de texto. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(72), 555-579. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a25>

Castillo, M., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022). Directrices para el análisis de las lecciones de los libros de texto de matemáticas sobre el tema de la proporcionalidad. *Uniciencia*, 36(1), 1-19. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.14>

Castro, W. F. y Pino-Fan, L. R. (2021). Comparing the Didactic-Mathematical Knowledge of Derivative of In-Service and Pre-service Teachers. *Acta Scientiae*, 23(3), 34-95. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5842>

Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 152-167. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.002>

Frank, K. y Thompson, P.W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM Mathematics Education*, 53, 549-562. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01231-8>

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-25. <http://dx.doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011>

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720/13965>

Godino, J. D. (2021). De la ingeniería a la idoneidad didáctica en la enseñanza de las matemáticas. *Revemop*, 3, e202129. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202129>

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39, 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3-15. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En Contreras, J.M. et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, Grenoble*, 26(1), 39-88.

Godino J. D., Rivas H., Arteaga P., Lasa A. y Wilhelmi M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble*, 34(2/3), 167-200.

Gómez, A. (2019). A look to differential. *Journal of Physics: Conference Series. V International Conference Days of Applied Mathematics*, 1414(1), 1-7, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1414/1/012001>

Hu, D. y Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 9(2), 1-14. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108>

Jones, S. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 9-28. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.001>

Konic, P.M., Godino, J.D. y Rivas, M.A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 74, 57-74.

López-Gay, R. y Martínez Torregrosa, J. (2005). Identificación de obstáculos para un uso con comprensión del cálculo diferencial en física. *Enseñanza de las ciencias, (extra)*, 1-5.

López-Gay, R., Sáez, J. M. y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education*, 24(5-6), 591-613.

Oldenburg, R. (2016) Differentiale als Prognosen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37, 55-82. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0096-2>

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del sable matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar* [Tesis doctoral no publicada, Cinvestav].

Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Relime*, 13(4-I), 85-97.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas* (7ma. Ed.). Cengage Learning Editores.

Verón, M. A. (2020). *Análisis ontosemiótico de los significados del concepto de diferencial* [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]. <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.17929.16489>

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop*, 3, e202109. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202109>

Von Korff, J. y Rebello, N. S. (2014). Distinguishing between change and amount infinitesimals in first-semester calculus-based physics. *American Journal of Physics*, 82(7), 695-705. <https://doi.org/10.1119/1.4875175>