УДК 519.8

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЧЕТКОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ: СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ

Солдатенко И.С.[*]**, Бреслер И.Б.**[**]**, Рогонов С.А.**[*]**, Язенин А.В.**[*]
[*]Тверской государственный университет, г. Тверь
[**]АО «Научно-исследовательский институт информационных технологий», г. Тверь

Поступила в редакцию 20.09.2023, после переработки 29.10.2023.

В статье проведено сравнительное изучение основных подходов к определению нечеткой случайной величины и ее числовых характеристик. Рассматриваются примеры выполнения и невыполнения свойств, характерных для обычных случайных величин при различных определениях нечетких случайных величин. Предлагаются методы идентификации ожидаемого значения нечетких случайных величин.

Ключевые слова: нечеткая величина, нечеткая случайная величина (н.с.в.), модель н.с.в. по Квакернааку, модель н.с.в. по Пури и Ралеску, модель н.с.в. по Намиасу, модель н.с.в. по Чачи/Лиу, числовые характеристики н.с.в..

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 3. С. 41–63.
https://doi.org/10.26456/vtpmk694

Введение

Нечеткая случайная величина есть математическая модель случайного эксперимента с нечетким исходом. Ее определению и изучению свойств посвящен ряд работ [1–8,27,28] и др. В них наряду с определением нечеткой случайной величины вводятся определения ее ожидаемого значения, изучается его свойства и предлагаются способы его идентификации в ряде специальных случаев. Однако при этом ряд важных вопросов остается открытым.

Как нам представляется, определяемая нечеткая случайная величина должна обладать некоторыми желаемыми свойствами, характерными для обычной случайной величины. В данной работе анализируются подходы к определению нечеткой случайной величины и проверяется выполнение или невыполнение свойств, характерных для обычной случайной величины. Исследование математической модели нечеткой случайной величины происходит в рамках теории возможностей.

Экспликация случайности происходит в комбинированной модели неопределенности и осуществляется через параметры возможностных распределений, что является важным для приложений.

1. Модели нечеткой величины

В данном разделе мы сосредоточим свое внимание на математическом аппарате, который позволяет моделировать неопределенность, которая принципиально отличается от случайности: нечеткость, неточность, «размытость».

Есть два основных подхода к моделированию указанной неопределенности: классическая теория нечетких множеств по Заде [9, 10] и, на наш взгляд, математически более строгая теория возможностей[1] по Намиасу [11]. Указанные подходы принципиально отличаются в определении основного моделируемого математического объекта – нечеткой величины. Во избежание дальнейшей терминологической путаницы опишем оба подхода и договоримся об используемых далее в статье обозначениях.

Сначала определим классическое нечеткое множество по Заде. Пусть U – некоторое универсальное множество.

Определение 1. *Нечетким множеством A называется совокупность упорядоченных пар:*

$$A = \{(x, \mu(x)) \,|\, x \in U\},$$

где $\mu(x)$ – функция принадлежности, характеризующая степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A:

$$\mu(\cdot) : U \to [0, 1].$$

Мы видим, что данное определение задает нечеткое множество через функцию принадлежности, являющуюся обобщением характеристической функции множества. Как правило, авторы, работающие в рамках теории нечетких множеств, немного упрощают данную модель и отождествляют нечеткое множество с самой функцией принадлежности μ. Мы будем следовать этому же принципу и всюду далее в статье будем использовать символ μ без подстрочного индекса или заглавную латинскую букву (например, A) без аргумента γ в скобках (см. далее определение возможностной величины) для обозначения нечеткого множества. Будем также, для краткости, опускать «характеристику», что это классическое определение нечеткого множества по Заде и просто писать «нечеткое множество».

Стоит заметить, что данное определение, хотя и является классическим определением по Заде, но на наш взгляд не является удобным, так как использование в качестве объекта «нечеткая величина» функции принадлежности накладывает ряд технических трудностей при ее дальнейшем использовании. Намиас в своей работе [6] сравнил это с ситуацией, как если бы вместо случайной величины мы

[1]Термины «теория нечетких множеств» и «теория возможностей» в научной литературе, как правило, используются взаимозаменяемо. Лотфи Заде связал их в своей работе [10]. В данной статье мы наделим эти термины разными смыслами и будем использовать их для обозначения двух отличающихся подходов к определению нечеткой величины.

использовали ее функцию распределения вероятностей или плотность распределения.

В связи с этим нам кажется более адекватным использовать *возможностую величину* в качестве основного объекта при моделировании неопределенности нечеткого типа. Приведем соответствующие определения по Намиасу [11].

Пусть Γ – множество, называемое модельным, $\gamma \in \Gamma$ – его элементы, а $\mathbb{P}(\Gamma)$ – множество всех подмножеств множества Γ.

Определение 2. *Возможностная мера* π *есть функция множества* $\pi : \mathbb{P}(\Gamma) \to [0, 1]$, *для которой справедливы условия:*

1. $\pi(\oslash) = 0$, $\pi(\Gamma) = 1$,
2. $\pi\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \sup\limits_{i\in I} \pi(A_i), \forall A_i \in \mathbb{P}(\Gamma), \forall I.$

Определение 3. *Тройка* $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ *называется возможностным пространством.*

Определение 4. *Возможностной величиной* $A(\gamma)$ *называется вещественная функция*

$$A(\cdot) : \Gamma \to \mathbb{R}^1,$$

характеризующаяся функцией распределения возможностей $\mu_A(x)$*:*

$$\mu_A(x) = \pi\{\gamma \in \Gamma : A(\gamma) = x\}, \forall x \in \mathbb{R}^1,$$

где $\mu_A(x)$ *— возможность того, что* A *может принять значение* x.

В данной статье будем обозначать возможностные величины в функциональной форме $A(\gamma)$, чтобы отличать их от нечетких множеств.

Мы видим, что Намиас построил аксиоматику теории возможностей по аналогии с Колмогоровской аксиоматикой теории вероятностей [29]. Из определения 4 следует, что возможностная величина по Намиасу есть функция, отображающая модельное множество в $\mathbb{R}^1$, точно также, как случайная величина является отображением множества элементарных исходов в $\mathbb{R}^1$.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим возможностную величину $R(\gamma) = A(\gamma) \geq x$, где $A(\gamma) = Tr(a, b, c)$ – триангулярная нечеткая величина (здесь $[a, c]$ – носитель, b – модальное значение A; оба определения приведены далее в этом разделе). Ее функция распределения воможностей есть

$$\mu_{R(\gamma)}(x) = \pi\{A(\gamma) \geq x\} = \begin{cases} 1, & x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c, \\ 0, & x > c. \end{cases}$$

График этой функции изображен на Рис. 1.

В данном примере возможностная величина $A(\gamma)$ моделирует «примерно b», где «примерность» задается отрезком $[a, b]$, а возможностная величина $R(\gamma)$ моделирует четкое отношение возможностной величины $A(\gamma)$ и четкого числа x. Часто,

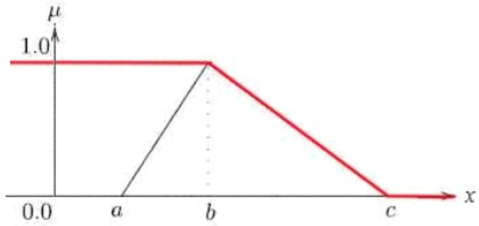

Рис. 1: *Функция распределения возможностной величины* $R(\gamma) = A(\gamma) \geq x$

в целях упрощения обозначений опускают возможностную величину $R(\gamma)$ и пишут напрямую меру возможности $\pi\{A(\gamma) \geq x\}$, то есть возможность, с которой $A(\gamma)$ и x связаны отношением $\geq$.

Вместе с мерой возможности π часто рассматривают двойственную ей меру необходимости ν. Мера необходимости, ассоциированная с π, есть функция множества $\nu : \mathbb{P}(\Gamma) \to [0,1]$ такая, что $\nu(A) = 1 - \pi(A^C)$, где C обозначает дополнение множества A.

Мы можем аналогичным образом, как это сделано в определениях 3 и 4, задать необходимостное пространство и необходимостную величину.

Пример 2. Легко видеть, что необходимостная величина, соответствующая обычной возможностной величине из определения 4, имеет функцию распределения, принимающую значения почти всюду равные нулю. Поэтому прямое построение необходимостной величины не имеет практического смысла. Однако, можно рассматривать необходимостную величину, построенную с помощью отношений неравенства, в которых участвуют возможностные величины. Пусть $N(\gamma) = A(\gamma) \geq x$, где $A(\gamma)$ – возможностная величина из примера 1, а $N(\gamma)$ – необходимостная величина. Ее функция распределения есть

$$\mu_{N(\gamma)}(x) = \nu\{A(\gamma) \geq x\} = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

График этой функции изображен на Рис. 2.

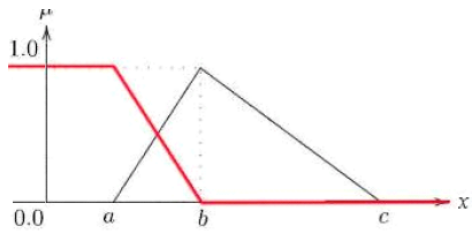

Рис. 2: *Функция распределения необходимостной величины* $N(\gamma) = A(\gamma) \geq x$

Иногда меру возможности называют оптимистической, а меру необходимости – пессимистической. Обоснованность данных названий легко понять по Рис. 1 и 2.

Функции μ в определениях 1 и 4 имеют одну и ту же форму $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$, но отличаются по смыслу. Функция $\mu(x)$ из 1 является расширенной характеристической функцией множества, а $\mu_A(x)$ из определения 4 – это образ меры под действием отображения $A(\gamma)$.

Ряд характеристик нечетких величин строятся на основе функции μ и имеют одинаковую интерпретацию в обоих случаях. Для их единообразного определения договоримся нечеткие множества и возможностные величины совместно называть *нечеткими величинами* и обозначать буквой X, а функцию принадлежности / распределения возможностей – $\mu_X(x)$.

Введем еще ряд определений, требуемых нам в дальнейшем.

Определение 5. *Носителем нечеткой величины X называется четкое подмножество:*

$$supp(X) = \{x \mid \mu_X(x) > 0\}, x \in \mathbb{R}^1.$$

Определение 6. *Модальным значением нечеткой величины X называется следующее четкое подмножество:*

$$\{x \mid \mu_X(x) = 1\}, x \in \mathbb{R}^1.$$

Определение 7. *Для нечеткой величины X и любого $\alpha \in [0,1]$ α-уровневым множеством называется:*

– $X_{\bar{\alpha}} = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid \mu_X(x) \geq \alpha\}$, *для* $\alpha \in (0,1]$,

– $X_{\bar{\alpha}} = cl(supp(X))$, *для* $\alpha = 0$,

где $cl(supp(X))$ *— есть замыкание носителя нечеткой величины X.*

Определение 8. *Для нечеткой величины X и любого $\alpha \in (0,1)$ строгим α-уровневым срезом X_α называется:*

$$X_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid \mu_X(x) > \alpha\}.$$

Определение 9. *Нечеткая величина X называется выпуклой, если ее функция распределения μ_X является квазивогнутой:*

$$\mu_X(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_X(x_1), \mu_X(x_2)\}, \lambda \in [0,1], x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Нечеткие величины на числовой прямой, характеризующиеся строго унимодальными, квазивогнутыми, полунепрерывными сверху функциями μ_X и ограниченными носителями, называются *нечеткими числами.*

Для моделирования нечетких чисел и интервалов часто используются распределения (L,R)-типа [12, 13].

Определение 10. *(L,R)-функциями (функциями представления формы или просто формами) будем называть невозрастающие, полунепрерывные сверху, определенные на неотрицательной части числовой прямой функции, обладающие следующими свойствами:*

1. $L(0) = R(0) = 1$,

2. $L(t), R(t) < 1, \quad \forall t > 0,$

3. $\lim\limits_{t\to\infty} L(t) = \lim\limits_{t\to\infty} R(t) = 0.$

Определение 11. *Нечеткая величина X называется нечеткой величиной (L,R)-типа, если ее функция распределения μ_X имеет вид:*

$$\mu_X(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & x < a, \\ 1, & a \le x \le b, \\ R\left(\dfrac{x-b}{\beta}\right), & x > b. \end{cases}$$

Здесь $[a,b]$ – есть интервал толерантности X, a и b – соответственно, нижнее и верхнее модальные значения, α и β – коэффициенты нечеткости. Если $a = b$, то получаем *нечеткое число*, которое будем обозначать как $X = (a, \alpha, \beta)_{LR}$.

Пример 3. Если в качестве левой и правой форм взять кусочно-линейную функцию $L(x) = R(x) = \max\{0, 1-x\}$, $x \ge 0$, то для случая нечетких чисел мы получаем так называемые *триангулярные нечеткие числа.*

Распределения нечетких величин (L,R)-типа удобны тем, что они являются параметризованными, что позволяет в ряде случаев сводить выполнение основных арифметических операций над нечеткими величинами к выполнению этих операций над параметрами.

Завершим этот параграф еще одной мерой неопределенности – мерой доверия. Лиу и Лиу в своих работах [14–16] предложили использовать следующую самодвойственную меру доверия (credibility measure):

$$Cr(A) = \frac{1}{2}(\pi(A) + \nu(A)),$$

удовлетворяющую следующим четырем аксиомам:

1. $Cr(\Gamma) = 1$
2. $Cr(A) \le Cr(B)$, если $A \subseteq B$
3. $Cr(A) = 1 - Cr(\bar{A})$, $\forall A$
4. $Cr\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \sup\limits_{i\in I} Cr(A_i), \forall A_i \in \mathbb{P}(\Gamma)$, таких что $\sup_{i\in I} Cr(A_i) < \frac{1}{2}$.

Пример 4. Для отношения $A(\gamma) \ge x$ мера доверия будет задаваться функцией

$$Cr\{A(\gamma) \ge x\} = \begin{cases} 1, & x \le a, \\ \frac{2b-a-x}{2(b-a)}, & a < x \le b, \\ \frac{c-x}{2(c-b)}, & b < x \le c, \\ 0, & x > c. \end{cases}$$

График этой функции изображен на Рис. 3.

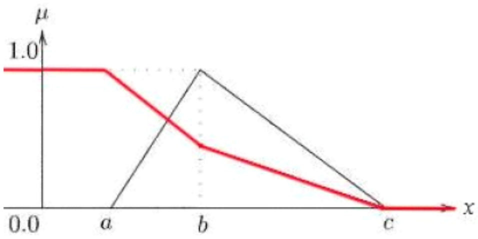

Рис. 3: *График функции* $Cr\{A \geq x\}$

Одна из мотиваций использования указанной меры заключается в ее взвешенности. По мнению авторов указанных работ мера возможности является чересчур оптимистической, а мера необходимости – слишком пессимистической. Мера доверия является взвешенным средним данных мер неопределенности. Второе преимущество, которое заключается в техническом упрощении вычислительных процессов, будет описано в следующем разделе при определении модели нечеткой случайной величины по Чачи-Лиу.

2. Модели нечеткой случайной величины и их характеристики

Одно из первых упоминаний нечетких случайных величин можно найти в работах Ферона [1, 2], в которых он вводит понятие нечеткого случайного множества, которое используется при моделировании случайного механизма «генерации» нечетких значений (нечетких подмножеств метрического пространства). Впоследствии идеи Ферона были развиты в работах Пури и Ралеску, которые трансформировали понятие нечеткого случайного множества в понятие нечеткой случайной величины [7].

Нечеткая случайная величина – это отображение, которое связывает результаты случайного эксперимента с нечеткими величинами, что позволяет моделировать ситуации, когда исходы случайного эксперимента являются неточными, нечеткими. В этом смысле данное понятие обобщает понятие классической случайной величины. Однако данное обобщение не является уникальным и в литературе существует множество его формализаций. Каждая модель отличается от других структурой конечного пространства и способом определения условий измеримости данного отображения. Например, Квакернаак [3,4], Крузе и Мейер [5] и Пури и Ралеску [7] акцентируют внимание на свойствах многозначных отображений, задаваемых α-множествами. При этом Квакернаак, Крузе и Мейер предполагают, что исходы н.с.в. являются нечеткими подмножествами вещественной оси, а границы их α-множеств являются классическими случайными величинами. Пури и Ралеску накладывают условие измеримости на сами α-множества, что позволяет обобщать нечеткие случайные величины на многомерный случай. С другой стороны, Клемент, Пури и Ралеску [17], а также Даймонд и Клёден [18] изначально определяют нечеткие случайные величины как измеримые отображения. Для этого они сначала вводят метрику на множестве нечетких подмножеств, а затем используют порожденную борелевскую σ-алгебру. Крашмер в своей работе [19] попытался объединить все указанные подходы и выработать унифицированный подход к определению нечеткой случайной величины, в котором все вышеописанные модели были бы частными случаями. Кузо и Санчез [20] переосмысливают подход Квакернаака, Крузе и Мейера и представляют три различные меры возможности второго порядка, иными словами меры возможности, определенные на множестве вероятностных мер. Процесс формализации нечетких случайных величин продолжается и по настоящее время.

В нашей статье мы рассматриваем классические подходы к определению нечетких случайных величин, проводим их сравнительный анализ и изучаем их числовые характеристики.

Так как далее нам потребуется вероятностное пространство, то приведем здесь соответствующее определение и введем используемые в дальнейшем обозначения.

Определение 12. *Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где Ω – пространство элементарных исходов, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра событий, P – вероятностная мера $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$, обладающая следующими свойствами:*

1. $P(\oslash) = 0$, $P(\Omega) = 1$,
2. *если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ – последовательность попарно непересекающихся множеств ($A_i \cap A_j = \oslash, i \neq j$), то $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.*

Мы не будем здесь приводить определения случайной величины, а также ее основных характеристик, потому что они хорошо известны из теории вероятностей.

2.1 Модель Квакернаака, Крузе/Мейера

В 1978 году Квакернаак ввел [3,4], а в 1987 году Крузе и Мейер математически уточнили [5] понятие нечеткой случайной величины как *нечеткого восприятия* обычной случайной величины, которая называется *оригиналом*. Представим себе, что мы сидим на скамейке в парке и мимо нас проходят люди. Мы пытаемся оценить возраст каждого человека. Понятно, что реальный возраст является случайной величиной, потому что люди случайные. Но при этом мы не знаем этого возраста и можем оценивать его лишь нечетко - «молодой», «пожилой» и т.д. Это и есть модель нечеткой случайной величины по Квакернааку, Крузе/Мейеру.

Квакернаак, Крузе и Мейер работали в аксиоматике теории нечетких множеств. Прежде чем формально определить нечеткую случайную величину, приведем ряд вспомогательных определений из указанных выше работ, а также прокомментируем самые важные из них.

Определение 13. *Нечеткое подмножество μ вещественной прямой называется нормальным, если существует $t \in \mathbb{R}^1$, такое что $\mu(t) = 1$. Обозначим класс всех нормальных нечетких подмножеств на действительной прямой $F(\mathbb{R}^1)$.*

В своей работе авторы для описания свойств нечетких подмножеств использовали аппарат α-уровневых множеств, а также его обобщение – *множественное представление (set representation)*, введенное Миякоши и Шимбо [21].

Определение 14. *Пусть $\mu \in F(\mathbb{R}^1)$. Множество $\{A_\alpha \,|\, \alpha \in (0, 1)\}$ называется множественным представлением μ тогда и только тогда, когда*

1. *если* $0 < \alpha < \beta < 1$, *то* $A_\beta \subseteq A_\alpha$,

2. $\forall x \in \mathbb{R}^1$ *выполняется* $\mu(x) = \sup\{\alpha \cdot I_{A_\alpha}(x) \,|\, \alpha \in (0,1)\}$, *где* I_{A_α} *– индикаторная функция множества* A_α.

α-уровневое множество и строгий α-срез являются экстремальными множественными представлениями нечеткого множества. В своей работе авторы доказывают теорему:

Теорема 1. *Пусть* $\mu \in F(\mathbb{R}^1)$. *Множество* $\{A_\alpha \,|\, \alpha \in (0,1)\}$ *называется множественным представлением* μ *тогда и только тогда, когда* $\mu_\alpha \subseteq A_\alpha \subseteq \mu_{\bar{\alpha}}$ $\forall \alpha \in (0,1)$.

Дадим определение, которое позволяет сузить класс рассматриваемых нечетких множеств.

Определение 15. *Пусть* $\mu \in F(\mathbb{R}^1)$. *Будем обозначать* $Q(\mathbb{R}^1)$ *подкласс* μ *такой, что для него выполняются следующие условия:*

1. $\inf \mu_0 > -\infty$ *и* $\sup \mu_0 < +\infty$,

2. $\mu_{\bar{\alpha}}$ *является замкнутым множеством* $\forall \alpha \in [0,1]$.

По сути авторы, с введением класса $Q(\mathbb{R}^1)$, ограничились использованием простых моделей нечетких чисел, нечетких отрезков и их систем.

Перейдем теперь к определению нечеткой случайной величины.

Определение 16. *Отображение* $X : \Omega \to Q(\mathbb{R}^1)$ *называется нечеткой случайной величиной, если существует система множеств* $\{A_\alpha(\omega) \,|\, \omega \in \Omega,\ \alpha \in (0,1)\}$ *подмножеств* $\mathbb{R}^1$, *удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. $\{A_\alpha(\omega) \,|\, \alpha \in (0,1)\}$ *является нормальным множественным представлением* $X_\omega \equiv X(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$, *т.е.* $X_\omega \in Q(\mathbb{R}^1)$.

2. *Отображения* $\underline{A}_\alpha(\omega)$ *и* $\overline{A}_\alpha(\omega)$ *являются измеримыми* $\forall \alpha \in (0,1)$, *где сами отображения определяются следующим образом:*

$$\underline{A}_\alpha(\omega) := \inf A_\alpha(\omega), \quad \overline{A}_\alpha(\omega) := \sup A_\alpha(\omega)$$

$\forall \alpha \in (0,1)$, $\omega \in \Omega$.

Система $\{A_\alpha(\omega) \,|\, \omega \in \Omega,\ \alpha \in (0,1)\}$ *называется измеримым множественным представлением нечеткой случайной величины* X.

Теперь определим основные числовые характеристики нечеткой случайной величины, а именно математическое ожидание и дисперсию. Для этого еще раз напомним, что согласно авторам, н.с.в. является «нечетким восприятием обычной случайной величины» $U : \Omega \to \mathbb{R}^1$, которая называется *оригиналом.*

Определение 17. *Обозначим множество всех возможных оригиналов* χ:

$$\chi := \{U \,|\, U : \Omega \to \mathbb{R},\ U \text{ является измеримой функцией}\}.$$

Также нам понадобится *степень приемлемости* $\mu_X(U)$, которая является функцией $\mu_X : \chi \to [0,1]$, возвращающей возможность (приемлемость) того, что $U \in \chi$ является оригиналом X:

$$\mu_X(U) = \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega)(U(\omega)),$$

где $X(\omega)(t)$ – степень принадлежности действительного значения t нечеткому множеству $X(\omega)$.

Что касается математического ожидания, то неформально, степень приемлемости того, что некоторое действительное число t является ожидаемым значением X, определяется как наибольшее значение $\mu_X(U)$ такое, что U – возможный оригинал для X с $E[X] = t$. Дадим более формальное определение:

Определение 18. *Пусть $X : \Omega \to Q(\mathbb{R}^1)$ – нечеткая случайная величина. Математическое ожидание X по отношению к χ есть нечеткое множество, задаваемое следующей функцией принадлежности:*

$$(E[X])(t) := \sup\{\mu_X(U) \,|\, U \in \chi,\, E[|U|] < \infty,\, E[U] = t\}, t \in \mathbb{R}.$$

По существу $E[X]$ нечеткой случайной величины X определяется как образ нечеткого подмножества $\mu_X : \chi \to [0,1]$ под действием отображения $E : \chi \to \mathbb{R}^1$ с помощью принципа обобщения Заде (Zadeh Extension Principle).

Аналогичным образом определяется дисперсия.

В своей работе Крузе и Мейер доказывают теорему, дающую способ вычисления математического ожидания через альфа-уровни, а именно:

$$E[X_\alpha(\omega)] = \left[E[\underline{X}_\alpha(\omega)], E[\overline{X}_\alpha(\omega)]\right].$$

Определение 19. *Пусть $X : \Omega \to Q(\mathbb{R}^1)$ – нечеткая случайная величина. Дисперсией X по отношению к χ будет нечеткое множество, задаваемое следующей функцией принадлежности:*

$$(Var[X])(t) := \sup\{\mu_X(U) \,|\, U \in \chi,\, E[(U - E[U])^2] < \infty,\, E[(U - E[U])^2] = t\}, t \in \mathbb{R}.$$

На рис. 4 изображена модель данной нечеткой случайной величины[2].

2.2 Модель Пури и Ралеску

В модели Пури и Ралеску [7] нечеткая случайная величина есть случайная величина с нечетким исходом. В отличие от Квакернаака и Крузе/Мейера в данной модели не предполагается наличие оригинала. Представить себе данную модель можно следующим образом[3]. Рассмотрим группу людей, сформированную случайным образом. Каждого человека из группы спрашивают мнение о погоде, которая была в какой-то конкретный зимний день. Возможные варианты ответа - «холодно», «очень холодно», «не очень холодно», «прохладно» и т.д. Один из возможных вопросов, которым можно задаться по поводу указанной выборки - каково среднее мнение о погоде в тот самый зимний день?

[2] Иллюстрация взята из работы [26].

[3] Пример взят из [7].

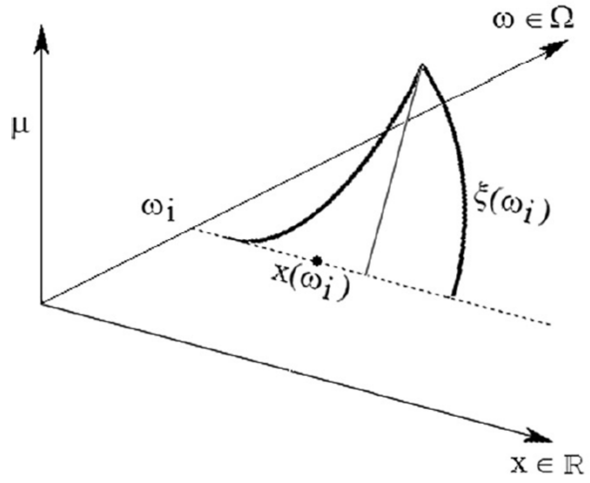

Рис. 4: *Нечеткая случайная величина по Квакернаaку - Крузе/Мейеру*

Также Пури и Ралеску обратили внимание на два ограничения модели Квакернаака: во-первых, отображение на вещественную прямую, а не n-мерное евклидово пространство, а во-вторых, на проблему измеримости, поскольку она не могла быть расширена за пределы нечетких чисел в $\mathbb{R}^1$.

В дальнейшем нам потребуется интеграл Омана (интеграл множественно-значной функции), поэтому напомним ряд определений из работ [7, 22].

Определение 20. *Множественно-значной функцией называется функция $F : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, такая что $F(\omega) \neq \emptyset$ $\forall \omega \in \Omega$, где $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ – множество всех подмножеств $\mathbb{R}^n$.*

Будем обозначать через $L^1(P)$ пространство всех интегрируемых по мере P функций $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Также обозначим через $S(F)$ множество функций $f \in L^1(P)$ таких, что

$$S(F) = \{f \in L^1(P) : f(\omega) \in F(\omega) \text{ почти всюду}\}.$$

Определение 21. *Интеграл Омана функции F определяется как множество*

$$(A)\int F = \left\{ \int_\Omega f dP : f \in S(F) \right\}.$$

В работе [22] можно найти следующие теоремы, которые потребуются нам в дальнейшем.

Теорема 2. *Если $F : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ – множественно-значная функция, тогда $(A)\int F$ является компактным подмножеством $\mathbb{R}^n$.*

Функция $F : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ называется измеримой, если ее график $\{(\omega, x) : x \in F(\omega)\}$ принадлежит $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ – множество борелевских подмножеств $\mathcal{R}^n$. Функция $F : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ называется ограниченно-интегрируемой, если существует функция $h : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $h \in L^1(P, \mathbb{R}^1)$, такая, что $||x|| \leq h(\omega)$ $\forall x, \omega \in F(\omega)$.

Теорема 3. *Если $F : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ измеримая и ограниченно-интегрируемая, то* $(A)\int F \neq \emptyset$.

Обозначим $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ множество нечетких подмножеств $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, обладающих следующими свойствами:

1. $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}$ компактно $\forall \alpha > 0$,
2. $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = 1\} \neq \emptyset$.

Определение 22. *Нечеткая случайная величина есть функция $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$, такая что*

$$\{(\omega, x) : x \in X_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

$\forall \alpha \in [0,1]$, *где $X_\alpha : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ определено следующим образом:*

$$X_\alpha(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : X(\omega)(x) \geq \alpha\}.$$

Нечеткая случайная величина X называется ограниченно-интегрируемой, если X_α является ограниченно-интегрируемым $\forall \alpha \in (0,1]$, т.е. для любого $\alpha \in (0,1]$ существует $h_\alpha \in L^1(\Omega)$, такое что $||x|| \leq h_\alpha(\omega)$ $\forall x, \omega$, где $x \in X_\alpha(\omega)$.

В своей работе Пури и Ралеску определяют математическое ожидание через α-уровневые множества как нечеткую величину, которая определена и единственна, если исходная нечеткая случайная величина $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$ является ограниченно-интегрируемой.

Определение 23. *Ожидаемым значением X является нечеткое множество $\nu \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^n)$, такое что:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \nu(x) \geq \alpha\} = (A)\int X_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1].$$

Таким образом степень принадлежности x нечеткому математическому ожиданию $E[X]$ определяется как

$$(E[X])(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] : x \in (A)\int X_\alpha\},$$

а ее α-уровневые множества задаются самими интегралами Омана:

$$\{x : (E[X])(x) \geq \alpha\} = (A)\int X_\alpha,\ \forall \alpha \in [0,1].$$

Определим $\mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}$ как $\mathcal{F}_0$ с дополнительным условием выпуклости α-уровневых множеств. Тогда для $X : \Omega \to \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^1)$ величины $\underline{X}_\alpha(\omega)$ и $\overline{X}_\alpha(\omega)$ являются вещественнозначными случайными величинами и интеграл Омана для $\alpha \in [0,1]$ сводится к отрезку:

$$(E[X])(x)_\alpha = (A)\int X_\alpha = \left[E[\underline{X}_\alpha(\omega)], E[\overline{X}_\alpha(\omega)]\right].$$

То есть мы получаем тот же самый результат, как и в случае моделирования нечеткой случайной величины по Квакернааку - Крузе/Мейеру. Крашмер в своей работе [19] доказывает, что модели нечеткой случайной величины по Квакернааку - Крузе/Мейеру и Пури/Ралеску эквиваленты для случая, когда значение н.с.в. принадлежит $\mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^1)$.

На рис. 5 изображена модель данной нечеткой случайной величины[4].

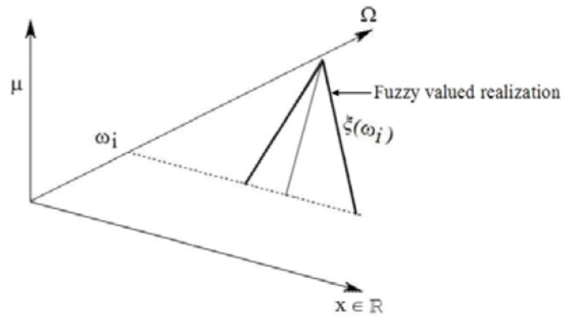

Рис. 5: *Нечеткая случайная величина по Пури/Ралеску*

2.3 Модель Намиаса

Определение 24. *Нечеткая случайная величина $Y(\omega,\gamma)$ есть вещественная функция $Y : \Omega \times \Gamma \to \mathbb{R}^1$, которая является $\mathcal{A}$-измеримой для каждого фиксированного γ, а функция*

$$\mu_Y(\omega,t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : Y(\omega,\gamma) = t\}, \forall t \in \mathbb{R}^1$$

называется ее функцией распределения.

Из определения 24 следует, что функция распределения нечеткой случайной величины зависит от случайного параметра, т.е. является случайной функцией.

Из этого определения следуют две интерпретации.

I. При фиксированном $\omega \in \Omega$ мы получаем возможностную величину $A_\omega = A(\omega,\gamma)$. То есть мы имеем случайную величину с неопределенными исходами, описываемыми возможностными распределениями $\mu_A(\omega,t)$, или, другими словами, случайный выбор эксперта.

II. При фиксированном $\gamma \in \Gamma$ мы можем рассматривать A_γ как случайную величину с возможностью, определяемой мерой возможности π, то есть мы не уверены в значении ее распределения.

В оригинальных работах [6, 11] Намиас называл функцию распределения оценочной функцией, а определение нечеткой случайной величины дал для дискретного вероятностного распределения. Общее определение в контексте 24 дано в работе [23].

Определение 25. *Пусть $Y(\omega,\gamma)$ - нечеткая случайная величина. Ее ожидаемым значением $\mathbf{E}[Y]$ называется нечеткая величина, имеющая функцию распределения возможностей*

$$\mu_{\mathbf{E}[Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[Y(\omega,\gamma)] = t\},\ \forall t \in \mathbb{R}^1,$$

[4]Иллюстрация взята из работы [26].

где $\mathbf{E}$ *– оператор взятия математического ожидания*

$$\mathbf{E}[Y(\omega,\gamma)] = \int_{\Omega} Y(\omega,\gamma)\mathbf{P}(d\omega).$$

Функция распределения ожидаемого значения нечеткой случайной величины уже не зависит от случайного параметра и является нечеткой величиной.

2.4 Модель Чачи/Лиу

Помимо трех классических моделей, описанных выше, за последние два десятилетия появилось много других моделей нечетких случайных величин. Приведем в качестве примера лишь одну, построенную Чачи в работе [8], на основе меры доверия, введенной Лиу и Лиу [14–16] в контексте теории нечетких множеств.

Для определения новой модели нечеткой случайной величины автор использует индекс C для сравнения нечеткого множества A и действительного числа $x \in \mathbb{R}^1$, построенный на основе меры доверия Лиу.

Определение 26. *Пусть* $A \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^1)$, *а* $x \in \mathbb{R}^1$. *Индекс*

$$C : \mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^1) \times \mathbb{R}^1 \to [0,1],$$

определяемый как

$$C\{A \leq x\} = Cr\{A \leq x\} = \frac{1}{2}(\pi\{A \leq x\} + \nu\{A \leq x\}),$$

показывает степень доверия факту, что A *меньше или равно* x.

Далее определим α-пессимистичное значение A [24, 25]:

Определение 27. *Пусть* $A \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^1)$ *и* $\alpha \in [0,1]$. *Тогда*

$$\tilde{A}_\alpha = \inf\{x \in A_0 \, : \, C\{A \leq x\} \geq \alpha\}$$

называется α*-пессимистическим значением* A.

Ясно, что $\tilde{A}_\alpha$ является невозрастающей функцией от $\alpha \in (0,1]$.

Пример 5. Пусть $A = Tr(l,a,r)$ – триангулярное нечеткое множество и пусть $x \in \mathbb{R}^1$. Тогда

$$C\{A \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a-l), \\ \dfrac{x-a+l}{2l}, & x \in [a-l, a), \\ \dfrac{x-a+r}{2r}, & x \in [a, a+r), \\ 1, & x \in [a+r, \infty), \end{cases}$$

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} a - l(1-2\alpha), & 0 < \alpha \leq 0.5, \\ a - r(1-2\alpha), & 0.5 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Дадим теперь определение нечеткой случайной величины по Чачи/Лиу.

Определение 28. *Нечеткая случайная величина есть функция* $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^1)$, *такая что* $\forall \alpha \in [0,1]$ *отображение* $\tilde{X}_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^1$ *является действительнозначной случайной величиной.*

Легко заметить следующую связь между определениями Чачи/Лиу и Квакернаака - Крузе/Мейера:

$$\tilde{X}_\alpha = \begin{cases} \underline{X}_{2\alpha}, & 0 < \alpha \le 0.5, \\ \overline{X}_{(1-\alpha)}, & 0.5 < \alpha \le 1, \end{cases}$$

$$X_\alpha = [\tilde{X}_{\frac{\alpha}{2}}, \tilde{X}_{1-\frac{\alpha}{2}}] \quad \alpha \in (0,1].$$

Данный пример показывает, что α-пессимистическое значение X и границы его α-уровневого множества выражаются друг через друга, поэтому модель нечеткой случайной величины по Чачи/Лиу есть модификация модели по Квакернааку - Крузе/Мейеру. Тем не менее первая модель имеет техническое преимущество: вычислительные процессы становятся несколько проще.

Дадим теперь определение математического ожидания.

Определение 29. *Пусть дана нечеткая случайная величина* $X : \Omega \to \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^1)$. *Если* $\forall \alpha \in [0,1]$ *вещественная случайная величина* $\tilde{X}_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^1$ *имеет конечный первый момент, тогда ожидаемое значение* X *– это нечеткая величина* $E[X] \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^1)$, *такая что* $\forall \alpha \in [0,1]$

$$\tilde{E}[X]_\alpha = E[\tilde{X}_\alpha] = \int_\Omega \tilde{X}_\alpha dP.$$

Чачи определяет новую метрику расстояния между двумя нечеткими величинами как отображение $D : \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^1) \times \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^1) \to [0,\infty)$, которое для двух нечетких чисел A и B возвращает следующее значение:

$$D(A,B) = \int_0^1 (\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha)^2 d\alpha.$$

Пример 6. Расстояние между двумя симметричными триангулярными нечеткими величинами $A = (a,l,l)_S$ и $B = (b,r,r)_S$ можно вычислить по следующей формуле:

$$D(A,B) = (a-b)^2 + (l-r)^2 \int_0^1 (L^{-1}(\alpha))^2 d\alpha.$$

С помощью введенной метрики можно определить дисперсию.

Определение 30. *Дисперсия нечеткой случайной величины определяется как*

$$var[X] = E[D(X, E[X])] = \int_0^1 var[\tilde{X}_\alpha] d\alpha.$$

Последнее равенство в определении получается путем раскрытия D в определении и использования определения дисперсии случайной величины.

3. Ожидаемое значение нечеткой случайной величины

В контексте принятия решений ожидаемое значение и моменты второго порядка играют ключевую роль для объяснения вероятностной (случайной) информации. Несмотря на различные их определения для нечетких случайных величин, представленных выше, желательно, чтобы они обладали следующими свойствами:

1. для нечетких случайных величин выполняются все свойства обычного математического ожидания (линейность, монотонность и т.д.);

2. если нечеткая случайная величина совпадает с нечеткой величиной (т.е. случайная компонента вырождается), то ее математическое ожидание должно совпадать с этой величиной (по аналогии: математическое ожидание константы есть сама эта константа);

3. математическое ожидание нечеткой случайной величины является нечеткой величиной, распределение которой выражается (тем или иным способом) через $\mu_A(t,\omega)$, т.е. через функцию распределения исходной нечеткой случайной величины.

Исследуем на предмет выполнения или невыполнения этих свойств все вышеописанные модели нечеткой случайной величины.

3.1 Модель Квакернаака - Крузе/Мейера

1. Выполнение первого свойства было доказано Крузе и Мейером в их работе [5] в Лемме 8.5 (стр. 77):

Лемма 1. *Ожидаемое значение $E[Y]$ нечеткой случайной величины Y такой, что $|E[\underline{Y}_0]| < \infty$ и $|E[\overline{Y}_0]| < \infty$, есть линейный функционал в пространстве $\mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R})$.*

Напомним, что $\mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R})$ – это класс выпуклых нечетких множеств.

2. В той же работе в Теореме 8.3 было показано, что для $Y \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R})$ с конечными математическими ожиданиями $E[\underline{\mathrm{Y}}_0]$ и $E[\overline{Y}_0]$ выполняется:

$$(E[Y])_{\overline{\alpha}} = [E[\underline{\mathrm{Y}}]_{\overline{\alpha}}, E[\overline{Y}]_{\overline{\alpha}}], \text{ для } \alpha \in (0,1],$$

т.е. α-уровневые множества матожидания находятся через матожидания левых и правых границ α-уровневых множеств исходной нечеткой случайной величины. Из этого автоматически следует выполнение второго свойства.

3. Третье свойство выполняется в той его части, что математическое ожидание нечеткой случайной величины есть нечеткая величина. Для модели Квакернаака - Крузе/Мейера функция распределения возможностей не определена. Аналогом функции распределения можно считать множественное представление нечеткой величины через ее α-уровни. Так как нечеткая случайная величина по Квакернааку - Крузе/Мейеру определяется через множество α-уровней со случайными левой и правой границами, то в этом контексте с учетом п.2 можно считать, что третье свойство также выполняется.

3.2 Модель Пури - Ралеску

Как уже было упомянуто выше, Крашмер в своей работе [19] доказывал, что модели нечеткой случайной величины по Квакернааку - Крузе/Мейеру и Пури/Ралеску эквиваленты для случая, когда значение н.с.в. принадлежит $\mathcal{F}_0^{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^1)$, то есть для нечетких случайных величин с нечеткими исходами на вещественной оси. Соответственно, в этом случае свойства 1-3 также выполняются и для модели Пури - Ралеску.

3.3 Модель Намиаса

1. Выполнение первого свойства:

$$\mu_{\mathbf{E}[X+Y]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[X(\omega,\gamma) + Y(\omega,\gamma)] = t\} = \\ \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[X(\omega,\gamma)] + \mathbf{E}[Y(\omega,\gamma)] = t\} = \mu_{\mathbf{E}[X]+\mathbf{E}[Y]}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^1$$

и

$$\mu_{\mathbf{E}[\lambda X]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[\lambda X(\omega,\gamma)] = t\} = \\ \pi\{\gamma \in \Gamma : \lambda\mathbf{E}[X(\omega,\gamma)] = t\} = \mu_{\lambda\mathbf{E}[X]}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

2. Второе свойство следует из определения н.с.в. по Намиасу:

$$\mu_{\mathbf{E}[X]}(t) = \pi\{\gamma \in \Gamma : \mathbf{E}[X(\gamma)] = t\} = \pi\{\gamma \in \Gamma : X(\gamma) = t\} = \mu_X(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

3. Третье свойство следует из определений 24 и 25.

3.4 Модель Чачи/Лиу

Для модели нечеткой случайной величины по Чачи/Лиу также легко видеть выполнение трех свойства (см. [8], стр. 58), так как она является модификацией моделей н.с.в. по Квакернааку - Крузе/Мейеру. Основная особенность данной модели заключается в том, что автор вводит новое понятие расстояния между двумя нечеткими величинами и на основе его и определения н.с.в. через α-пессимистические значения получает формулу для расчета дисперсии нечеткой случайной величины, которая хорошо согласуется с классической теорией вероятности. В частности, дисперсия по Чачи/Лиу от обычной случайной величины сводится к классической дисперсии.

Заключение

В статье проведено сравнительное изучение различных определений нечеткой случайной величины, ее ожидаемого значения и их математических моделей. Проведенный анализ показал, что наиболее структурированным, позволяющим избежать ряда коллизий, является подход Намиаса, основанный на модели возможностного пространства и возможностной величины. В рамках этого подхода определения нечеткой случайной величины и ее характеристик, основанные на монотонных функциях множеств (нечетких мерах), в значительной степени согласуются с классическими результатами теории вероятностей. Экспликация случайных факторов в возможностной модели осуществляется на уровне параметров возможностных распределений. Это позволяет строить исчисление нечетких случайных величин в классах параметризованных распределений, что важно для практического применения. Исследование, представленное в статье, фактически основано на сильнейшей t-норме, описывающей взаимодействие нечетких параметров. В плане дальнейших исследований представляется актуальным распространить его на случай произвольной t-нормы, в том числе слабейшей.

Список литературы

[1] Féron R. Ensembles aléatoires flous // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1976. Vol. 282. Pp. 903–906.

[2] Féron R. Ensembles flous attachés à un ensemble aléatoire flou // Publications Econométriques. 1976. Vol. 9. Pp. 51–66.

[3] Kwakernaak H. Fuzzy random variables - I. Definitions and theorems // Information Sciences. 1978. Vol. 15, № 1. Pp. 1–29. https://doi.org/10.1016/0020-0255(78)90019-1

[4] Kwakernaak H. Fuzzy Random Variables - II. Algorithms and Examples for Discrete Case // Information Sciences. 1979. Vol. 17. Pp. 253–278.

[5] Kruse R., Meyer K.D. Statistics with Vague Data. Dordrecht: Springer, 1987. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3943-1

[6] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment // Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Eds. by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager. Amsterdam: North-Holland, 1979. Pp. 165–180.

[7] Puri M.L., Ralescu D.A. Fuzzy random variables // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1986. Vol. 114, № 2. Pp. 409–422. https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90093-4

[8] Chachi J. On Distribution Characteristics of a Fuzzy Random Variable // Austrian Journal of Statistics. 2018. Vol. 47. Pp. 53–67. https://doi.org/10.17713/ajs.v47i2.581

[9] Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8, № 3. Pp. 338–353.

[10] Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1. Pp. 3–28.

[11] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1, № 2. Pp. 97–110. https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8

[12] Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview // Analysis of Fuzzy Information. Ed. by J. Bezdek. Vol. 2. Boca Raton: CRC-Press, 1988. Pp. 3–39.

[13] Dubois D., Prade H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. New York: Academic Press, 1980.

[14] Liu B., Liu Y.K. Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2002. Vol. 10. Pp. 445–450.

[15] Liu Y.K., Liu B. Fuzzy Random Variables: A Scalar Expected Value Operator // Fuzzy Optimization and Decision Making. 2003. Vol. 2. Pp. 143–160.

[16] Liu B. Uncertainty Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2016.

[17] Klement E.P., Puri M.L., Ralescu D.A. Limit theorems for fuzzy random variables // Proceedings of the Royal Society. 1986. Vol. 407. Pp. 171–182.

[18] Diamond P., Kloeden P. Metric Spaces of Fuzzy Sets. Singapore: World Scientific, 1994.

[19] Kratschmer V. A unified approach to fuzzy random variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123. Pp. 1–9.

[20] Couso I., Sánchez L. Higher order models for fuzzy random variables // Fuzzy Sets and Systems. 2008. Vol. 159. Pp. 237–258.

[21] Miyakoshi M., Shimbo M. Set representations of a fuzzy set and its application to Jensen's inequality. Preprint.

[22] Aumann R.J. Integrals of Set-Valued Functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1965. Vol. 12. Pp. 1–12.

[23] Yazenin A., Wagenknecht M. Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach. Cotbus, Germany: Brandenburgische Technische Universitat, 1996. 133 p.

[24] Liu B. Theory and Practice of Uncertain Programming. Physica: Verlag, Heidelberg, 2002.

[25] Peng J., Liu B. Some Properties of Optimistic and Pessimistic Values of Fuzzy // IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 2004. Vol. 2. Pp. 745–750.

[26] Shapiro A.F. Fuzzy random variables // Insurance: Mathematics and Economics. 2009. Vol. 44, № 2. Pp. 307–314.

[27] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2003. № 1. С. 39–43.

[28] Хохлов М.Ю. Нечеткие случайные величины и их числовые характеристики // Методы и алгоритмы исследования задач оптимального управления. Тверь, 2000.

[29] Ширяев А.Н. Вероятность. М., 2007. 552 с.

Образец цитирования

Солдатенко И.С., Бреслер И.Б., Рогонов С.А., Язенин А.В. Математические модели нечеткой случайной величины: сравнительное изучение // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 3. С. 41–63. https://doi.org/10.26456/vtpmk694

Сведения об авторах

1. **Солдатенко Илья Сергеевич**
доцент кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: soldis@tversu.ru

2. **Бреслер Игорь Борисович**
главный конструктор – научный руководитель НИОКР АО «НИИИТ».

Россия, 170100, г. Тверь, ул. А. Дементьева, д. 3, АО «НИИИТ».

3. **Рогонов Степан Алексеевич**
старший преподаватель кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

4. **Язенин Александр Васильевич**
заведующий кафедрой информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru

MATHEMATICAL MODELS OF A FUZZY RANDOM VARIABLE: A COMPARATIVE STUDY

Soldatenko I.S.*, **Bresler I.B.****, **Rogonov S.A.***, **Yazenin A.V.***
*Tver State University, Tver
**JSC "Scientific Research Institute of Information Technologies", Tver

Received 20.09.2023, revised 29.10.2023.

A comparative study of approaches to the definition of a fuzzy random variable and its numerical characteristics is carried out. Examples of the fulfillment and non-fulfillment of properties characteristic of ordinary random variables with different definitions of fuzzy random variables are given. Methods of identification of the expected value of fuzzy random variables are proposed.

Keywords: fuzzy variable, fuzzy random variable, Quakernaak model, Puri and Ralescu model, Namias model, Chachi/Liu model.

Citation

Soldatenko I.S., Bresler I.B., Rogonov S.A., Yazenin A.V., "Mathematical models of a fuzzy random variable: a comparative study", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 3, 41–63 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk694

References

[1] Féron R., "Ensembles aléatoires flous", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **282** (1976), 903–906.

[2] Féron R., "Ensembles flous attachés à un ensemble aléatoire flou", *Publications Econométriques*, **9** (1976), 51–66.

[3] Kwakernaak H., "Fuzzy random variables - I. Definitions and theorems", *Information Sciences*, **15**:1 (1978), 1–29, https://doi.org/10.1016/0020-0255(78)90019-1.

[4] Kwakernaak H., "Fuzzy Random Variables - II. Algorithms and Examples for Discrete Case", *Information Sciences*, **17** (1979), 253–278.

[5] Kruse R., Meyer K.D., *Statistics with Vague Data*, Springer, Dordrecht, 1987, https://doi.org/10.1007/978-94-009-3943-1.

[6] Nahmias S., "Fuzzy variables in a random environment", *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, eds. M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager, North-Holland, Amsterdam, 1979, 165–180.

[7] Puri M.L., Ralescu D.A., "Fuzzy random variables", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **114**:2 (1986), 409–422, https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90093-4.

[8] Chachi J., "On Distribution Characteristics of a Fuzzy Random Variable", *Austrian Journal of Statistics*, **47** (2018), 53–67, https://doi.org/10.17713/ajs.v47i2.581.

[9] Zadeh L.A., "Fuzzy sets", *Information and Control*, **8**:3 (1965), 338–353.

[10] Zadeh L.A., "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, **1** (1978), 3–28.

[11] Nahmias S., "Fuzzy variables", *Fuzzy Sets and Systems*, **1**:2 (1978), 97–110, https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90011-8.

[12] Dubois D., Prade H., "Fuzzy numbers: an overview", *Analysis of Fuzzy Information.* V. 2, ed. J. Bezdek, CRC-Press, Boca Raton, 1988, 3–39.

[13] Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[14] Liu B., Liu Y.K., "Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **10** (2002), 445–450.

[15] Liu Y.K., Liu B., "Fuzzy Random Variables: A Scalar Expected Value Operator", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **2** (2003), 143–160.

[16] Liu B., *Uncertainty Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2016.

[17] Klement E.P., Puri M.L., Ralescu D.A., "Limit theorems for fuzzy random variables", *Proceedings of the Royal Society*, **407** (1986), 171–182.

[18] Diamond P., Kloeden P., *Metric Spaces of Fuzzy Sets*, World Scientific, Singapore, 1994.

[19] Kratschmer V., "A unified approach to fuzzy random variables", *Fuzzy Sets and Systems*, **123** (2001), 1–9.

[20] Couso I., Sánchez L., "Higher order models for fuzzy random variables", *Fuzzy Sets and Systems*, **159** (2008), 237–258.

[21] Miyakoshi M., Shimbo M., *Set representations of a fuzzy set and its application to Jensen's inequality*, Preprint.

[22] Aumann R.J., "Integrals of Set-Valued Functions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **12** (1965), 1–12.

[23] Yazenin A., Wagenknecht M., *Possibilistic Optimization. A Measure-Based Approach*, Brandenburgische Technische Universitat, Cotbus, Germany, 1996, 133 pp.

[24] Liu B., *Theory and Practice of Uncertain Programming*, Verlag, Heidelberg, Physica, 2002.

[25] Peng J., Liu B., "Some Properties of Optimistic and Pessimistic Values of Fuzzy", *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, **2** (2004), 745–750.

[26] Shapiro A.F., "Fuzzy random variables", *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**:2 (2009), 307–314.

[27] Khokhlov M.Yu., Yazenin A.V., "Calculation of numerical characteristics of fuzzy random variables", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2003, № 1, 39–43 (in Russian).

[28] Khokhlov M.Yu., "Fuzzy random variables and their numerical characteristics", *Metody i algoritmy issledovaniya zadach optimalnogo upravleniya [Methods and algorithms for the study of optimal control problems]*, Tver, 2000 (in Russian).

[29] Shiryaev A.N., *Veroyatnost*, Moscow, 2007 (in Russian), 552 pp.

Author Info

1. **Soldatenko Ilia Sergeyevich**
Associate Professor at Information Technologies department, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, Zhelyabova str., 33, TverSU. E-mail: soldis@tversu.ru

2. **Bresler Igor Borisovich**
Chief Designer - Scientific Director of Research and Development.

Russia, 170100, Tver, 3 A. Dementieva str., JSC "NIIIT".

3. **Rogonov Stepan Alekseyevich**
Senior lecturer at Information Technologies department,
Tver State University.

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TvSU.

4. **Yazenin Alexander Vasilyevich**
Head of Information Technology department, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: Yazenin.AV@tversu.ru