Egy biztonságos programfuttatásra vonatkozó minimalizálási feladatról

Pergel József

Ha valamely számológép müködése nem teljesen megbizható, azaz időnként előforduló véletlen hibák elrontják a programot és hibás eredményeket szolgáltatnak, felmerül a probléma, hogyan lehet biztonságosabbá tenni a program hibátlan lefutását. Erre egyik módszer az, hogy a program pillanatnyi állapotait időről-időre külső memórián (dobon, mágnesszalagon) tároljuk és ha észrevesszük, hogy a gép hibázott, a legutoljára tárolt állapotot visszük be a gyorsmemóriákba, és innen folytatjuk. A program bizonyos állapotaiban kontroll lehetőség áll rendelkezésünkre a hibázás ellenőrzésére. Pl. ha a számitott adatok között összefüggés áll fenn, ellenőrizhetjük, hogy ez az összefüggés fennáll-e még vagy sem. Ha nem áll fenn, a gép hibázott.

Ilymódon feltesszük, hogy a program futása jól meghatározott részekre bomlik, melyeknek végén adódnak a kontrollálható eredmények. Feltesszük, hogy az egyes részek lefutási idői ξ_i-vel jelölt valószinüségi változók, függetlenek azonos $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

A gép hibázásairól feltesszük, hogy egy λ paraméterü

Poisson folyamat irja le őket. Vagyis, egy-egy hibázás egy pillanat alatt lejátszódó folyamat, és két egymást követő hibázás közben eltelt idők független exponenciális eloszlásu valószinüségi változók λ paraméterrel.

Feltesszük, hogy a hibázások nem változtatják meg az egyes részek lefutási idejét, csak az eredményeket. Ha a program irányitó része kicsi az egész program lefutásához viszonyitva, akkor ez a feltevés nem jelent tul nagy megszoritást.

A külső memóriákhoz való fordulás kontroll szummázással történik, igy feltételezhető, hogy biztonságos. Külső memóriába való kivitel esetén a gyorsmemóriarész blokkolódik, ezért ez idő alatt meghibásodás nem történhet. Ha a kontrollszummák nem egyeznek, az átvitel megismétlődik mindaddig, amig egyezést nem kapunk. Igy az átviteli idő egy valószinüségi változó, melynek eloszlásfüggvényét $G(x)$ jelölje. (Feltesszük, hogy a kiviteli és a beviteli időeloszlása megegyezik.)

A program kontrollálható részeinek lefutási időit jelölje $\xi_1, \xi_2, \dots \dots \xi_n, \dots \dots$. Feltevéseink szerint k ilyen rész lefutása után viszi ki a programot külső memóriába.

Ennek eléréséhez a gépnek nem szabad hibáznia egy $\xi_1 + \dots \dots + \xi_k$ hosszuságu idő alatt. Amennyiben ez nem áll fenn, hanem a j-edik rész lefutása közben hibázott a gép, ezt az $\eta_1 = \xi_1 + \dots \dots + \xi_{j_1}$ időpontban vesszük észre, és az előzőleg tárolt program bevitelével ujra kezdjük a $\xi_1, \dots \dots, \xi_k$ hosszuságu részek futtatását. A következő lépésben kapjuk az $\eta_2 = \xi_1 + \dots \dots + \xi_{j_2}$ majd η_3, stb. változókat. Ha ν az a legkisebb pozitiv egész szám, melyre a ν -edik kisérletnél a gép nem hibázott a megfelelö $\xi_1 + \dots \dots + \xi_k = \vartheta$ hosszuságu időszakaszon, akkor $M(\eta_1 + \dots \dots + \eta_\nu)$ lesz a várható idő két- a külső memóriába való átvitel között. Ha most τ jelenti az ezután következő, s külső memóriába történő átviteli időt, akkor feladatunkat az $\frac{M(\eta_1 + \dots \dots + \eta_\nu + \tau)}{k} = A(k)$ érték minimalizálásával fogalmazzuk, ez ugyanis az egy-egy szakaszra jutó átlagos lefutási idő. Adott F(x) és G(x), valamint λ esetén hogyan kell k értékét választani a fenti várható érték minimalizálására? A feltételezések alapján $\xi_1, \dots \dots, \xi_k, \tau$ függetlenek, és a Poisson folyamat független a ξ_i-ktől.

A feltételes várható érték tulajdonsága szerint

$$M(\eta_1 + \dots \dots + \eta_\nu) = M(M(\eta_1 + \dots \dots + \eta_\nu | \xi_1, \dots \dots \xi_k)) \qquad /1/$$

Foglalkozzunk tehát $M(\eta_1+\dots\dots+\eta_\nu|\xi_1,\dots\dots,\xi_k)$ meghatározásával. Rögzitett $\xi_1,\dots\dots,\xi_k$ esetén az η_i-k függetlenek, tehát alkalmazható a Wald formula.[1] Ennek alapján

$$M(\eta_1+\dots\dots+\eta_\nu|\xi_1,\dots\dots,\xi_k)=M(\nu|\xi_1,\dots,\xi_k)\,M(\eta_i|\xi_1,\dots,\xi_k) \qquad /2/$$

Számitsuk ki $M(\eta_i|\xi_1,\dots,\xi_k)$ értékét. Legyen p_j annak a feltételes valószinüsége, rögzitett $\xi_1,\dots,\xi_k$ értékek mellett, hogy

$$\eta_i=\xi_1+\dots+\xi_j$$

Akkor

$$M(\eta_i|\xi_1,\dots,\xi_k)=\xi_1p_1+(\xi_1+\xi_2)p_2+\dots\dots+(\xi_1+\dots+\xi_k)p_k \qquad /3/$$

Továbbá, mivel $1\leq j<k$-ra

$$p_j=e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{j-1})}\cdot\left(1-e^{-\lambda\xi_j}\right)\;;\quad \text{és}\quad p_k=e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})} \qquad /4/$$

1/ A Wald formula a következő: ha $\omega_1,\dots\dots,\omega_n\dots$ független, azonos eloszlásu valószinüségi változók, $M(|\omega_i|)<\infty$, továbbá a pozitiv egészértékeket felvevő μ változó olyan, hogy a $\mu=n$ esemény független az $\omega_n,\omega_{n+1},\dots$ változóktól, és $M(\mu)<\infty$ akkor

$$M(\omega_1+\dots+\omega_\mu)=M(\mu)\cdot M(\omega)$$

Lásd. Lehmann [1] /119. old./

kapjuk

$$
\begin{aligned}
M(\eta_i|\xi_1,\ldots,\xi_k) = {} & \xi_1(1-e^{-\lambda\xi_1}) + (\xi_1+\xi_2)(e^{-\lambda\xi_1}-e^{-\lambda(\xi_1+\xi_2)}) + \ldots\ldots + \\
& +(\xi_1+\ldots+\xi_j)(e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{j-1})}-e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_j)}) + \ldots\ldots + (\xi_1+\ldots+\xi_k)\, e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})} = \\
= {} & \xi_1(1-e^{-\lambda\xi_1}+e^{-\lambda\xi_1}-e^{-\lambda(\xi_1+\xi_2)}+-\ldots\ldots-e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})}+e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})})+ \\
& +\xi_2(e^{-\lambda\xi_1}-e^{-\lambda(\xi_1+\xi_2)}+e^{-\lambda(\xi_1+\xi_2)}-+\ldots\ldots-e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})}+e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})})+ \\
& +\ldots+\xi_j(e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{j-1})}-+\ldots\ldots-e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})}+e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})})+\xi_k e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})} = \\
= {} & \xi_1 + e^{-\lambda\xi_1}\xi_2 + \ldots + e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{j-1})}\xi_j + \ldots + e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})}\xi_k
\end{aligned}
\qquad /5/
$$

Határozzuk meg most $M(\nu|\xi_2,\ldots,\xi_k)$ -t.

Annak valószinüsége, hogy rögzitett $\xi_1,\ldots\ldots,\xi_k$ értékek mellett egy adott próbálkozásnál nem történik hibázás a $\xi_1+\ldots+\xi_k$ hosszuságu időszakaszban, legyen α. Nyilván $\alpha = e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_k)}$ és innen

$$M(\nu|\xi_1,\ldots,\xi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^{k-1}\alpha = \frac{1}{\alpha} = e^{\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_k)} \qquad /6/$$

Tehát

$$M(\eta_1+\ldots+\eta_\nu|\xi_1,\ldots,\xi_k) = \xi_1 e^{\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_k)} + \ldots + \xi_k e^{\lambda\xi_k} \qquad /7/$$

Képezzük most a várható értéket $\xi_1, \dots, \xi_k$ szerint

$$M(\eta_1+\dots+\eta_\nu)=M(\xi_1 e^{\lambda(\xi_1+\dots+\xi_k)})+M(\xi_2 e^{\lambda(\xi_2+\dots+\xi_k)})+\dots+M(\xi_k e^{\lambda\xi_k}) = \tag{8}$$
$$= M(e^{\lambda\xi})^{k-1} M(\xi e^{\lambda\xi})+\dots+M(e^{\lambda\xi})^{j-1} M(\xi e^{\lambda\xi})+\dots+M(\xi e^{\lambda\xi})$$

Itt fel kell tennünk, hogy

$$M(\xi e^{\lambda\xi}) = \int_0^\infty x e^{\lambda x}\, dF(x) < \infty \tag{9}$$

A /9/ feltétel mellett vezessük be a következő jelöléseket:

$$\int_0^\infty x e^{\lambda x} dF(x)=a\,; \int_0^\infty e^{\lambda x} dF(x)=b\ ;\ \int_0^\infty x\, dF(x)=c \tag{10}$$

Ezen jelölések mellett /8/-ra kapjuk

$$a\,\frac{b^k-1}{b-1} \tag{11}$$

Ha még az $M(\tau)=\int_0^\infty x\, dG(x) = d$ jelölést is bevezetjük (feltételezve, hogy $d<\infty$) $A(k)$ -ra nyerjük

$$\frac{a\,\frac{b^k-1}{b-1}+d}{k} \tag{12}$$

/12/-t kell tehát minimalizálnunk, ahol k=1,2,...

Vezessük most be a $d-\frac{a}{b-1}=d_1$ jelölést, akkor

/12/

$$\frac{(b-1)^{-1}ab^k+d_1}{k} \tag{13}$$

alakba irható. Tekintsük most a /13/ függvényt minden $k > 0$ esetén A deriváltja k szerint

$$\frac{(b-1)^{-1} a b^k (k \cdot \lg b - 1) - d_1}{k^2} \qquad /14/$$

$(b-1)^{-1}$ a $b^k(k \lg b-1)$ deriváltja: $k(b-1)^{-1} b^k (\lg b)^2 > 0$ minden $k > 0$-ra. Ha $k=0$ (14) számlálója negativ, $k \to \infty$ esetén tart ∞ -hez, igy /14/ egyetlen $k > 0$-ra lesz nulla, ezen hely előtt negativ, utána pozitiv. Feladat tehát a

$$(b-1)^{-1} a b^k (k \lg b - 1) - d_1 = 0 \qquad /15/$$

egyenlet megoldása.

A $t = k \lg b - 1$ helyettesitéssel /15/ átmegy a

$$t e^t = h \qquad /16/$$

alakba, ahol $h = \frac{d_1 (b-1)}{a \cdot e}$, e a természetes logaritmus alapszáma.

A /16/ egyenlet megoldása $|h| < \frac{1}{e}$ azaz

$$d \frac{b-1}{a} < 2 \qquad /17/$$

esetén a következő hatványsorral fejezhető ki (vö. Pólya-Szegő)

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} h^n \qquad /18/$$

$e > h > \frac{1}{e}$ esetén a /16/ egyenlet iterációval oldható meg. A következő táblázat néhány h értékre adja meg a megfelelő t értéket. A táblázat URAL-2 tipusu számológéppel készült.

A /16/ egyenlet szerepet játszik az un. "retardált differenciálegyenlet" elméletben; l. ebből a szempontból: Arató M. [1] .

A következőkben még vizsgáljuk meg, hogyan lehet közelítő formulákat kapni a problémára. Először nézzük meg, hogy kis d esetén milyen λ értékekre kell minden programrész után külső memóriához fordulni. Nyilván az

$$\frac{a(1 + b(\log b - 1))}{b-1} \geqq d \qquad /19/$$

egyenlötlenségnek kell teljesülni. Kis d esetén kis λ várható, és ebben az esetben érvényesek a következő formulák:

$$a = \int_0^{\infty} x e^{\lambda x} dF(x) \sim \int_0^{\infty} x(1+\lambda x)\, dF(x) = c + \lambda(c^2 + \sigma^2) \qquad /20/$$

ahol σ az F(x) eloszlásfüggvényü val. változó szórása

$$b=\int_0^\infty e^{\lambda x}dF(x)\sim\int_0^\infty(1+\lambda x)\,dF(x)=1+c\lambda \qquad /21/$$

/19/ tehát a következő alakot veszi fel

$$\left(c+\lambda(c^2+\sigma^2)\right)\lambda c\geq d \qquad /22/$$

/22/ baloldala $\lambda>0$ -ra monoton növekvő, tehát /22/ ekvivalens a

$$\lambda\geq\frac{1}{\sqrt{c^2+\sigma^2}}\left(\sqrt{\frac{d}{c}+\frac{c^2}{4(c^2+\sigma^2)}}-\frac{c}{2\sqrt{c^2+\sigma^2}}\right) \qquad /23/$$

egyenlötlenséggel.

Tekintettel arra, hogy kis d-ket tekintünk, /23/ baloldala közelitőleg egyenlő $\frac{d}{c^2}$ -tel. A

$$\lambda c\geq\frac{d}{c} \qquad /24/$$

egyenlötlenséget kapjuk. Látjuk tehát, hogy /24/ változatlan, ha λ, c, d, ugy változnak, hogy λc és $\frac{d}{c}$ változatlan; a probléma ezen tulajdonsága szemléletesen is könnyen látható.

Foglalkozzunk még k meghatározásával kis λ és d értékek mellett. Ekkor a /16/ egyenletben szereplő h-ra

$$h \sim e^{-1} d\lambda - e^{-1} \qquad /25/$$

Legyen $\lambda = -1 + \eta$ akkor /16/ a következő alaku lesz

$$(-1+\eta)e^{\eta} = d\lambda - 1 \qquad /26/$$

Miután η kicsiny, alkalmazható az $e^{\eta} \sim 1+\eta$ formula, amit /26/-ra alkalmazva kapjuk

$$\eta \sim \sqrt{d \cdot \lambda} \qquad /27/$$

tehát

$$k = \frac{\eta}{\log b} \sim \frac{1}{c}\sqrt{\frac{d}{\lambda}} \qquad /28/$$

Látjuk tehát, hogy k értéke megint csak $\frac{d}{c}$ és $c\lambda$ függvénye. Egyébként azt látjuk /28/-ból, hogy k arányos a gép két meghibásodási időpontja közti átlagos idő négyzetgyökével.

Nehezebb problémának látszik közelitő formulákat találni, ha d és λ nem kicsik c-hez képest.

További vizsgálat tárgyát képezhetné az az eset, amikor a hiba az egyes ξ_i lefutási időket is megváltoztathatja. Az az eset, amikor a hiba a ξ_i-ket csak rövidítheti, nem érdemel külön figyelmet. Az az eset, amikor egy hiba a ξ_i-ket nagyon megnyujthatja, érdekes lehet, mert pl.

olyan problémák is felvetődhetnek, hogy mennyi maximális időt szabad egy-egy résznek futni. Érdekes feladathoz vezethet az az eset is, amikor külső memóriához való fordulás esetén is hibázhat a gép.

Táblázat $t \cdot e^{-t} = h$ megoldására különböző h értékekre

$(-e^{-1} < h < 0)$

-1.00000	-.79359	-.70859	-.64749	-.59809
-.55599	-.51899	-.48579	-.45549	-.42769
-.40179	-.37759	-.35489	-.33339	-.31289
-.29349	-.27489	-.25719	-.24009	-.22369
-.20789	-.19259	-.17779	-.16349	-.14959
-.13619	-.12309	-.11039	-.09799	-.08589
-.07409	-.06259	-.05139	-.04039	-.02969
-.01919	-.00889			

A táblázatban h az $e^{-1} < h < 1$ intervallumban 0,01 lépésközzel halad, az $1 \leq h < 10$ intervallumban 0,1 lépésközzel.

Táblázat $t e^t = h$ megoldására különböző h értékekre

$(0 < h < 1)$

.00120	.01100	.02070	.03020	.03960	.04870
.05770	.06660	.07530	.08380	.09230	.10050
.10870	.11670	.12460	.13240	.14010	.14770
.15510	.16250	.16980	.17690	.18400	.19100
.19790	.20470	.21140	.21810	.22460	.23110
.23750	.24390	.25010	.25630	.26240	.26850
.27450	.28040	.28630	.29210	.29790	.30360
.30920	.31480	.32030	.32580	.33120	.33660
.34190	.34710	.35240	.35750	.36270	.36780
.37280	.37780	.38270	.38770	.39250	.39740
.40210	.40690	.41160	.41630	.42090	.42550
.43010	.43460	.43910	.44360	.44800	.45240
.45680	.46110	.46540	.46970	.47390	.47810
.48230	.48650	.49060	.49470	.49870	.50280
.50680	.51080	.51470	.51870	.52260	.52650
.53030	.53410	.53800	.54170	.54550	.54920
.55300	.55670	.56030	.56400		

$1 \leq h \leq 10$

.56760	.60270	.63600	.66750	.69760	.72620
.75360	.77990	.80520	.82950	.85290	.87550
.89740	.91850	.93900	.95890	.97810	.99690
1.01510	1.03290	1.05010	1.06700	1.08340	1.09950
1.11520	1.13050	1.14550	1.16020	1.17450	1.18860
1.20240	1.21590	1.22909	1.24209	1.25489	1.26739
1.27969	1.29179	1.30369	1.31539	1.32689	1.33819
1.34929	1.36029	1.37109	1.38169	1.39219	1.40249
1.41269	1.42269	1.43259	1.44229	1.45189	1.46139
1.47079	1.47999	1.48909	1.49809	1.50699	1.51579
1.52449	1.53309	1.54149	1.54989	1.55819	1.56639
1.57449	1.58249	1.59039	1.59819	1.60589	1.61359

1.62119	1.62869	1.63609	1.64349	1.65069	1.65799
1.66509	1.67209	1.67909	1.68609	1.69289	1.69969
1.70649	1.71319	1.71979	1.72629	1.73279	1.73929

Irodalom:

[1] E.L.Lehmann: Testing Statistical Hypotheses. New York John.Wiley, 1959.

[2] Pólya Gy.-Szegő G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I-II., Springer, Berlin, 1925.

[3] Arató M.: Megjegyzések a "késés-függvénnyel" kapcsolatban. MTA Mat.Kut.Int.Közleményei I. /1956/ 217-221.

Summary

About a minimization problem for running a program safely.

In this article we consider the following problem of computation, Random errors may disturb the computation and we get defective result but it is supposed that we can control the results and repeat the computation. If we want to get a method to improve from time to time the defective result we must send the whole program to a drum or to a magnetic tape. It is supposed that we send the program to the tape after k correct results which requires

time, and we begin the computation from the last position on the drum if we have a false result. Let us denote ξ_i the time between two correct results (the ξ_i-s are independent random variables with the same distribution function). We minimize the expected value

$$\frac{M(\eta_1 + \eta_2 + \dots \dots + \eta_\nu + \tau)}{k}$$

where $\eta_i = \xi_1 + \dots + \xi_{\nu_i}$ $(\nu_i < k_0)$ $\eta_\nu = \xi_1 + \dots \dots + \xi_k$

i.e. is the last attempt to get k right results.