Legrövidebb ut meghatározása időtől függő élhosszakkal biró hálózatban

Klafszky Emil

A legrövidebb ut probléma megoldása időtől nem függő élhosszak esetén Ford és Fulkersontól [1,2] származik. Bellman [3] dinamikus programozási módszert követve eljárást adott a legrövidebb ut hosszának meghatározására. Ezen elvet követve Cooke és Halsey [4] eljárást adtak, időtől függő élhosszak esetén a legrövidebb ut hosszának a meghatározására. Ez az eljárás azonban csak az ut hosszát, de magát az utat nem adja meg. Ebben a dolgozatban azt mutatjuk meg, hogy a Ford-Fulkerson féle folyam módszer szintén alkalmas a feladat megoldására, sőt a legrövidebb utat is megadja.

Legyen az $N = \{x,y,\dots\}$ egy véges sok pontból álló halmaz. Legyen továbbá $\tau \in [0,1,2,\dots.\}$. A $\gamma(x,y,\tau)$ nem-negativ egész szám jelentse azt az időt, amely x-ből y-ba való eljutáshoz szükséges, amennyiben x-ből a τ időpontban indulunk el. Ha x-ből y-ba a τ időpontban nem lehet menni, akkor ugy vesszük, hogy $\gamma(x,y,\tau) = \infty$. Legyenek s és t az N halmaz rögzitett pontjai, az s pontot forrásnak, a t pontot nyelőnek nevezzük.

Legyen $P = (s = x_0, x_1, \dots, x_n = t)$ egy s-ből t-be vezető ut. Rendeljünk minden $x \in N$ ponthoz $\delta(x)$ nem-negativ egész számot, melyet az x pontbeli tartózkodási időnek nevezünk. Ezen $\delta(x)$ számok rendezett halmazát jelöljük

$\mathcal{D}$ -vel. Haladjunk a P uton a $\mathcal{D}$ tartózkodási és a γ utazási idővel s-ből t-be. Jelöljük $\lambda(x_i)$-vel az x_i pontba való érkezési időt. A $\lambda(x_i)$ számokra az alábbiak teljesülnek:

$$\lambda(x_o) = 0$$

/1/ $$\lambda(x_i) = \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1}) + \gamma\left[x_{i-1}, x_i, \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1})\right]$$

$$(i=1,\ldots, n)$$

Feladatunk az, hogy olyan P utat és $\mathcal{D}$ tartózkodási idő értékeket adjunk meg, hogy

/1*/ $\lambda(t)$ minimális legyen.

A feladathoz egy duál feladatot rendelünk. Meghatározandók a hálózat csucsain olyan $\mu(x)$ $(x \in N)$ nem-negativ egész számok, melyekre fennáll:

$$\mu(s) = 0$$

/2/ $$\mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(x,y, \mu(x) + \vartheta) + \vartheta ,$$

ahol $x,y \in N$ és ϑ tetszőleges nem-negativ egész szám. Ezenkivül

/2*/ $\mu(t)$ maximális legyen.

A duál feladatnak van lehetséges megoldása, például az azonosan nulla μ értékek kielégitik /2/ egyenlőtlenséget.

Az alábbi lemma a primál és duál feladat lehetséges megoldásai közötti kapcsolatot mutatja.

<u>Lemma</u>: Tetszőleges P ut és $\mathcal{D}$ tartózkodási idő, valamint tetszőleges /2/-nek eleget tevő μ számok esetén

/3/ $$\lambda(t) \geqq \mu(t)$$

B i z o n y i t á s :

A bizonyitásnál a /2/ egyenlőtlenséget más formában használjuk, ezért azt átirjuk.

Legyen $\omega = \mu(x) + \vartheta$ természetesen akkor $\omega \geqq \mu(x)$-nek fenn kell állni. Ezt a /2/ egyenlőtlenségbe irva kapjuk

/4/ $$\mu(y) - \omega \leqq \gamma(x,y,\omega),$$

minden olyan nem-negativ egész ω-ra, melyre $\omega \geqq \mu(x)$
Azt mutatjuk meg teljes indukcióval, hogy a P ut minden x_i pontjára

/5/ $$\lambda(x_i) \geqq \mu(x_i)$$

Nyilván x_0 esetén $\lambda(s) = \mu(s)$ teljesül. Tegyük fel, hogy /5/ egyenlőtlenség x_{i-1}-re fennáll, akkor /1/ és /4/ felhasználásával kapjuk:

$$\lambda(x_i) = \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1}) + \gamma[x_{i-1}, x_i, \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1})] \geqq$$

$$\geqq \lambda(x_{i-1}) + \delta(x_{i-1}) + \mu(x_i) - \lambda(x_{i-1}) - \delta(x_{i-1}) = \mu(x_i)$$

Azaz /5/ teljesül x_i-re.

Az egész értéküség és a /3/ egyenlőtlenség biztositja, hogy léteznek olyan μ értékek, melyekre $\mu(t)$ maximális. Megmutatjuk, hogy léteznek olyan P ut $\mathcal{D}$ tartózkodási idő és /2/-nek eleget tevő μ értékek, hogy /3/-ban egyenlőség áll fenn, azaz fennáll az alábbi dualitási tétel.

T é t e l:

Amennyiben a λ és μ értékek /1/ illetve /2/-nek eleget tesznek, akkor

$$\min \lambda(t) = \max \mu(t)$$

B i z o n y i t á s :

A bizonyitás konstruktiv lesz. Egyben eljárást is ad a P ut, a $\mathcal{D}$ tartózkodási idő értékek és a μ duálváltozók meghatározására.

Tegyük fel, hogy μ értékek olyanok, hogy $\mu(t)$ maximális. Legyen SCN a következőképp konstruálva:

a./ $s \in S$

b./ y legyen eleme S-nek, ha valamely $x \in S$ és valamely ϑ-ra /2/ egyenlőséggel teljesül.

Jelöljük $T = N - S$

Amennyiben $t \in S$ akkor van olyan $P = (s = x_0, x_1, \ldots, x_n = t)$ ut s-ből t-be, hogy

$$\mu(x_i) - \mu(x_{i-1}) = \gamma(x_{i-1}, x_i, \mu(x_{i-1}) + \vartheta) + \vartheta$$

valamilyen ϑ-ra. Ezen ϑ legyen $\delta(x_{i-1})$ értéke. Ekkor a lemma bizonyitását figyelembe véve a tételt bizonyitottuk.

Ha $t \notin S$, akkor

$$\mu(y) - \mu(x) < \gamma(x, y, \mu(x) + \vartheta) + \vartheta$$

minden $x \in S$, $y \in T$ és minden nem-negativ egész ϑ-ra. Jelöljük:

$$\varepsilon = \min \gamma[x, y, \mu(x) + \vartheta] + \vartheta \,,$$

ahol $x \in S$, $y \in T$ és ϑ nem-negativ egész. Nyilván $\varepsilon > 0$. Legyen

$$\bar{\mu}(x) = \mu(x) \qquad \text{ha } x \in S,$$

$$\bar{\mu}(x) = \mu(x) + \varepsilon \qquad \text{ha } x \in T.$$

Ezen $\bar{\mu}$ értékek a duál feladat lehetséges megoldásai, ugyanis S és ε definiciója miatt /2/ feltételt kielégitik. Azonban $\varepsilon > 0$ miatt $\bar{\mu}(t) > \mu(t)$ ellentétbe azzal a feltevésünkkel, hogy $\mu(t)$ maximális.
Ezzel a tételt bizonyitottuk.

Számitástechnikai szempontból megjegyezzük, hogy amennyiben valamely P ut és $\mathcal{D}$ tartózkodási idő esetén $\bar{\lambda}(t) = m$, akkor természetesen elég csak a $\tau \in (0,1,\dots,m)$ értékekre szoritkozni.

Irodalom

[1] L.R.Ford, Jr.and D.R.Fulkerson, "Maximal Flow Through a Network", Canadian J.Math. 8, 399-404 /1956/.

[2] L.R.Ford, Jr. "Network flow theory" RAND Paper P-923 Santa Monica Calif. /1956/.

[3] R.Bellman, "On a Routing Problem", Quart, Appl. Math. XVI. No. 1 /1958/.

[4] K.L. Cooke and E.Halsey "The Shortest Route Through a Network with Time-Dependent Internodal Transit Times", - J.Math. Anal. Appl. 14, 493-498 /1966/.

Summary

Using a dynamic programming method, Cooke-Halsey [4] gave a procedure for the definition of the length of the shortest path in a net with time-dependent edge length.

It is demonstrated in this paper that the Ford-Fulkerson method, too, is applicable to the solution of this problem. The constructive proof of the duality thesis between the problem and its dual affords at the same time an algorithm for the definition of the shortest path.