MARGINÁLIS ÉRTÉKEK A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSBAN

Klafszky Emil

BEVEZETÉS

A dolgozatban megmutatjuk, hogy azok a perturbációs vizsgálatok, melyeket Mills [4] és Williams [6] a lineáris programozásra végeztek, átültethetők a geometriai programozásra is, és a geometriai programozásnál kapott eredmények teljesen megegyeznek a lineáris programozásnál kapottakkal. A geometriai programozásban perturbációs vizsgálatokat már Duffin – Peterson – Zener az [1] könyvükben végeztek (Appendix B, pp. 247-254), azonban az itt tárgyalásra kerülő probléma ettől eltérő természetű. A geometriai programozást illetően a szerző [3] dolgozatára fogunk hivatkozni.

A tárgyalásra kerülő probléma a következő: Adott egy geometriai programozási feladat és a duálja. Jelölje az $A = (a_i) = (a^{(j)}) = (\alpha_{ij})$ $m \times n$-es mátrix, a $b = (\beta_j)$ n dimenziós vektor és a $c = (\gamma_i)$ m dimenziós vektor a geometriai programozás együtthatóit. Legyen az $I = \{1, 2, \dots, m\}$ index halmaz az $I_1, I_2, \dots, I_p$ diszjunkt index halmazokra particionálva. Jelölje $x = (\xi_i)$ m dimenziós és $y = (\eta_j)$ n dimenziós vektor a geometriai programozás változóit. A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:

$$
\begin{array}{cccc|c|c|c|c|c|c|c|}
 & & & & a^{(1)} & a^{(2)} & & a^{(n)} & & c & & x \\
\cline{5-8}\cline{10-10}\cline{12-12}
\multirow{5}{*}{$I\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$} & 1 & \multirow{2}{*}{$I_1$} & a_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & & \gamma_1 & & \xi_1 \\
 & 2 & & a_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & & \gamma_2 & & \xi_2 \\
 & \vdots & I_2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \vdots & & & & & & & & & \\
 & m & I_p & a_m & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & & \gamma_m & & \xi_m \\
\cline{5-8}\cline{10-10}\cline{12-12}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
\cline{2-5}
b & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\
\cline{2-5}
\multicolumn{5}{c}{} \\
\cline{2-5}
y & \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\
\cline{2-5}
\end{array}
$$

Primál feladat. Meghatározandó

$$\sup by,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k}' e^{a_i y - \gamma_i} \leqslant 1, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Duál feladat. Meghatározandó

$$\inf \left(xc + \sum_{k=1}^{p}' \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k}' \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k}' \xi_i}} \right),$$

feltéve, hogy

$$xA = b\,,$$

$$x \geqslant 0\,,$$

A geometriai programozás dualitás tétele szerint, ha mindkét feladat konzisztens, akkor a szuprémum megegyezik az infinummal. Ezt a közös értéket nevezzük a *geometriai programozás értékének.* A továbbiakban rögzítsük a particionálást, és a geometriai programozási feladatot $[A, b, c]$ együtthatójú feladatnak nevezzük. Legyenek $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ az A, b, c mátrix, illetve vektorokkal megegyező dimenziójúak. A probléma: *mit mondhatunk az* $[(A + \tau\hat{A}), (b + \tau\hat{b}), (c + \tau\hat{c})]$ *együtthatójú feladat értékéről zérushoz közeli* τ *esetében.*

A probléma megoldása során szükségünk lesz a geometriai programozás optimális megoldása és a *Lagrange függvény* kapcsolatára, valamint a lineáris programozásbani analóg *regularitás* fogalmára. Ezeket külön (1.§, 2.§) tárgyaljuk, majd ezek felhasználásával a 3.§-ban adjuk a probléma megoldását.

1.§ A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS LAGRANGE-FÜGGVÉNYE

Ebben a fejezetben egy összefüggést adunk a geometriai programozás optimális megoldásai és a programozási feladathoz tartozó Lagrange függvény nyeregpontja között.

Az egyszerűsítés kedvéért az alábbi jelölést vezetjük be:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}} .$$

Definíció. Az $[A, b, c]$ együtthatójú, és adott particiójú geometriai programozás Lagrange-függvényének nevezzük a

$$\Phi(x, y) = xc + by - xAy + \psi(x) , \qquad x \geqslant 0$$

függvényt. Az x^*, y^* pontot a Lagrange-függvény nyeregpontjának mondjuk, ha tetszőleges y és $x \geqslant 0$ vektorokra:

$$\Phi(x^*, y) \leqslant \Phi(x^*, y^*) \leqslant \Phi(x, y^*) .$$

Látható, hogy az első három tag csak az A, b, c együtthatóktól, az utolsó csak a particionálástól függ.

Tétel. *Az x^*, y^* vektorpár akkor és csak akkor optimális megoldása a geometriai programozásnak, ha a Lagrange függvénynek nyeregpontja.*

Bizonyítás. a/ Legyenek x^*, y^* optimális megoldások. Ekkor a geometriai programozás dualitási tétele szerint

$$x^*c + \psi(x^*) = by^* .$$

A nyeregpont egyenlőtlenség baloldala

$$\Phi(x^*, y) \leqslant \Phi(x^*, y^*) ,$$

azaz

$$x^*c + by - x^*Ay + \psi(x^*) \leqslant x^*c + by^* - x^*Ay^* + \psi(x^*)$$

egyenlőséggel teljesül.

A nyeregpont egyenlőtlenség jobb oldalának

$$\Phi(x^*, y^*) \leqslant \Phi(x, y^*)$$

teljesüléséhez csak azt kell belátni, hogy az

$$xAy^* \leqslant xc + \psi(x)$$

egyenlőtlenség teljesül az $x \geqslant 0$ esetben. Ezt a geometriai egyenlőtlenség felhasználásával egyszerű számolással beláthatjuk. Mivel y^* a primál feladat megoldása, így:

$$1 \geqslant \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i}, \qquad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Erre a geometriai egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy:

$$1 \geqslant \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i y^* - \gamma_i} \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i} \geqslant \prod_{i \in I_k} \left(\frac{e^{a_i y^* - \gamma_i}}{\xi_i} \right)^{\xi_i} \cdot \left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \, e^{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i a_i y^* - \sum_{i \in I_k} \xi_i \gamma_i \right)}.$$

Ezt minden k-ra összeszorozva:

$$1 \geqslant \prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \, e^{\sum_{i \in I} \xi_i a_i y^* - \sum_{i \in I} \xi_i \gamma_i} \geqslant \prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \, e^{xAy^* - xc}.$$

Logaritmizálva kapjuk, hogy

$$0 \geqslant \ln \prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i \right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} + xAy^* - xc,$$

azaz

$$xc + \psi(x) \geqslant xAy^*.$$

Ezzel a tétel egyik irányát beláttuk.

b/ Tegyük fel, hogy x^*, y^* nyeregpontja a Lagrange függvénynek. A nyeregpont egyenlőtlenség baloldalából, a $\Phi(x^*, y) \leqslant \Phi(x^*, y^*)$ egyenlőtlenségből kiindulva kapjuk, hogy

$$(b - x^*A)y \leqslant (b - x^*A)y^*$$

egyenlőtlenség minden y vektorra fennáll. De ez csak úgy lehet, hogy ha $b - x^*A = 0$, mert különben y alkalmas választásával ez nem teljesülne. Igy x^* a duál feladat lehetséges megoldása. A nyeregpont egyenlőtlenség jobboldalából, a $\Phi(x^*, y^*) \leqslant \Phi(x, y^*)$ egyenlőtlenségből kiindulva kapjuk, hogy az

$$(1) \qquad x^*c - x^*Ay^* + \psi(x^*) \leqslant xc - xAy^* + \psi(x)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $x \geqslant 0$ vektorra.

Mint előbb láttuk, az x^* a duál feladat lehetséges megoldása, azaz $x^*A = b$, s ezt (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$(2) \qquad x^*c - by^* + \psi(x^*) \leqslant xc - xAy^* + \psi(x)\,,$$

minden $x \geqslant 0$-ra.

De ekkor az x helyébe az $x + x^*$ vektort téve:

$$x^*c - by^* + \psi(x^*) \leqslant xc + x^*c - xAy^* - x^*Ay^* + \psi(x + x^*)\,,$$

azaz:

$$\psi(x^*) \leqslant xc - xAy^* + \psi(x + x^*)\,.$$

A ψ függvény konvexitása miatt azonban a

$$\psi(x^*) \leqslant xc - xAy^* + \psi(x) + \psi(x^*)$$

egyenlőtlenség is fennáll, s így az

$$(3) \qquad xAy^* \leqslant xc + \psi(x)$$

egyenlőtlenség teljesül minden $x \geqslant 0$ esetben.

Rögzítsünk egy tetszőleges k_0 indexet, és legyen

$$\xi_i = \begin{cases} e^{a_iy^* - \gamma_i}, & \text{ha} \quad i \in I_{k_0} \\ 0\,, & \text{ha} \quad i \notin I_{k_0}\,. \end{cases}$$

Helyettesítsük ezt (3)-ba, először csak az $i \notin I_{k_0}$ esetre:

$$\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i(a_iy^* - \gamma_i) \leqslant \sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i \ln \xi_i - \ln \left(\sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i \right) \sum_{i \in I_{k_0}} \xi_i\,.$$

Ezután ξ_i értékét az $i \in I_{k_0}$ esetben is behelyettesítve:

$$\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_iy^* - \gamma_i} (a_iy^* - \gamma_i) \leqslant \sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_iy^* - \gamma_i} (a_iy^* - \gamma_i) -$$

$$- \ln \left(\sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_iy^* - \gamma_i} \right) \sum_{i \in I_{k_0}} e^{a_iy^* - \gamma_i}\,.$$

Rendezve:

$$\ln\left(\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i}\right)^{\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i}} \leqslant 0 ,$$

azaz

$$\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i y^* - \gamma_i} \leqslant 1 .$$

Ez, minthogy minden k_0 indexre fennáll, azt adja, hogy y^* lehetséges megoldása a primál feladatnak.

A (2) egyenlőtlenséget $x = 0$ pontra alkalmazva kapjuk, hogy

(4) $$x^*c + \psi(x^*) \leqslant by^* .$$

A (3) egyenlőtlenséget $x = x^*$ pontra alkalmazva kapjuk, hogy

(5) $$by^* \leqslant x^*c + \psi(x^*) .$$

A (4) és (5) egybevetéséből adódik, hogy

$$x^*c + \psi(x^*) = by^* ,$$

azaz x^*, y^* megoldások optimálisak is. ∎

Megjegyezzük, hogy a tétel első része – "az optimális megoldások nyeregpontjai a Lagrange függvénynek" – egy általános dualitási tétel következményeként található Rockafellar [5] könyvében (pp. 326).

2. §. REGULÁRIS GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS

A perturbációs vizsgálatoknál fontos szerepet játszik a regularitás.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a geometriai programozási primál feladat reguláris, ha teljesül az alábbi *primál regularitási feltétel;* Az

$$Ay \leqslant 0 ,$$

$$by \geqslant 0 ,$$

$$y \neq 0$$

egyenlőtlenségrendszernek *nincs* megoldása.

Azt mondjuk, hogy a geometriai programozási duál feladat reguláris, ha teljesül az alábbi *duál regularitási feltétel:* Az

$$xA = 0 ,$$
$$x \geqslant 0 ,$$
$$xc + \psi(x) \leqslant 0 ,$$
$$x \neq 0$$

egyenlőtlenségrendszernek *nincs* megoldása.

A geometriai programozást regulárisnak nevezzük, ha az primál reguláris is és duál reguláris is.

Az alábbi tétel a regularitási feltételek és feltételi halmazok konzisztenciája között ad kapcsolatot. (Mielőtt a tételt kimondanánk, emlékeztetünk két definícióra: *Kanonikusnak* nevezzük a duál feladatot, ha az $xA = b$, $x > 0$ egyenlőtlenség megoldható. *Szuperkonzisztensnek* nevezzük a primál feladatot, ha a $\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} < 1$, $(k = 1, 2, \dots, p)$ egyenlőtlenség rendszer megoldható.)

1. Tétel. a/ *Ha a primál regularitás teljesül, akkor a duál feladat kanonikus.*

b/ *A duál regularitás akkor és csak akkor teljesül, ha a primál feladat szuperkonzisztens.*

Bizonyítás. a/ Az $Ay \leqslant 0$, $by \geqslant 0$, $y \neq 0$ egyenlőtlenségrendszer nemmegoldhatósága azt jelenti, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_m$, $-b$ vektorok által generált kúp duálisa csak a zérus elemet tartalmazza. De ekkor ez a kúp kell, hogy az egész teret kiadja, azaz előállítható a következő vektor

$$b - (a_1 + a_2 + \dots + a_m) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i + \vartheta(-b)$$

úgy, hogy $\xi_i \geqslant 0$, $\vartheta \geqslant 0$.

Ebből:

$$b = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1 + \xi_i}{1 + \vartheta} \right) a_i$$

legyen $\bar{\xi}_i = \dfrac{1 + \xi_i}{1 + \vartheta}$ és így $b = \bar{x}A$, $\bar{x} > 0$.

Ezzel a tétel a/ részét igazoltuk.

b/ A duál regularitás azt jelenti, hogy az

$$xA = 0 ,$$
$$x \geqslant 0 ,$$
$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1$$

feltételű és

$$\min(xc + \psi(x))$$

célfüggvényű geometriai programozási feladat vagy nem konzisztens vagy a célfüggvény minimuma pozitív.

Az ennek megfelelő primál párja:

$$\sum_{i\in I_k} e^{(a_i,1)(y,\eta)-\gamma_i} \leq 1, \qquad (k=1,2,\ldots,p),$$

$$\sup\{(0,1)\cdot(y,\eta)\}.$$

Azaz:

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \leq e^{-\eta}, \qquad (k=1,2,\ldots,p),$$

$$\sup \eta .$$

Ezen primál feladat mindig konzisztens. Ha a duál nem konzisztens, akkor $\eta\to\infty$, azaz $\sum_{i\in I_k} e^{a_i y-\gamma_i} \to 0$.

Ha a duál konzisztens, akkor a dualitási tétel szerint van olyan primál megoldás, melyre $\eta > 0$, tehát szuperkonzisztens a feladat.

Fordítva, ha a primál szuperkonzisztens, akkor a geometriai programozás fő lemmája alapján az $xA = 0$, $x \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \xi_i = 1$ egyenlőtlenség minden megoldására $xc + \psi(x) > 0$. De így a duál regularitás sem teljesülhet. ∎

A következő tétel a regularitási feltételek és az optimális megoldáshalmazok közötti kapcsolatot mutatja. Jelölje $\mathcal{P}$ a primál feladat feltételi halmazát, $\mathcal{P}^*$ a primál feladat optimális megoldásainak halmazát, és hasonlót jelöl a $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$ a duál feladatra.

2. Tétel: a/ *A nem üres $\mathcal{P}^*$ akkor és csak akkor korlátos, ha teljesül a primál regularitási feltétel.*

b/ *Ha $\mathcal{P}$ nem üres és a primál regularitási feltétel teljesül, akkor $\mathcal{P}^*$ sem üres.*

c/ *A nem üres $\mathcal{D}^*$ akkor és csak akkor korlátos, ha teljesül a duál regularitási feltétel.*

d/ *Ha $\mathcal{D}$ nem üres és a duál regularitási feltétel teljesül, akkor $\mathcal{D}^*$ sem üres.*

Bizonyítás. a/ A [3] dolgozat 3. §. 2 következménye szerint a nem üres $\mathcal{P}_\omega$ felső nívóhalmaz korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A mátrix sorvektorai és a $-b$ vektor által generált kúp kiadja az egész $R^{(n)}$ teret. Ez azonban a Farkas lemma szerint equivalens a primál regularitási feltétellel.

b/ A primál regularitás biztosítja, hogy tetszőleges felső nívóhalmaz korlátos, így azon a célfüggvény felveszi szuprémumát.

c/ Először azt látjuk be, hogy ha $\mathcal{S}^*$ nem korlátos, akkor nem teljesül a duál regularitás. Ugyanis ekkor van olyan $x_1, x_2, \ldots, x_q, \ldots \in \mathcal{S}^*$ sorozat, hogy $\|x\| \to \infty \cdot \left(\|x\| = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \right)$.

Legyen $\tilde{x}_q = \dfrac{x_q}{\|x_q\|}$.

Az $\tilde{x}_q$ sorozatból kiválasztható egy konvergens részsorozat, (tegyük fel, hogy maga az $\tilde{x}_q$ sorozat az), amelynek határpontját jelölje $\tilde{x}$. Az x_q kielégíti a feltételi egyenletet, azaz $x_q A = b$.

Ebből $\|x_q\|$ normával való osztással

$$\tilde{x}_q A = \frac{1}{\|x_q\|}\, b.$$

Igy az $\tilde{x}$ torlódási pontra kapjuk, hogy

$$\tilde{x}A = 0, \qquad \|\tilde{x}\| = 1, \qquad \tilde{x} \geqslant 0\,.$$

A célfüggvényben pedig az

$$\omega = x_q c + \psi(x_q) = \|x_q\|(\tilde{x}_q c + \psi(\tilde{x}_q))\,,$$

azaz az

$$\frac{\omega}{\|x_q\|} = \tilde{x}_q c + \psi(\tilde{x}_q)$$

egyenlőségből határértékben kapjuk, hogy

$$0 = \tilde{x}c + \psi(\tilde{x})\,.$$

Vagyis a duál regularitás nem teljesül.

Fordítva, ha a duál regularitás nem teljesül, akkor van olyan $\tilde{x} \geqslant 0$ vektor, hogy

$$\|\tilde{x}\| = 1, \qquad \tilde{x}A = 0, \qquad \text{és} \qquad \tilde{x}c + \psi(\tilde{x}) \leqslant 0\,.$$

De akkor tetszőleges $x^* \in \mathcal{S}^*$ optimális megoldásra és tetszőleges nagy $\vartheta \geqslant 0$ számra fennáll, hogy

$$\omega \leqslant c(x^* + \vartheta\tilde{x}) + \psi(x^* + \vartheta\tilde{x}) \leqslant cx^* + \psi(x^*) + \vartheta(c\tilde{x} + \psi(\tilde{x})) \leqslant cx^* + \psi(x^*) = \omega\,.$$

Igy

$$c(x^* + \vartheta\tilde{x}) + \psi(x^* + \vartheta\tilde{x}) = \omega\,, \qquad \text{azaz } \mathcal{S}^* \text{ nem korlátos.}$$

d/ Az 1. tétel b/ értelmében, ha a duál regularitás teljesül, akkor a primál feladat szuperkonzisztens, ekkor nyilván konzisztens is és így a geometriai programozás fő lemmája (ld. pl. [3]) szerint a duál feladatnak véges ω infinuma van. Ha a duál nem veszi fel infinumát, akkor van olyan $x_1, x_2, \dots, x_q, \dots$ sorozat, hogy

$$\|x_q\| \to \infty, \quad \text{és} \quad cx_q + \psi(x_q) \to \omega .$$

Azonban

$$cx_q + \psi(x_q) = \|x_q\|(c\tilde{x}_q + \psi(\tilde{x}_q)), \quad \text{ahol} \quad \tilde{x}_q = \frac{x_q}{\|x_q\|} .$$

Igy x_q, illetve $\tilde{x}_q$ vektorokra fennáll, hogy

$$\tilde{x}_q A = \frac{1}{\|x_q\|} b ,$$

$$c\tilde{x}_q + \psi(\tilde{x}_q) = \frac{1}{\|x_q\|}(x_q c + \psi(x_q)) .$$

De ekkor az $\tilde{x}$ torlódási pontra kapjuk, hogy

$$\tilde{x}A = 0, \qquad \|\tilde{x}\| = 1 , \qquad \tilde{x} \geqslant 0 , \qquad c\tilde{x} + \psi(\tilde{x}) = 0 ,$$

ellentétben a duál regularitással ∎

A következőkben a regularitásnak egy fontos tulajdonságát vizsgáljuk. Legyenek adva az $A, \hat{A}$ $m \times n$ méretű mátrixok, a b és $\hat{b}$ n dimenziós, a c és $\hat{c}$ pedig m dimenziós vektorok, valamint a τ tetszőleges szám. Legyen rögzítve az I indexhalmaz valamely particionálása. A regularitás az alábbi "nyílt" tulajdonsággal rendelkezik.

3. Tétel. Az $A + \tau\hat{A}$, $b + \tau\hat{b}$, $c + \tau\hat{c}$ *együtthatójú geometriai programozási feladatnál azon* τ *számok halmaza, ahol a primál regularitás teljesül, nyílt halmaz. Hasonlóan, ahol a duál regularitás teljesül, szintén nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A bizonyítást a primál regularitásra végezzük el; duál regularitáson teljesen analóg az eljárás.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\tau = 0$ helyen teljesül a regularitás. Ha nem lenne olyan $\tau_0 > 0$, hogy a $[0, \tau_0)$ intervallumban teljesül a regularitás, akkor lenne olyan $\tau_1, \tau_2, \dots$ $\dots, \tau_q, \dots$ zérushoz tartó pozitív számsorozat, hogy

$$(6) \qquad \begin{cases} (A + \tau_q\hat{A})y_q \leqslant 0 , \\ (b + \tau_q\hat{b})y_q \geqslant 0 , \\ \qquad y_q \neq 0 . \end{cases}$$

Legyen: $\tilde{y}_q = \dfrac{y_q}{\|y_q\|}$.

A (6) egyenlőtlenségrendszerből az $\|y_q\|$ normával való osztással kapjuk, hogy

$$(7)\quad \begin{cases} (A + \tau_q \hat{A})\tilde{y}_q \leq 0 \,, \\ (b + \tau_q \hat{b})\tilde{y}_q \geq 0 \,, \\ \|\tilde{y}_q\| = 1 \,. \end{cases}$$

A (7) egyenlőtlenségrendszert kielégítő $\tilde{y}_q$ vektorokból kiválasztható konvergens részsorozat, mondjuk maga $\tilde{y}_q$ ilyen, melynek limeszpontja legyen $\tilde{y}$. Nyilván (7) a torlódási pontra is fennáll, azaz:

$$A\tilde{y} \leq 0 \,,$$

$$b\tilde{y} \geq 0 \,,$$

$$\|\tilde{y}\| = 1 \,.$$

Ez ellentétes azon feltevésünkkel, hogy a $\tau = 0$ helyen a primál regularitás teljesül. ∎

3.§. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS ÉRTÉKÉNEK VÁLTOZÁSA

Legyen adott az $[A, b, c]$ együtthatójú és adott particiójú geometriai programozási feladat. Az $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ az A, b, c-vel azonos méretű mátrix, illetve vektorok. A következő tételben feltételt adunk a perturbált feladat konzisztenciájára és egy formulát a perturbált feladat változásainak értékére.

Tétel. (I) *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az* $[(A + \tau\hat{A}), (b + \tau\hat{b}), (c + \tau\hat{c})]$ *együtthatójú perturbált feladat konzisztens legyen valamely* $[0, \tau_0)$ *intervallumon tetszőleges, de fix* $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ *perturbációs együtthatóknál az, hogy az* $[A, b, c]$ *együtthatójú feladatra a regularitási feltételek teljesüljenek.*

(II) *Ha az* $[A, b, c]$ *feladatra a regularitási feltételek teljesülnek, akkor tetszőleges* $\hat{A}$, $\hat{b}, \hat{c}$ *perturbációs együtthatókhoz van olyan* $[0, \tau_0)$ *intervallum, hogy a perturbált primál feladatnak is és a duáljának is van optimális megoldása minden* $\tau \in [0, \tau_0)$ *esetén és amennyiben* $\omega(\tau)$*-val jelöljük a program értékét, akkor*

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = \max_{y \in \mathscr{P}^*} \min_{x \in \mathscr{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y) \,.$$

Ezt a derivált értéket Mills *terminológiáját követve "a geometriai programozás marginális értékének" nevezzük.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását, hogy áttekinthetőbbé tegyük, több lépésben végezzük el.

a/ Először azt mutatjuk meg, hogy a *feltételek szükségesek.* Az, hogy a duál konzisztens equivalens azzal, hogy a primál célfüggvény korlátos, ez viszont equivalens azzal, hogy nincs olyan primál megoldás, melyre

$$(8) \qquad \begin{cases} (A + \tau\hat{A})y \leqslant 0\,, \\ (b + \tau\hat{b})y > 0\,. \end{cases}$$

Azonban, ha van olyan y, melyre:

$$(9) \qquad \begin{cases} Ay \leqslant 0\,, \\ by \geqslant 0\,, \\ y \neq 0\,, \end{cases}$$

teljesül, akkor $\hat{A} = 0$ és $\hat{b}$ olyan megválasztásával, hogy $\hat{b}y > 0$ legyen, semmilyen kicsi $\tau > 0$ számra nem lehet elérni, hogy (8) ne teljesüljön. Vagyis szükséges, hogy (9) ne teljesüljön, azaz a primál regularitás fennálljon.

A primál konzisztencia azt jelenti, hogy

$$\sum_{i \in I_k}{}' e^{(a_i + \tau\hat{a}_i)y - (\gamma_i + \tau\hat{\gamma}_i)} \leqslant 0\,, \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

egyenlőtlenség fennálljon.

Ebből az $\hat{A} = 0$, $\gamma_i = -1$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ megválasztással a

$$\sum_{i \in I_k}{}' e^{a_i y - \gamma_i} \leqslant e^{-\tau}\,, \qquad (k = 1, 2, \dots, p)$$

egyenlőtlenségeknek kell teljesülniök. Ennek valamely $\tau > 0$ számra való teljesülése azzal equivalens, hogy a primál feladat szuperkonzisztens, de a 2.§. 1b/ tétel szerint csak akkor szuperkonzisztens, ha a duál regularitás teljesül.

b/ A 2.§. fejezet 3. tétele biztosítja, hogy van olyan $[0, \hat{\tau})$ intervallum, ahol mind a primál, mind a duál regularitás teljesül az $A + \tau\hat{A}$, $b + \tau\hat{b}$, $c + \tau\hat{c}$ együtthatójú feladatra $\tau \in [0, \hat{\tau})$ esetekben. A 2.§. fejezet 1. és 2. tételei szerint minden $\tau \in [0, \hat{\tau})$ értékre a megfelelő $\mathcal{P}^*$ és $\mathcal{D}^*$ optimális halmazok korlátosak.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{P}^*_\tau$ és $\mathcal{D}^*_\tau$ *egyenletesen is korlátosak* valamely $[0, \tau_0)$, $\tau_0 \leqslant \hat{\tau}$ intervallumon.

Indirekte, tegyük fel, hogy nincs olyan $[0, \tau_0)$ intervallum, ahol $\mathcal{P}^*_\tau$ és $\mathcal{D}^*_\tau$ egyenletesen korlátosak lennének. Ekkor létezik olyan $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q, \dots$ zérushoz tartó pozitív számsorozat, amelyekhez tartozó valemely x^*_q, y^*_q optimális megoldáspárra az alábbi három eset valemelyike áll fenn:

1/ $\|x_q^*\| \to \infty$ és $\|y_q^*\|$ korlátos,

2/ $\|x_q^*\|$ korlátos és $\|y_q^*\| \to \infty$,

3/ $\|x_q^*\| \to \infty$ és $\|y_q^*\| \to \infty$.

Jelöljük: $\tilde{x}_q^* = \dfrac{x_q^*}{\|x_q^*\|}$, és $\tilde{y}_q^* = \dfrac{y_q^*}{\|y_q^*\|}$.

Az $\tilde{x}_q^*$ korlátos ponthalmozásból kiválasztható konvergens részsorozat. Az egyszerűbb indexezés kedvéért feltehető, hogy ez már az, és legyen $\tilde{x}_q^* \to \tilde{x}^*$. Hasonlóan $\tilde{y}_q^* \to \tilde{y}^*$. Irjuk fel, hogy mit jelent az, hogy ezek optimális megoldások.

A duál feltételt kielégítik:

(10) $$x_q^*(A + \tau_q \hat{A}) = b + \tau_q \hat{b}\,, \qquad x_q \geq 0\,.$$

A primál feltételt kielégítik:

$$\sum_{i \in I_k}{}' e^{(a_i + \tau_q \hat{a}_i) y_q^* - (\gamma_i + \tau_q \hat{\gamma}_i)} \leq 1, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)\,,$$

de ekkor fennáll, hogy

(11) $$(A + \tau_q \hat{A}) y_q^* \leq c + \tau_q \hat{c}\,.$$

A két célfüggvény értéke megegyezik:

(12) $$\omega_q = (b + \tau_q \hat{b}) y_q^* = x_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(x_q^*)\,.$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy mindegyik esetben ellentétbe kerülünk a regularitási feltételek teljesülésével.

1. eset. A (10) és (12) összefüggésekből, $\|x_q^*\|$ normával való osztás után kapjuk, hogy

(13) $$\begin{cases} \tilde{x}_q^*(A + \tau_q \hat{A}) = \dfrac{1}{\|x_q^*\|}(b + \tau_q \hat{b})\,, \\[2ex] \tilde{x}_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(\tilde{x}_q^*) = \dfrac{1}{\|x_q^*\|}(b + \tau_q \hat{b}) y_q^*\,. \end{cases}$$

Mivel $\|y_q^*\|$ korlátos, a (13)-ból az x^* torlódási pontra nyerjük, hogy:

$$\tilde{x}^* A = 0\,, \qquad \|\tilde{x}^*\| = 1, \qquad \tilde{x}^* \geq 1\,, \quad \text{és} \quad \tilde{x}^* c + \psi(\tilde{x}^*) = 0\,,$$

ami ellentmond a duál regularitásnak.

2. eset. A (11) és (12) összefüggésekből $\|y_q^*\|$ normával való osztás után kapjuk, hogy

$$(14)\quad \begin{cases} (A+\tau_q\hat{A})\tilde{y}_q^* \leqslant \dfrac{1}{\|y_q^*\|}(c+\tau_q\hat{c}), \\ (b+\tau_q\hat{b})\tilde{y}_q^* = \dfrac{1}{\|y_q^*\|}[x_q^*(c+\tau_q\hat{c})+\psi(x_q^*)]. \end{cases}$$

Mivel $\|x_q^*\|$ korlátos, a (14)-ből az $\tilde{y}^*$ torlódási pontra nyerjük, hogy

$$A\tilde{y}^* \leqslant 0, \qquad b\tilde{y}^* = 0 \quad \text{és} \quad \|\tilde{y}^*\| = 1,$$

amely ellentmond a primál regularitási feltételnek.

3. eset. A (10), (11) és (12) összefüggésekből $\|\tilde{x}_q^*\|$ illetve $\|y_q^*\|$ normával való osztás után nyerjük, hogy

$$(15)\quad \tilde{x}_q^*(A+\tau_q\hat{A}) = \frac{1}{\|x_q^*\|}(b+\tau_q\hat{b}),$$

$$(16)\quad (A+\tau_q\hat{A})\tilde{y}_q^* \leqslant \frac{1}{\|y_q^*\|}(c+\tau_q\hat{c}),$$

$$(17)\quad \|y_q^*\|\,|(b+\tau_q\hat{b})\tilde{y}_q^*| = \|x_q^*\|\,|\tilde{x}_q^*(c+\tau_q\hat{c})+\psi(\tilde{x}_q^*)|.$$

A (15) és (16)-ból a torlódási pontokra kapjuk, hogy

$$(18)\quad \begin{cases} \tilde{x}^*A = 0, & \|\tilde{x}^*\| = 1, & \tilde{x}^* \geqslant 0, \quad \text{és} \\ A\tilde{y}^* \leqslant 0, & \|\tilde{y}^*\| = 1. \end{cases}$$

Azonban a regularitási feltételek teljesülése miatt a torlódási pontokra, melyekre (18) fennáll, kell, hogy az

$$(19)\quad \begin{cases} \tilde{x}^*c + \psi(\tilde{x}^*) > 0 \quad \text{és} \\ \qquad b\tilde{y}^* < 0 \end{cases}$$

egyenlőtlenségek teljesüljenek.

De (17)-ből adódik, hogy

$$(b+\tau_q\hat{b})\tilde{y}_q \to by$$

és

$$\tilde{x}_q^*(c+\tau_q\hat{c}) + \psi(\tilde{x}_q^*) \to \tilde{x}^*c + \psi(\tilde{x}^*),$$

ezért kell, hogy legyen olyan τ_{q_0}, melyre

$$(b+\tau_{q_0}\hat{b})\tilde{y}_{q_0}^* < 0 \quad \text{és} \quad \tilde{x}_{q_0}^*(c+\tau_{q_0}\hat{c}) + \psi(\tilde{x}_{q_0}^*) > 0,$$

Ami ellentmond a (17) egyenlőségnek.

Ezzel az egyenletes korlátosságot igazoltuk.

c/ Legyenek a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q, \ldots, \to 0$ zérushoz tartó sorozat valamely megfelelő optimális megoldásai az $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_q^*, \ldots$ illetve az $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_q^*, \ldots$ vektor sorozatok. *Megmutatjuk, hogy az* x_q^* *sorozat bármely torlódási pontja* $\mathscr{D}^*$ *halmazhoz, és hasonlóan* y_q^* *sorozat torlódási pontjai* $\mathscr{P}^*$ *halmazhoz tartoznak.*

Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy az indexezés már olyan, hogy $x_q^* \to x^*$ és $y_q^* \to y^*$.

Mivel x_q^*, y_q^* optimális megoldásai a τ_q paraméterű perturbált feladatnak, ezért fennáll, hogy

$$x_q^*(A + \tau_q \hat{A}) = b + \tau_q \hat{b}\,, \qquad x_q^* \geqslant 0\,,$$

$$\sum_{i \in I_k}' e^{(a_i + \tau_q \hat{a}_i) y_q^* - (\gamma_i + \tau_q \hat{\gamma}_i)} \leqslant 1\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{20}$$

$$(b + \tau_q \hat{b}) y_q^* = x_q^*(c + \tau_q \hat{c}) + \psi(x_q^*)\,.$$

Határértékben (20)-ból kapjuk, hogy

$$x^* A = b$$

$$x^* \geqslant 0\,,$$

$$\sum_{i \in I_k}' e^{a_i y^* - \gamma_i} \leqslant 1\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)\,,$$

$$b y^* = x^* c + \psi(x^*)\,,$$

azaz $x^* \in \mathscr{D}^*$ és $y^* \in \mathscr{P}^*$.

d/ A következőkben *meghatározzuk a program marginális értékét*, felhasználva a geometriai programozás Lagrange függvényének nyeregpont egyenlőtlenségét. A továbbiakban a Lagrange függvényben a programegyütthatókat is feltüntetjük.

Tetszőleges $\tau \in (0, \tau_0)$ paraméterre a Lagrange függvény nyeregpont egyenlőtlenségét az $x = x_0^*$, $y = y_0^*$ helyen felírva kapjuk, hogy

$$\Phi(A + \tau \hat{A}, b + \tau \hat{b}, c + \tau \hat{c}, x_\tau^*, y_0^*) \leqslant \omega(\tau) \leqslant \Phi(A + \tau \hat{A}, b + \tau \hat{b}, c + \tau \hat{c}, x_0^*, y_\tau^*)\,. \tag{21}$$

A $\tau = 0$ paraméternél az $x = x_\tau^*$, és $y = y_\tau^*$ helyen a nyeregpont egyenlőtlenségből -1-gyel való szorzás útján a

$$-\Phi(A, b, c, x_\tau^*, y_0^*) \leqslant -\omega(0) \leqslant -\Phi(A, b, c, x_0^*, y_\tau^*) \tag{22}$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

A (21) és (22) egyenlőtlenségeket összeadva és τ számmal osztva nyerjük, hogy

$$(x_\tau^* \hat{c} + \hat{b} y_0^* - x_\tau^* \hat{A} y_0^*) \leqslant \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} \leqslant (x_0^* \hat{c} + \hat{b} y_\tau^* - x_0^* \hat{A} y_\tau^*)$$

egyenlőtlenség fennáll minden $x_0^* \in \mathscr{P}^*$ és $y_0^* \in \mathscr{D}^*$ esetén.

De akkor fennáll a

$$\max_{y \in \mathscr{P}^*} (x_\tau^* \hat{c} + \hat{b} y - x_\tau^* \hat{A} y) \leqslant \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} \leqslant \min_{x \in \mathscr{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b} y_\tau^* - x\hat{A} y_\tau^*) \tag{23}$$

egyenlőtlenség is.

Minthogy bizonyításunk c/ részében megmutattuk, hogy y_τ^* torlódási pontjai $\mathscr{P}^*$ elemei, így tetszőleges $\epsilon > 0$-ra, ha τ elég kicsi, fennáll, hogy

$$\min_{x \in \mathscr{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b} y_\tau^* - x\hat{A} y_\tau^*) \leqslant \max_{y \in \mathscr{P}^*} \min_{x \in \mathscr{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b} y - x\hat{A} y) + \epsilon\,. \tag{24}$$

Hasonlóan, mivel x_τ^* torlódási pontjai egyúttal $\mathscr{D}^*$ pontjai is:

$$\max_{y \in \mathscr{P}^*} (x_\tau^* \hat{c} + \hat{b} y - x_\tau^* \hat{A} y) \geqslant \min_{x \in \mathscr{D}^*} \max_{y \in \mathscr{P}^*} (x\hat{c} + \hat{b} y - x\hat{A} y) - \epsilon\,. \tag{25}$$

A (23), (24) és (25) egybevetésével adódik, hogy

$$-\epsilon \leqslant \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} - \max_{y \in \mathscr{P}^*} \min_{x \in \mathscr{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b} y - x\hat{A} y) \leqslant + \epsilon$$

egyenlőtlenség teljesül tetszőleges $\epsilon > 0$ számra, ha τ elég kicsi, ami a tétel formulájával equivalens. ∎

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyításának c/ része önmagában is egy érdekes összefüggést ad a $\mathscr{P}_\tau^*$ és a $\mathscr{D}_\tau^*$, $\tau \in [0, \tau_0)$ paraméterű geometriai programozási feladat optimális megoldáshalmaz rendszereiről. Ez az összefüggés Dantzig–Folkman–Shapiro [1] egy általános halmazkonvergencia tételéből is kikövetkeztethető.

Irodalom

[1] G.B. Dantzig, J. Folkman and N. Shapiro, *On the continuity of the minimum set of a continuous function,* J. Math. Anal. Appl., 17 (1967), 519-548.

[2] R.J. Duffin, E.L. Peterson and C. Zener, *Geometric Programming,* John Wiley, New York, 1966.

[3] Klafszky E., *Geometriai programozás,* MTA Számítástechnikai Központ Közlemények 8 (1972), 41-65.

[4] Harlan D. Mills, *Marginal values of matrix games and linear programs,* Linear Inequalities and Related Systems, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1956). 183-193.

[5] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton, New Yersey, University Press, 1970.
[6] A.C. Williams, *Marginal values in linear programming*, J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 11, 1 (March, 1963), 82-94.

Beérkezett: 1972 augusztus 6.

Summary

Marginal Values in Geometric Programming

The present paper describes, how perturbational examinations carried out by Mills [1] and Williams [2] on linear programming can be adapted for the purpose of geometric programming too and how totally the results obtained with geometric programming conform to those obtained with linear programming.

The result of the paper is summarized in the theorem of Chapter 3, i.e.: Let us consider the pair of geometric programming problems (primal and dual) given, having a given partition and the coefficients being A, b, c; and let us further assume the perturbational coefficients to be $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ and the perturbational parameter should be the scalar $\tau \geqslant 0$.

Theorem. (I) The necessary and satisfactory condition for the perturbated problem with the coefficients $A + \tau\hat{A}$, $b + \tau\hat{b}$, $c + \tau\hat{c}$ to be consistant in some interval $[0, \tau_0)$, applying free chosen, but fixed perturbational coefficients, is a regular geometric programming. (Geometric programming is called regular if its lots of optimal solutions are not empty, limited ones.)

(II) If the problem is regular, there must exist an interval $[0, \tau_0)$ for the perturbational coefficients $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ which gives optimal solutions for the pair of perturbated problems and for every scalar $\tau \in [0, \tau_0)$ and if the value of the programme is nominated $\omega(\tau)$, the formula

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = \max_{y \in \mathscr{P}^*} \min_{x \in \mathscr{D}^*} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y) .$$

may be regarded as valid for the marginal value of the programme.

For the proof of the above mentioned theorem it is found desirable to demonstrate first the interconnection between the Lagrange-function and the lots of optimal solutions (Chapter 1) and that of the regularity conditions and the lots of optimal solutions (Chapter 2) as well.

Р е з ю м е

Маргинальные значения в геометрическом программировании

В этой работе мы покажем, что исследования возмущений, которые Миллс [1] и Вильямс [2] проводили в линейном программировании могут буть перенесены в геометрическое программирование и результаты полученные в геометрическом программировании, полностью совпадают с полученными в линейном программировании Результаты работы подитожены в теореме 3-его параграфа. Пусть дана пара задач геометрического программирования с коэффициентами A, b, c и с известным разбиением. Пусть $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c},$ – коэффициенты возмущения и скаляр $\tau \geqslant 0$-параметр возмущения.

Теорема: (I) Для того, чтобы возмущённая задача с коэффициентами $A+\tau\hat{A},\ b+\tau\hat{b},\ c+\tau\hat{c}$ была совместима на интервале $[0, \tau_0)$ при любых фиксированных коэффициентах возмущения, необходимо и достаточно, чтобы геометрическое программирование было регулярным /геометрическое программирование регулярно, если области его оптимальных решений не пусты и ограничены/. (II) Если задача регулярна, то для коэффициентов возмущения $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ существует интервал $[0, \tau_0)$, такой, что и возмущённая пара задач имеет оптимальное решение для каждого скаляра $\tau \in [0, \tau_0)$ и если значение программы обозначим через $\omega(\tau)$, то для маргинального значения программы выполняется

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\omega(\tau) - \omega(0)}{\tau} = \max_{y \in \quad *} \min_{x \in \quad *} (x\hat{c} + \hat{b}y - x\hat{A}y) .$$

Для доказательства теоремы необходимо показать связь между функцией Лагранжа и оптимальными решениями в геометрическом программировании (§I.) а также связь между условиями регулярности и областями оптимальных решений (§2.).