A "MEGENGEDETT IRÁNYOK" ELNEVEZÉSŰ NEMLINEÁRIS PROGRAMOZÁSI MÓDSZER KITERJESZTÉSE KVÁZIKONKÁV FELTÉTELI FÜGGVÉNYEK ESETÉRE

Prékopa András

1. BEVEZETÉS

Ebben a dolgozatban a Zoutendijk-féle un. megengedett irányok módszerét (l. [4], 74. old, P2 eljárás) terjesztjük ki arra az esetre, amikor a feltételi függvények nem feltétlenül konkávak, csupán kvázikonkávak. Kiterjesztésen elsősorban azt értjük, hogy az eredeti eljárás konvergenciáját az általánosabb, kvázikonkáv feltételi függvények esetére bizonyítjuk. Egyéb, főleg analítikus jellegű feltételeink is eltérnek az eredetiektől és a feltételi függvények kvázikonkávitásával együtt azoknál általánosabb esetet jelentenek.

A dolgozatban foglalt eredményeket korábban már közöltük [2], de rövidebb változatban és egy speciális sztohasztikus programozási feladattal ötvözötten.

Nem törekszünk arra, hogy gondosan összehasonlítsuk a dolgozatunkban említett lemmákat, segédtételeket és gondolatokat azok előzményeihez, részben azért, mert a felhasznált gondolatok jelentős részének folklór jellege miatt teljesen reális kép nem adható. Megjegyezzük azonban, hogy sokat merítettünk Z o u t e n d i j k [4] munkájából.

A következő nem-lineáris programozási feladat megoldásával foglalkozunk:

$$
\begin{aligned}
& G_i(\underline{x}) \geqslant p_i, \qquad i = 1, \ldots, m,\\
(1.1)\qquad & \underline{a}_i'\underline{x} \geqslant b_i, \qquad i = 1, \ldots, M,\\
& \min f(\underline{x}).
\end{aligned}
$$

Amennyiben az $\underline{x}$ vektorra vonatkozólag nem-negativitási kikötés van, ezt beépítve képzeljük a lineáris egyenlőtlenségek közé. Az (1.1) feladattal kapcsolatban a következő feltételeket vezetjük be:

F1. A $G_1(\underline{x}), \ldots, G_m(\underline{x})$ függvények egy K nyílt konvex halmaz $\bar{K}$ lezártján vannak értelmezve, ahol mindegyik $G_i(\underline{x})$ minden változója folytonosan deriválható.

F2. Ha $\underline{x} \in \bar{K}$ és az $\underline{x}$ vektorra teljesülnek az (1.1) feladat (összesen $m + M$ számú) feltételei, akkor $\underline{x}$ a $\bar{K}$ halmaz belső pontja, vagyis $\underline{x} \in K$. Az (1.1) feladat feltételei által meghatározott halmazt jelölje D. Nyilvánvaló, hogy D zárt halmaz. A 3. szakasztól kezdve azt is feltételezzük, hogy az (1.1) második sorában álló lineáris feltételek által meghatározott konvex poliéder korlátos.

F3. Az $f(\underline{x})$ függvény legyen értelmezve egy olyan H nyílt konvex halmazon, mely tartalmazza a D halmazt és feltesszük, hogy $f(\underline{x})$ valamennyi változója szerinti parciális derivált létezik és folytonos H-ban.

F4. Minden $\underline{x} \in D$ esetén, melyre

(1.2) $\quad G_i(\underline{x}) = p_i, \qquad i \in I_0 \subset \{1, \ldots, m\}$,

található olyan $\underline{y} \in D$, hogy (a gradiens mindig sorvektort fog jelenteni):

(1.3) $\quad \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y} - \underline{x}) > 0, \qquad i \in I_0$.

Ez a feltétel a konvex programozásban használatos Slater-féle feltételhez analóg.

F5. A $G_1(\underline{x}), \ldots, G_m(\underline{x})$ függvények kvázikonkávak $\bar{K}$-ban, $f(\underline{x})$ pedig konvex a saját értelmezési tartományában, H-ban.

Az F1. feltétellel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, hogy miért értelmezzük a $G_1(\underline{x}), \ldots$ $\ldots, G_m(\underline{x})$ függvényeket egy nyílt halmaz lezártján. A nyíltságra a deriválhatóság értelmezhetősége érdekében van szükség, ennek lezárására pedig azért, mert különben nem vagyunk benne biztosak, hogy az (1.1) feladat feltételei *egyedül* meghatározzák-e a D halmazt és nem csupán oly módon történik ez, hogy részben az $m + M$ számú feltétel, részben pedig az $\underline{x} \in K$ feltétel együtt határolják körül a megengedett megoldások halmazát. Igy ez nem fordulhat elő. A baj abból származhatnék, hogy a D halmaz zártsága kérdéses volna, márpedig ez a további megfontolások szempontjából elengedhetetlen.

Az F4. feltétellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy mivel minden $\underline{y}$ megengedett megoldásra

(1.4) $\quad G_i(\underline{y}) \geqslant p_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$

ezért, ha $\underline{x}$ teljesíti az (1.2) feltételt, akkor a $0 < t \leqslant 1$ esetben

(1.5) $\quad G_i(\underline{y}) = G_i(\underline{x}) + \nabla G_i(\underline{x} + \vartheta t(\underline{y} + \underline{x}))t(y - x) \geqslant p_i, \qquad i \in I_0, \qquad 0 > \vartheta > 1$,

ahonnan azt kapjuk, hogy

(1.6) $\quad \nabla G_i(\underline{x} + \vartheta t(\underline{y} - \underline{x}))(\underline{y} - \underline{x}) \geqslant 0, \qquad i \in I_0$.

Elvégezve a $t \to 0$ határátmenetet, a

(1.7) $\quad \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y} - \underline{x}) \geqslant 0, \qquad i \in I_0$

relációkhoz jutunk. Itt felhasználtuk azt, hogy az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ pontokat összekötő szakasz is D-hez tartozik, ám ezt biztosítja az F5. feltétel. Az (1.7) egyenlőtlenség tehát minden $\underline{y} \in D$-re teljesül, ennek egy élesebb változatát kívánja meg az F4. feltétel.

Az F1.-F5. feltételeket az egész dolgozatban további külön említés nélkül érvényeseknek tekintjük.

2. ELŐZETES LEMMÁK

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(2.1)\quad \begin{aligned} &I_C = \{1,\ldots,m\} \\ &I_C(\underline{x}) = \{i\colon\ i\in I_C,\ G_i(\underline{x}) = p_i\}, && \underline{x}\in D, \\ &I_L = \{1,\ldots,M\} \\ &I_L(\underline{x}) = \{i\colon\ i\in I_L,\ \underline{a}_i'\underline{x} = b_i\}, && \underline{x}\in D. \end{aligned}$$

1. lemma. *Legyen* $\underline{x}\in D$ *és legyenek* v_i, $i\in I_C(\underline{x})$, u_i, $i\in I_L(\underline{x})$ *olyan nem-negatív számok, melyekre teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$(2.2)\quad \sum_{i\in I_C(\underline{x})} v_i \nabla G_i(\underline{x}) + \sum_{i\in I_L(\underline{x})} u_i \underline{a}_i' = \underline{0}'.$$

Ekkor $v_i = 0$, $i\in I_C(\underline{x})$.

Bizonyítás. Legyen $\underline{y}\in D$ olyan vektor, mely az adott $\underline{x}$ esetén eleget tesz az F4. feltételnek. Szorozzuk meg (2.2) mindkét oldalát az $\underline{y}-\underline{x}$ vektorral skalárisan. Azt kapjuk, hogy

$$(2.3)\quad \begin{aligned} 0 &= \sum_{i\in I_C(\underline{x})} v_i \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y}-\underline{x}) + \sum_{i\in I_L(\underline{x})} u_i\underline{a}_i'(\underline{y}-\underline{x}) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{i\in I_C(\underline{x})} v_i \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y}-\underline{x}) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Minthogy itt az alsó sorban az összeg nem-negatív összeadandókat tartalmaz, azt kapjuk, hogy

$$(2.4)\quad v_i \nabla G_i(\underline{x})(\underline{y}-\underline{x}) = 0, \qquad i\in I_C(\underline{x}).$$

Az (1.3) egyenlőtlenségre való tekintettel innen azonnal adódik a lemma állítása.

A Kuhn-Tucker tételnél használt regularitási feltétel (constraint qualification) abban áll, hogy adott $\underline{x}\in D$ és minden az alábbi egyenlőtlenségeknek eleget tevő $\underline{h}$ vektor esetén:

$$(2.4)\quad \begin{aligned} &\nabla G_i(\underline{x})\underline{h} \geqslant 0, && i\in I_C(\underline{x}), \\ &\underline{a}_i'\underline{h} \geqslant 0, && i\in I_L(\underline{x}), \end{aligned}$$

található olyan $\psi(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $T>0$ differenciálható görbeív, mely teljes egészében D-ben van, tehát

$$(2.5)\quad \begin{aligned} &G_i(\underline{\psi}(t)) \geqslant p_i, && i \in I_C, \\ &\underline{a}_i'\underline{\psi}(t) \geqslant b_i, && i \in I_L, \end{aligned}$$

továbbá $t = 0$ pontbeli érintőjének iránya megegyezik $\underline{h}$-val, vagyis

$$(2.6)\quad \frac{d}{dt}\,\psi(t)\Big|_{t=0} = \underline{h}.$$

Itt az $I_C(\underline{x})$, $I_L(\underline{x})$ indexhalmazok közül az egyik, vagy akár mind a kettő is lehet üres. Ha $\underline{x}$ D-nek belső pontja, akkor elég kis t értékekre

$$(2.7)\quad \underline{\psi}(t) = \underline{x} + t\underline{h}$$

benne van D-ben. Ez a $\underline{\psi}(t)$ triviálisan teljesíti a (2.6) feltételt.

2. lemma. *Minden $\underline{x} \in D$ esetén teljesül a Kuhn-Tucker-féle regularitási feltétel.*

Bizonyítás. Elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $I_C(\underline{x})$ és $I_L(\underline{x})$ közül legalább az egyik nem üres. Legyen $\underline{h}$ a (2.4) feltételeknek eleget tevő vektor és tekintsük az alábbi differenciálható görbét

$$(2.8)\quad \underline{\psi}(t) = \underline{x} + t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})], \quad t \geqslant 0,$$

ahol $\underline{y} \in D$ eleget tesz az F4. feltétel kívánalmainak az $I_0 = I_C(\underline{x})$ esetben, $I_C(\underline{x})$-ről pedig tegyük fel, hogy nem üres. Legyen $i \in I_C(\underline{x})$. A (2.4) egyenlőtlenségek közül a felsők, továbbá az (1.3) egyenlőtlenségek maguk után vonják $t > 0$ esetén a

$$(2.9)\quad \nabla G_i(\underline{x})\,t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})] > 0$$

egyenlőtlenség fennállását. Ekkor azonban elég kis t értékekre

$$(2.10)\quad G_i(\underline{x} + t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})]) - G(\underline{x}) = \nabla G_i(\underline{x} + \vartheta t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})])\,t[\underline{h} + t(\underline{y} - \underline{x})] > 0,$$

ahol $0 < \vartheta < 1$. Van tehát olyan pozitív T, hogy

$$(2.11)\quad G_i(\underline{\psi}(t)) \geqslant p_i, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i \in I_C(\underline{x}).$$

Ami a lineáris feltételeket illeti, ezek a következő módon intézhetők el. Ha $i \in I_L(\underline{x})$, melyről most feltesszük, hogy nem üres, akkor minden $t \geqslant 0$ esetén

$$(2.12)\quad \underline{a}_i'\,\underline{\psi}(t) = \underline{a}_i'\underline{x} + t\underline{a}_i'\underline{h} + t^2\underline{a}_i'(\underline{y} - \underline{x}) \geqslant \underline{a}_i'\underline{x} = b_i.$$

Esszerint elég kis t értékek esetén $\underline{\psi}(t) \in D$ (a határozott egyenlőtlenséggel teljesülő feltételeket szintén nem zavarja meg a $\underline{\psi}(t)$ elég kis t esetén). Végül megjegyezzük, hogy mostani $\underline{\psi}(t)$ függvényünk triviálisan teljesíti a (2.6) feltételt, ezzel tehát a lemmát bebizonyítottuk.

Egy $\underline{x}^* \in D$ és minden $\underline{x} \in D$ esetén

$f(\underline{x}) \geqslant f(\underline{x}^*)$.

A *Kuhn-Tucker tétel* szükséges feltételt ad arra vonatkozólag, hogy egy nem-lineáris programozási problémának optimális megoldása legyen egy adott $\underline{x}^*$ vektor. Az 1. szakaszban felsorolt feltételek és az ebben a szakaszban bizonyított (az 1. szakasz feltételeiből következtetett) 2. lemmára támaszkodva kimondhatjuk, hogy (a bizonyítást illetően l. a [3] könyvet) ha $\underline{x}^*$ optimális megoldása az (1.1) feladatnak, akkor találhatók olyan

$$\begin{aligned} &\lambda_1^* \geqslant 0, \dots, \lambda_m^* \geqslant 0 , \\ (2.13) \qquad & \\ &\mu_1^* \geqslant 0, \dots, \mu_M^* \geqslant 0 \end{aligned}$$

számok, hogy

$$-\nabla f(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^{m}{}' \lambda_i^* \nabla G_i(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^{M}{}' \mu_i^* \underline{a}_i' = \underline{0}' ,$$

$$\sum_{i=1}^{m}{}' \lambda_i^* [G_i(\underline{x}^*) - p_i] + \sum_{i=1}^{M}{}' \mu_i^* [\underline{a}_i' \underline{x}^* - b_i] = 0 .$$

A (2.14) egyenlőségekkel kifejezett Kuhn-Tucker tétel akkor is érvényes, ha az F5. feltételtől eltekintünk, de megkívánjuk az ebben a szakaszban említett regularitási feltétel (constraint qualification) teljesülését. Mi a regularitási feltétel teljesülésének bizonyításához felhasználtuk D konvexitását, ami viszont az F5. feltétel következménye.

Következő lemmánk bizonyos Arrow és Enthoven-féle eredmények [1] adaptációját tartalmazza a mi esetünkre.

3. lemma. *Ha az* $\underline{x}^* \in D$ *pontban teljesülnek a* (2.14) *feltételek, ahol a* λ_i^*, μ_i^* *számok eleget tesznek a* (2.13) *követelményeknek, akkor* $\underline{x}^*$ *optimális megoldása az* (1.1) *feladatnak.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{x} \in D$ tetszőleges és szorozzuk meg skalárisan (2.14) felső sorát az $\underline{x} - \underline{x}^*$ vektorral. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] + \sum_{i=1}^{m}{}' \lambda_i^* \nabla G_i(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] + \sum_{i=1}^{M}{}' \mu_i^* \underline{a}_i' [\underline{x} - \underline{x}^*] = \\ (2.15) \qquad &= -\nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] + \sum_{i \in I_C(\underline{x}^*)}{}' \lambda_i^* \nabla G_i(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] + \\ &+ \sum_{i \in I_L(\underline{x}^*)}{}' \mu_i^* \underline{a}_i^* [\underline{x} - \underline{x}^*] \geqslant -\nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] . \end{aligned}$$

Minthogy $f(\underline{x})$ konvex a $H \supset D$ halmazon, következik, hogy

$$(2.16) \quad f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) \geqslant \nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] .$$

Ám a (2.15) relációkból azt kaptuk, hogy

(2.17) $\nabla f(\underline{x}^*)[\underline{x} - \underline{x}^*] \geqslant 0$.

Ezt figyelembe véve, (2.16)-ból azonnal adódik az $\underline{x}^* \in D$ vektor optimalitását jelentő

(2.18) $f(\underline{x}) \geqslant f(\underline{x}^*)$, $\quad \underline{x} \in D$

egyenlőtlenség. Ezzel a 3. lemmát bebizonyítottuk.

3. ALGORITMUS AZ (1.1) FELADAT MEGOLDÁSÁRA.

A feladat megoldására vonatkozó algoritmusunk formálisan megegyezik a Zoutendijk által bevezetett algoritmussal (mint említettük, a P2 algoritmusról van szó [4] 74. oldalán), azonban mi ezt általánosabb függvénykategóriára alkalmazzuk, mégpedig a kvázikonkáv feltételi függvények esetére konkáv függvények helyett. Másrészt a függvényekkel kapcsolatos regularitási feltételeink is sajátosak, eltérnek a korábban használtaktól, azoknál gyengébbek.

Az eljárás egy végtelen algoritmus, mely minden egyes lépésben egy lineáris programozási feladat megoldását kívánja meg és az optimumértékek így kapott sorozata konvergál az (1.1) feladat optimum-értékéhez. Az optimális megoldásoktól nem kívánunk meg konvergenciát.

Kiindulunk egy tetszőleges $\underline{x}_i \in D$ vektorból. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ vektorokat, melyek a D halmaz elemei. Megadjuk $\underline{x}_{k+1}$ konstruálásának a módját. Tekintjük a következő lineáris programozási feladatot:

$$
(3.1) \qquad
\begin{aligned}
G_i(\underline{x}_k) + \nabla G_i(\underline{x}_k)[\underline{x} - \underline{x}_k] + \vartheta_i y &\geqslant p_i , & i &\in I_C ,\\
\underline{a}_i' \underline{x} &\geqslant b_i , & i &\in I_L ;\\
\nabla f(\underline{x}_k)[\underline{x} - \underline{x}_k] &\geqslant y , & &\\
\min y , & & &
\end{aligned}
$$

ahol a ϑ_i-k a későbbiekben is előjövő, de az egész eljárás alatt rögzített, viszont tetszőleges pozitív számok. A (3.1) feladatban a változó vektor $n+1$-dimenziós, ha $\underline{x}$ n-dimenziós, ugyanis egy új változó, az y került be a feladatba. Minthogy feltétel szerint az (1.1) feladat lineáris feltételei korlátos konvex poliédert (konvex poliópot) határoznak meg, ezért tetszőlegesen rögzített y esetén a (3.1) feladat feltételeinek eleget tevő $\underline{x}$-halmaz korlátos. Emiatt y, a célfüggvény alulról korlátos és így a feladatnak van véges optimuma és optimális megoldása. Megjegyezzük, hogy a (3.1) feladat feltételeinek eleget tevő $\underline{x}, y$ halmaz nem üres, mert pl. tartalmazza az $\underline{x} = \underline{x}_k$, $y = 0$ vektort.

A (3.1) lineáris programozási feladatot megoldjuk. A megoldás után megállapítható, hogy $\underline{x}_k$, $y = 0$ optimális megoldása-e (3.1)-nek, vagy nem. Az előbbi esetben az (1.1) feladat megoldására irányuló egész eljárás véget ér, később megmondjuk, miért. Ha $\underline{x}_k$, $y = 0$ nem optimális megoldása a (3.1) feladatnak, akkor tekintjük az alábbi félegyenest

$$\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k), \qquad \lambda \geqslant 0 , \tag{3.2}$$

ahol $\underline{x}_k^*$ optimális megoldása a (3.1) feladatnak és minimalizáljuk az $f(\underline{x})$ függvényt ennek a félegyenesnek és az (1.1) feladat megengedett megoldásai D halmazának a közös részén, mely egy véges zárt intervallum. Másszóval, ha μ_k az a legnagyobb λ, melyre

$$\begin{aligned} &G(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) \geqslant p_i , && i \in I_C , \\ &\underline{a}_i'(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) \geqslant b_i , && i \in I_L , \end{aligned} \tag{3.3}$$

akkor meghatározzuk azt a λ_k számot, melyre

$$f(\underline{x}_k + \lambda(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) \geqslant f(\underline{x}_k + \lambda_k(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k)) , \text{ ha } \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \mu_k \tag{3.4}$$

és ezek után az $\underline{x}_{k+1}$ vektort az alábbi egyenlőséggel értelmezzük

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \lambda_k(\underline{x}_k^* - \underline{x}_k) . \tag{3.5}$$

Ha $\underline{x} = \underline{x}_k$, $y = 0$ optimális megoldása (3.1)-nek, akkor $\underline{x}_k$ optimális megoldása az (1.1) feladatnak, ezt mindjárt bebizonyítjuk. Ha viszont ez egyetlen k esetén sem következik be, akkor az eljárás végtelen és az 5. szakaszban bebizonyítjuk majd, hogy

$$\lim_{k \to \infty} f(\underline{x}_k) = \min_{\underline{x} \in D} f(\underline{x}) . \tag{3.6}$$

1. Tétel. *A* (3.1) *feladat optimuma* (y_{opt}) *egyenlő* 0-*val akkor és csak akkor, ha* $\underline{x}_k$ *optimális megoldása az* (1.1) *feladatnak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $y_{\text{opt}} = 0$. Ekkor minden, a (3.1) feladat feltételeinek eleget tevő $\underline{x}, y$ vektor esetén $y \geqslant 0$. Tekintsük azokat a $G_i(\underline{x}) \geqslant p_i$ feltételeket, melyekre egyenlőség teljesül $\underline{x} = \underline{x}_k$ esetén. Ezek indexei alkotják az $I_C(\underline{x}_k)$ indexhalmazt. Az összesen $n + 1$-változós alábbi homogén lineáris egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{aligned} \nabla G_i(\underline{x}_k)\underline{z} + \vartheta_i y &\geqslant 0 , && i \in I_C(\underline{x}_k) \\ \underline{a}_i'\underline{z} &\geqslant 0 , && i \in I_L(\underline{x}_k) \\ -\nabla f(\underline{x}_k)\underline{z} + y &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

maga után vonja a következő lineáris egyenlőtlenséget:

$$y \geqslant 0 . \tag{3.8}$$

Ha ugyanis volna olyan $\underline{z}, y$ melyre (3.7) teljesül és $y < 0$, akkor a (3.7) rendszer homogenitása miatt ilyen a $t\underline{z}, ty$ vektor is minden pozitív t esetén. Legyen t olyan kis pozitív szám, hogy a (3.1) feladatban az $\underline{x} = \underline{x}_k$, $y = 0$ esetben inaktív feltételek (az $i \notin I_C(\underline{x}_k)$, $i \notin I_L(\underline{x}_k)$ indexű feltételek, vagyis amelyek határozott egyenlőtlenséggel teljesülnek) teljesült feltételek maradjanak az

$$(3.9) \qquad \begin{pmatrix} \underline{x}_k \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \underline{z} \\ y \end{pmatrix}$$

vektor esetén is. Mivel a (3.9) vektor elég kis $t > 0$ esetén kielégíti mindegyik feltételt (3.1)-ben és utolsó komponense negatív, nem lehet $y_{\text{opt}} = 0$. Vagyis (3.8) valóban következménye a (3.7) lineáris egyenlőtlenségrendszernek. Farkas tétele szerint (3.8) bal oldalának gradiense nem negatív súlyokkal vett lineáris kombinációja (3.7) bal oldalai gradienseinek. Találhatók tehát olyan

$$(3.10) \qquad \begin{aligned} &v_i \geq 0\,, && i \in I_C(\underline{x}_k) \\ &u_i \geq 0\,, && i \in I_L(\underline{x}_k) \\ &w \geq 0 \end{aligned}$$

számok, hogy

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} &\sum_{i \in I_C(\underline{x}_k)}' v_i \nabla G_i(\underline{x}_k) + \sum_{i \in I_C(\underline{x}_k)}' u_i \underline{a}_i' - w \nabla f(\underline{x}_k) = \underline{0}'\,, \\ &\sum_{i \in I_C(\underline{x}_k)}' v_i \vartheta_i + w = 1\,. \end{aligned}$$

Itt $w = 0$ nem lehetséges, mert akkor a 2. szakasz 1. lemmájából az következnék, hogy

$$v_i = 0\,, \qquad i \in I_C(\underline{x}_k)\,,$$

ami ellentmond (3.11) második sorának. A (3.11) alatti első egyenlőséget elosztva a $w > 0$ számmal, azt kapjuk, hogy teljesülnek a (2.14), úgynevezett Kuhn-Tucker-feltételek az $\underline{x}^* = \underline{x}_k$ vektorral és az alábbi számokkal

$$(3.12) \qquad \begin{aligned} &\lambda_i^* = \frac{v_i}{w}\,, && i \in I_C(\underline{x}_k)\,, \\ &\lambda_i^* = 0\,, && i \in I_C - I_C(\underline{x}_k)\,, \\ &\mu_i^* = \frac{u_i}{w}\,, && i \in I_L(\underline{x}_k)\,, \\ &\mu_i^* = 0\,, && i \in I_L - I_L(\underline{x}_k)\,. \end{aligned}$$

Ilyenformán, az előző szakasz 3. lemmája szerint $\underline{x}_k$ optimális megoldása az (1.1) feladatnak.

Tegyük most fel, hogy $\underline{x}_k$ optimális megoldása az (1.1) feladatnak. Ekkor teljesülnek a (2.14), Kuhn-Tucker-feltételek az $\underline{x}_k$ vektorral. Ebből következik, hogy fennállnak a (3.11) egyenlőségek nem-negatív u_i, v_i, w számokkal. Itt $v_i = 0$, ha $G_i(\underline{x}_k) > p_i$ és $u_i = 0$, ha $\underline{a}_i' \underline{x}_k > b_i$. Eszerint a (3.8) lineáris egyenlőtlenség következménye a (3.7) lineáris egyenlőtlenségeknek. Ebből viszont az következik, hogy $y_{\text{opt}} \geqslant 0$ a (3.1) lineáris programozási feladatban. Minthogy azonban $\underline{x} = \underline{x}_k$, $y = 0$ megengedett megoldása a (3.1) feladatnak, azért $y_{\text{opt}} = 0$. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

4. SEGÉDTÉTELEK AZ ELJÁRÁS KONVERGENCIÁJÁNAK BIZONYITÁSÁHOZ

Ebben a szakaszban két segédtételt bizonyítunk be. Jelöléseink függetlenek a többi szakaszban alkalmazott jelölésektől. Legyen K korlátos zárt halmaz R^n-ben, $F(\underline{x})$ pedig legyen értelmezve egy a K halmazt tartalmazó nyílt halmazon. Feltesszük, hogy $F(\underline{x})$ folytonos gradienssel bír az értelmezési tartományában.

1. segédtétel. *Legyen* $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$ *egy* K*-beli vektorokból alkotott sorozat és* $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \ldots$ *egy korlátos vektorsorozat. Legyen továbbá* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ *egy pozitív számokból alkotott sorozat és tegyük fel, hogy*

(4.1) $\underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k \in K, \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_k, \qquad k = 1, 2, \ldots;$

és létezik olyan $\epsilon > 0$, *hogy*

(4.2) $\nabla F(\underline{y}_k)\underline{t}_k \geqslant \epsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots.$

Legyen $0 < \epsilon_1 < \epsilon$, *továbbá tegyük még fel, hogy*

(4.3) $\lim\limits_{k \to \infty} \gamma_k = 0\,.$

Azt állítjuk, hogy legfeljebb véges sok k *index kivételével fennáll a*

(4.4) $\nabla F(\underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k)\underline{t}_k \geqslant \epsilon_1\,, \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_k$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Ellentétben a (4.4) relációval, tételezzük fel, hogy végtelen sok k index esetén

(4.5) $\nabla F(\underline{y}_k + \gamma_k' \underline{t}_k)\underline{t}_k < \epsilon_1\,,$

alkalmas $0 < \gamma_k' \leqslant \gamma_k$ számok esetén. (4.2) és (4.5) kombinációjából azt kapjuk, hogy végtelen sok k index esetén

(4.6) $[\nabla F(\underline{y}_k) - \nabla F(\underline{y}_k + \gamma_k' \underline{t}_k)]\,\underline{t}_k \geqslant \epsilon - \epsilon_1 > 0\,.$

Ez azonban ellentmondás, mert a $\underline{t}_k$ sorozat korlátos, $\gamma'_k \to 0$, ha $k \to \infty$, tehát $\nabla F(\underline{x})$ egyenletes folytonossága miatt (4.6) bal oldalának 0-hoz kell tartania, ha $k \to \infty$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2. segédtétel. *Legyen* $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ *egy* K*-beli elemekből alkotott sorozat,* $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots$ *egy korlátos vektorsorozat,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *egy pozitív számokból alkotott sorozat, ahol*

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \lambda_k \underline{s}_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.7}$$

Tegyük fel, hogy $\underline{x}_k + \lambda \underline{s}_k \in K$, $0 \leq \lambda \leq \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *továbbá*

$$F(\underline{x}_{k+1}) = F(\underline{x}_k + \lambda_k \underline{s}_k) \geq F(\underline{x}_k + \lambda \underline{s}_k), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.8}$$

Legyenek $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$; $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \ldots$; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ *az előbbi sorozatok azonos indexű elemeinek kiválogatása révén nyert részsorozatai. Legyen* $\epsilon > 0$ *és tegyük fel, hogy*

$$\nabla F(\underline{y}_i)\underline{t}_i \geq \epsilon, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{4.9}$$

Azt állítjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty . \tag{4.10}$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy rögzített i indexet és legyen k az az index, melyre $\underline{x}_k = \underline{y}_i$. A (4.8) egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(\underline{x}_{k+1}) - F(\underline{x}_1) &= \sum_{j=1}^{k} [F(\underline{x}_{j+1}) - F(\underline{x}_j)] = \sum_{j=1}^{k} [F(\underline{x}_j + \lambda_j \underline{s}_j) - F(\underline{x}_j)] \geq \\ &\geq \sum_{r=1}^{i} [F(\underline{y}_r + \gamma_r \underline{t}_r) - F(\underline{y}_r)] \geq \sum_{r=1}^{i} [F(\underline{y}_r + \gamma'_r \underline{t}_r) - F(\underline{y}_r)] , \end{aligned} \tag{4.11}$$

ahol γ'_r a legnagyobb olyan γ, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek

$$\begin{aligned} &\gamma \leq \gamma_r \\ &\nabla F(\underline{y}_r + \gamma \underline{t}_r)\underline{t}_r \geq \epsilon_1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

és $0 < \epsilon_1 < \epsilon$. Folytatva a (4.11) relációkat azt kapjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^{i} [F(\underline{y}_r + \gamma'_r \underline{t}_r) - F(\underline{y}_r)] = \sum_{r=1}^{i} \nabla F(\underline{y}_r + h_r \gamma'_r \underline{t}_r)\gamma'_r \underline{t}_r \geq \epsilon_1 \sum_{r=1}^{i} \gamma'_r , \tag{4.13}$$

ahol $0 < h_r < 1$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{r=1}^{\infty} \gamma'_r < \infty . \tag{4.14}$$

Bebizonyítjuk, hogy legfeljebb véges sok index kivételével fennáll a $\gamma_r = \gamma_r'$ egyenlőség. Valóban, ha egy r indexre $\gamma_r' < \gamma_r$, akkor

$$\nabla F(\underline{y}_r + \gamma_r' \underline{t}_r) = \epsilon_1 \tag{4.15}$$

és ezt (4.9)-cel kombinálva a

$$[\nabla F(\underline{y}_r) - \nabla F(\underline{y}_r + \gamma_t' \underline{t}_r)]\underline{t}_r \geqslant \epsilon - \epsilon_1 > 0 \tag{4.16}$$

relációt kapjuk. Ez végtelen sok r esetén nem állhat fenn, mert $\nabla F(\underline{x})$ egyenletesen folytonos a K halmazon. Ezzel a 2. segédtételt is bebizonyítottuk.

5. AZ ELJÁRÁS KONVERGENCIÁJÁNAK BIZONYITÁSA

Tekintjük az az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ sorozatot, melyet a 3. szakaszban ismertetett eljárás során nyerünk. Ha ez a sorozat véges, akkor az 1. tétel szerint eljutottunk az (1.1) feladat egy optimális megoldásához. Tehát csak a végtelen sorozat esetével kell foglalkoznunk. Bizonyıtandó a (3.6) reláció, míg maguknak az $\underline{x}_k$ vektoroknak a konvergenciájával nem törődünk.

Minthogy az (1.1) feladat megengedett megoldásainak a halmaza korlátos, ezért korlátos az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ sorozat is. Kiválasztható tehát ebből egy konvergens részsorozat, melynek elemeit $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$ jelölik. Legyen

$$\underline{y}^* = \lim_{k \to \infty} \underline{y}_k . \tag{5.1}$$

Tekintsük az alábbi, $\underline{x}_k$ helyett az $\underline{y}^*$ vektorra felírt (3.1) típusú feladatot:

$$\begin{aligned} G_i(\underline{y}^*) + \nabla G_i(\underline{y}^*)[\underline{x} - \underline{y}^*] + \vartheta_i y &\geqslant p_i, & i &\in I_C, \\ \underline{a}_i'\underline{x} &\geqslant b_i, & i &\in I_L, \\ \nabla f(\underline{y}^*)[\underline{x} - \underline{y}^*] &\leqslant y, \\ \min y . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ha itt $y_{\text{opt}} = 0$, akkor $\underline{y}^*$ optimális megoldása az (1.1) feladatnak. Indirekt bizonyítással élve, tegyük fel, hogy $y_{\text{opt}} = -\delta < 0$. Ez a (3.6) reláció ellenkezője, hogy ti. van ilyen $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$ részsorozat.

Az (5.2) feladat felső sorában álló feltételek bal oldalán a gradiensek nem zéró vektorok, mert $\vartheta_i > 0$ minden $i \in I_C$ esetén. Ebből következik, hogy az $\underline{y}^*$ vektornak van olyan $N(\underline{y}^*)$ környezete, hogy minden $\underline{z} \in N(\underline{y}^*) \cap D$ esetén a megfelelő $y_{\text{opt}} \leqslant -\delta/2$.

Legyen $\underline{s}_k = \underline{x}_k^* - \underline{x}_k$ (l. az eljárás leírását a 3. szakaszban) és legyenek $\underline{t}_k, \gamma_k$ az $\underline{s}_k, \lambda_k$ sorozatok részsorozatai, melyek ugyanolyan indexekhez tartoznak, mint $\underline{y}_k$ elemei az

$\underline{x}_k$ sorozatban. Ha k elég nagy, akkor $\underline{y}_k \in N(\underline{y}^*)$, ezért (5.2) utolsó feltételének a figyelembe vételével ($\underline{y}^*$ helyett $\underline{y}_k$ írandó) azt kapjuk, hogy

$$(5.3) \qquad -\nabla f(\underline{y}_k)\underline{t}_k \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Az előző szakaszban bizonyított 2. segédtétel szerint ebből az adódik, hogy

$$(5.4) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty ,$$

és ez maga után vonja a

$$(5.5) \qquad \lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0$$

relációt. Legyen $0 < \delta_1 < \frac{\delta}{2}$. Az előző szakasz 1. segédtétele szerint legfeljebb véges sok k kivételével fennáll a

$$(5.6) \qquad -\nabla f(\underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k \geqslant \delta_1, \quad \text{ha} \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_k$$

egyenlőtlenség. Eszerint az f függvény az $\underline{y}_k$ pontból a $\underline{t}_k$ irányba haladva csökken az

$$(5.7) \qquad \underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k , \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_k$$

szakasz minden pontjában, még a $\gamma = \gamma_k$ esetnek megfelelő végpontban is. Ilyenformán, akkor, amikor az $\underline{y}_k$ pontból elindulva, az f függvényt minimalizáljuk a $\underline{t}_k$ irányba eső félegyenesnek D-vel vett közös részén, akkor előbb állítja meg D a $\underline{t}_k$ irányban való előrehaladást, mintsem elérnénk f egy minimumhelyéhez. Tekintsük az (1.1) feladat feltételeit az

$$(5.8) \qquad \underline{y}_k + \lambda \underline{t}_k , \qquad \lambda \geqslant 0$$

félegyenes mentén. Az (5.8) vektor addig van benne a D halmazban, amíg

$$(5.9) \qquad \begin{aligned} G_i(\underline{y}_k + \lambda \underline{t}_k) &\geqslant p_i , \qquad i \in I_C , \\ \underline{a}_i'(\underline{y}_k + \lambda \underline{t}_k) &\geqslant b_i , \qquad i \in I_L , \end{aligned}$$

A második sorban álló feltételek mind megengedik a $\lambda = 1$ értéket is, mert ekkor

$$(5.10) \qquad \underline{y}_k + \underline{t}_k = \underline{y}_k^* ,$$

ha $\underline{y}_k^*$ jelöli az $\underline{x}_k^*$ megfelelő részsorozatát, tehát (5.9) első sorában áll az a feltétel, ill. állnak azok a feltételek, amelyek a $\underline{t}_k$ irányban való előrehaladását megakasztják. Minthogy ez végtelen sok k esetén van így és csak véges sok a feltételeink száma, van olyan $j \in I_C$, melyre ez végtelen sokszor teljesül. Feltehetjük, hogy az $\underline{y}_k$ sorozat már olyan, hogy ez legfeljebb véges sok k kivételével teljesül. Ilyenformán azt kapjuk, hogy

$$(5.11) \qquad G_j(\underline{y}_k + \gamma_k \underline{t}_k) = p_j , \qquad k \geqslant k_0 .$$

Minthogy $\underline{y}_k \in D$, fennáll a

(5.12) $\quad G_j(\underline{y}_k) \geqslant p_j$

egyenlőtlenség is. Az (5.11) egyenlőségből azonnal adódik, hogy

(5.13) $\quad \lim\limits_{k \to \infty} G_j(\underline{y}_k) = p_j \, .$

Esszerint elég nagy k esetén fennáll a

(5.14) $\quad p_j - G_j(\underline{y}_k) \geqslant - \epsilon \, ,$

egyenlőtlenség, ahol ϵ előre megadott pozitív szám. Ha k olyan nagy, hogy $\underline{y}_k \in N(\underline{y}^*)$, akkor az is igaz, hogy $\underline{y}_k$ vektorra felírt (3.1) feladat esetén

(5.15) $\quad - y_{\mathrm{opt}} \geqslant \frac{\delta}{2} \, .$

Az (5.14), (5.15) egyenlőtlenségek, továbbá az $\underline{y}_k$ vektorral felírt (3.1) feladatból nyert

(5.16) $\quad G_j(\underline{y}_k) + \nabla G_j(\underline{y}_k)[\underline{y}_k^* - \underline{y}_k] + \vartheta_j y_{\mathrm{opt}} \geqslant p_j$

egyenlőtlenség együtt maguk után vonják az alábbit:

(5.17) $\quad \nabla G_j(\underline{y}_k)\underline{t}_k \geqslant \vartheta_j \frac{\delta}{2} - \epsilon = \epsilon_1 \, .$

Az $\epsilon > 0$ számot megválaszthatjuk olyan kicsinek, hogy $\epsilon_1 > 0$. Mivel a γ_k sorozat 0-hoz tart, az előző szakasz 1. segédtétele szerint minden $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ esetén

(5.18) $\quad \nabla G_j(\underline{y}_k + \gamma \underline{t}_k)\underline{t}_k \geqslant \epsilon_2 \, , \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_k \, .$

Ez ellentmond az (5.11), (5.12) relációknak, mert azokból következik, hogy az $\underline{y}_k$ és $\underline{y}_k +$ $+ \gamma_k \underline{t}_k$ közötti szakasz belsejében valahol (5.18) bal oldala 0-val egyenlő. Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy fennáll a

2. Tétel. *Ha a 3. szakaszban konstruált* $\underline{x}_k$ *sorozat véges, utolsó eleme* $\underline{x}_N$, *akkor*

(5.19) $\quad f(\underline{x}_N) = \min\limits_{\underline{x} \in D} f(\underline{x}) \, .$

Ha az $\underline{x}_k$ *sorozat végtelen, akkor*

(5.20) $\quad \lim\limits_{k \to \infty} f(\underline{x}_k) = \min\limits_{\underline{x} \in D} f(\underline{x}) \, .$

I r o d a l o m

[1] K.J. Arrow and A.C. Enthoven, Quasi-concave programming, Econometrica 29 (1961), 779-800.

[2] A. Prékopa, On probabilistic constrained programming, Proc. Princeton Symp. on Math. Prog., Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970, 113-138.

[3] Prékopa András, Lineáris Programozás I. Az Operációkutatás Matematikai Módszerei (szerkesztő Prékopa A.), Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.

[4] G. Zoutendijk, Methods of Feasible Directions, Elsevier, Amsterdam, 1960.

Beérkezett: 1972 május 15.

S u m m a r y

Extension of the Method of Feasible Directions to the Case of Quasi-concave Constraint Functions

The convergence of the method of feasible directions is proved for the case of quasi-concave constraint functions. The results are already published in English [2] but in a specialized form, amalgamated with a special stochastic programming problem, while the present paper considers the problem more generally.

Р е з ю м е

Распространение метода нелинейного программирования под названием "допустимые направления" на случай квазивогнутых ограничений

В этой работе доказывается сходимость метода допустимых направлений в случае, когда ограничения являются квазивогнутыми функциями. Наши результаты были опубликованы на английском языке в статье [2], правда, в тесной связи с одной специфической задачей стохастического программирования, тогда как настоящая работа рассматривает проблему в общем случае.