

Dr. Kollár Lajos, az MTA levelező tagja

AZ EGYSZERŰSÍTETT KONTINUUM-MÓDSZER HASZNÁLATA  
KÉTRÉTEGŰ TÉRRÁCSOK MÉRETEZÉSÉHEZ

1. BEVEZETÉS

A kétrétegű térbeli rácsszerkezetek (térrácsok) két, egymással párhuzamos rácsos övsíkból és az őket összekötő rácsozásból állnak. (Az övek görbe felületeken is elhelyezkedhetnek, de ezzel a szerkezetfajttal a jelen dolgozatban nem foglalkozunk részletesen.) Többnyire lefedőszerkezetnek használjuk őket; erőjátékuk lényegében megfelel a hajlított síklemezének.

A térrácsok rúderőit általában számítógéppel határozzuk meg. A vázlat-tervezéshez azonban szükségünk van egy olyan egyszerű módszerre, amely egyrészt szemléletes képet ad az erőjátékokról, azaz segítségével meg tudjuk állapítani, hogy bizonyos szerkezeti változtatások milyen módon befolyásolják az erőjátékot, másrészt pedig lehetővé teszi a rúdkeresztmetszetek (közelítő) felvételét és ezzel az anyagszükséglet megbecslését.

Erre a célra a térrácsok kontinuum-módszere használható, amelynek elméletét /Kollár és Hegedűs, 1985/-ben találhatjuk meg. Alkalmazásának feltétele az, hogy a térrács hálózata szabályos legyen, azaz ismétlődő elemekből álljon (ún. eltolási szimmetriával rendelkezék). Ebben a dolgozatban csak ilyen hálózatú rácsokkal fogunk foglalkozni. A következőkben röviden összefoglaljuk e módszer alapelveit, majd a gyakorlatban használható módon ismertetjük a főbb eredményeket.

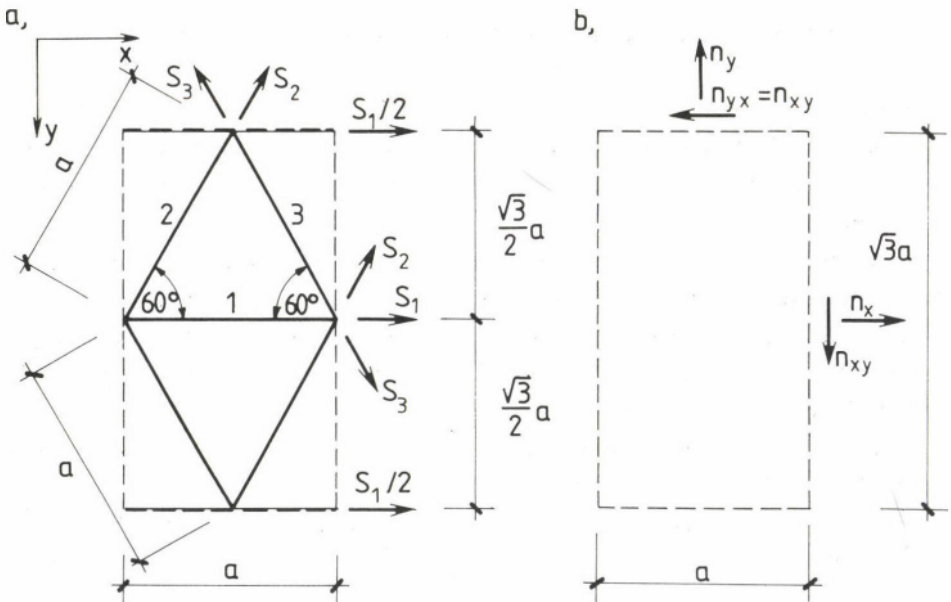
A kontinuum-módszer lényege, hogy a diszkrét elemekből álló térrácsot olyan folytonos modellel helyettesítjük, amelynek merevségei — a térrács legkisebb ismétlődő elemének megfelelő területen — megegyeznek a térrácséival.

A különböző térrács-típusoknak (és térrács-övsíkoknak) különböző kontinuumok felelnek meg (közönséges, azaz tömör keresztmetszetű tárcsa, ill. lemez, bordáslemez, vagy ún. magasabbrendű kontinuum). Az egyszerűsített kontinuum-módszerben arra törekszünk, hogy — bizonyos elhanyagolásokkal — mindig egyszerű lemezzel tudjuk modellezni a térrácsot.

## 2. AZ EGYRÉTEGŰ RÚDHÁLÓZATOK STATIKAI TULAJDONSÁGAI ÉS HELYETTESÍTŐ KONTINUUMA

Mielőtt rátérnénk a kétrétegű térrácsok tárgyalására, először az egyrétegű, csuklós csomópontú hálózat statikai tulajdonságait kell elemeznünk.

Az egyrétegű rácsozatnak statikai (azaz merevségi) szempontból egyenértékű kontinuuma a tárcsa. Az egyenértékűség azt jelenti, hogy a rácsból kivágható legkisebb elemi cella (amelyből a rács fel van építve) ugyanolyan mértékben deformálódik bármely igénybevételre, mint az ugyanolyan területű tárcsadarab (2.1. ábra).



2.1. ábra

A következőkben tehát a tárcsák merevségi tulajdonságait kell áttekin-  
tenünk.

### 2.1. A tárcsa merevségi tulajdonságai

A tárcsa merevségi jellemzőit az ún. (nyúlási) merevségi mátrixba foglalhatjuk össze, amely kapcsolatot teremt az  $x, y$  koordináta-rendszerben értelmezett alakváltozás- és feszültségállapot elemei között:



$$\underline{n} = \underline{T} \underline{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

ahol

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

a vektorba foglalt metszeterőket (2.1b. ábra),

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

a vektorba foglalt alakváltozás-komponenseket jelenti, és

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

a tárcsa merevségi mátrixa. Elemei közül  $T_{11}$  és  $T_{22}$  az x, ill. y irányú húsi,  $T_{33}$  pedig a nyírási merevség; e három elemet "fő merevségeknek" hívjuk, mivel ha közülük egyik sem zérus, akkor a tárcsa mindennemű igénybevételre alaktartó (merev) akkor is, ha az összes többi (mellék-) merevség zérus. (Pontosabban fogalmazva: a főmerevségek megléte csak akkor biztosítja a tárcsa merevségét, ha a merevségi mátrix determinánsa nem zérus, aminek elégséges feltétele, hogy valamennyi mellékmerevség kisebb legyen valamennyi főmerevségnél. Ez a valóságos tárcsákban mindig teljesülni szokott.) Ha a főmerevségek közül az egyik zérus, akkor a tárcsa a neki megfelelő igénybevétellel szemben nem fejt ki ellenállást, azaz alakját változtató (labilis).

A merevségi mátrix mindig szimmetrikus a főátlójára, azaz  $T_{ij} = T_{ji}$ .

A  $T_{12} = T_{21}$  elemet haránt-(irányú húzási) merevségnek hívjuk.

A merevségi mátrix és így az egyes merevségek is koordináta-rendszerhez kötött mennyiségek; egy elfordított koordináta-rendszerben általában megváltoznak a mátrix elemei. Kivételt képez az izotrop tárcsa, amelynek merevségi mátrixa érzéketlen a koordináta-rendszer elfordítására.

Az izotrópia feltételei az alábbiak:

$$T_{11} = T_{22}, \quad (2.5a)$$

$$T_{13} = T_{23} = 0, \quad (2.5b)$$

$$T_{11} = T_{12} + 2T_{33}. \quad (2.5c)$$

Az izotrop tárcsa esetében a

$$\nu' = \frac{T_{12}}{T_{11}} \quad (2.6)$$

arány a harántkontrakciós tényező.

Az izotrop merevségi mátrixot felírhatjuk a tárcsa ismert rugalmassági adataival is:

$$T_{\text{izotrop}} = \begin{bmatrix} \frac{E'h'}{1-\nu'^2} & \frac{\nu'E'h'}{1-\nu'^2} & 0 \\ \frac{\nu'E'h'}{1-\nu'^2} & \frac{E'h'}{1-\nu'^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E'h'}{2(1+\nu')} \end{bmatrix}; \quad (2.7)$$

ebben  $h'$  jelenti a tárcsa vastagságát,  $E'$  a rugalmassági modulusát,  $\nu'$  pedig a harántkontrakciós tényezőjét. (A  $T_{33}$  elem  $G'h'$ -vel egyenlő.)

Láthatjuk, hogy a (2.5c) egyenlet a  $G' = \frac{E'}{2(1+\nu')}$  összefüggésnek felel meg.

A merevségi mátrixnak még egy fajtájáról kell szólnunk: az ortotrop mátrixról. Ezt az jellemzi, hogy — egy bizonyos koordináta-rendszerben — fennáll az izotrópiára is jellemző

$$T_{13} = T_{31} = 0 \quad (2.8)$$

összefüggés, az izotrópia másik két feltétele azonban nem teljesül. Annak a koordináta-rendszernek a tengelyeit, amelyben teljesül a (2.8) feltétel, az ortotropia főirányainak nevezzük.

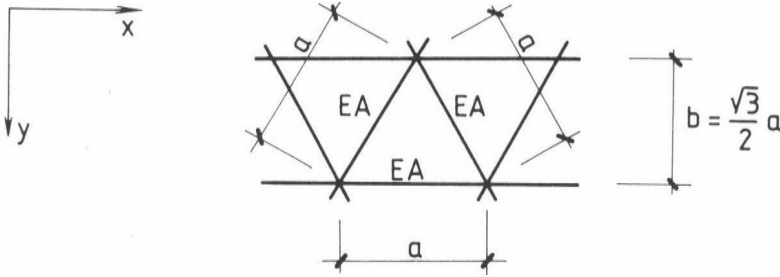
Ha sem az izotrópia, sem az ortotropia feltételei nem teljesülnek, a tárcsát általánosan anizotropnak (aeolotropnak) mondjuk.

## 2.2. Az egyrétegű rúdhálózatok statikai tulajdonságai

A következőkben a rácsozatnak néhány alaptípusát fogjuk áttekinteni. /Kollár és Hegedűs, 1985/ alapján felírjuk a merevségeket tartalmazó mátrixot, valamint a rúderőknek az egyenértékű kontinuum metszeterőiből való kiszámítására szolgáló képleteket.

### 2.2.1. Egyenlőoldalú háromszögekből álló hálózat

Álljon a hálózat  $a$  oldalhosszúságú egyenlőoldalú háromszögekből, és legyen valamennyi rúd húzási merevsége  $EA$  (2.2. ábra);  $A$  a rudak keresztmetszeti területe.



2.2. ábra

A merevségi mátrix ez esetben

$$T = \frac{\sqrt{3} EA}{4a} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

lesz, azaz a rácsozat a (2.5) feltételek teljesülése miatt izotrop.

A rúderők a kontinuum metszeterőiből (2.1. ábra) az

$$S_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} (3 n_x - n_y), \quad (2.10a)$$

$$S_2 = \frac{a}{\sqrt{3}} (n_y + \sqrt{3} n_{xy}), \quad (2.10b)$$

$$S_3 = \frac{a}{\sqrt{3}} (n_y - \sqrt{3} n_{xy}) \quad (2.10c)$$

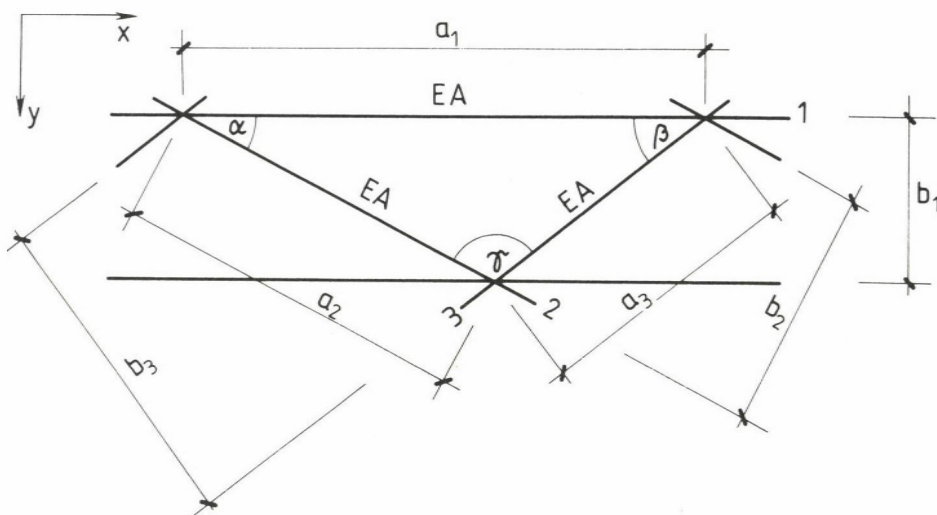
összefüggésekkel számíthatók ki. Láthatjuk, hogy a rúderők nem függenek a rúdkeresztmetszetektől; ennek oka az, hogy három rúdirány esetében a rúderők meghatározása a kontinuum metszeterőiből statikailag határozott feladatot jelent.

Bebizonyítható, hogy a háromszöghálózatok közül a most megvizsgált az egyetlen, amelynek egyenértékű kontinuumja izotrop. Ha akár a hálózat szemei

térnek el az egyenlőoldalú háromszögtől, akár a rudak szelvénye nem azonos mindegyik irányban, akkor megszűnik az izotrópia, és a rácsozat egyenértékű tárcsája vagy ortotrop, vagy általánosan anizotrop (aeotrop) válik, ami a mi számunkra elsősorban azt jelenti, hogy megszűnnek az izotrop tárcsára jellemző (2.5) arányok, és a húzási merevségek is függeni fognak a húzás irányától.

### 2.2.2. Általános háromszögekből álló hálózat

Az általános háromszögekből álló rácsozat (2.3. ábra) csak különleges esetekben ortotrop, egyébként aeotrop. Az ortotropia feltételeit a 2.4a, b, c, d. ábrákon vázoltuk;  $A_1, A_2, A_3$  az 1, 2 és 3 irányú rudak keresztmetszeti területét jelenti.

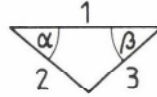


2.3. ábra

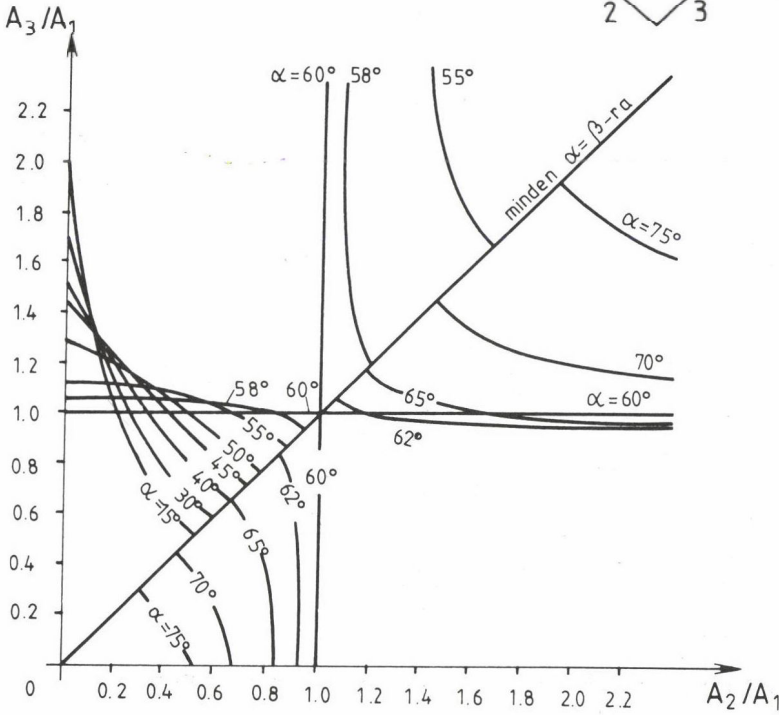
A merevségi mátrixot /Kollár és Hegedűs, 1985/ alapján írhatjuk fel. Ugyanitt található meg az ortotropia főirányainak képletét is.

A rúderök és a metszeterők közötti összefüggések az alábbiak:

Egyenlőszárú háromszög hálózat



$$\alpha = \beta$$



2.4a. ábra

$$S_1 = b_1 \left[ n_x - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} n_y - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} n_{xy} \right], \quad (2.11a)$$

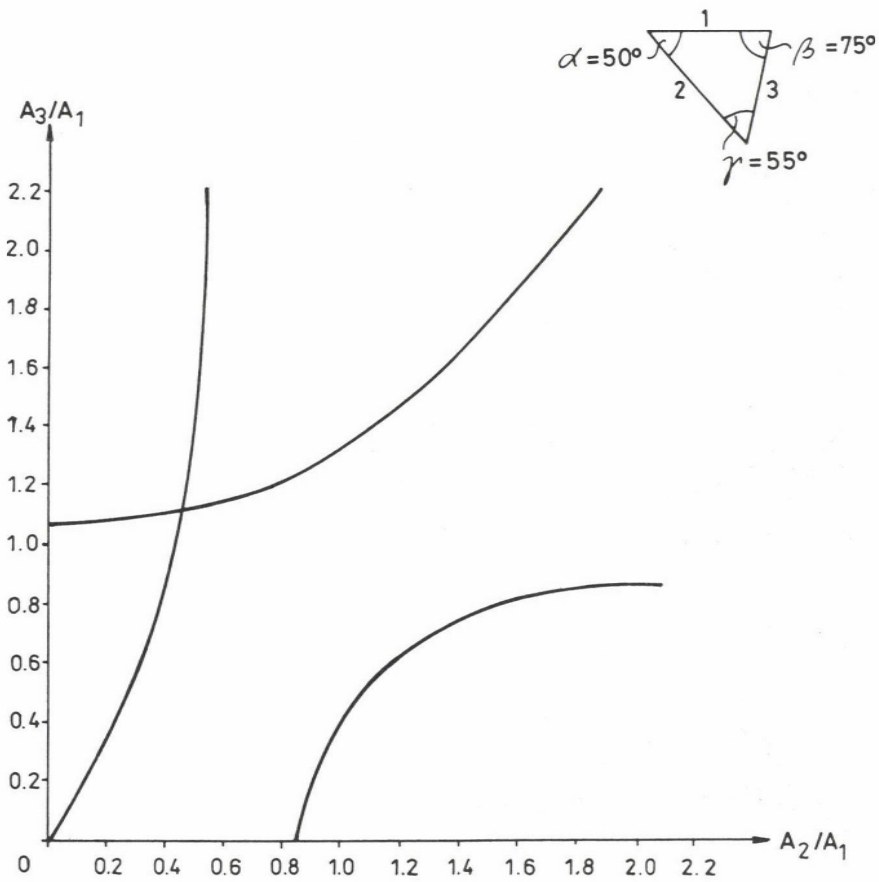
$$S_2 = b_2 \left[ \frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} n_y + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} n_{xy} \right], \quad (2.11b)$$

$$S_3 = b_3 \left[ \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} n_y - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} n_{xy} \right]. \quad (2.11c)$$



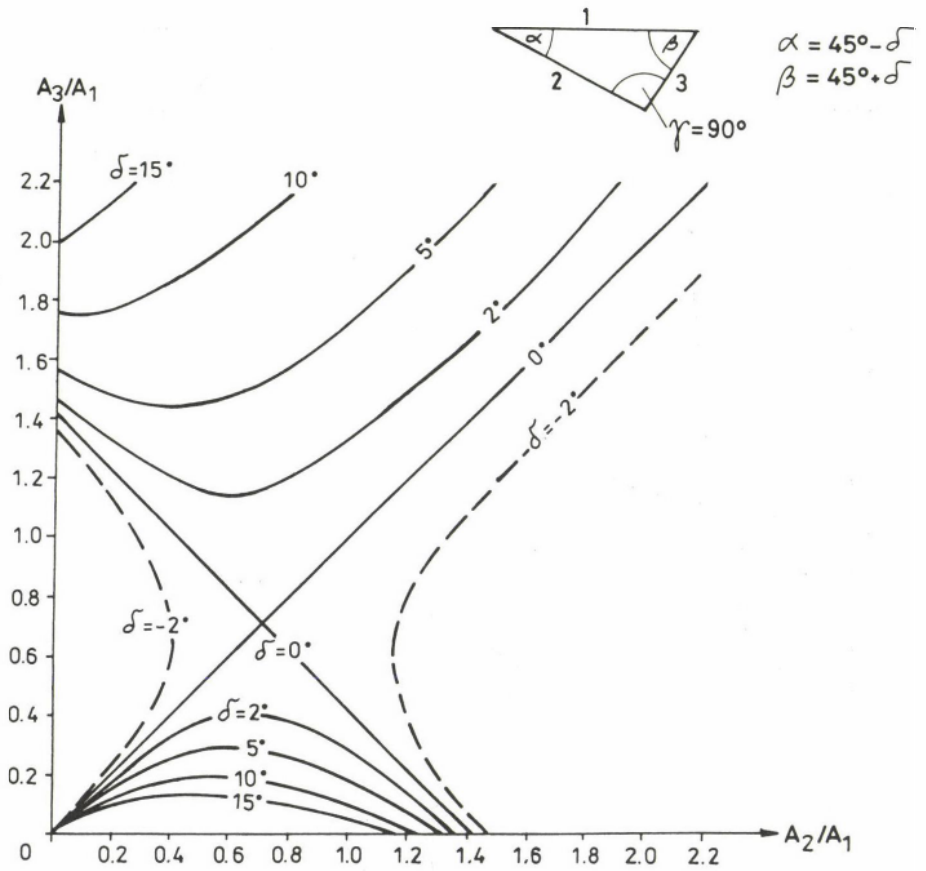


# EGYENLŐTLEN OLDALÚ HÁROMSZÖG HÁLÓZAT



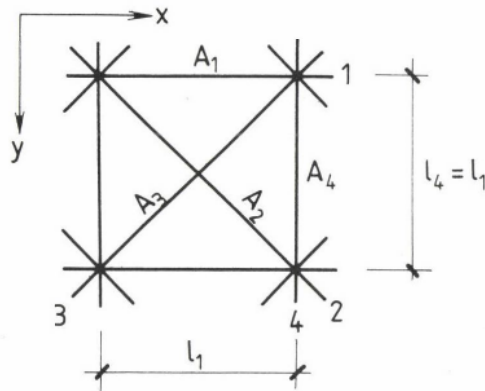
2.4c. ábra

DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG HÁLÓZAT



2.4d. ábra

2.2.3. Az andráskeresztes négyzetekből álló hálózat



2.5. ábra

Vegyük szemügyre az andráskeresztes négyzetekből álló rácsozatot (2.5. ábra); tételezzük fel, hogy  $A_1=A_4$  és  $A_2=A_3$ . Az egyenértékű tárcsa ortotrop lesz. Merevségi mátrixa:

$$\underline{\underline{I}} = \frac{E}{l_1} \begin{bmatrix} \left(A_1 + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\right) & \frac{A_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{A_2}{\sqrt{2}} & \left(A_1 + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

a rúderők pedig:

$$S_1 = \frac{l_1}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} \left[ \left( \frac{A_1}{\sqrt{2}} + \frac{A_2}{2} \right) n_x - \frac{A_2}{2} n_y \right], \quad (2.13a)$$

$$S_2 = \frac{l_1}{2 \left( \frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2 \right)} \left[ \left( \frac{A_2}{\sqrt{2}} (n_x + n_y) + (A_1 + \sqrt{2}A_2) n_{xy} \right) \right], \quad (2.13b)$$

$$S_3 = \frac{\ell_1}{2 \left( \frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2 \right)} \left[ \frac{A_2}{\sqrt{2}} (n_x + n_y) - (A_1 + \sqrt{2}A_2) n_{xy} \right], \quad (2.13c)$$

$$S_4 = \frac{\ell_1}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} \left[ \left( \frac{A_1}{\sqrt{2}} + \frac{A_2}{2} \right) n_y - \frac{A_2}{2} n_x \right]. \quad (2.13d)$$

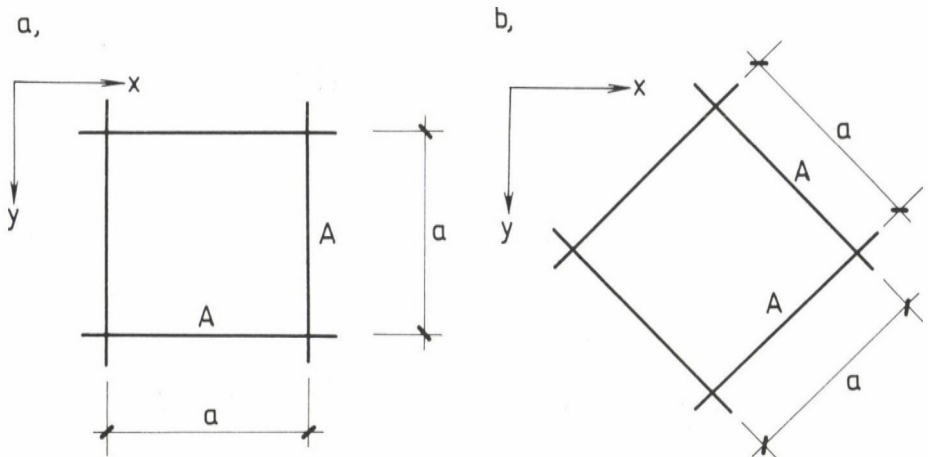
Megjegyezzük, hogy a hálózat akkor is ortotrop lesz, ha az  $A_1=A_4$  és az  $A_2=A_3$  egyenlőségek közül csupán az egyik teljesül (a második esetben az ortotropia főirányai a 2. és 3. irányú rudakkal lesznek párhuzamosak), de a rúderők meghatározására szolgáló képletek bonyolultabbakká válnak.

A rácsozat izotroppá válik, ha a rúdkeresztmetszetek az  $A_1 = A_4$ , valamint az  $A_2=A_3$  egyenlőségeken kívül kielégítik az  $A_2=A_1/\sqrt{2}$  összefüggést is.

#### 2.2.4. Kétirányú rudazatból álló hálózatok

Háromnál kevesebb irányú rudazatból csak alakjukat változtató (labilis) rácsozatokat lehet előállítani, amelyek tehát valamilyen igénybevételre ellenállás nélkül deformálódnak.

Vizsgáljuk meg a négyzethálózatú rácsozatot (2.6a. ábra). Az ilyen szerkezetnek a feltüntetett koordináta-rendszerben csak a két rúdiránnyal párhuzamosan van húzási merevsége, más merevsége nincs.



2.6. ábra



Merevségi mátrixa:

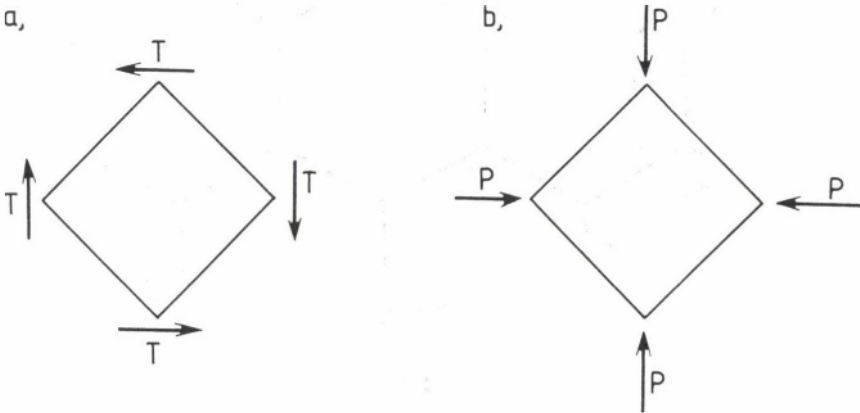
$$\underline{\underline{I}} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

a rúderők nagysága pedig:

$$S_1 = a n_x, \quad (2.15a)$$

$$S_2 = a n_y. \quad (2.15b)$$

Ha viszont  $45^\circ$ -kal elfordítjuk a négyzethálós rácsozatot (2.6b. ábra), akkor azt találjuk, hogy egyrészt van nyírási merevsége (2.7a. ábra), másrészt húzó- (vagy nyomó-) erőket is fel tud venni, de csak abban az esetben, ha ezek egyformák a két (x és y) irányban, azaz ha hidrosztatikus húzás (vagy nyomás) hat rá (2.7b. ábra).



2.7. ábra

Merevségi mátrixa ennek megfelelően:

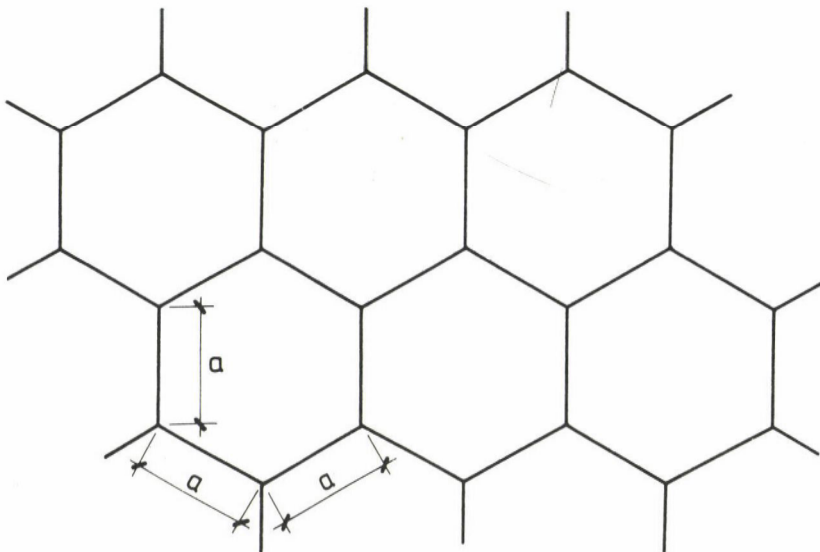
$$\underline{\underline{I}} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad (2.16)$$

a hidrosztatikus húzásból ( $n_x = n_y$ ) származó rúderők nagysága pedig:

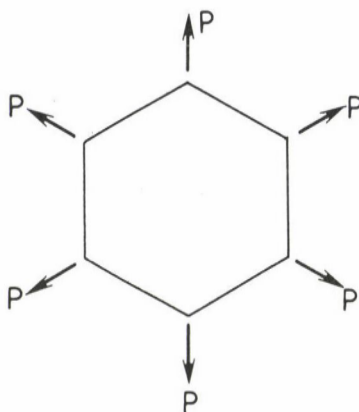
$$S_1 = S_2 = a n_x. \quad (2.17)$$

### 2.2.5. Nem folytonos rudazatokból álló rácsozatok

Vegyük szemügyre a hatszöghálózatos rácst (2.8. ábra). Ez szemmel láthatóan csak hidrosztatikus húzást (vagy nyomást) képes felvenni (2.9. ábra), más igénybevételt nem.



2.8. ábra



2.9. ábra

Merevségi mátrixa ennek megfelelően:

$$T = \frac{EA}{2\sqrt{3}a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

a hidrosztatikus húzásból ( $n_x = n_y$ ) származó rúderők pedig:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \sqrt{3} a n_x. \quad (2.19)$$

Az eddigiekből az tűnik ki, hogy a saját síkjukban csak a három, ill. több irányú folytonos rudazatból álló háromszöghálózatú rácsozatok alaktartók, a két irányú rudazatból álló, valamint a hatszöghálózatú rácsozat alakját változtató (labilis). Ez azonban nem jelenti azt, hogy megfelelő másik rácsozattal kombinálva nem lehet belőlük alaktartó (azaz nem labilis) kétrétegű térrácsokat szerkeszteni, lásd részletesebben a 3. pontban.

### 3. KÉTRÉTEGŰ TÉRRÁCSOK

A kétrétegű térrácsok hasonlóképpen épülnek fel a két egyrétegű rácsozás adta övsíkokból és az őket összekötő rácsozásból, mint ahogyan a síkbeli rácsostartó felépül a két övrúdból és az őket összekötő rácsozásból. A síkbeli rácsostartónak a gerenda az egyenértékű kontinuum, a kétrétegű térrácsnak pedig a lemez, amely egyrészt lehet közönséges vagy bordázott; másrészt maga a közönséges lemez is többféle lehet merevségi szempontból. Először tehát tekintsük át a különböző térrácsok és a velük egyenértékű lemezek fajtáit.

#### 3.1. A kétrétegű térrácsok fajtái

A kétrétegű térrácsokat három csoportba sorolhatjuk.

Az első csoportba tartoznak azok a térrácsok, amelyekben az övsíkok merevségei arányosak egymással (3.2., 3.3., 3.4. ábrák). Ezeket általában az jellemzi, hogy a két öv hálózata azonos, a megfelelő alsó és felső rudak keresztmetszete pedig arányos egymással.

A második csoportba azok tartoznak, amelyekben a két övsík merevségei nem arányosak egymással (3.5., 3.7. ábrák). Ezekben általában a két öv hálózata sem azonos.

Végül a harmadik csoportba azokat kell sorolnunk, amelyekben az egyik övsíknak nincs nyírási merevsége, de a másiknak van, és ez a ferde síkokban

elhelyezkedő összekötő rácsozással együtt zárt rácsos csöveket alkot, amelyek csavarási merevséget adnak a szerkezetnek (3.8., 3.9. ábrák).

Zárt csöveket olyan térrácsok is tartalmazhatnak, amelyekben mind a két övsíknak van nyírási merevsége (3.4. ábra). Ilyen esetekben azonban a két öv nyírási merevsége lényegesen nagyobb csavarási merevséget ad, mint a rácsos csövek, így ez utóbbiak merevségét figyelmen kívül hagyhatjuk.

Az elméleti vizsgálatok /Kollár és Hegedűs, 1985/ azt mutatták, hogy a térrács egyenértékű kontinuum csak abban az esetben lesz közösleges lemez, ha a két övsík merevségei arányosak egymással. Minden más esetben bordáslemez kapunk egyenértékű kontinuumként (3.6. ábra), amelynek erőjátéka meglehetősen bonyolult, mivel a "lemezszerű" belső erőköz (azaz a hajlító- és csavarónyomatékokon) kívül még egy síkbeli feszültségállapot is keletkezik a fedőlemezben. Az első részt a  $w$  lehajlásfüggvény, a másodikat a  $\phi$  feszültségfüggvény jellemzi, és így a bordáslemez viselkedését végeredményben két kapcsolt negyedrendű parciális differenciálegyenlet írja le /Giencke, 1955/, /Trenks, 1954/.

A bordáslemez nem alkalmas arra, hogy segítségével elvégezhessük a térrácsok közelítő méretezését. Egyrészt túlságosan bonyolult feladat lenne (akárcsak közelítően is) megoldani a parciális differenciálegyenlet-rendszert, másrészt pedig -- a szereplő merevségi paraméterek nagy száma miatt -- nincsenek közvetlenül felhasználható diagramok, ill. táblázatok a bordáslemez igénybevételeire az irodalomban. Ezért azt az utat választjuk, hogy bizonyos elhanyagolásokkal visszavezetjük a bordáslemez a közösleges lemezre. E közelítés lényege az, hogy ha elhanyagoljuk a fedőlemez saját síkjában meglévő nyírási merevségét (azaz elhanyagoljuk az egész szerkezet "öblösödési merevségét"), akkor elmarad a  $\phi$  feszültségfüggvény, s egyetlen negyedrendű differenciálegyenletet kapunk  $w$ -re, azaz egy közösleges (ortotrop) lemezhez jutunk.

A kétrétegű térrácsokra ezt az elvet úgy alkalmazhatjuk, hogy elhanyagoljuk a merevebb övsíknak a másikhoz képest meglévő "többlet-merevségeit", s csupán a gyengébb övsíkban is meglévő merevségeket tartjuk meg. Ez többnyire (pl. a 3.5. ábrán vázolt szerkezet esetében) az egyik övsík nyírási merevségének elhanyagolását jelenti, de el kell hanyagolnunk a merevebb övsíkban azokat a merevségrészeket is, amelyek többletet jelentenek az arányos merevségekhez képest. Ily módon egy olyan szerkezethez jutunk, amelyben arányos egymással az alsó és a felső övsík valamennyi merevsége, és az egyenértékű kontinuum egy közösleges lemez lesz.

---

Tekintsük most át a közösleges lemezek merevségi tulajdonságait.

### 3.2. A közönséges lemez merevségi tulajdonságai

A közönséges lemez merevségeit a  $\underline{B}$  hajlítási merevségi mátrixba foglaljuk össze, amelyet a hajlítási alakváltozások és a hajlítási belső erők között fennálló következő összefüggés definiál (a negatív előjelre a választott koordináta-rendszer miatt van szükség):

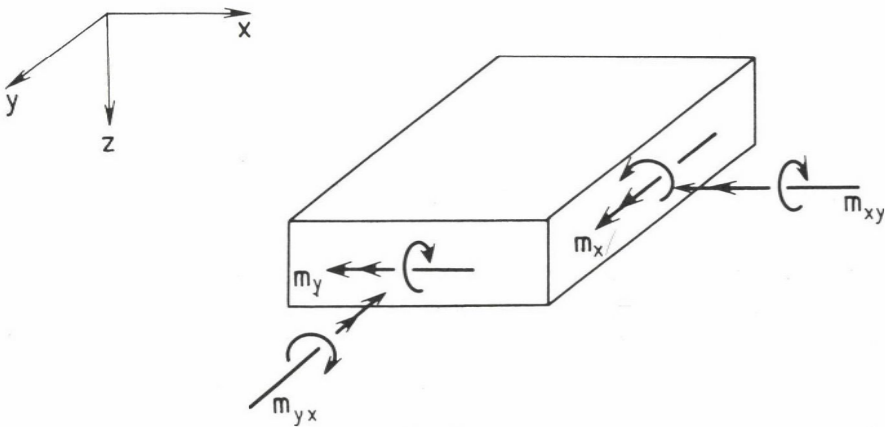
$$\underline{m} = -\underline{B} \underline{k}, \quad (3.1)$$

ahol

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

az x, ill. y irányú hajlítónyomatékot és az  $m_{xy}$  csavarónyomatékot összefoglaló vektor (3.1. ábra),

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ 2 k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$



3.1. ábra

az x, ill. y irányú meggörbülést és a kétszeres elcsavarodást összefoglaló vektor; a hajlítási merevségi mátrix pedig:



$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

A  $\underline{B}$  mátrix — az egyrétegű rácsozat  $\underline{I}$  nyúlási merevségi mátrixához hasonlóan — szimmetrikus a főátlójára. A  $B_{11}$  és  $B_{22}$  elem az x, ill. y irányú hajlítási merevséget jelenti, a  $B_{33}$  elem pedig a valódi  $B_t$  csavarási merevség felét:

$$B_{33} = \frac{B_t}{2}, \quad (3.4a)$$

azaz (feltéve, hogy  $B_{31}=B_{32}=0$ ):

$$m_{xy} = -B_t k_{xy}. \quad (3.4b)$$

A  $B_{12}=B_{21}$  elem a harántirányú hajlítási merevség.

A lemez izotrópiájának, ill. ortotrópiájának ugyanazok a feltételi egyenletei, mint a  $\underline{I}$  mátrixénak, lásd a 2. fejezetben.

A továbbiakban szükségünk lesz az ortotrop lemez egyensúlyi differenciálegyenletére. Ezt az ortotrópia főirányaival párhuzamos koordináta-rendszerben pl. /Timoshenko és Woinowsky-Krieger, 1966/ alapján így írhatjuk fel:

$$B_{11} w'''' + 2(B_{12}+2B_{33})w'''' + B_{22} w'''' = B_{11} w'''' + 2Hw'''' + B_{22} w'''' = p. \quad (3.5)$$

Vesszővel az x, ponttal az y szerinti differenciálást jelöltük; w a lemez lehajlása.

Ez az egyenlet szemléletesen mutatja, hogy a lemez három részben hordja a p terhet: az első tag az x irányú hajlítási, a második tag a csavarási, a harmadik pedig az y irányú hajlítási merevség teherviselő hatását reprezentálja. A csavarási teherhordásban a  $2B_{33}=B_t$  csavarási merevségen kívül a  $B_{12}$  harántirányú hajlítási merevség is szerepel, s a kettő összegét H-val szokták jelölni:

$$H = B_{12} + 2B_{33} = B_{12} + B_t. \quad (3.5a)$$

H tehát a lemez "látszólagos csavarási merevsége".

Ha a két irányban azonos a lemez hajlítási merevsége, akkor, bevezetve a

$$B_{11} = B_{22} = B \quad (3.6)$$

jelölést, az egyenlet a

$$Bw'''' + 2Hw'''' + Bw'''' = p \quad (3.7)$$

alakot ölti.

Csavarásmentesnek nevezzük az ortotrop lemezt, ha  $H=0$ . Ekkor a lemez egyenlete az alábbi lesz:

$$B_{11} w'''' + B_{22} w'''' = p \quad (3.8)$$

Ez a két irányban azonos hajlítási merevség (3.6) esetében a következő alakúra egyszerűsödik:

$$B (w'''' + w'''' ) = p. \quad (3.9)$$

Mivel izotrópia esetén  $B_{11}=B_{22}$  és  $B_{11}=B_{12} + 2B_{33} = H$ , ezért, bevezetve a (3.6) jelölést, az izotrop lemez egyenlete

$$Bw'''' + 2 Bw'''' + Bw'''' = B\Delta\Delta w = p \quad (3.10)$$

lesz, ahol

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.11)$$

a Laplace-operátor.

Vegyük most sorra néhány gyakrabban előforduló térrácsot és határozzuk meg a most ismertetett közelítő módon kapható egyenértékű lemezüket.

### 3.3. Egymással arányos merevségű övsíkokból álló térrácsok

Ha a két övsík merevségei arányosak egymással (vagyis a felső övsík merevségei az alsóéinak  $k$ -szorosai), akkor az egyenértékű kontinuum egy olyan közönséges lemez lesz, amelynek hajlítási merevségi mátrixát a

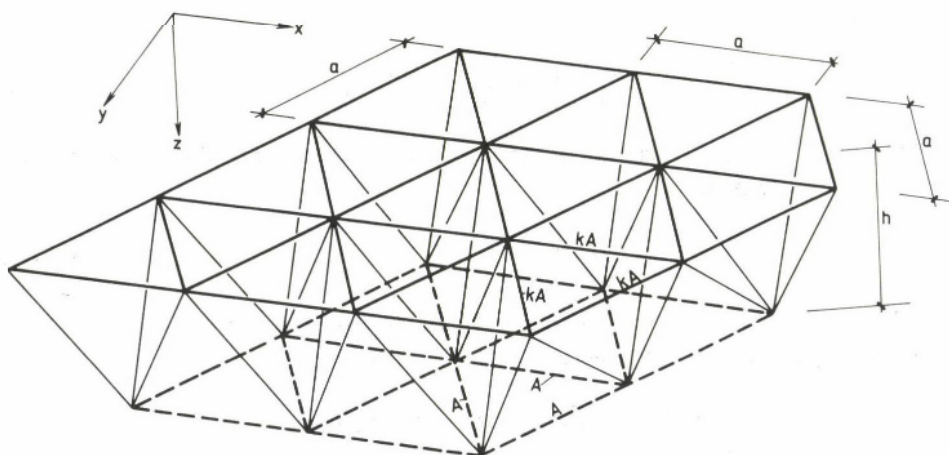
$$\underline{B} = \frac{h^2}{1+k} \quad \underline{I}^f = \frac{kh^2}{1+k} \underline{I}^a \quad (3.13)$$

összefüggés határozza meg, ahol  $h$  a két övsík egymástól mért távolsága,  $\underline{I}^f$ , ill.  $\underline{I}^a$  pedig a felső, ill. az alsó övsík nyúlási merevségeit összefoglaló mátrix. A (3.13) egyenlet tulajdonképpen az egymástól  $h$  távolságban lévő

$\underline{\underline{I}}^f = k\underline{\underline{I}}^a$  és  $\underline{\underline{I}}^a$  húzási merevségeknek a közös súlypontjukra vett inercianyomatékát reprezentálja.

A következőkben néhány példát mutatunk az arányos merevségű övsíkból álló kétrétegű térrácsokra.

### 3.3.1. Egyenlőoldalú háromszög hálózatu övsíkból álló térrács (3.2. ábra)



3.2. ábra

Az alsó övsík izotrop húzási merevségi mátrixának (2.9) kifejezését a (3.13) képletbe helyettesítve, és figyelembe véve a (3.6) jelölést, az izotrop lemez (3.10) egyenletéhez jutunk. A lemez B hajlítási merevsége:

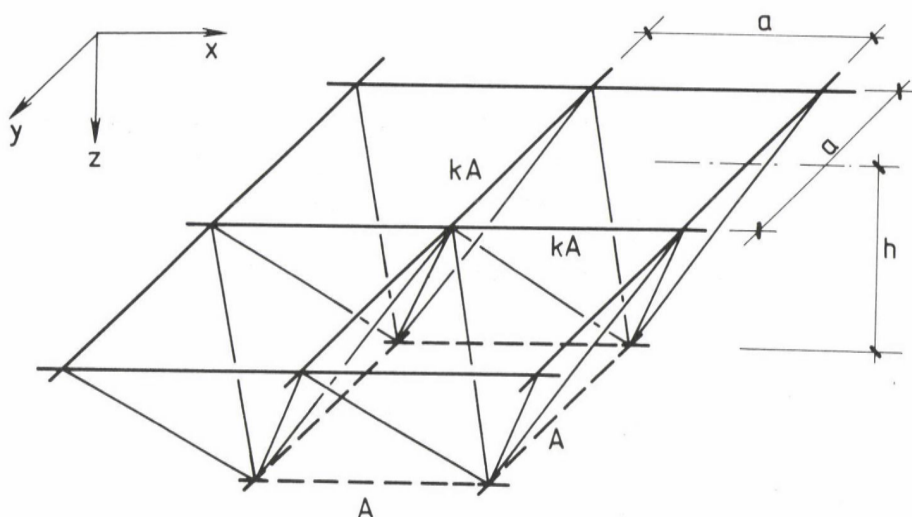
$$B = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{E A h^2}{a} \frac{k}{1+k}. \quad (3.14)$$

### 3.3.2. "Négyzet felett négyzet" típusú térrács

A 3.3. ábrán vázolt térrács — függetlenül attól, hogy a felső övsík csomópontjai az alsóéi fölött fekszenek-e vagy el vannak-e tolvá hozzájuk képest — egy csavarásmentes ortotrop lemezzel egyenértékű, amelynek egyenlete (3.9)-nek felel meg, hajlítási merevsége pedig:

$$B = \frac{E A h^2}{a} \frac{k}{1+k}, \quad (3.15)$$

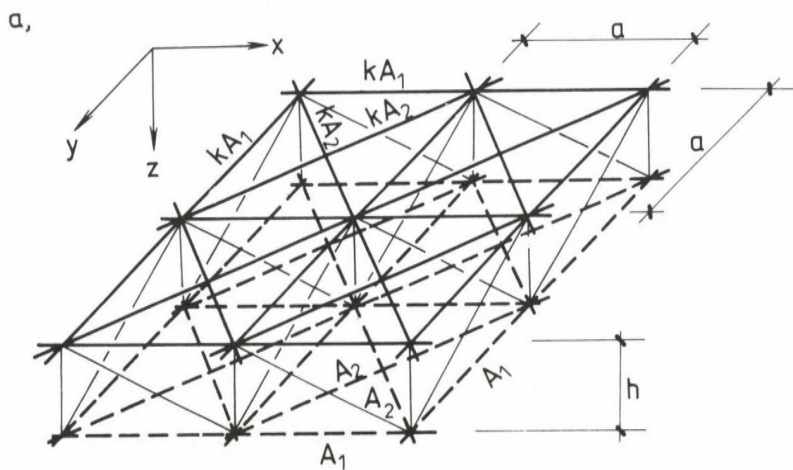
vö. a (2.14), (3.13) és (3.6) képletekkel.



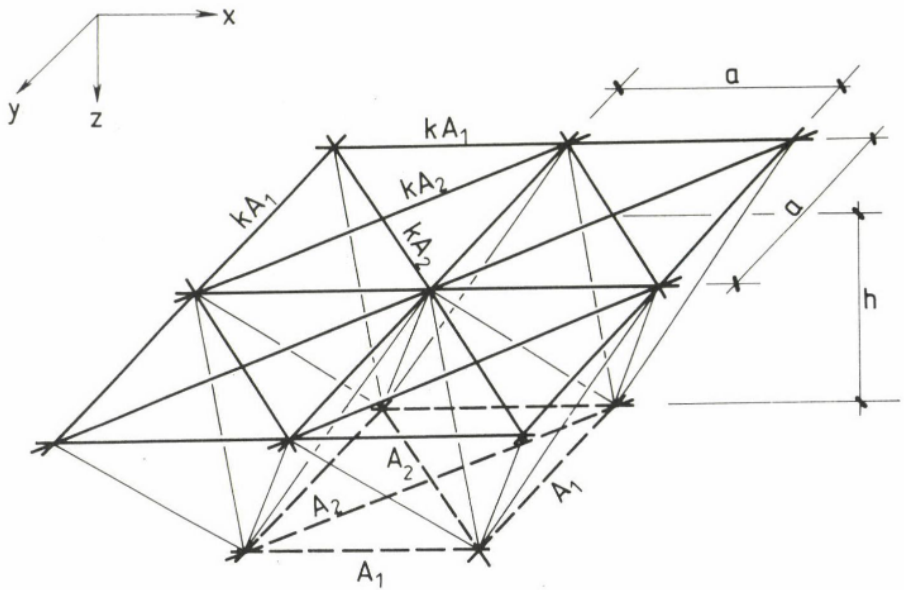
3.3. ábra

3.3.3. Az "andráskeresztes négyzet felett andráskeresztes négyzet" típusú rács

A 3.4. ábrán látható térrács — ugyancsak függetlenül attól, hogy a felső övsík csomópontjai el vannak-e tolvá az alsóéihoz képest — egy ortotrop



3.4a. ábra



3.4b. ábra

lemezzel egyenértékű, amelynek differenciálegyenlete (3.7)-nek felel meg, a következő merevségi jellemzőkkel /lásd a (2.12) és (3.13) képleteket/:

Hajlítási merevség:

$$B = \frac{E h^2}{2} \left( A_1 + \frac{A_2}{\sqrt{2}} \right) \frac{k}{1+k}. \quad (3.16a)$$

Harántirányú hajlítási merevség:

$$B_{12} = \frac{E h^2}{a} \frac{A_2}{\sqrt{2}} \frac{k}{1+k}. \quad (3.16b)$$

Csavarási merevség:

$$B_t = 2B_{33} = \frac{E h^2}{a} \sqrt{2} A_2 \frac{k}{1+k}; \quad (3.16c)$$

és végül a látszólagos csavarási merevség:

$$H = B_{12} + 2B_{33} = \frac{E h^2}{a} \frac{3 A_2}{\sqrt{2}} \frac{k}{1+k}. \quad (3.16d)$$

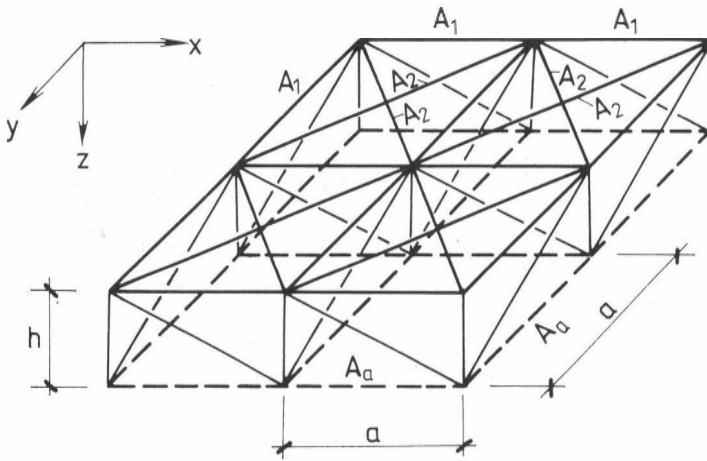


### 3.4. Egymással nem arányos merevségű övsíkokból álló térrácsok

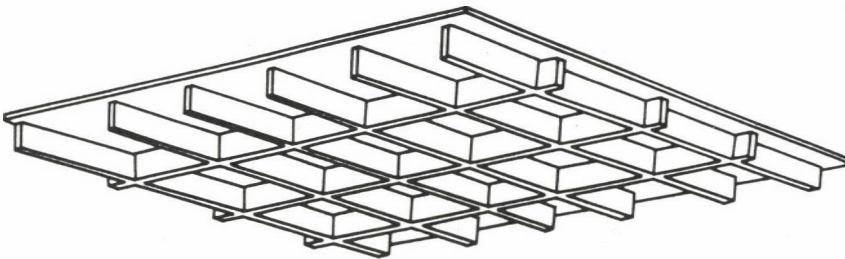
#### 3.4.1. "Négyzet felett andráskeresztes négyzet" típusú rács

Ha a felső övsík négyzetei az alsóéi fölött helyezkednek el (3.5. ábra), akkor az összekötő rácsozás függőleges, és így a szerkezetnek nincs igazi csavarási, csupán öblösödési merevsége (a felső övsík nyírési merevsége folytán). Statikai szempontból tehát szemmel láthatóan megfelel a 3.6. ábra bordáslemezének.

Összehasonlítva a felső övsík (2.12) és az alsó övsík (2.14) húzási merevségi mátrixát, láthatjuk, hogy a felső öv nyírési és harántmerevségét kell elhanyagolnunk ahhoz, hogy egymással arányos merevségeket kapjunk a két



3.5. ábra

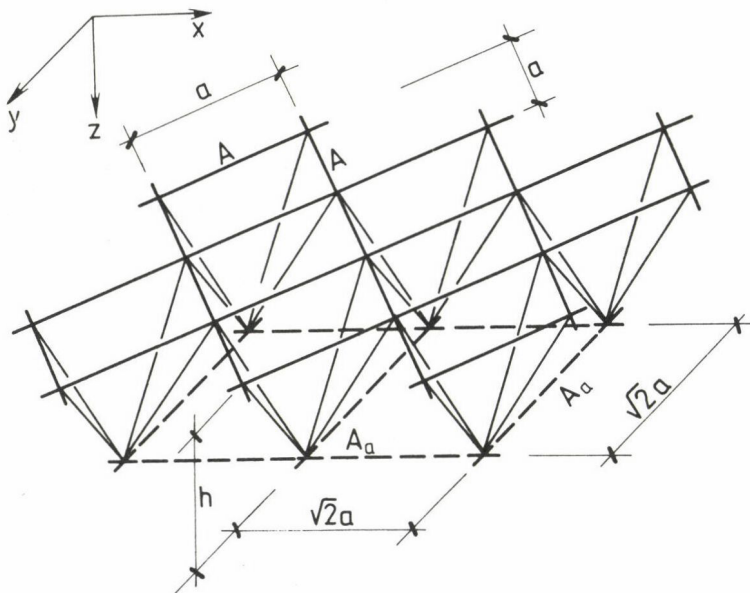


3.6. ábra

övsíkban. Helyettesítő kontinuumunk így módon egy csavarásmentes ortotrop lemez lesz, amelynek egyenlete (3.9)-nek felel meg, hajlítási merevsége pedig:

$$B = \frac{E h^2}{a} \frac{(A_1 + \frac{A_2}{\sqrt{2}}) A_a}{(A_1 + \frac{A_2}{\sqrt{2}}) + A_a} . \quad (3.17)$$

3.4.2. "Négyzet felett elfordított négyzet" hálózatos rács (3.7. ábra)



3.7. ábra

Az alsó öv merevségeit a (2.14) mátrix, a felsőét a (2.16) mátrix adja meg, de az előbbiben  $a$  helyett  $\sqrt{2}a$ -t kell írunk, mivel a négyzetek oldalhossza most  $\sqrt{2}a$ . Összehasonlítva a két mátrixot láthatjuk, hogy egyrészt el kell hagyni a felső öv nyírási merevségét, másrészt pedig az alsó övben is definiálnunk kell egy "hidrosztatikus" merevséget, hogy megfeleljen a felső öv hidrosztatikus merevségének, melyet a mátrix bal felső négy eleme reprezentál.

A hidrosztatikus húzási merevségnek az a definíciója, hogy  $\epsilon_x$  és  $\epsilon_y$  bármely kombinációjára  $n_x = n_y$  normálerőket produkál, melyeknek nagysága megegyezik az

$$\varepsilon_x^{\text{hydr}} = \varepsilon_y^{\text{hydr}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$

"hidrosztatikus" nyúlás-részből a valódi x és y irányú húzási merevségekkel kapható normálerők nagyságával.

Ezt a követelményt a

$$\underline{I}_a^{\text{hydr}} = \frac{E A_a}{\sqrt{2} a} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

nyúlási merevségi mátrix elégíti ki.

A (3.13) összefüggés alapján a hajlítási merevség

$$B = \frac{E h^2}{2a} \frac{A \frac{A_a}{\sqrt{2}}}{A + \frac{A_a}{\sqrt{2}}}, \quad (3.19)$$

a harántmerevség pedig:

$$B_{12} = B. \quad (3.20)$$

Mivel nincs tényleges csavarási merevség, ezért  $H=B_{12}=B$ , és a lemez differenciálegyenlete (3.7) alapján:

$$B (w'''' + 2w'''' + w''''') = p,$$

azaz a helyettesítő lemezünk izotrop lesz, vö. (3.10)-zel.

### 3.5. Rácsos csövekkel merevített térrácsok

Ha az egyik övsíknak van nyírési merevsége, az összekötő rácsozás pedig ferde síkokban helyezkedik el úgy, hogy zárt rácsos csövek alakulnak ki a szerkezetben, akkor a csövek csavarási merevséget adnak a térrácsnak. A cső mindegyik fala képes nyíróerő felvételére, és így a csőfalban körbemenő zárt nyírófolyam keletkezik, amely csavarónyomatékot reprezentál.

Ahhoz, hogy helyettesítő kontinuumunk most se bordáslemez legyen, el kell tekintenünk az alakváltozások összeférhetőségének biztosításától (azaz attól a tényről, hogy a csövek adta csavarási merevség semleges tengelye nem

esik egybe a hajlítási merevségek semleges tengelyével), és el kell hanyagolnunk az övsíkoknak mindazokat a merevségeit, amelyeknek nincs párjuk a másik övsíkban. Itt figyelemmel kell azonban lennünk arra, hogy a nyírási merevséggel bíró övsík nyírási merevségét a rácsos csövek merevségébe vesszük bele.

Ha a rácsos csövek párhuzamosan futnak az  $x, y$  koordináta-tengelyekkel, akkor csupán csavarási merevséget adnak a szerkezetnek. A lemez csavarási merevsége fele lesz annak az értéknek, amit úgy kapunk, hogy az egyik irányban futó csövek csavarási merevségét elosztjuk a cső szélességével (vagyis a csöveknek az egységnyi lemezszélességre jutó merevségével). A lemez csavarónyomatéka ugyanis definíciószerűen az  $x$  normálisú felületre ható  $m_{xy}$  és az  $y$  normálisú felületre ható  $m_{yx}$  nyomatékok együtteséből áll (3.1. ábra), amelyek tehát kétszer akkora csavaró hatást fejtenek ki, mintha csupán  $m_{xy}$  (vagy  $m_{yx}$ ) működne. A csövek csavarási merevségét mindig csak az egyik irányú csavarónyomatékból származó alakváltozásból számítjuk, így a lemez valószínű viselkedését tükröző csavarási merevség ennek fele kell legyen.

Ha a csövek nem párhuzamosak az  $x, y$  koordináta-tengelyekkel, akkor hajlítási és harántmerevséget is adnak a szerkezetnek.

A rácsos csövek adta csavarási merevség mindig lényegesen kisebb, mint a hajlítási merevségnek megfelelő izotrop lemez csavarási merevsége. Így a helyettesítő kontinuum közelebb áll a csavarásmentes lemezhez, mint az izotrophoz.

A következőkben két példát mutatunk be a rácsos csövekkel merevített térrácsokra.

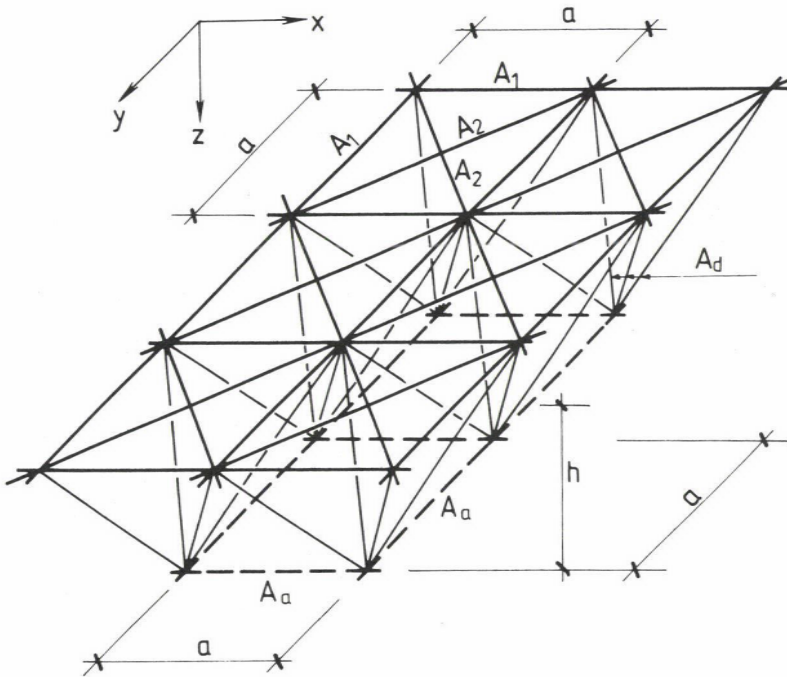
### 3.5.1. A "négyzet felett eltolt andráskeresztes négyzet" típusú rács (3.8. ábra)

A felső övsík (2.12) merevségeiből a harántmerevséget kell elhanyagolnunk, mert nincs párja az alsó övben.

A rácsos csövek háromszög keresztmetszetűek és  $x, y$  irányban futnak. Így csupán  $B_t$  csavarási merevséget adnak a szerkezetnek:

$$B_t = \frac{E h^2}{2a} \frac{A_2}{\sqrt{2 + 4 \frac{A_2}{A_d} \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{2} \right)^{3/2}}} \quad (3.21)$$

$B_{12}=0$  miatt a látszólagos csavarási merevség megegyezik a tényleges csavarási merevséggel, azaz  $H=B_t$ .



3.8. ábra

A rács hajlítási merevsége megegyezik (3.17)-tel. A helyettesítő ortotrop lemez egyenlete (3.7)-nek felel meg.

### 3.5.2. A "háromszög felett hatszög" típusú rács (3.9. ábra)

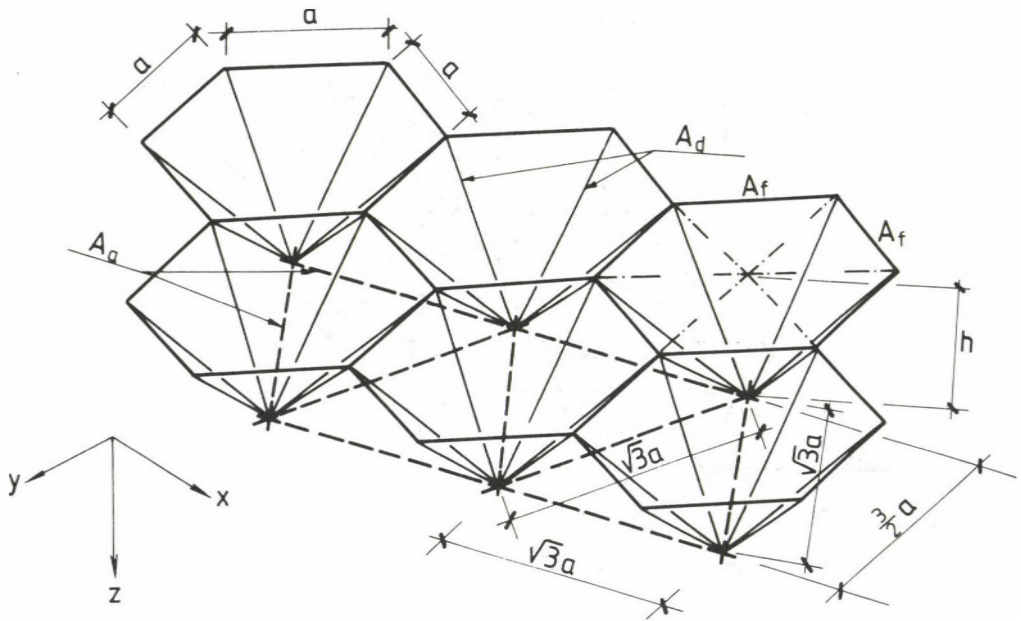
Ebben a szerkezetben három irányban futnak rácsos csövek (3.10. ábra); a pontozott vonalak mentén a valóságban nincsenek rudak, de ezekben rúderő sem ébredne a csövek csavarásából.

A rácsos csövek az alábbi csavarási merevséget adják a rácsszerkezetnek, vö. a (3.4) és a (3.4a) kifejezésekkel:

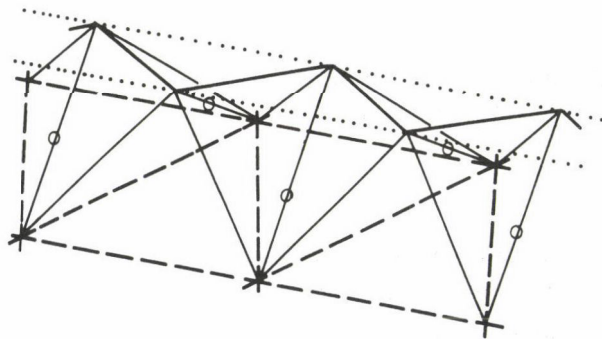
$$B_t^{cső} = \frac{2E h^2}{a} \frac{A_a}{9 + \sqrt{3} \frac{A_a}{A_f} + 2 \sqrt{3} \left( \frac{h^2}{a^2} + 1 \right)^{3/2} \frac{A_a}{A_d}} \quad (3.22)$$

A térrács részletes vizsgálatából /Kollár és Hegedűs, 1985/ kitűnik, hogy a rácsos csövek — alaprajzban ferde helyzetük miatt —  $B_t/2$ -vel egyenlő





3.9. ábra



3.10. ábra

nagyságú  $B_{11}^{CS\bar{O}} = B_{22}^{CS\bar{O}}$  hajlítási merevséget is szolgáltatnak mind  $x$ , mind  $y$  irányban, s ezenkívül még  $(-1)$ -szer ekkora  $B_{12}^{CS\bar{O}}$  harántmerevséget is adnak:

$$B_{11}^{CS\bar{O}} = -B_{12}^{CS\bar{O}} = B_t^{CS\bar{O}}/2. \quad (3.23)$$

Az övek adta hajlítási merevségek meghatározásához elő kell állítanunk az alsó öv (2.9) mátrixából a felső öv (2.18) merevségeinek megfelelő "hidrosztatikus" merevségi mátrixot a 3.4.2. pontban mondottak szerint:

$$\underline{T}_a^{\text{hydr}} = \frac{E A_a}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.24)$$

figyelembe kell azonban vennünk, hogy a háromszögek oldalhossza — a (2.9) mátrixnak megfelelő  $a$  oldalhossz helyett — itt  $\sqrt{3}a$ .

A két öv merevségeiből így a következő hajlítási merevségek adódnak:

$$B_{11}^{\text{öv}} = B_{22}^{\text{öv}} = \frac{Eh^2}{2a} \frac{\frac{A_f}{\sqrt{3}} A_a}{\frac{A_f}{\sqrt{3}} + A_a} \quad (3.25a)$$

és

$$B_{12}^{\text{öv}} = B_{11}^{\text{öv}}. \quad (3.25b)$$

Összegezve a fenti merevségeket, azt kapjuk, hogy

$$B = B_{11}^{\text{cső}} + B_{11}^{\text{öv}} \quad (3.26a)$$

és

$$H = B_{12}^{\text{cső}} + B_{12}^{\text{öv}} + B_t^{\text{cső}} = B, \quad (3.26b)$$

azaz helyettesítő kontinuumunk izotrop lemez lesz.

#### 4. A TÉRRÁCSOK RÚDERŐINEK MEGHATÁROZÁSA AZ EGYENÉRTÉKŰ LEMEZ METSZETERŐIBŐL

##### 4.1. A térrács igénybevételeinek meghatározása a lemez igénybevételeiből

Amint az eddigiekben láttuk, a térrácsokhoz — több-kevesebb közelítéssel — általában olyan ortotrop lemezt találhatunk helyettesítő kontinuumként, amelynek két irányban azonos a hajlítási merevsége ( $B$ ), látszólagos csavarási merevsége pedig egy ennél általában kisebb  $H$  mennyiség; az ortotrop lemez egyenlete tehát (3.7)-nek felel meg.

Ha a térrács merevsége állandó, akkor az ortotrop lemezé is az. Erre az esetre az irodalomban diagramok vagy táblázatok formájában kész megoldásokat találhatunk e lemezfajta hajlító- és csavarónyomatékaira különböző megtámasztásmódok esetében. E megoldásokat általában a  $H/B$  arány függvényében adják meg. Ismerve a térrácsunkkal egyenértékű lemez  $H/B$  értékét, a diagramok-

ból egyszerűen leolvashatjuk a keresett nyomatékértékeket. Ha pedig csak a  $H=0$  (csavarásmentes lemez) és a  $H=B$  (izotrop lemez) esetekre találunk megoldást, akkor e két eset között interpolálhatunk az adott  $H/B$  aránynak megfelelően.

Mivel azonban a  $H$  mennyiség a (3.5a) képlet szerint a valódi  $B_t$  csavarási merevség (3.4a) és a  $B_{12}$  harántmerevség összege, előfordulhat, hogy az irodalomban szereplő megoldás  $B_{12}/B_t$  aránya eltér az általunk vizsgált térrácsétől, bár  $H/B$  aránya ugyanaz. Más szóval: a helyettesítő lemez

$$\nu = \frac{B_{12}}{B} \quad (4.1)$$

"harántkontrakciós tényezője" eltér a térrácsétől. Tisztáznunk kell tehát, hogyan kaphatjuk meg a térrácsétől eltérő  $\nu$ -vel bíró lemez igénybevételeiből a térrács helyes igénybevételeit.

Jelöljük a térrácsra vonatkozó mennyiségeket  $\underline{r}$  indexszel, az egyenértékű lemezre vonatkozókat pedig  $\underline{\ell}$  indexszel. Levezethető /Kollár és Hegedűs, 1985/, hogy a rács igénybevételeit a következő összefüggések segítségével kaphatjuk meg a lemez igénybevételeiből:

$$m_x^r = m_x^\ell \frac{1 - \nu_r \nu_\ell}{1 - \nu_\ell^2} + \nu_r m_y^\ell \frac{1 - \nu_\ell / \nu_r}{1 - \nu_\ell^2}, \quad (4.2a)$$

$$m_y^r = m_y^\ell \frac{1 - \nu_r \nu_\ell}{1 - \nu_\ell^2} + \nu_r m_x^\ell \frac{1 - \nu_\ell / \nu_r}{1 - \nu_\ell^2}, \quad (4.2b)$$

$$m_{xy}^r = \frac{B_t^r}{B_t^\ell} m_{xy}^\ell \quad (4.2c)$$

Ezek az összefüggések akkor pontosak, ha a peremfeltételekben nem szerepel a harántkontrakciós tényező, mint pl. a csuklós vagy a befogott perem esetében. A szabad peremen már nem teljesül ez a feltétel, így szabad peremet is tartalmazó lemezen ezek az összefüggések csak közelítőek.

Ha  $\nu = 0$  (vagyis  $B_{12}=0$ ), a fenti képletek az alábbi alakúra egyszerűsödnek:

$$m_x^r = m_x^\ell + \nu_r m_y^\ell, \quad (4.3a)$$

$$m_y^r = m_y^\ell + \nu_r m_x^\ell, \quad (4.3b)$$



$$m_{xy}^R = \frac{B_t^R}{Hl} m_{xy}^l. \quad (4.3c)$$

Ha pedig  $\nu_r = B_{12}^R/B^R = 1$  és  $B_t^R = 0$ , ami pl. a "négyzet felett elfordított négyzet" típusú rács esetében teljesül (3.4.2. pont), akkor

$$m_x^R = m_y^R = \frac{m_x^l + m_y^l}{1 + \nu_l}, \quad (4.4)$$

$$m_{xy}^R = 0, \quad (4.5)$$

azaz a rács hajlítónyomatékai nagyjából a kétszeresei az egyenértékű lemez hajlítónyomatékainak, de csavarónyomaték nem ébred a rácsban.

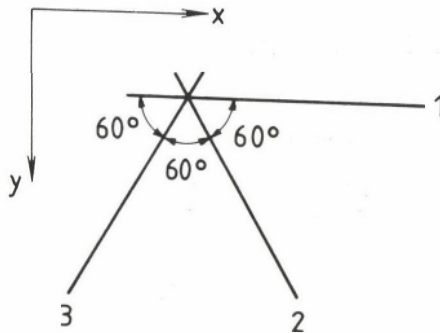
Érdekes még részletesebben foglalkoznunk a "háromszög felett hatszög" típusú ráccsal, mivel nem egészen egyszerű feladat a (4.1) képletnek megfelelő "harántkontrakciós tényezőnek", valamint a három rácshoz csőre ható csavarónyomatéknak a meghatározása.

$$\nu_r = \frac{B_{11}^{\ddot{ö}v} - B_t^{CS\ddot{ö}}/2}{B_{11}^{\ddot{ö}v} + B_t^{CS\ddot{ö}}/2}; \quad (4.6)$$

$B_{11}^{\ddot{ö}v}$  és  $B_t^{CS\ddot{ö}}$  nagyságát a (3.25a) és a (3.22) képletek adják meg.

Az övekre ható hajlítónyomatékok:

$$m_x^{\ddot{ö}v} = m_y^{\ddot{ö}v} = \frac{m_x^R + m_y^R}{2}; \quad (4.7)$$



4.1. ábra

itt  $m_x^r$  és  $m_y^r$  a rácsra ható, a (4.2a, b) képletekkel megszabott hajlítónyomatékok. Az övekre nem hat csavarónyomaték ( $m_{xy}^{\ddot{v}} = 0$ ).

A három rácson csőre ható  $m_{t1}$ ,  $m_{t2}$ ,  $m_{t3}$  csavarónyomatékokat a rácsnak mind a csavaró-, mind a hajlítónyomatékai okozzák. (Az egyes csövek számozását a 4.1. ábra mutatja.)

$$m_{t1} = \frac{4}{3} m_{xy}^r, \quad (4.8a)$$

$$m_{t2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} (m_x^r + m_y^r) - \frac{2}{3} m_{xy}^r, \quad (4.8b)$$

$$m_{t3} = +\frac{1}{\sqrt{3}} (m_x^r + m_y^r) - \frac{2}{3} m_{xy}^r. \quad (4.8c)$$

Az irodalomban különböző H/B arányú ortotrop lemezek nyomatékaira található számértékeket  $\nu = 0$  esetére /Bareš, 1971/, /Czerny, 1976/, /Krug és Stein, 1961/. Ezeket saját számításainkkal kiegészítve diagramokat készítettünk háromféle megtámasztásmódra: csuklósan megtámasztott, befogott (azaz folytatólagos) és oszlopokra támaszkodó lemezekre (4.2.—4.6. ábrák). Kettős vonallal a csuklós megtámasztást, vonalkázással a befogást jelöltük. A diagramok H/B függvényében adják meg a nyomatékokat a lemez jellegzetes pontjaiban.

Az összekötő rácsozás méretezéséhez szükséges nyíróerőket a hajlítónyomaték-ábra első deriváltja adja meg /lásd ehhez az (5.9) képletbe fűzött megjegyzést is/. Ha a hajlítónyomatékok ábráját mind x, mind y irányban másodfokú parabolával közelítjük meg (4.7a ábra), akkor a nyíróerő-ábra ugyan-ezen irányokban egyenesnek tekinthető (4.7b ábra). A csavarónyomatékok ábrája sok esetben ugyancsak egyenesek szerint változóknak vehető (4.7c. ábra).

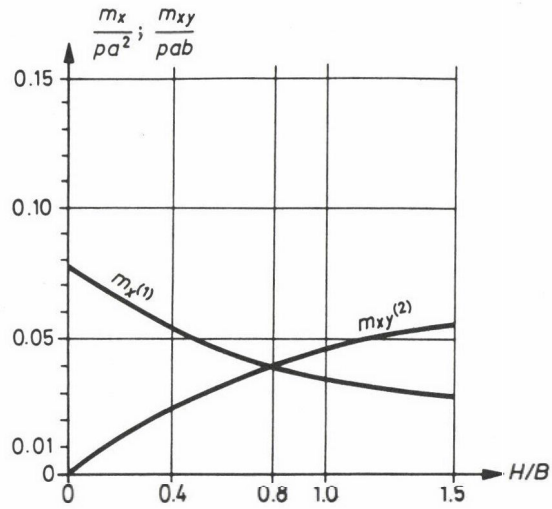
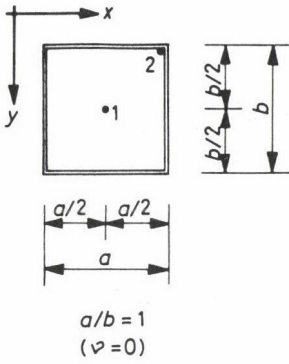
#### 4.2. A rúderők kiszámítása az igénybevételekből

Elsősorban ki kell számítanunk a lemez hajlító- és csavarónyomatékaiból a két övsíkban fellépő metszeterőket. A rácson csöveket nem tartalmazó tér-rácsok esetében ezeket az erőket a nyomatékoknak a  $\underline{h}$  szerkezeti magassággal történő elosztásával kapjuk meg:

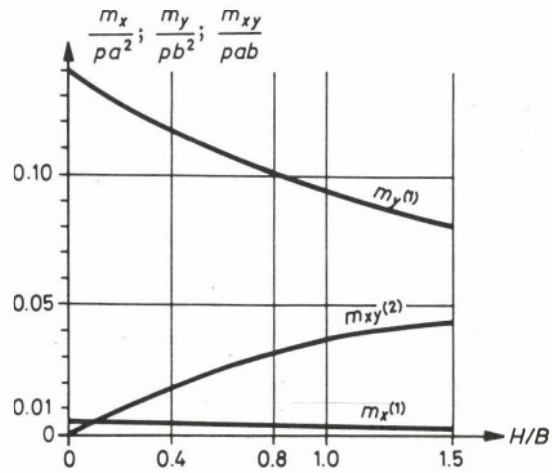
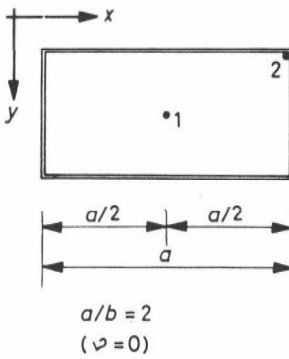
$$\underline{n}^f = -\frac{1}{\underline{h}} \underline{m}^r \quad (4.9)$$

$$\underline{n}^a = \frac{1}{\underline{h}} \underline{m}^r, \quad (4.9)$$

(a)

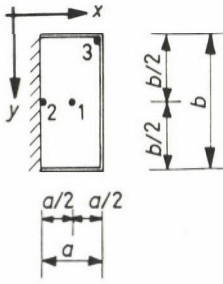


(b)

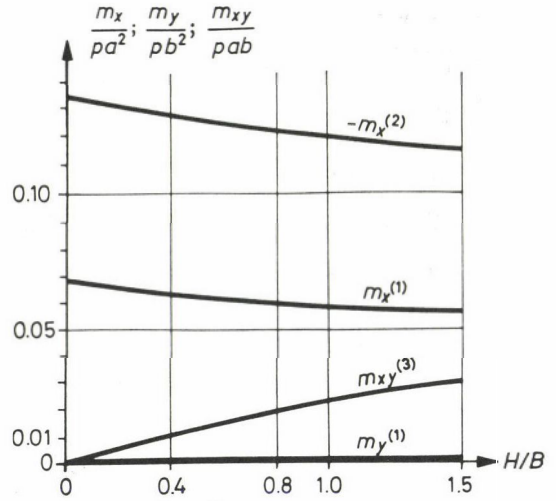


4.2. ábra

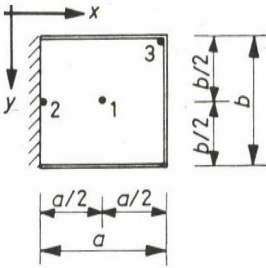
(a)



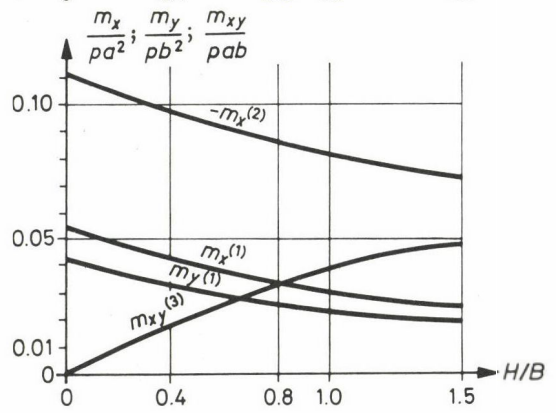
$a/b = 0.5$   
( $\varphi = 0$ )



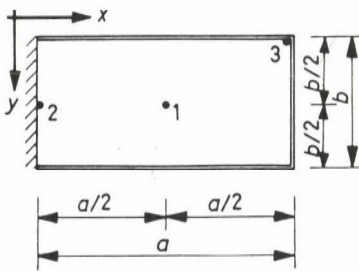
(b)



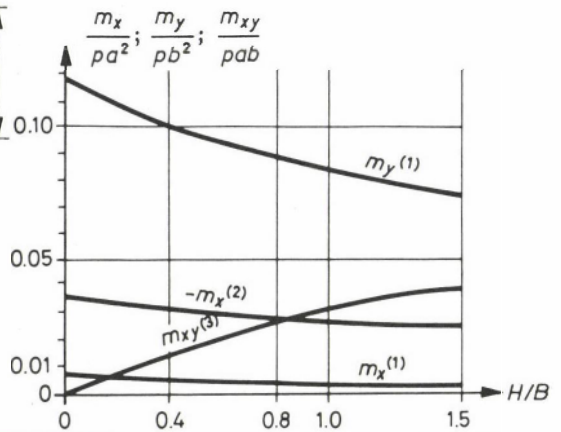
$a/b = 1$   
( $\varphi = 0$ )



(c)

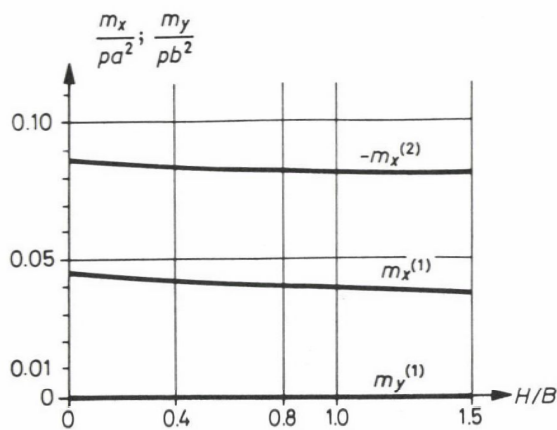
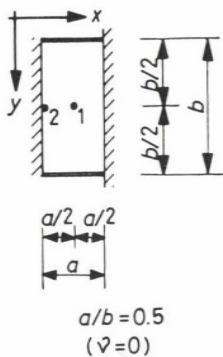


$a/b = 2$   
( $\varphi = 0$ )

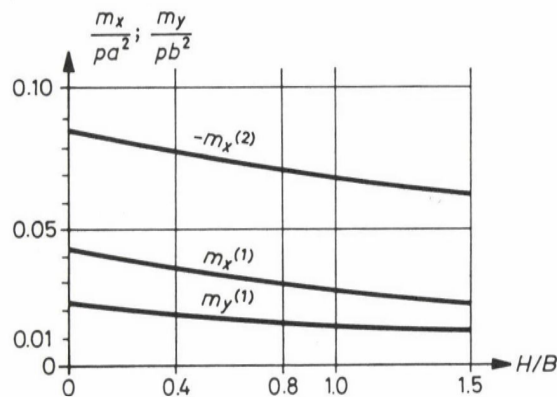
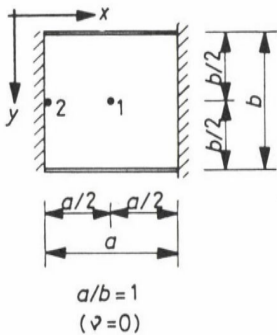


4.3. ábra

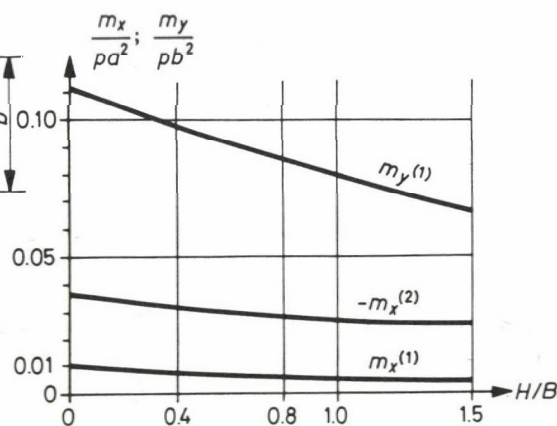
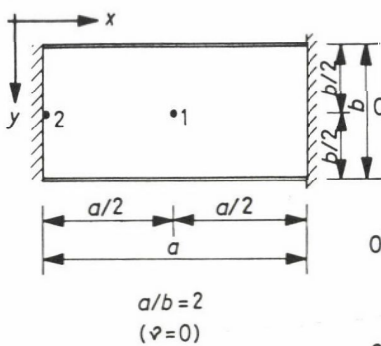
(a)



(b)

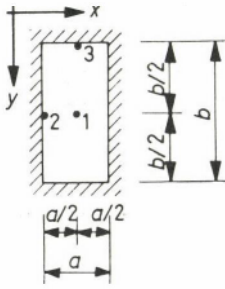


(c)

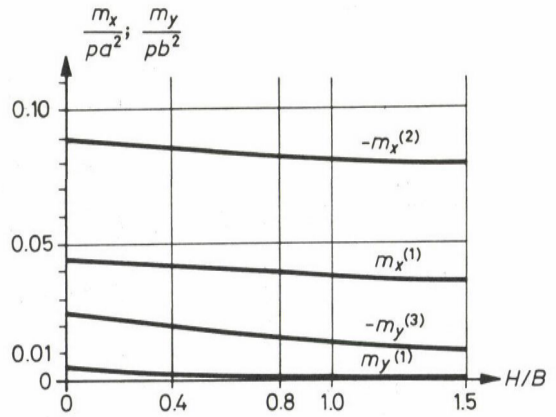


4.4. ábra

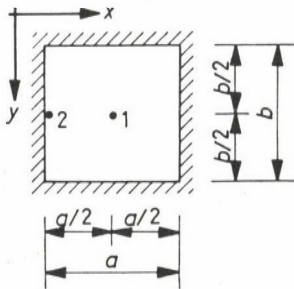
(a)



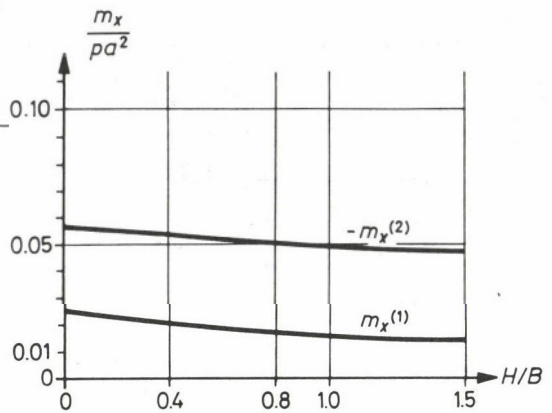
$$a/b = 0.5$$
$$(\varphi = 0)$$



(b)

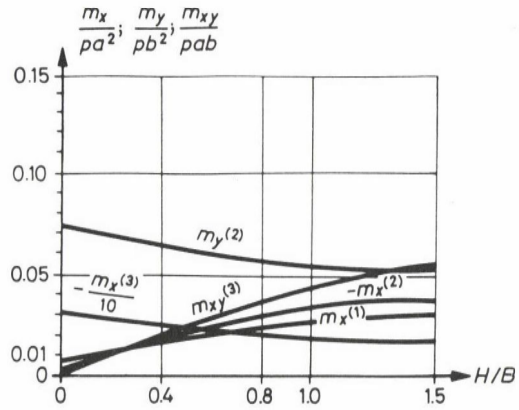
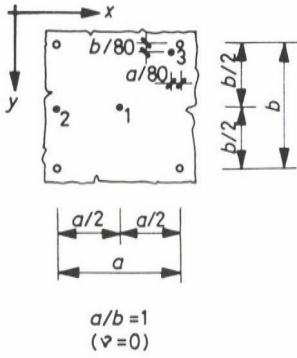


$$a/b = 1$$
$$(\varphi = 0)$$

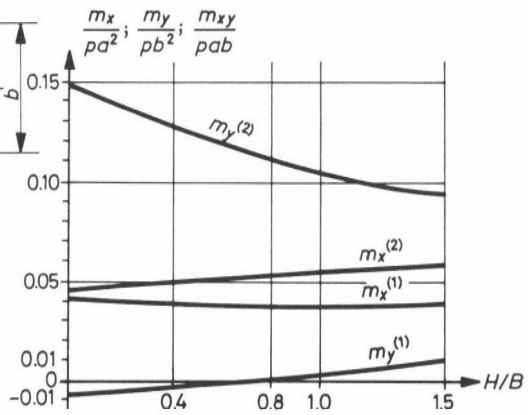
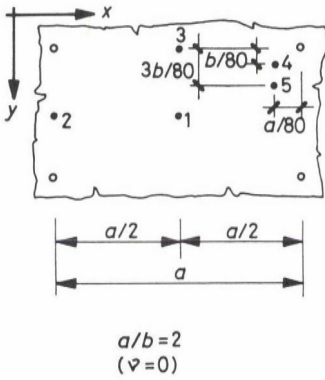


4.5. ábra

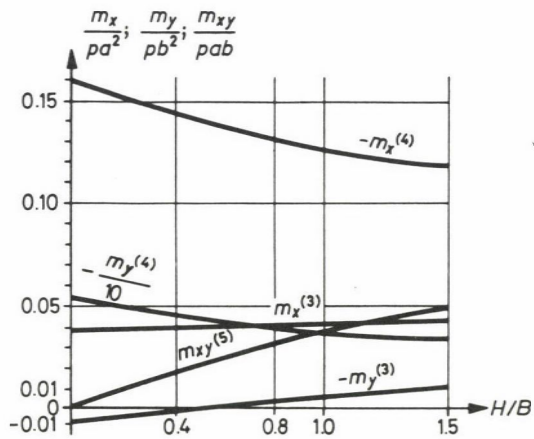
(a)



(b)

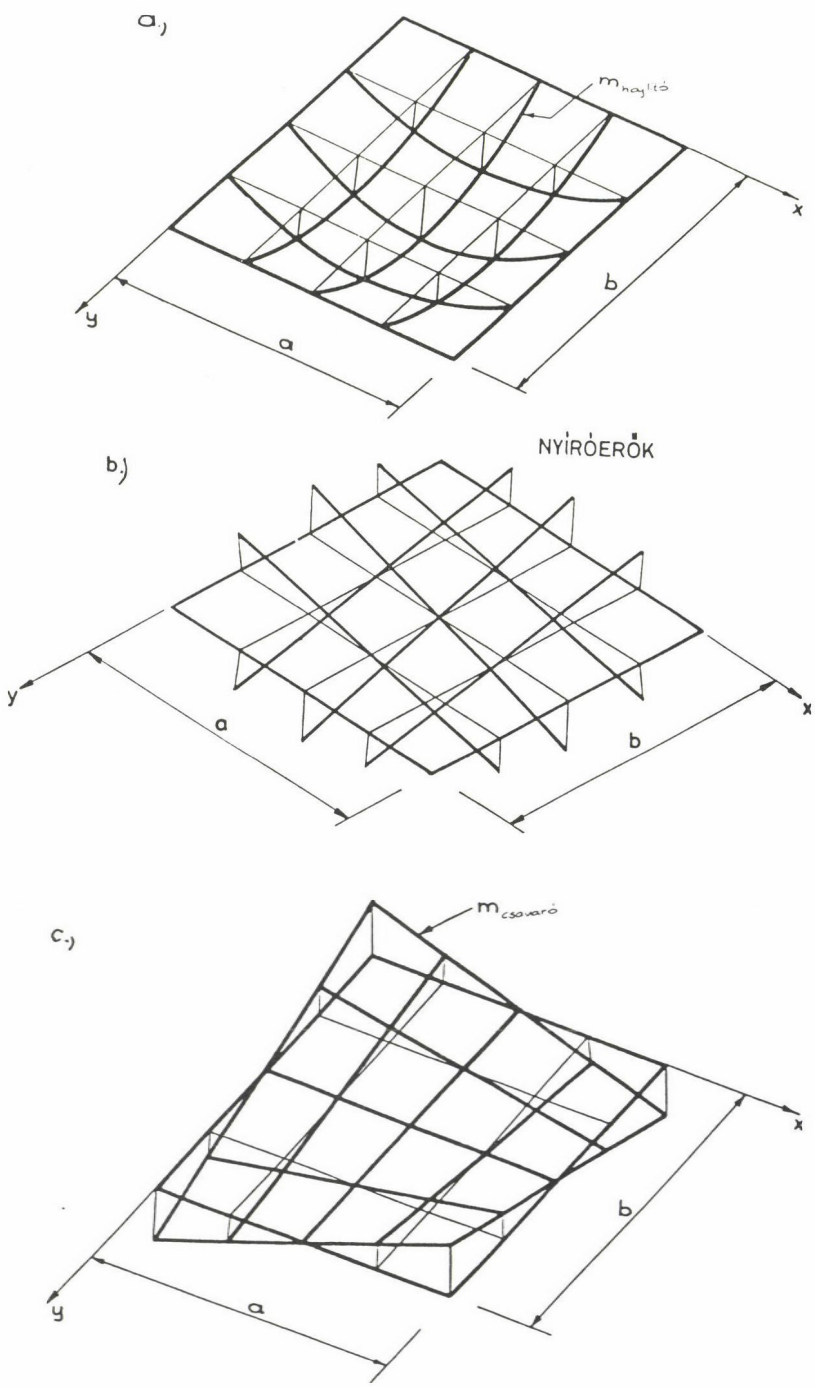


(c)



4.6. ábra





4.7. ábra

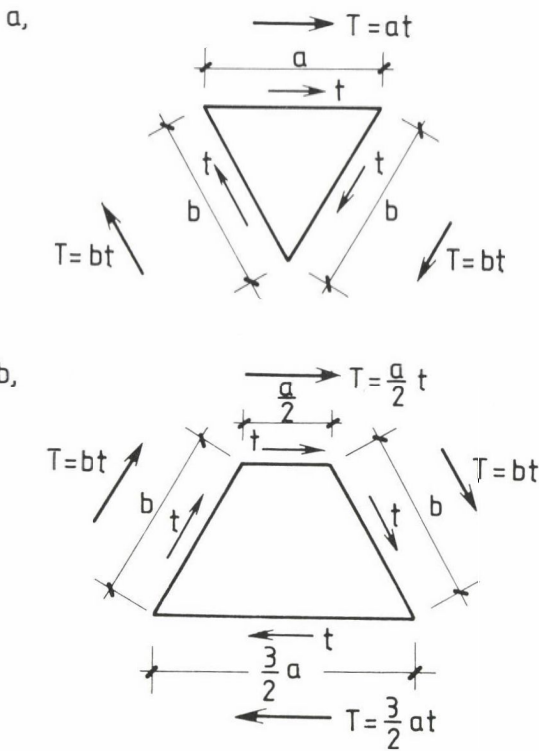
ahol az  $\underline{m}$  vektort a (2.2) képlet definiálja;

$$\underline{m}^r = \begin{bmatrix} m_x^r \\ m_y^r \\ m_{xy}^r \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

a rácsra ható nyomatékok vektora; az  $\underline{f}$  és  $\underline{a}$  indexek pedig a felső, ill. az alsó övsíkra vonatkoznak.

E metszeterőkből a rúderőket a 2.2. pontban ismertetett képletekkel számíthatjuk ki, az itt nem részletezett hálózatok esetében pedig a /Kollár és Hegedűs, 1985/-ben található általános összefüggéseket használhatjuk.

A rácsos csöveket is tartalmazó térrácsokban a csavarónyomatékokat ezek a csövek veszik fel. Így a (4.3) képletek csupán a hajlítónyomatékokra ér-



4.8. ábra

vényesek. A "négyzet felett eltolt andráskeresztes négyzet" típusú rácsban (3.8. ábra) mind az x, mind az y irányú csövekre az  $m_t = m_{xy}$  csavarónyomaték hat. A "háromszög felett hatszög" típusú rácsban (3.9. ábra) a rácsos csöveget a (4.8) képleteknek megfelelő csavarónyomatékok veszik igénybe.

A rácsos csövekben az  $m_t$  csavarónyomatékok a csövet határoló rácsozások rácsrúdjában keltenek rúderőket. A vékonyfalú, zárt szelvények csavarásának elmélete szerint először kiszámítjuk a cső falában ébredő t nyírófolyamot (kN/m):

$$t = \frac{m_t}{2 A_{cső}}, \quad (4.11)$$

ahol  $A_{cső}$  a rácsos cső által bezárt terület. Ezt a nyírófolyamot meg kell szorozni a cső oldalhosszával (4.8. ábra), és az így kapott (kN dimenziójú) mennyiséget nyíróerőnek tekintve, a síkbeli rácsostartókra érvényes valamelyik módszerrel kaphatjuk meg az egyes rácsrudakban ébredő erőket.

## 5. A KÉTRÉTEGŰ TÉRRÁCSOK VISELKEDÉSE A NYÍRÁS HATÁSÁRA

A térrács nyíróerőit az összekötő rácsozás veszi fel. A rúderőket a függőleges vetületi egyensúlyból határozzuk meg; az összekötő rácsozás térbeli elhelyezkedése folytán egy rácsrúd általában mind az x, mind az y irányú rácsozatnak eleme, s így mind a két irányban működő nyíróerőből kap rúderőket, amelyeket összegeznünk kell. A rácsos csöveket is tartalmazó rácsokban természetesen a csavarásból származó rúderőket is hozzá kell adni a nyírásból származókhöz.

Az összekötő rácsozás adta nyírási merevség lényegesen kisebb a (tömörnek képzelt) helyettesítő lemezénél, s ennek folytán számottevően (10-30%-kal is) megnövelheti a hajlításból származó lehajlásokat.

A következőkben először néhány rácsozási típus nyírási merevségét adjuk meg, majd a nyíróerőket és a nyírási lehajlást tárgyaljuk, végül pedig a rácsrúderők meghatározását mutatjuk be.

### 5.1. Néhány rácstípus nyírási merevsége

Az x, ill. y irányban érvényes  $\underline{S}$  nyírási merevség definíciója:

$$\varphi_x = \frac{t_x}{S_x}, \quad (5.1a)$$

ill.

$$\varphi_y = \frac{t_y}{S_y}, \quad (5.1b)$$

ahol  $\varphi_x$  és  $\varphi_y$  a lemezközépvonal elferdülési szöge x és y irányban;  $t_x$  és  $t_y$  pedig az egységnyi szélességre ható nyíróerők.

A "háromszög felett eltolt háromszög" típusú rácson (3.2. ábra):

$$S_x = S_y = \frac{h^2}{\sqrt{3} l_t^3} E A_{\text{rács}}, \quad (5.2a)$$

ahol

$$l_t = a \sqrt{\frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{3}} \quad (5.2b)$$

a rácscrudak hossza.

A "négyzet felett eltolt négyzet" típusú rácson (3.3., 3.4b., 3.8. ábrák):

$$S_x = S_y = \frac{h^2}{l_s^3} E A_{\text{rács}}, \quad (5.3a)$$

ahol

$$l_s = a \sqrt{\frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{2}} \quad (5.3b)$$

a rácscrudak hossza.

A "háromszög felett hatszög" típusú rácson (3.9. ábra);

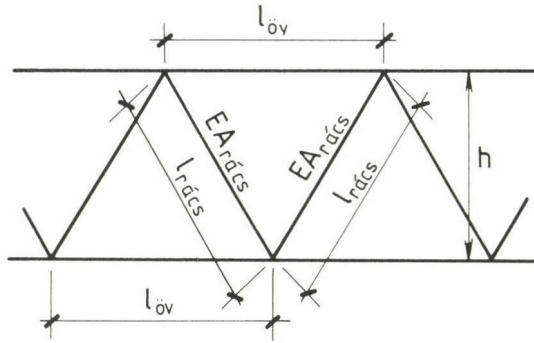
$$S_x = S_y = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{h^2}{l_h^3} E A_{\text{rács}}, \quad (5.4a)$$

ahol

$$l_h = a \sqrt{\frac{h^2}{a^2} + 1} \quad (5.4b)$$

a rácscrudak hossza.

A "négyzet felett elfordított négyzet" típusú rácson (3.7. ábra) a rácscrudák függőleges síkban helyezkednek el, így a lemez nyírás merevségét a szimmetrikus rácsozású síkbeli rácstartók (5.1. ábra)



5.1. ábra

$$S_{\text{síkbeli}} = \frac{l_{\text{öv}}^2 h^2}{2l_{\text{rács}}^3} E A_{\text{rács}} \quad (5.5)$$

nyírési merevségéből kaphatjuk meg, ha figyelembe vesszük, hogy most  $l_{\text{öv}} = \sqrt{2a}$ , és  $S_{\text{síkbeli}}$ -t elosztjuk a rácstartók egymástól mért  $\sqrt{2a}$  távolsággal, mivel a lemez  $S$  nyírési merevsége definíciószerűen egységnyi szélességre vonatkozik:

$$S = \frac{h^2}{2l_{\text{rács}}^3} E A_{\text{rács}} \quad (5.6)$$

Értelemszerűen ugyanez vonatkozik mindazokra a rácsoakra, amelyeknek a rácsozásai függőleges síkokban helyezkednek el (3.4a., 3.5. ábrák).

## 5.2. A nyíróerők meghatározása

A térrács nyíróerőinek meghatározásához két esetet kell megkülönböztetnünk.

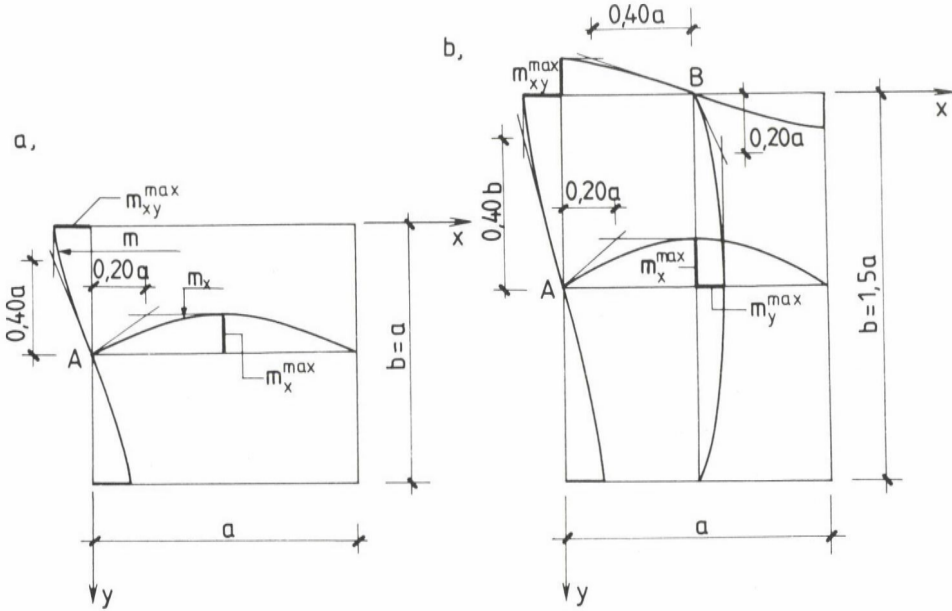
Ha a térrácsnak valóban egy egyszerű lemez az egyenértékű kontinuum (mint pl. az egymással arányos merevségű alsó-felső övsíkból álló rács esetében), akkor az egyenértékű lemez nyíróerői közvetlenül megadják a rács nyíróerőit is.

Mivel azonban a táblázatok és diagramok sok esetben csak a nyomatékokat tartalmazzák, röviden ki kell térnünk arra: hogyan kaphatjuk meg ezekből a nyíróerőket.

A lemez  $t_x$  nyírőereje nem egyszerűen a hajlítónyomaték deriváltja, hanem szerepel benne a csavarónyomaték harántirányú deriváltja is:

$$t_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad (5.7a)$$

lásd /Timoshenko és Woinowski-Krieger, 1966/-ban.



5.2. ábra

Ha tehát ismerjük pl. egy négyzetalaprájzú, szabadon feltámaszkodó izotrop lemez maximális nyomatékait (5.2a. ábra), akkor — mivel az A pontban az  $m_x$ -ábra meredekebb a másodfokú parabolánál, az  $m_{xy}$ -ábra pedig a lineáris ábránál — az ábrában bejött adatokkal a következőképpen kaphatjuk meg az A pontbeli nyírőerőt:

$$t_x^A = \frac{m_x^{\max}}{0,2a} + \frac{m_{xy}^{\max}}{0,4a}. \quad (5.7b)$$

A második tag az első tagnak mintegy a felét is kiteheti.

Téglalap alaprajzú lemez esetében (5.2b. ábra) a hosszabb oldallal párhuzamosan futó nyomatékára sokkal elnyújtottabb a parabolánál, így az  $y$

irányú maximális nyomatékból nem a saját irányának megfelelő  $0,2b$ -vel, hanem a rövidebb oldalnak megfelelő  $0,2a$ -val való osztással kapjuk meg a B pontbeli nyíróerőt. Az 5.2b ábrának megfelelően tehát:

$$t_x^A = \frac{m_x^{\max}}{0,2a} + \frac{m_{xy}^{\max}}{0,4a}, \quad (5.7c)$$

$$t_y^B = \frac{m_y^{\max}}{0,2a} + \frac{m_{xy}^{\max}}{0,4a}. \quad (5.7d)$$

Az  $r$  reakcióerő nagyobb a nyíróerőnél, mivel a csavarónyomatékból származó tagot még egyszer hozzá kell adnunk (ezek képviselik az ún. Kirchhoff-erőket):

$$r = \frac{\partial m_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}.$$

A sarkokban fellépő leszorító erő nagysága pedig az  $a$  oldalon összegezett  $\partial m_{xy} / \partial y$  Kirchhoff-erőkkel egyenlő.

Ha viszont a rácsnak a közönséges lemez csak "fiktív" egyenértékű kontinuum (mint pl. a "négyzet felett elfordított négyzet" vagy a "háromszög felett hatszög" típusú rácsok esetében), amikor tehát a (4.2)–(4.7) transzformációs képletekkel kell kiszámítanunk a térrács igénybevételeit a lemezéiből, akkor célravezetőbb, ha közvetlenül elosztjuk a teljes terhet a négy oldalra, közelítésképpen parabolikus eloszlást feltételezve. Mivel a két említett térrács közül az elsőnek zérus, a másodiknak pedig igen kicsi a csavarási merevsége, ezért mind a két esetben eltekinthetünk a csavarónyomatékból származó nyíróerő- (és reakcióerő-) résztől.

### 5.3. A nyírési lehajlás

A jobb megértés kedvéért először összefoglaljuk a nyírési lehajlás számításának a síkbeli tartókra érvényes módszerét.

A síkbeli tartók nyírési lehajlását ismeretes módon az

$$e_{nyír}(x) = \int \varphi(x) dx = \frac{1}{S_{síkbeli}} \int T(x) dx \quad (5.8a)$$

képlet adja meg, ahol

$$S_{síkbeli} = GA/\rho \quad (5.8b)$$



a tartó nyírási merevsége,  $\rho$  pedig a keresztmetszet nyírási alakí tényezője.

A nyíróerő integrálja a hajlítónyomatékot szolgáltatja. Figyelembe kell azonban vennünk, hogy az  $e_{nyír}$  lehajlásnak mások a peremfeltételei és ezzel együtt az integrálási állandói is, mint a hajlítónyomatéknak:  $e_{nyír}$  a támaszok felett kell hogy zérus legyen. Ezt a tartó merevtest-szerű elmozdulásával elégíthetjük ki, ami két integrálási állandót jelent. (A nyírási lehajlás alapvető differenciálegyenlete ennek megfelelően másodrendű és

$$\frac{d^2 e_{nyír}}{dx^2} = \frac{1}{S_{síkbeli}} \frac{dT}{dx} = \frac{1}{S_{síkbeli}} \rho$$

alakú).

Az a követelmény, hogy a nyírási lehajlás a támaszok felett zérus legyen, kéttámaszú tartókon megegyezik a nyomaték peremfeltételeivel, de már konzolos tartókon nem: itt a nyomatékára nulla-vonalát úgy kell eltolnunk, hogy a nyomaték a támaszok felett legyen zérus, és a konzolok felett ezt a nulla-vonalat egyenesen meg kell hosszabbítanunk (5.3a ábra). Ha az ettől az eltolt nulla-vonaltól mért nyomatékot  $\bar{M}(x)$ -szel jelöljük, akkor a nyírási lehajlást az

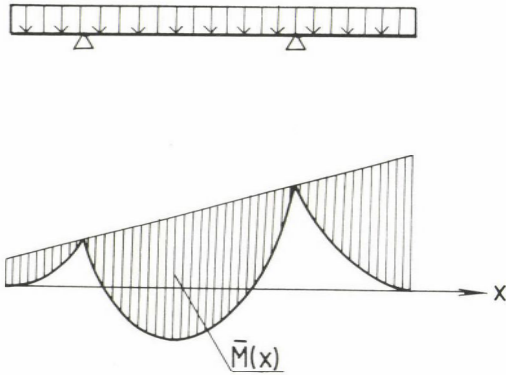
$$e_{nyír}(x) = \frac{\bar{M}(x)}{S_{síkbeli}} \quad (5.8c)$$

kifejezés adja meg.

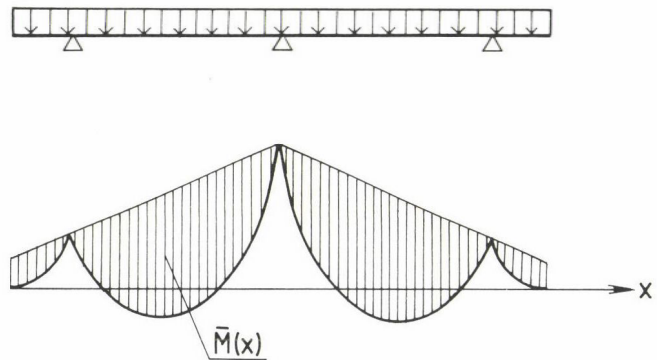
Határozatlan (pl. folytatatólagos többtámaszú) tartókon általában nem tudjuk a nulla-vonalat úgy eltolni, hogy valamennyi támasz vonalában zérus lehajlást kapjunk. Ennek oka az, hogy a nyomatékábrát csupán a hajlításból származó alakváltozások figyelembevételével határoztuk meg, holott a nyírási alakváltozások is befolyásolják a statikailag ismeretlen mennyiségek nagyságát. Az elvileg helyes módszer tehát az lenne, hogy mind a két fajta alakváltozást bevonjuk a határozatlan mennyiségek kiszámításába. Ily módon más nyomatékábrát kapnánk, és kielégíthető lenne az a követelmény, hogy valamennyi támasz fölött zérus legyen a lehajlás.

Ha azonban nem az a célunk, hogy pontos megoldást kapjunk, hanem egyszerű közelítő módszert keresünk, akkor az a célszerű, ha alapul vesszük a szokásos módszerrel meghatározott nyomatékábrát, törtvonallal összekötjük a támaszok feletti nyomatékcsúcsokat, a konzolokon egyenes vonalú meghosszabbítással, és ettől mérjük  $\bar{M}(x)$ -et (5.3b ábra). A nyírási lehajlás korrekciójellege folytán a teljes lehajlásban nem lesz túlságosan nagy az így elkövetett hiba.

a,



b,



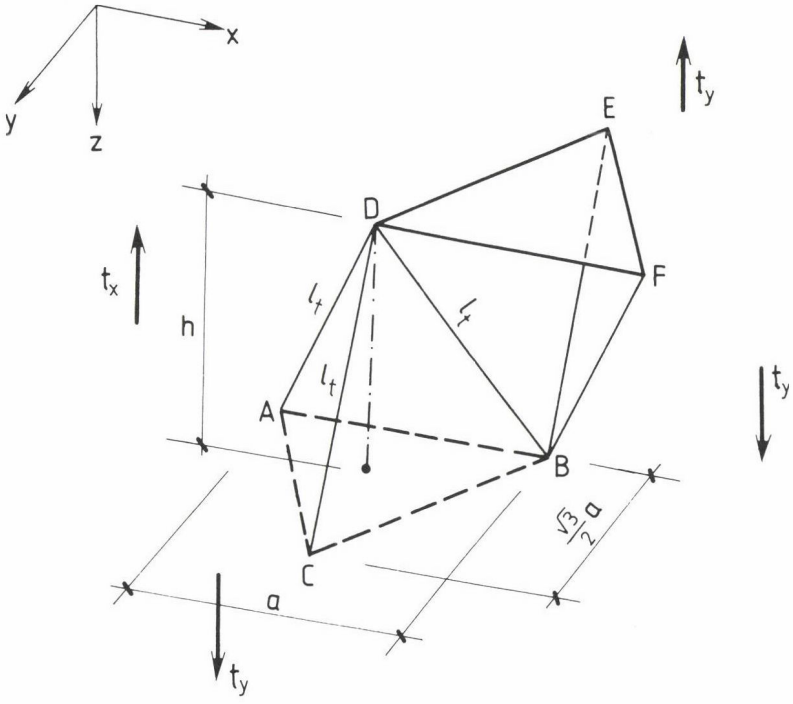
5.3. ábra

A lemezek nyírási lehajlását mindezek alapján úgy kaphatjuk meg, hogy megkeresünk rajta egy (vagy több) olyan egyenes vonalat, amelynek mentén ismerjük a nyíróerő-ábrát, és az (5.8a) képletből az egységnyi szélességre jutó  $\underline{t}$  nyíróerővel és  $\underline{S}$  nyírási merevséggel számítjuk ki  $e_{nyír}$ -t:

$$e_{nyír}(x) = \frac{1}{S} \int t(x) dx, \quad (5.9)$$

ügyelve arra, hogy  $e_{nyír}$  a támaszok felett legyen zérus.

5.4. A rácsrúderők meghatározása a térrács nyírőerőiből



5.4. ábra

Háromszög felett eltolt háromszög (5.4. ábra):

$$t_x\text{-ből: } N_{AD} = -N_{DB} = -\frac{l_t}{h} \frac{\sqrt{3}}{2} a t_x, \tag{5.10a}$$

$$N_{CD} = 0;$$

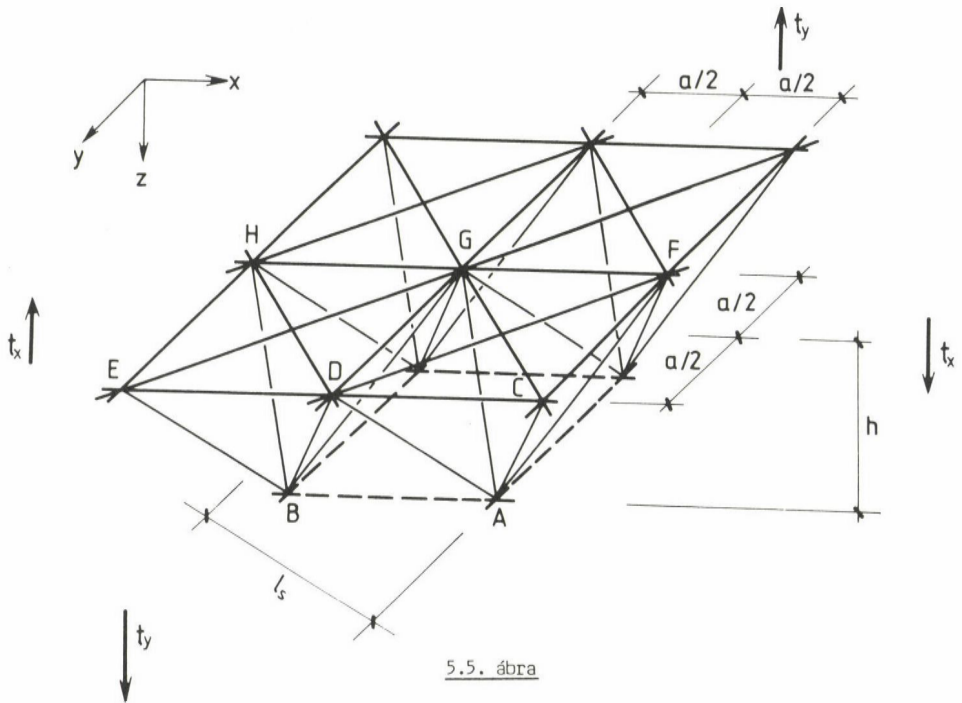
$$t_y\text{-ből: } N_{CD} = \frac{l_t}{h} a t_y, \tag{5.11a}$$

$$N_{DA} = N_{DB} = -\frac{l_t}{h} \frac{a}{2} t_y. \tag{5.11b}$$

A rácsrudak  $l_t$  hosszát az (5.2b) képlet adja meg.  
Négyzet felett eltolt négyzet (5.5. ábra):

$$N_{\text{rács}} = \pm \frac{l_s}{h} \frac{a}{2} t \tag{5.12}$$

(mindkét irányban).  $l_s$ -et (5.3b) adja meg.



5.5. ábra

Háromszög felett hatszög (5.6. ábra):

$$t_x\text{-ből: } -N_{AC} = N_{CB} = -N_{FE} = N_{ED} = \frac{l_h}{h} \frac{3}{4} a t_x, \quad (5.13a)$$

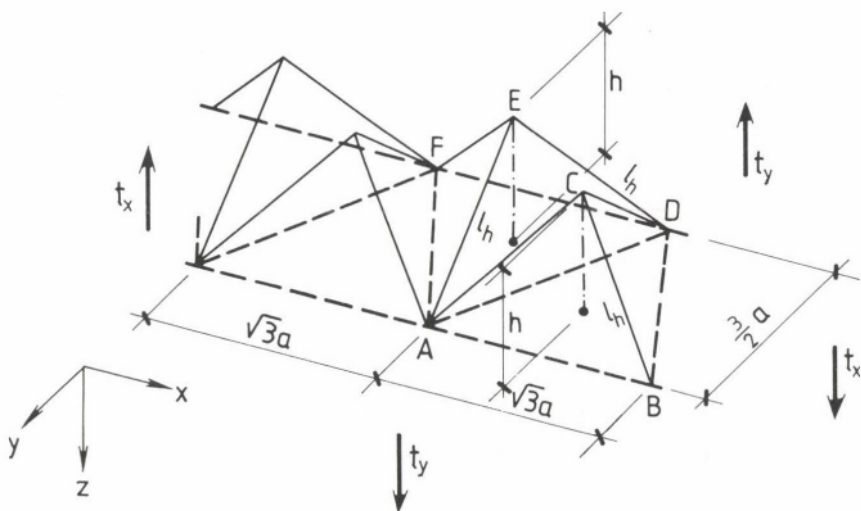
$$N_{AE} = N_{CD} = 0; \quad (5.13b)$$

$$t_y\text{-ből: } N_{AE} = -N_{CD} = \frac{l_h}{h} \frac{\sqrt{3}}{2} a t_y, \quad (5.14a)$$

$$N_{AC} = N_{BC} = -N_{EF} = -N_{ED} = \frac{l_h}{h} \frac{\sqrt{3}}{4} a t_y. \quad (5.14b)$$

$l_h$ -t (5.4b)-ből kapjuk meg.

A "négyzet felett elfordított négyzet" típusú rácsban a rácsozások függőleges síkban helyezkednek el, így a rúderőket a síkbeli rácsostartókra érvényes összefüggésekkel számíthatjuk ki.



5.6. ábra

## 6. KIEGÉSZÍTŐ MEGJEGYZÉSEK

### 6.1. A közelítő kontinuum-módszerrel elkövetett hiba

A helyettesítő lemezen alapuló számítással elkövetett hibáról a következőket mondhatjuk el:

Az egymással arányos merevségű övsíkokkal bíró térrácsoknak a megfelelően választott merevségekkel rendelkező közönséges lemez pontosan megfelel, ebben az esetben tehát nem követünk el hibát (pontosabban véve csak akkorát, amekkora a folytonos lemez igénybevételeinek az eltérése a diszkrét rácsostartóéitól), feltéve, hogy a lemez merevségei minden pontban megegyeznek a térrács merevségeivel. Az irodalomban található megoldások azonban többnyire állandó merevségű lemezre vonatkoznak, így ha a térrács merevségei — a rudak jobb kihasználása érdekében — helyről helyre változnak, akkor az állandó merevségű lemez eredményei emiatt is eltérnek a térrács igénybevételeitől.

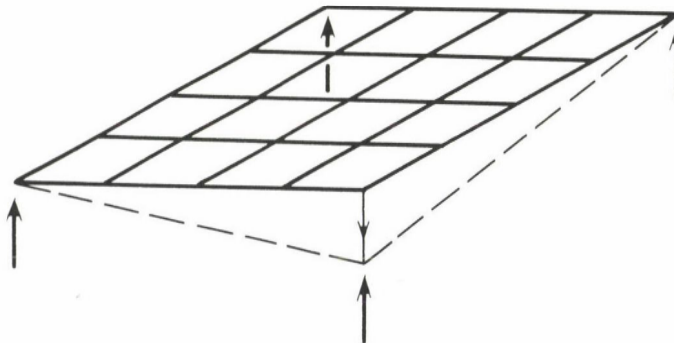
Az egymással nem arányos merevségű övsíkokkal bíró, ill. a rácsos csövekkel merevített térrácsok esetében a most említettéknél lényegesen nagyobb hiba adódik abból, hogy elhanyagoljuk valamelyik övsík egyes merevségeit, és az utóbbi típusnál még az alakváltozások összeférhetőségét sem elégítjük ki. Ebből egyrészt az következik, hogy azokban a rudakban, amelyek az elhanyagolt merevségeket adják, a valóságban nagyobb rúderők fognak ébredni,

mint a közelítő számítás szerint; másrészt pedig a térrács valódi alakváltozása (lehajlása stb.) kisebb lesz, mint amit a közelítő számításból kapunk. Ezeknek az eltéréseknek a mértéke változó, és jelenleg nem tudunk módszert adni a megbecslésére.

## 6.2. A térrácsokhoz szükséges alátámasztás

Ha a térrácsnak megvan mind a három fő merevsége (kétirányú hajlítási, valamint csavarási merevség), akkor elvileg úgy kezelhetjük, mint egy "merev testet", amit a statika szabályai szerint három, nem egy síkban fekvő függőleges rúddal kell a földhöz támasztanunk (és természetesen biztosítanunk kell a vízszintes síkban is az elmozdulásmentességét). Ebből az is következik, hogy a három (vagy több) függőleges megtámasztást szabálytalanul is elrendezhetjük.

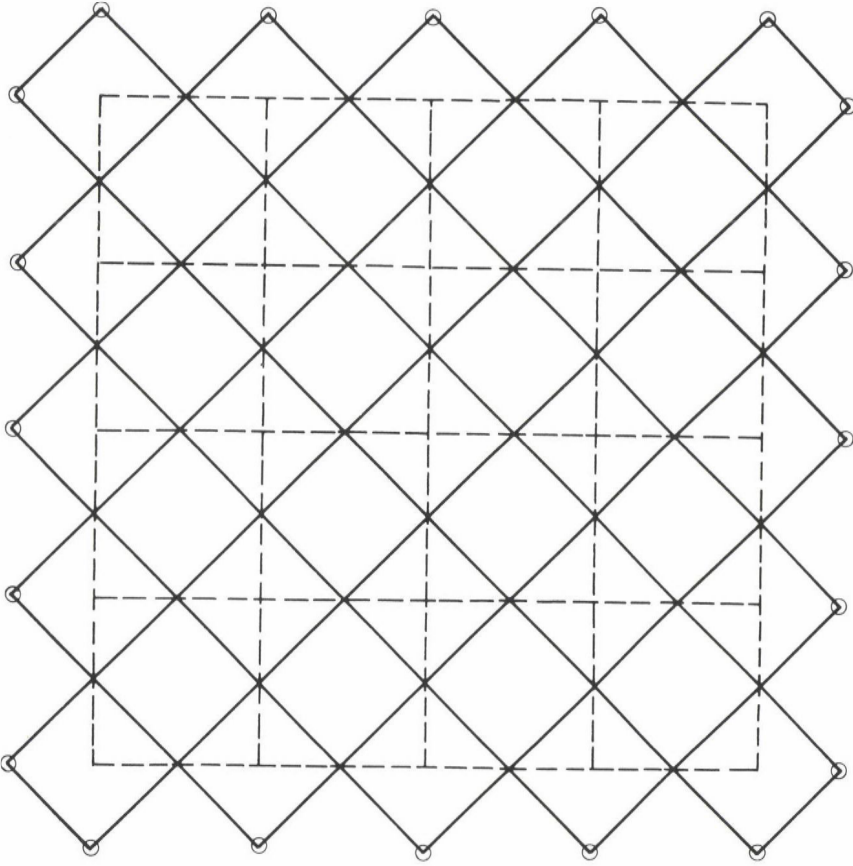
Ha hiányzik a csavarási merevség (négyzet felett eltolt négyzet hálózatu rács), akkor a csavarási alakváltozás meggátlásához még legalább egy negyedik függőleges megtámasztás szükséges. Ezeket úgy kell elrendezni, hogy meggátolják a rácsnak a 6.1. ábrán rajzolt elcsavarodását.



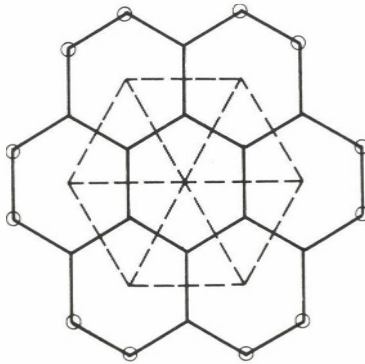
6.1. ábra

A négyzet felett elfordított négyzet hálózatu rácsot a területén végig alá kell támasztani mindegyik kiugró csomópontjában, hogy állékony legyen. A 6.2. ábrán a szükséges alátámasztásokat körrel jelöltük.

A háromszög felett hatszög típusú rácsot szintén mindegyik kiugró csomópontjában meg kell támasztani a teljes kerülete mentén (6.3. ábra; az alátámasztások körrel jelölve).



6.2. ábra



6.3. ábra



### 6.3. Stabilitási kérdések

#### 6.3.1. Az egyes rudak kihajlása

A kétrétegű térrácsok rúdjai a csomópontokban általában fixen meg vannak támasztva minden irányban, így a rácsos tartók elméletében szokásos módon a hálózati hosszukat vehetjük kihajlási hosszának. Ezzel a biztonság javára tévedünk, mivel a csatlakozó rudak mindig többé-kevésbé befogják a vizsgált nyomott rudat. Tájékoztatásul megemlítjük, hogy egy fixen megtámasztott végű, kétcsuklós tekintett nyomott rúd kritikus erejét a két végéhez csatlakozó, egy-egy vele azonos merevségű (húzott) rúd befogó hatása mintegy a kétszeresére növeli. Ha tehát a térrács nyomott rúdjainak hálózati hosszát tekintjük kihajlási hosszának, akkor biztonságuk sok esetben nagyobb lesz a húzott rudakénál. Ez főként hegesztett csomópontok esetében igaz, mert ha tompavarrattal illesztik a rudakat, akkor ez húzás esetében sokkal érzékenyebb a kivitelezési hibákra, mint nyomás esetében, s ezen felül a nyomott rúd kihajlási biztonságát még a most ismertetett befogás is fokozhatja.

Másrészt viszont az is következik az elmondottakból, hogy a térrács nem annyira érzékeny a rúderők pontos meghatározására, mint első pillanatban gondolnánk: a kevésbé kihasznált rudak "segítenek" a jobban igénybevetetteknek, tehát bizonyos mértékű kiegyenlítődéssé állhat be, mint a statikailag határozatlan szerkezetekben általában.

#### 6.3.2. Az egész térrács stabilitása

A kétrétegű térrácsok csak akkor vannak egészükben nyomásra igénybe véve, ha héjszerűen, görbe felület szerint vannak kialakítva. Ekkor egészükben héjszerű horpadásra kell ellenőriznünk őket. Ezt a következő alapelvek szerint végezhetjük el:

A horpadást okozó kritikus teher nagyságát a helyettesítő kontinuumra állapítjuk meg, a héjelmélet eredményeinek felhasználásával /Kollár és Dulácska, 1975/. Az eredmény jó közelítéssel érvényes a rácsos szerkezetre is, ha egy horpadási félhullám legalább négy övrúdnyi hosszúságú. Ennél rövidebb horpadási félhullám esetén romlik a közelítés, de két rúdhossznyi félhullámhossz még használható közelítést biztosít. (A horpadási félhullámhosszat szintén a héjelmélet szolgáltatja.)

Helyettesítő kontinuumként első közelítésként izotrop héjat célszerű vennünk, mivel az irodalomban erre találhatjuk a legtöbb megoldást, és a legegyszerűbben az izotrop egyenértékű héjlemez adatait tudjuk meghatározni.

A kétrétegű, háromszöghálózatu övsíkból álló térrácsot úgy alakíthatjuk át egyenlőoldalú háromszög-hálózatu, minden irányban azonos rúdszelvényűvel bíró, két azonos övsíkből álló ráccsá (3.2. ábra), hogy a hálózatot alkotó általános háromszöget azonos területű egyenlő oldalú háromszöggé alakítjuk át, és a három különböző merevségű rudat is "átlagos merevségű" rudakkal helyettesítjük. Az így kapott térrácsnak már egy izotrop tömör héj felel meg. Ennek az egyenértékű héjnak az adatait abból a követelményből határozzuk meg, hogy mind húzási, mind hajlítási merevsége egyezzen meg a térrácséval.

Az eredményül kapott tömör héj adatai:

Vastagság:

$$t' = \sqrt{3}h, \quad (6.1)$$

rugalmassági modulus:

$$E' = \frac{4}{3} \frac{A}{ah} E, \quad (6.2)$$

harántkontrakciós tényező:

$$\nu' = \frac{1}{3}. \quad (6.3)$$

Itt  $h$  — a két övsík egymástól mért távolsága,  
 $a$  — a háromszögek oldalhossza,  
 $A$  — a rudak keresztmetszeti területe,  
 $E$  — a rudak anyagának rugalmassági modulusa.

- Bareš, R.** (1971): Berechnungstabeln für Platten und Wandscheiben. Bauverlag, Wiesbaden/Berlin.
- Czerny, F.** (1976): Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten. Beton-Kalender Teil I. 305–381. W. Ernst u. Sohn, Berlin/München/Düsseldorf.
- Giencke, E.** (1955): Die Grundgleichungen der orthotropen Platte mit exzentrischen Steifen. Stahlbau **24**, 128–129.
- Kollár L.—Dulácska E.** (1975): Héjak horpadása. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- Kollár, L.—Hegedűs, I.** (1985): Analysis and Design of Space Frames by the Continuum Method. Akadémiai Kiadó, Budapest—Elsevier Science Publ., Amsterdam.
- Krug, S.—Stein, P.** (1961): Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg.
- Timoshenko, S.—Woinowsky-Krieger, S.** (1966): Lemezek és héjak elmélete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Trenks, K.** (1954): Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten. Bauingenieur, **29**, 372–377.