MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 19/1978.

A SUMT MÓDSZER ALKALMAZÁSA LOGARITMIKUSAN KONKÁV FELTÉTELI FÜGGVÉNYEKET TARTALMAZÓ NEM-LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI FELADAT MEGOLDÁSÁRA

Rapcsák Tamás

A SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Techniques) olyan nem-lineáris programozási algoritmus, amely a feladat megoldását feltétel nélküli minimalizálások sorozatára vezeti vissza. Ha a célfüggvény konvex és a feltételi függvények konkávak, akkor az algoritmus globális minimumot határoz meg. Ebben a cikkben megmutatjuk, hogy a SUMT belső pont algoritmusai logaritmikusan konkáv feltételi függvények mellett nem korlátos tartomány esetén is globális optimumot határoznak meg. Ilyen tipusu feladatok Prékopa András munkáiban fordulnak elő. [9], [10], [11]. Az itt található konvergencia bizonyitások is eltérnek a korábbiaktól. A dolgozat végén számitástechnikai tapasztalatokat közlünk.

Definició. Egy R^n-beli $g(\underline{x})$ függvény logaritmikusan konkáv, ha $\ln g(\underline{x})$ konkáv függvény.

A következő feladattal foglalkozunk:

$$
\begin{aligned}
&\min f(\underline{x}), && \\
(1)\qquad &g_i(\underline{x}) \geqslant p_i, && i = 1, \ldots, r, \\
&g_i(\underline{x}) \geqslant 0, && i = r+1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

ahol $f(\underline{x})$, $-g_i(\underline{x})$, $i = r+1, \ldots, m$ R^n-beli konvex függvények, a $g_i(\underline{x})-k$, $i = 1, \ldots, r$ pedig R^n-beli logaritmikusan konkáv függvények, $p_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$.

1. Lemma. *Ha* $g(\underline{x})$ *logaritmikusan konkáv, akkor* $p > 0$ *esetén* $g(x) - p$ *is logaritmikusan konkáv* $(\underline{x})|g(\underline{x}) > p\} - n$.

Bizonyitás. A logaritmikus konkávitás definiciójából következik, hogy $g(\underline{x})$ az egész téren folytonos..Ezért elegendő megmutatni, hogy

$$g\left(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}{2}\right) - p \geqslant \sqrt{(g(\underline{x}_1) - p)(g(\underline{x}_2) - p)} \quad \text{ha } \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \{\underline{x}\,|g(\underline{x}) > p\} \quad .$$

De $g(\underline{x})$ logaritmikusan konkáv, igy

$$g\left(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2)}\,, \quad \text{illetve}$$

$$g\left(\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}{2}\right) - p \geqslant \sqrt{g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2)} - p.$$

Tehát elegendő belátni, hogy

$$\sqrt{g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2)} - p \geqslant \sqrt{(g(\underline{x}_1) - p)(g(x_2) - p)}, \quad \text{ha } \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \{\underline{x}\,|g(\underline{x}) > p\} \;.$$

A geometriai egyenlőtlenség miatt

$$2\sqrt{g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2)} \leqslant g(\underline{x}_1) + g(\underline{x}_2).$$

Mivel $p > 0$, igy

$$-2p\sqrt{g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2)} \geqslant -p(g(x_1) + g(\underline{x}_2)).$$

Mindkét oldalhoz $g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2) + p^2 - t$ adva

$$g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2) - 2p\sqrt{g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2)} + p^2 \geqslant g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2) - p(g(\underline{x}_1) + g(\underline{x}_2)) + p^2$$

azaz

$$(\sqrt{g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2)} - p)^2 \geqslant (g(\underline{x}_1) - p)(g(\underline{x}_2) - p).$$

Ha $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \epsilon \{\underline{x} | g(\underline{x}) > p\}$, akkor

$$\sqrt{g(\underline{x}_1)g(\underline{x}_2)} - p \geqslant \sqrt{(g(\underline{x}_1) - p)(g(\underline{x}_2) - p)},\quad \text{ami éppen az állitás.}$$

2. **Lemma.** *Ha* $g(\underline{x})$ *logaritmikusan konkáv, akkor* $p > 0$ *esetén* $1/g(\underline{x}) - p$ *konvex* $\{\underline{x}/g(\underline{x}) > p\}$ $-$ *n.*

Bizonyitás. Az 1. Lemma miatt $\ln(g(\underline{x}) - p)$ konkáv $\{\underline{x}/g(\underline{x}) > p\}$ – *n*. Ebből következik, hogy

$$e^{-\ln(g(\underline{x})-p)} = \frac{1}{g(\underline{x}) - p} \quad \text{konvex} \quad \{x | g(\underline{x}) > p\} - n.$$

3. **Lemma.** *Ha a* $g_i(\underline{x}) - k$, $i = 1, \ldots, r$ *logaritmikusan konkávak,*

$$P = \{x | g_i(x) \geqslant p_i,\ i = 1, \ldots, r\},\ P_0 = \{\underline{x} | g_i(\underline{x}) > p_i,\ i = 1, \ldots, r\}$$

nem üres, akkor P_0 *megegyezik* P *relativ belső pontjainak halmazával.*

Bizonyitás. A $g_i(\underline{x}) - k$ $i = 1, \ldots, r$ folytonosságából következik, hogy P relativ belső pontjainak halmaza tartalmazza P_0-t. A forditott állitást indirekt uton látjuk be. Tegyük fel, hogy P_0 nem tartalmazza P relativ belső pontjainak halmazát. Akkor található $\underline{x}_1$ relativ belső pont, amelyre $g_i(x_1) = p_i$ valamely i indexre. Mivel x_1 relativ belső pont, ezért létezik olyan környezete, amely P-beli pontokból áll. Legyen $x_0 \epsilon P_0$. (Ilyen pont található, mert P_0 nem üres.) Kössük össze az x_0-t az x_1-el és hosszabbitsuk meg ugy ezt a szakaszt hogy a végpontja x_2 az x_1 környezetén belül maradjon. Akkor létezik $0 < \lambda < 1$ ugy, hogy $x_1 = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_2$ és $g_i(\underline{x}_0) > p_i, g_i(x_1) = \bar{p}_i$, $g_i(x_2) \geqslant p_i$.
A $g_i(\underline{x})$ logaritmikus konkávitása miatt

$$p_i = g_i(\underline{x}_1) \geqslant g_i(\underline{x}_0)^{\lambda} \cdot g_i(\underline{x}_2)^{1-\lambda} > p_i^{\lambda} \cdot p_i^{1-\lambda} = p_i.$$

Ez ellentmondás, igy bebizonyitottuk az állitást. Ebből következik, hogy P_0 lezártja megegyezik P-vel.. Legyenek $G_i(\underline{x}) = g_i(\underline{x}) - p_i$, $i = 1, \ldots, r$; $G_i(\underline{x}) = g_i(\underline{x})$, $i = r + 1, \ldots, m$.

Irjuk át II-t az alábbi formába

$$(2)\quad \begin{array}{l} \min f(\underline{x}) \\ G_i(\underline{x}) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

ahol $G_i(x)$ – *k* $i = 1, \ldots, m$ *logaritmikusan konkávak* R^n valamilyen részhalmazán.

A (2) feladatban a megengedett tartomány konvex. Ugyanis ha $G(\underline{x})$ valamilyen tartományon logaritmikusan konkáv, akkor ott kvázikonkáv. Ebből következik, hogy (2)-ben bármely lokális optimum globális. (A nem-lineáris programozási algoritmusok lokális optimumot határoznak meg.)

A (2) feladatot "belső pont" algoritmussal oldjuk meg. Az $\{ \underline{x} | G_i(\underline{x}) > 0, \quad i = 1, \ldots, m \}$ -n értelmezünk egy függvénysorozatot,ugy, hogy a függvénysorozat tagjainak feltétel nélküli minimumai a (2) feladat megoldásához konvergáljanak.

Legyen

$$P_1(\underline{x}, r_k) = f(\underline{x}) + r_k I_1(\underline{x}), \text{ ahol } I_1(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{G_i(\underline{x})},$$

$$P_2(\underline{x}, r_k) = f(\underline{x}) + r_k I_2(\underline{x}), \text{ ahol } I_2(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m} - \ln G_i(\underline{x}).$$

A függvénysorozatokban $r_{k-1} > r_k > 0$ és $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = 0$,

$I_1(\underline{x})$, $I_2(\underline{x})$-re pedig teljesülnek:

1, $I_1(\underline{x})$, $I_2(\underline{x})$ folytonosak R_0-on, ahol $R_0 = \{ \underline{x} | G_i(\underline{x}) > 0, \quad i = 1, \ldots, m \}$.

2, ha $\underline{x}_k$ tetszőleges sorozata R_0-nak és $\underline{x}_k \to \underline{x}_0$ ugy, hogy

$G_i(\underline{x}_0) = 0$ legalább egy i indexre, akkor

$\lim\limits_{k \to \infty} I_1(\underline{x}_k) = + \infty$, illetve

$\lim\limits_{k \to \infty} I_2(\underline{x}_k) = + \infty$.

A 2. tulajdonság miatt a függvénysorozat minden tagjának minimum helye a megengedett tartomány "belsejébe" van kényszeritve, igy a feltétel nélküli optimalizálás során elvileg soha nem lépünk ki R_0-ból. Látható, hogy $P_1(\underline{x}, r_k)$, $P_2(\underline{x}, r_k)$ tetszőleges k mellett konvexek. A konvergencia tételekhez szükséges az alábbi lemma.

4. **Lemma.** *Ha* $u(\underline{x})$ R^n*-beli konkáv függvény, a* $G_i(\underline{x})$*-k* $i = 1, \ldots, m$ *logaritmikusan konkávak* R^n *valamilyen részhalmazán és* $Q = \{ \underline{x} | u(\underline{x}) \geqslant 0, \ G_i(\underline{x}) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m \}$ *nem üres, korlátos, akkor tetszőleges* $k \geqslant 0$ *értékre*

$$Q_K = \{ \underline{x} | u(\underline{x}) \geqslant - k, \ G_i(\underline{x}) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m \} \textit{ korlátos.}$$

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy Q_K nem korlátos. $Q \subset Q_K$ és Q konvex, zárt.
Ha $x_1 \epsilon Q$, akkor x_1-ből inditható olyan sugár, amely metszi Q határát és Q_K-ban halad. Legyen x_2 olyan pontja a sugárnak, hogy $u(\underline{x}_2) = -\delta < 0$, $G_i(\underline{x}_2) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. Az $u(x)$ konkáv, tehát

$$-\delta = u(\underline{x}_2) \geqslant \lambda u\ \{\ \underline{x}_1 + \frac{1}{\lambda}(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)\ \} + (1-\lambda)u(\underline{x}_1), \quad \text{ahol} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Igy

$$u(\underline{x}_1 + \frac{1}{\lambda}(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)) \leqslant \frac{-\delta - (1-\lambda)u(\underline{x}_1)}{\lambda} \leqslant -\frac{\delta}{\lambda}, \quad \text{mivel } u(\underline{x}_1) \geqslant 0,\ 1 - \lambda > 0.$$

Ha $\lambda < \delta/k$, akkor $u(\underline{x}_1 + \frac{1}{\lambda}(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)) < -k$. Ez ellentmondás.

Következmény. Ha a (2)-ben a minimum pontok halmaza nem üres, korlátos, akkor $\{\ \underline{x} | f(\underline{x}) \leqslant k,\ G_i(\underline{x}) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\ \}$ korlátos.

Bizonyitás. Ha $u(\underline{x}) = -f(\underline{x}) + v^x$ (ahol $v^x = \min\limits_{x \epsilon R} f(\underline{x})$), akkor a 3. Lemmát alkalmazva kapjuk az állitást. Ez a lemma biztositja az alábbi feltételek ekvivalenciáját.

(3): a (2) optimum pontjainak halmaza nem üres, korlátos, (4): bármely véges k-ra $\{\ \underline{x} | f(\underline{x}) \leqslant k;\ G_i(\underline{x}) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\ \}$ korlátos.

A következőkben a konvergencia tételeket fogjuk bebizonyitani.

1. **Tétel.** *Ha a* (2)-t *tekintjük és* (3) *teljesül, valamint* $R_0 = \{\underline{x} | G_i(\underline{x}) > 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ *nem üres, akkor bármely* k *értékre* $P_1(\underline{x}, r_k)$ *felveszi a minimumát* R_0 *felett és* $\lim\limits_{k \to \infty} P_1(\underline{x}(r_k), r_k) = v^*$, *ahol* $\underline{x}(r_k) P_1(\underline{x}, r_k)$ *minimum helye* R_0*-on.*

Bizonyitás. 1, Legyen $x_0 \epsilon R_0$ (ilyen pont létezik, mivel R_0 nem üres). Ha $R = \{\ \underline{x} | G_i(\underline{x}) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, akkor $\{\ \underline{x} | P_1(\underline{x}, r_k) \leqslant P_1(\underline{x}_0, r_k),\ \underline{x} \epsilon R\ \}$ zárt. (Nem üres, mert x_0 eleme). Válasszunk ugyanis ebből a halmazból egy tetszőleges sorozatot, amelyre $\underline{x}_j \to \hat{\underline{x}}$. Megmutatjuk, hogy $\hat{\underline{x}}$ is eleme ennek a halmaznak. A $P_1(\underline{x}, r_k)$-k konvexitásából következik, hogy folytonosak R_0—on, igy ha $\hat{\underline{x}} \epsilon R_0$, akkor igaz az állitás. Ha $\hat{\underline{x}} \notin R_0$, de $\hat{\underline{x}} \epsilon R$, akkor a $P_1(\underline{x}, r_k)$-k folytonossága, illetve $P_1(\underline{x}_j, r_k) \leqslant P_1(\underline{x}_0, r_k)$ miatt ellentmondáshoz jutunk. Elegendő tehát azt belátni, hogy ez a halmaz korlátos bármely k értékre. Mivel $P_1(\underline{x}, r_k) > f(\underline{x})$ tetszőleges k-ra, ezért

$$\{\ \underline{x} | P_1(\underline{x}, r_k) \leqslant P_1(\underline{x}_0, r_k); \underline{x} \epsilon R\} \subset \{\ \underline{x} | f(\underline{x}) \leqslant P_1(\underline{x}_0, r_k); \underline{x} \epsilon R\ \}.$$

A jobb oldali halmaz azonban (4) miatt korlátos, igy adódik az állitás.

2. Mivel $f(\underline{x}) < P_1(\underline{x},r_k) < P_1(\underline{x},r_{K-1}) < \ldots < P_1(\underline{x},r_1)$, $\underline{x} \epsilon R_0$ és tetszőleges k esetén, igy

$$\min_{\underline{x} \epsilon R} f(x) = \nu^* < P_1(\underline{x}(r_k),r_k) < P_1(\underline{x}(r_{k-1}),r_{k-1}) < \ldots < P_1(\underline{x}(r_1),r_1).$$

Tehát $P_1(\underline{x}(r_k),r_k)$ egy szigoruan monoton csökkenő, alulról korlátos végtelen sorozat, igy konvergens.

Állitás. $\lim_{k \to \infty} P_1(\underline{x}(r_k),r_k) = \nu^*$

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $f(\underline{x})$ konvexitása, a $G_i(\underline{x})$-k $i = 1, \ldots, m$ logaritmikus konkávitása miatt létezik $\underline{x}^* \epsilon R_0$, ugy, hogy $f(\underline{x}^*) < \nu^* + \varepsilon$. Mivel

$$\nu^* \leqslant P_1(\underline{x}(r_k),r_k) \leqslant P_1(\underline{x}^*,r_k) \leqslant \nu^* + \varepsilon + r_k I_1(\underline{x}^*), \text{ minden } k\text{-ra igy}$$

$$\nu^* \leqslant \lim_{k \to \infty} P_1(\underline{x}(r_k),r_k) \leqslant \nu^* + \varepsilon.$$

ε tetszőlegesen kicsiny lehet, tehát

$$\lim_{k \to \infty} P_1(\underline{x}(r_k),r_k) = \nu^* \quad \text{, ami az állitás.}$$

Következmény. 1, $\lim_{k \to \infty} r_k \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{G_i(\underline{x}(r_k))} = 0.$

Ez igaz a tétel állitása, illetve az összegezendő tagok pozitivitása miatt.

2. $\lim_{k \to \infty} f[\underline{x}(r_k)] = \nu^*$.

3. az $\underline{x}[r_k]$ sorozat bármely konvergens részsorozatának határértéke a (2) probléma optimum helye.

Bizonyitás. Könnyen be lehet látni, hogy a $P_1(\underline{x},r_k)$-k minimum helyeire teljesül az, hogy $f[\underline{x}(r_{k+1})] \leqslant f[\underline{x}(r_k)]$. Ez azt jelenti, hogy $\{ \underline{x} | f(\underline{x}) \leqslant f(\underline{x}(r_1)), \underline{x} \epsilon R \}$ tartalmazza az összes $\underline{x}(r_k)$ minimum helyet. De a (4) feltétel miatt a halmaz korlátos, zárt. Tehát a minimum pontok sorozatának van konvergens részsorozata. Ezen konvergens sorozat határértéke $\underline{x}^+$ megoldja a problémát. Ugyanis a $G_i(\underline{x})$-k, $i = 1, \ldots, m$ folytonossága miatt x^+ megengedett pont lesz. Az 1, következmény, illetve az $f(\underline{x})$ folytonossága miatt pedig minimumot ad. A második konvergencia tételhez szükséges az alábbi lemma. A lemma állitását abban az esetben bizonyitjuk, mikor az (1) feladatban az első r feltétel valószinüségi jellegü.

5. **Lemma.** *Ha R_0 nem üres és (2) optimum pontjainak halmaza nem üres, korlátos, akkor a $P_2(\underline{x}, r_k)$ bármely $r_k > 0$ esetén R_0-on alulról korlátos.*

Bizonyitás. Tekintsünk egy R_0-beli elemekből alkotott nem korlátos $y_1, y_2, \ldots$ sorozatot. Be fogjuk bizonyitani, hogy ennek van olyan nem korlátos $y_{l_1}, y_{l_2}, \ldots$ részsorozata, amelyre fennáll az alábbi reláció, tetszőleges $r_k > 0$ esetén.

$$\lim_{s\to\infty} P_2(y_{l_s}, r_k) = +\infty.$$

Elegendő ezt bizonyitani. Tegyük fel, hogy ebből nem következik a $P_2(\underline{x}, r_k)$-k alulról való korlátossága. Ekkor van olyan q_l, $l = 1,2,\ldots$ korlátos sorozat, amelyre $\lim_{l\to\infty} P_2(q_l,r_k) = -\infty$. Legyen $\underline{x}\epsilon R_0$ és vegyük a q_l-t $(l = 1,2,\ldots)$ magába foglaló zárt gömb és a $\{\underline{x}|P_2(\underline{x},r_k) \leqslant P_2(\underline{x}_0,r_k), \underline{x}\epsilon R\}$ metszetét. Ez a metszet korlátos, zárt, R_0-beli halmaz, amely véges sok elem kivételével tartalmazza a q_l-t, $l = 1,2,\ldots$. A $P_2(\underline{x},r_k)$-k folytonosak, igy a metszet halmazon felveszik a minimumukat. Ez ellentmondás.

Legyen tehát $r_k > 0$, $y_1 y_2,\ldots$ R_0-beli elemekből alkotott sorozat. Legyen

$$\underline{x}_0\epsilon R_0 \quad \text{és} \quad D = \{\underline{x}|f(\underline{x}) \leqslant f(\underline{x}_0) + \varepsilon, \underline{x}\epsilon R\},$$

ahol $\varepsilon > 0$. A (3) és (4) miatt D korlátos, zárt. Legyen B a D halmaz határpontjaiból álló halmaz. B szintén korlátos, zárt. Mivel az $y_1, y_2, \ldots$ nem korlátos sorozat, ezért valamely y_{l_s} $(s = 1,2,\ldots)$ részsorozatra, $y_{l_s} \notin D$, $s = 1,2,\ldots$. Tekintsük az $\underline{x}_0$-ból induló, ilyen tulajdonságu $y_{l_1}, y_{l_2},\ldots$ -n áthaladó sugarakat. Ezek metszik a B-t $\underline{z}_{l_1}, \underline{z}_{l_2},\ldots$ pontokban és $\underline{z}_{l_s} \neq \underline{x}_0$, $s = 1,2,\ldots$. Legyenek $0 < \lambda_{l_s} < 1$ és

$$\underline{z}_{l_s} = \lambda_{l_s} y_{l_s} + (1-\lambda_{l_s})\underline{x}_0, \qquad s = 1,2,\ldots$$

Ha $l_s \to \infty$, akkor $\lambda_{l_s} \to 0$. A $G_i(\underline{x})$ –k, $(i = 1,\ldots,r)$ logaritmikusan konkávok, igy

$$G_i(\underline{z}_{l_s}) \geqslant G_i(y_{l_s})^{\lambda_{l_s}} \cdot G(\underline{x}_0)^{1-\lambda_{l_s}} > 0.$$

Tehát $\underline{z}_{l_s}\epsilon R_0$, $s = 1,2,\ldots$. Másrészt $\underline{z}_{l_s}\epsilon B$, $s = 1,2,\ldots$ igy

$$f(\underline{z}_{l_s}) = f(\underline{x}_0) + \varepsilon, \qquad s = 1,2,\ldots$$

Az $f[\underline{x}]$ konvexitása miatt

$$f(y_{l_s}) \geqslant \frac{f(\underline{z}_{l_s}) - (1-\lambda_{l_s})f(\underline{x}_0)}{\lambda_{l_s}} = f(\underline{x}_0) + \frac{\varepsilon}{\lambda_{l_s}}. \quad (s = 1,2,\ldots)$$

$\varepsilon > 0$, igy $f(y_{l_s}) \to +\infty$ ha $\lambda_{l_s} \to 0$, (azaz $l_s \to \infty$, $s = 1,2,\ldots$). Az előbbiek miatt

$$0 < G_i(y_{l_s})^{\lambda_{l_s}} \leqslant \frac{G_i(\underline{z}_{l_s})}{G_i(\underline{x}_0)^{1-\lambda_{l_s}}} \leqslant \frac{d_i^0}{G_i(\underline{x}_0)^{1-\lambda_{l_s}}},$$

ahol $d_i^0 = \max_{\underline{x}\epsilon B} G_i(\underline{x})$, $i = 1,\ldots,r$ $s = 1,2,\ldots,$

De

$$0 < G_i(y_{l_s}) < G_i(y_{l_s})^{\lambda_{l_s}} \leqslant \frac{d_i^0}{G_i(x_0)^{1-\lambda_l}}, \quad i = 1, \ldots, r; \quad s = 1,2, \ldots$$

Legyen

$$P_2' \, (\underline{x}, r_k) = f(\underline{x}) + r_k \sum_{i=1}^{r} - \ln G_i(x),$$

igy

$$P_2'(y_{l_s}, r_k) = f(y_{l_s}) + r_k \sum_{i=1}^{r} - \ln G_i(y_{l_s}) \geqslant$$

$$\geqslant f(\underline{x}_0) + \frac{\epsilon}{\lambda_{l_s}} + r_k \cdot \sum_{i=1}^{r} - \ln\Big(\frac{d_i^0}{G_i(x_0)^{1-\lambda_{l_s}}}\Big) =$$

$$= f(\underline{x}_0) + \frac{\epsilon + r_k \cdot \lambda_{l_s} \cdot \sum_{i=1}^{r} - \ln \left(\frac{d_i^0}{G_i(\underline{x}_0)^{1-\lambda_{l_s}}} \right)}{\lambda_{l_s}} .$$

Minthogy fennállnak az alábbi egyenlőségek

$$\lim_{l_s \to \infty} \lambda_{l_s}(-\ln[d_i^0]) + \lim_{l_s \to \infty} \lambda_{l_s} \cdot \ln[G_i(\underline{x}_0)^{1-\lambda_{l_s}}] = 0, \qquad i = 1, \ldots, r$$

következik, hogy

$$\lim_{l_s \to \infty} P_2' \, (y_{l_s}, r_k) = + \infty.$$

Az eredetileg konkáv feltételekre hasonló becsléseket végezve adódik az állitás.

2. Tétel. *Ha a* (2)-*t tekintjük és* (3) *teljesül, valamint* R_0 *nem üres, akkor bármely* k *értékre* $P_2(\underline{x}, r_k)$ *felveszi a minimumát* R_0 *felett és* $\lim_{k \to \infty} P_2(\underline{x}(r_k), r_k) = v,^*$ *ahol* $\underline{x}(r_k)$ $P_2(\underline{x}(r_k))$ *minimum helye* R_0*-on.*

Bizonyitás. 1, Legyen $\underline{x}_0 \epsilon R_0$ (ilyen pont létezik, mivel R_0 nem üres). Az $\{ \underline{x} / P_2(\underline{x}, r_k) \leqslant P_2(\underline{x}_0, r_k), \underline{x} \epsilon R \}$ nem tartalmaz R-beli határpontot és zárt halmaz, amelynek $\underline{x}_0$ eleme. Elegendő belátni, hogy ez a halmaz korlátos bármely k érték esetén. Tegyük fel, hogy

$$\{ \underline{x} | P_2(\underline{x}, r_k) \leqslant P_2(\underline{x}_0, r_k), \underline{x} \epsilon R \} = H_k$$

nem korlátos.

Ekkor található egy R_0-beli elemekből alkotott $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$ nem korlátos sorozat. Az 5. Lemma bizonyitásában felhasznált állitás miatt, az előbbi sorozat egy $\underline{y}_{l_1}, \underline{y}_{l_2}, \ldots$ - részsorozatára

$$\lim_{l_s \to \infty} P_2(\underline{y}_{l_s}, r_k) = +\infty.$$

Ez ellentmond annak, hogy

$$P_2(\underline{y}_{l_s}, r_k) \leqslant P_2(\underline{x}_0, r_k), \qquad s = 1,2,\ldots$$

2. Mivel $P_2(\underline{x}(r_k), r_k)$ jelenti $P_2(\underline{x}, r_k)$-nak a minimum értékét R_0-on, ezért

$$f(\underline{x}(r_k)) + r_k I_2(\underline{x}(r_k)) \leqslant f(\underline{x}(r_{k+1})) + r_k I_2(\underline{x}(r_{k+1})),$$

$$f(\underline{x}(r_{k+1})) + r_{k+1} I_2(\underline{x}(r_{k+1})) \leqslant f(\underline{x}(r_k)) + r_{K+1} I_2(\underline{x}(r_K))$$

Szorozzuk be az első egyenlőtlenséget r_{k+1}/r_k -val és adjuk hozzá a másodikhoz. Átrendezés után kapjuk

$$\left(1 - \frac{r_{k+1}}{r_k}\right) f(\underline{x}(r_{k+1})) \leqslant \left(1 - \frac{r_{k+1}}{r_k}\right) f(\underline{x}(r_k)), \qquad \text{azaz}$$

$$f(\underline{x}(r_{k+1})) \leqslant f(\underline{x}, r_k)).$$

Ezt felhasználva, az első egyenlőtlenségből kapjuk

$$I_2(\underline{x}(r_k)) \leqslant I_2(\underline{x}(r_{k+1})).$$

Az $I_2(\underline{x}(r_k))$, $k = 1,2,\ldots$ sorozat tehát alulról korlátos, alsó korlátja $I_2(\underline{x}(r_1))$. Legyen $\epsilon > 0$. Ekkor az $f(\underline{x})$ konvexitása, a $G_i(\underline{x})$-k $(i = 1,\ldots,m)$ logaritmikus konkávitása miatt létezik $\underline{x}^* \epsilon R_0$ ugy, hogy $f(x^*) < \nu^* + \epsilon$.
De $I_2(\underline{x}(r_1)) \leqslant I_2(\underline{x}(r_k))$, $P_2(\underline{x}(r_k), r_k)$ minimum érték $k = 1,2,\ldots$ igy

$$\nu^* + r_k I_2(\underline{x}(r_1)) \leqslant P_2(\underline{x}(r_k), r_k) \leqslant f(\underline{x}^*) + r_k I_2(\underline{x}^*) \text{ minden } k\text{-ra.}$$

Tehát

$$\lim_{k\to\infty} (\nu^* + r_k \cdot I_2(\underline{x}(r_1))) = \nu^* + \lim_{k\to\infty} r_k \cdot I_2(\underline{x}(r_1)) = \nu^* \leqslant$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} P_2(\underline{x}(r_K), r_K) \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} P_2(\underline{x}(r_k), r_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} (f(\underline{x}^*) + r_k I_2(\underline{x}^*)) =$$

$$= f(\underline{x}^*) + \lim_{k\to\infty} r_k I_2(\underline{x}^*) = f(\underline{x}^*) < \nu^* + \epsilon.$$

Mivel ϵ tetszőlegesen kicsiny lehet, ez azt jelenti, hogy a $P_2(\underline{x}(r_k),r_k)$ limes superiorja és limes inferioja megegyezik, tehát a $P_2(\underline{x}(r_k),r_k)$, $k = 1,2,\ldots$ konvergens és

$$\lim_{k\to\infty} P_2(\underline{x}(r_k),r_k) = \nu^* ,$$ ami éppen az állitás.

Ebben az esetben is teljesülnek:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} r_k \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} - \ln G_i(\underline{x}(r_k)) = 0,$

2. $\lim\limits_{k\to\infty} f(\underline{x}(r_k)) = \nu^* ,$

3. az $\underline{x}(r_k)$ sorozat bármely konvergens részsorozatának határértéke a (2) optimum helye.

Bizonyitás. Az $I_2(\underline{x}(r_k))$, $k = 1,2,\ldots$ alulról korlátos sorozat, ezért 1, igaz. Az 1-ből következik a 2. állitás. A 3. állitás bizonyitása teljesen megegyezik a korábbi ilyen állitás bizonyitásával.

A most következő részben a számitástechnikai tapasztalatokat ismertetjük. Egy matematikai programozási feladatot megoldó algoritmusról ugyanis csak ugy dönthetjük el, hogy jó-e vagy sem, ha elkészitjük a gépi programot és segitségével kisérleti feladatokat oldunk meg. Az elméleti algoritmus ismerete általában nem ad felvilágositást a konvergencia sebességéről, a számitáshoz szükséges időről, másrészt a gépi reprezentálásnál adódó ötletek lényegesen hatékonyabbá tehetik az eljárást.

Itt az alábbi feladat megoldását ismertetjük.

$$\min (x_1 + x_2),$$

$$P\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 6 \geqslant \beta_1 \\ x_1 + 8x_2 - 8 \geqslant \beta_2 \end{array}\right\} \geqslant 0.8$$

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 \geqslant 4, \\ &3x_1 + x_2 \geqslant 3, \\ &x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

A (3)-ban β_1 és β_2 együttes eloszlása normális, nulla a várható értékük, 1 a szórásuk és 0.2 a korrelációs együtthatójuk. A valószinüségi feltétel (x_1,x_2)-nek logaritmikusan konkáv függvénye. Ilyen tipusu feladatok Prékopa A. munkáiban fordulnak elő. [9], [10], [11].

A SUMT algoritmust a következőképpen hajtjuk végre:

Képezzük a $P_1(\underline{x},r)$, $P_2(\underline{x},r)$ függvényeket, s ezután egy olyan $\underline{x}_0$-ból kiindulva, ahol minden feltétel éles egyenlőtlenséggel teljesül, valamilyen r_1 érték mellett minimalizáljuk a $P_1(\underline{x},r_1)$-t vagy $P_2(\underline{x},r_2)$-t. Az igy kapott minimum pontból kiindulva valamilyen $r_2 < r_1$ mellett ujra minimalizáljuk a $P_1(\underline{x},r_2)$-t vagy $P_2(\underline{x},r_2)$-t. Az eljárást addig folytatjuk, amig az optimumhoz elég közel nem kerülünk..

A konvex programozási feladatoknál az eljárás pontossága elsősorban a feltétel nélkül minimalizáló rutin pontosságtól függ, ugyanis igazak az alábbi becslések.

A $P_1(\underline{x}, r_k)$ függvényeknél

$$f(\underline{x}_i) - v^* \leqslant r_i \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(\underline{x}_i)},$$

a $P_2(\underline{x}, r_k)$ függvényeknél pedig

$$f(\underline{x}_i) - v^* \leqslant r_i \cdot m,$$

ahol v^* a konvex programozási probléma optimuma, m a feltételek száma, $\underline{x}_i$ pedig az i-edik feltétel nélküli minimalizálásnál kapott minimum hely

A feltétel nélküli minimalizálásnál gradiensmentes módszert – Hooke és Jeaves módszerét [7] – választottuk, mivel ilyen tipusu feladatokban nem mindig tudunk gradienst számolni. A két dimenziós normális eloszlás értékét a Deák I. [1] által irt szubrutin számolta.

A számitási eredmények azt mutatták, hogy a legjobb eredmény akkor adódik, ha az algoritmusban a logaritmikus büntetőfüggvénnyel számoltunk. Megvizsgáltuk, hogy ennél a problémánál az eljárás hogyan függött az r_1, illetve az r_k; $k = 2,3, \dots$ paraméterek választásától. Az r_1 érték választása azért problematikus, mert ha az optimum a megengedett tartomány határán van (ami gyakran előfordul) és az r_1 érték nagy, akkor a minimalizáló eljárás során csak nagyon lassan jutunk az optimumig. Ennek oka az, hogy már egészen messze a határtól elkezdjük büntetni a célfüggvényt. Ha viszont az r_1 érték kicsi, akkor a büntető tag hatástalanná válik, a minimalizáló eljárás során gyakran kilépünk a megengedett tartományból és nem találjuk meg az optimumot. Ha $r_1 = 1$ volt és $r_{k+1} = r_k/5$, $k = 2,3, \dots$ akkor helyes eredményt kaptunk. Ha $r_1 = 0.01$ vagy $r_1 = 0.001$ volt, akkor az algoritmus nem találta meg az optimumot. Amennyiben $r_{k+1} = r_k/2$, $k = 2,3, \dots$ volt, az eljárás lassubb és pontatlanabb lett.

Az algoritmussal a kisérleti feladatot 40 mp alatt oldottuk meg. Az optimum értéke 2.934, az optimum hely koordinátái 1.984 és 0.95 voltak.

A feladatot a megengedett irányok módszerével is megoldották. [1]. Az itt közölt optimum valamivel pontosabb és a számolás lényegesen rövidebb ideig tartott. (Ott a feladat megoldása kb. 5 percet vett igénybe)

A feladatban a nem lineáris feltétel által meghatározott térrész benne van a lineáris feltételek által adott poliéderben. Ha a lineáris feltételeket nem büntettük, akkor is helyes eredményt kaptunk, de az eljárás több időt vett igénybe.

Irodalom

[1] Deák I., Egy sztochasztikus programozási modell számitógépes kiértékelése, MTA Számitástechnikai Központja Közlemények, 1972 dec.

[2] Fiacco, A.V. and G.P. McCormick, Computational algorithm for the sequential unconstrained minimization technique for nonlinear programming. Management Science 10, (4), 1964.

[3] Fiacco, A.V. and G.P. McCormick, The sequential unconstrained minimization technique for nonlinear programming. A primal-dual method Management Science, 10, (2), 1964.

[4] Fiacco, A,V. and G.P. McCormick, Extensions of SUMT for nonlinear programming equality constrains and extrapolition, Managemant Science, 12 (11), 1966.

[5] Fiacco, A.V. and G.P. McCormick, Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization technique, Wiley, New York. London, 1968.

[6] Himmelblau, D.M. A uniform evaluation of unconstrained optimization techniques, Numerical methods for nonlinear optimization, ed. by Lootsma, F.A. London, New York, Academie Press, 1972.

[7] Kovalik, J. and M.R. Osborne, Methods for unconstrained optimization problems, Elsevier, New York, 1968.

[8] Krekó B., Optimumszámitás, Közgazdasági és jogi könyvkiadó, Budapest, 1972.

[9] Prékopa A., Logarithmic concave measures with application to stochastic programming, Acta Math. Szeged, 32, 1971.

[10] Prékopa A., Stochastic programming models for inventory control and water storage problems. Proc. of the Conf. on Inv. Cont. and Water Storage Probl. Győr, 1971. Sept. Bolyai János Math. Soc. North Holland Publ. Co. 1973.

[11] Prékopa A., A class of stochastic programming decision problems, Math. Op. Forsch. und Stat. 3, 1972, 349-354.

S u m m a r y

Application of the SUMT method for mathematical programming problems containing logarithmically concave constraint functions

Tamás Rapcsák

It is shown in this paper that the algorithms of the SUMT interior point define, under logarithmically concave constraint functions, even in case of non-bounded domain a global optimum. Tasks of such type can be found in the works of A. Prékopa. Also the proofs of the convergence theorems discussed in the paper are different from the earlier ones. At the end of the study experiences in computing are published.

Р Е З Ю М Е

Применение метода штрафных функций для решения задач нелинейного программирования содержащих среди условий логаритмически вогнутые функции.

Тамаш Рапчак

В этой статье рассматриваются алгоритмы внутреннего пункта СУМТ при наличии логарифмически конкавных условных функций, а также в случае неограниченной области, определяется глобальный оптимум. Задачи такого типа встречаются в работах А. Прекопа. Доказательства теорем сходимости фигурирующих в статье тоже отличаются от известных до сих пор. В конце статьи приведены решения практических задач на ЭВМ.

Ez a cikk beérkezett: 1976. januárjában.