MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 26/1982

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

Й. Хегедыш /Сегед/

При изучении волновых процессов - чаще всего - приходится считаться с присутствием одного, или нескольких тел, в той или иной мере влияющих на эти процессы.

Типичным примером может служить распространение волн в R^n $/n \geq 2/$, в случае присутствия одного, неподвижного тела $\Omega \equiv \Omega_+$ /с гладкой границей $\partial\Omega$/, в которое слабо и медленно проникают волны, возникающие во внешности Ω : т.е. в Ω_- ; тело не колеблится, происходит почти полное отражение волн от поверхности тела.

Предположим для простоты, что в начальный момент времени т.е. при $t = 0$ нет никаких возмущений. Если обозначить через $u(t,x)$ отклонение от положения покоя точки $x \in \Omega_-$ в момент времени $t \geq 0$, то математическая модель только что приведенного процесса обычно ставится в виде смешанной задачи в области Ω_-:

/1/ $\Box u = f(t,x)$ $t>0$, $x \in \Omega_-$; $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$; $u|_{\partial\Omega} = 0$,

где $\Box$ - волновой оператор, $f \not\equiv 0$.

Мы будем рассматривать уточненную модель этого процесса:

1/ Допускается, что волны проникают в тело, и распространяются в нем с малой скоростью λ^{-1} $(\lambda >> 1)$.

2/ Опускаем малореальное ограничение $u|_{\partial\Omega} = 0$.

3/ Вместо задачи /1/ вводим задачу Коши-сопряжения /согласования на $\partial\Omega$ / во всем R^n для более общего, гиперболического уравнения второго порядка.

Наша цель: выяснить предельное поведение при $\lambda\to\infty$ решения задачи Коши-сопряжения.

Итак, предлагаемая модель для $U(t,x)=u^-,u^+$ / $x\in\Omega_-,\Omega_+$ соотв./ следующая:

/2/
$$LU:=Q(x,\lambda)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}A_i(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}+ \qquad /2.1/$$
$$+A(x)\frac{\partial U}{\partial t}+B(x)U=F(t,x)$$
$$-\infty<t\leq T;\quad x\in R^n\setminus\partial\Omega,$$
$$U\big|_{t<0}=U_t\big|_{t<0}=0 \qquad /2.2/$$
$$\omega^i U:=\left(\frac{\partial^i u^+}{\partial\nu^i}-\frac{\partial^i u^-}{\partial\nu^i}\right)\Big|_{\partial\Omega}=0\quad i=0,1;\ \nu-\text{ нормаль к }\partial\Omega \qquad /2.3/$$

где λ,T - положительные постоянные,
$$Q(x,\lambda)=\begin{cases}1 & x\in\Omega_-\\ \lambda^2 & x\in\Omega_+\end{cases};\quad A_{ij}=A_{ji}=\begin{cases}a^-_{ij} & x\in\Omega_-\\ a^+_{ij} & x\in\Omega_+\end{cases},\quad a^+_{ij}\big|_{\partial\Omega}=a^-_{ij}\big|_{\partial\Omega}$$

$$A_i=\begin{cases}a^-_i & x\in\Omega_-\\ a^+_i & x\in\Omega_+\end{cases}\ (i,j=1,\dots,n),\quad A=\begin{cases}a^- & x\in\Omega_-\\ a^+ & x\in\Omega_+\end{cases},\quad B=\begin{cases}b^- & x\in\Omega_-\\ b^+ & x\in\Omega_+\end{cases},$$

коэффициенты $A_{ij},\dots,B$ бесконечно гладки в $\overline{\Omega}_-$, соотв. в $\overline{\Omega}_+$, $a^-_{ij},\dots,b^-$ и всех их производные ограничены и формы
$$\sum_{i,j=1}^{n}a^-_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq c\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad\sum_{i,j=1}^{n}a^+_{i,j}(x)\xi_i\xi_j$$

являются положительно определенными формами $\xi_1,\dots,\xi_n$ при каждом $x\in\Omega_-,\Omega_+$ соответственно. Относительно правой части /2.1/:
$$F=\begin{cases}f^- & x\in\Omega_-,\\ 0 & x\in\Omega_+,\end{cases}$$
предполагаем, что f^- обладает некоторой гладкостью; а именно предполагаем, что f^- принадлежит одному из классов $C^{\infty,0}(\Omega^T_-)$, $H^{s,0}(\Omega^T_-)$, $B^{s,0}(\Omega^T_-)$; $\Omega^T_-:=(-\infty,T]\times\Omega_-$ /определение этих классов и теорема существования решения задачи /2/ в этих классах даны ниже/.

Из того, что скорость распространения волн в Ω_+ стремится к нулю при $\lambda\to\infty$ /и того, что $F=0$ при $x\in\Omega_+$ / следует:

Лемма 1. Существует такое число $\lambda_0=\lambda_0(T)>0$, что $u^+(t,x,\lambda)\equiv 0$ при всех (t,x,λ): $0\le t\le T$, $x\notin(\Omega_+)_\delta$, $\lambda\ge\lambda_0$, где $(\Omega_+)_\delta$ - пограничная полоска Ω_+, ширина δ которой стремится к нулю при $\lambda_0\to\infty$.

Замечание 1. Если F такова, что задача /2/ имеет бесконечно гладкое решение при каждом фиксированном $\lambda\ge$const., то из Леммы 1. эвристически уже следует, что при любых фиксированных (t,x) /$x\in\Omega_+,\Omega_-$ соотв./ $u^+(t,x,\lambda)\to 0$, $u^-(t,x,\lambda)\to u(t,x)$ при $\lambda\to\infty$ в классическом смысле; где u - решение внешней задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^-(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}a_i^-(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a^-(x)\frac{\partial u}{\partial t}+b^-(x)u=f^-(t,x)$$

$$x\in\Omega_-,\ -\infty<t\le T,$$

$$u\big|_{t<0}=u_t\big|_{t<0}=0;\quad u\big|_{\partial\Omega_-}=0.$$

Лемма 2. В области $(\Omega_+)_\delta$ /при достаточно малом δ/ можно ввести локальные координаты $(S(x);\varphi_1(x),\dots,\varphi_{n-1}(x))$ где $S(x)$- решение задачи Коши:

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^+(x)\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}=1\qquad x\in(\Omega_+)_\delta;\quad S\big|_{\partial\Omega_+}=0;\quad S>0,$$

$S(x)\in C^\infty$ - координата по трансверсальному к $\partial\Omega_+$ направлению ; а $\varphi_i\in C^\infty$ - координаты по касательным к $\partial\Omega_+$ направлениям.

Эта лемма следует из того, что лучи системы Гамильтона - соответствующей задаче для S - трансверсальны к $\partial\Omega_+$ и они не пересекаются в $(\Omega_+)_\delta$ /гладкость $S(x),\varphi_i(x)$ следует из гладкости $\partial\Omega_+$ и гладкости коэффициентов a_{ij}^+ в $\overline{\Omega_+}$ /.

Введем некоторые обозначения. Пусть $Q\subset R^n$ - область, для которой либо $\overline{Q}\subseteq\overline{\Omega}_+$ либо $\overline{Q}\subseteq\overline{\Omega}_-$; тогда $Q^T:=(-\infty,T]\times Q$. Далее, пусть

$$C^{\infty,0}(Q^T)=\{c(t,x)\,|\,c\in C^\infty(Q^T),\ c=0\quad t<0\}$$

и пусть при $s\ge 0$ целом $H^{s,0}(Q^T),B^{s,0}(Q^T)$ обозначают замыкание $C^{\infty,0}(Q^T)$ по нормам

$$\|c\|_{H^{s,0}(Q^T)}=\|c\|_{H^s(Q^T)},\quad \|c\|_{B^{s,0}(Q^T)}=\sup_{t\in(-\infty,T]}\sum_{i=0}^{s}\left\|\frac{\partial^i c}{\partial t^i}\right\|^2_{H^{s-i}(Q)},$$

где $H^s(Q^T)$, $H^{s-i}(Q)/H^0(Q^T)=L^2(Q^T)$ /обычные пространства С.Л. Соболева. В качестве Q мы будем брать только области Ω_+, Ω_- и их замыкания. Нам понадобиться еще и пространство

$$C^{\infty,0}=\{c(t,x)\,|\,c=(c^-\in C^\infty(\bar\Omega_-^T),\ c^+\in C^\infty(\bar\Omega_+^T));\ c=0\ \ t<0\}$$

и классы $H^{s,0}$, $B^{s,0}$, которые являются замыканиями $C^{\infty,0}$ по нормам

$$\|c\|_{H^{s,0}}=\|c^-\|_{H^s(\Omega_-^T)}+\|c\|_{H^s(\Omega_+^T)},$$

$$\|c\|^2_{B^{s,0}}=\sup_{(-\infty,T]}\sum_{i=0}^{s}\left\|\frac{\partial^i c^-}{\partial t^i}\right\|^2_{H^{s-i}(\Omega_-)}+\sup_{t\in(-\infty,T]}\sum_{i=0}^{s}\left\|\frac{\partial^i c^+}{\partial t^i}\right\|^2_{H^{s-i}(\Omega_+)}.$$

<u>Замечание 2</u>. Мы должны выделить еще одну задачу, которая получается из задачи /2/ заменой $0=F(t,x)$ $x\in\Omega_+$ на $f^+(t,x)\in C^{\infty,0}(\bar\Omega_+^T)$ или $H^{s,0}(\bar\Omega_+^T)$; при этом предполагаем, что проекция на R_x^n носителя f^+ лежит в достаточно узкой пограничной полоске $(\Omega_+)_\delta$. Эту задачу мы будем обозначать через /2*/.

<u>Определение 1</u>. Мы будем говорить, что функция $U(t,x;\lambda)=(u^-,u^+)$ является классическим решением задачи /2*/ если u^-,u^+ удовлетворяют уравнению в Ω_-^T соотв. в Ω_+^T в классическом смысле при каждом $\lambda\geq\lambda_0=\mathrm{const}>>1$ и условия /2.2/, /2.3/ - понимаемые в обычном смысле - выполняются.

<u>Теорема 1</u>. Если $F\in C^{\infty,0}$, то задача /2*/ при каждом $\lambda\geq\lambda_0$ имеет, притом единственное классическое решение U; $U\in C^{\infty,0}$ и существует такая постоянная $C(\lambda,T)$, что

/3/ $\|U\|_{B^{p+1,0}}\leq c(\lambda,T)\|F\|_{H^{p,0}}$ $p=0,1,2,\ldots$.

<u>Определение 2</u>. Функцию $U(t,x;\lambda)\in B^{s+1,0}$ будем называть обоб-

щенным решением задачи /2*/ с $F \in H^{s,0}$ если существует последовательность функций /классических решений/ $\{U_n \in C^{\infty,0}\}$ для которых

$$LU_n = F_n, \ U_n|_{t<0} = (U_n)_t|_{t<0} = 0, \ \omega^i U_n = 0 \quad i=0,1; \ n=1,2,\dots$$

и

$$\| F_n - F \|_{H^{s,0}} \to 0, \ \| U_n - U \|_{B^{s+1,0}} \to 0 \qquad n \to \infty.$$

<u>Теорема 2</u>. Задача /2*/ с $F \in H^{s,0}$ имеет при каждом $\lambda \geq \lambda_0 >> 1$ одно и только одно обобщенное решение U и справедлива оценка /с постоянной $C(\lambda,T)$ из /3//:

$$/4/ \qquad \| U \|_{B^{p+1,0}} \leq C(\lambda,T) \| F \|_{H^{p,0}} \quad p=0,1,\dots,s$$

Теоремы 1., 2. следуют из результатов [1] /см. также и [2], [3]/. Из этих результатов; однако, трудно усмотреть характер зависимости $C(\lambda,T)$ от λ в оценках /3/, /4/, и получить тем самым информацию о структуре решения U и о его поведении при $\lambda \to \infty$.

Распространение волн в Ω_+ и в Ω_- происходит весьма не одинаково; поэтому вместо неравентсв /3/, /4/ целесообразно вывести неравенства, в которых отдельно оцениваются нормы u_- и u_+. Так например, с помощью модификации стандартных энергетических неравенств можно получить:

<u>Лемма 3</u>. Пусть правая часть $F(t,x)$ задачи /2*/ принадлежит классу $H^{0,0}$. Тогда для решения $U=(u^-,u^+)$ задачи /2*/ имеют место оценки с постоянной $C=C(T)$:

$$|||u^-|||_0 + |||(u^-)_t|||_0 + |||\nabla_x u^-|||_0 \leq C(\lambda^{-1} \| f^+ \|_0 + \| f^- \|_0),$$

$$|||u^+|||_0 + |||(u^+)_t|||_o \leq C(\lambda^{-2} \| f^+ \|_0 + \lambda^{-1} \| f^- \|_0),$$

$$||| \nabla_x u^+ |||_0 \leq C(\lambda^{-1} \| f^+ \|_0 + \| f^- \|_0).$$

где в левых и правых частях соотвественно

$|||\cdot|||_0 := \|\cdot\|_{B^{0,0}(\Omega_-^T)}, \|\cdot\|_{B^{0,0}(\Omega_+^T)};\ \|\cdot\|_0 := \|\cdot\|_{H^{0,0}(\Omega_-^T)}, \|\cdot\|_{H^{0,0}(\Omega_+^T)}.$

Оценки для высоких производных u^-, u^+ получаются более сложными. Выделяем один факт, который состоит в том, что главная часть оценки нормы $|||\cdot|||_0$ производной порядка $q\geq 2$ от u^+ по трансверсальной к $\partial\Omega$ координате $S(x)\sim\varphi_n$ имеет порядок λ^{q-1} /нормы $|||\cdot|||_0$ производных того же порядка от u^+ по касательным к $\partial\Omega$ координатам $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$ и по t имеют более хорошие оценки/. Введем обозначение:

$$g_{\alpha,\varphi_n^k} := \frac{\partial^{|\alpha|+k} g}{\partial\alpha_0^{i_0}\ldots\partial\alpha_{n-1}^{i_{n-1}}\partial\varphi_n^k}\quad (\alpha_0;\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})=(t;\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}),\ |\alpha|=i_0+\ldots+i_{n-1}.$$

<u>Лемма 4</u>. Для решения $U=(u^-,u^+)$ задачи /2*/ с $F\in H^{s,0}$ имеют место оценки с постоянной $C=C(T)$:

$$\|u^-\|_{B^{p+1,0}(\Omega_-^T)} \leq (\|f^-_{\varphi_n^{p-1}}\|_0 + \sum_{|\alpha|=1}\|f^-_{\alpha,\varphi_n^{p-2}}\|_0+\ldots+ \sum_{|\alpha|=p-2}\|f^-_{\alpha,\varphi_n}\|_0 + C(\lambda^{-1}\sum_{|\alpha|=p}\|f^+_\alpha\|_0 + \sum_{|\alpha|\leq p}\|f^-_\alpha\|_0)\qquad p=0,1,\ldots s,$$

$$\|u^+\|_{B^{p+1,0}(\Omega_+^T)} \leq C(\|f^+_{\varphi_n^{p-1}}\|_0 + \lambda\sum_{|\alpha|=1}\|f^+_{\alpha,\varphi_n^{p-2}}\|_0+\ldots+ \lambda^{p-2}\sum_{|\alpha|=p-2}\|f^+_{\alpha,\varphi_n}\|_0) + C(\lambda^{p-1}\sum_{|\alpha|=p}\|f^+_\alpha\|_0 + \lambda^p\sum_{|\alpha|=p}\|f^-_\alpha\|_0)$$

$p=0,1,\ldots,s.$

где в правых частях использованы обозначения Леммы 3.

($f^{-\ j}_{\alpha,\varphi_n}$ - сумма всех производных f^- порядка $|\alpha|+j$ вне узкой полоски $\partial\Omega$-).

<u>Теорема 3</u>. Для решения $U=(u^-,u^+)$ задачи /2/ с $F\in H^{s,0}$ имеет место при каждом $N\leq s-3$ натуральном представление

$$u^-=v_N^-+W_N^-,\quad u^+=v_N^+ + W_N^+,$$

/5/ $$v_N^-=\sum_{j=0}^{N+1} u_j(t,x)\lambda^{-j},\quad v_N^+=\sum_{\substack{i+j=0\\ i,j\geq 0}}^{N+1} u_{i,j}(t-\lambda S(x),\underline{\varphi}(x))S^i(x)\lambda^{-j}\quad (u_{i,j}(\xi,\varphi)=0\quad \xi<0),$$

где функции $\{u_j\},\{u_{i,j}\}$ играющие роль коэффициентов разложения $u^-;u^+$ в ряд по степеням $\lambda;\lambda,S$ определяются из рекуррентной схемы /типа изложенной в [4]/ по $F\sim f^-$,

$$u_j\in B^{s+1-j,0}(\Omega_-^T),\quad u_{i,j}(t-\lambda S,\varphi)\in B^{s-(i+j),0}(\Omega_+^T)$$

и имеют место оценки с постоянной $C=C(T)$:

$$\| u_j \|_{B^{\ell+1,0}(\Omega_-^T)} \leq C \| f^- \|_{H^{\ell+j,0}(\Omega_-^T)} \qquad \ell=0,1,\ldots,s-j,$$

/6/ $$\| u_{ij}(t-\lambda S,\varphi) \|_{B^{\ell+1,0}(\Omega_+^T)} \leq C\lambda^{\ell+\frac{1}{2}} \| f^- \|_{H^{\ell+(i+j)+1,0}(\Omega_-^T)}$$

$\ell=1,\ldots,s-(i+j)-1,$

а остаточные члены представления /5/ / W_N^-, W_N^+ / имеют оценки:

$$\| W_N^- \|_{B^{\ell+1,0}(\Omega_-^T)} \leq C\lambda^{-N-\frac{1}{2}} \| f^- \|_{H^{\ell+N+3,0}(\Omega_-^T)} \qquad \ell=0,1,\ldots,s-(N+3),$$

$$\| W_N^+ \|_{B^{\ell+1,0}(\Omega_+^T)} \leq C\lambda^{\ell-N-\frac{1}{2}} \| f^- \|_{H^{\ell+N+3,0}(\Omega_-^T)} \qquad \ell=0,1,\ldots,s-(N+3).$$

В некоторых частных случаях легко показать, что нормы u_i, u_{ij} имеют нижние оценки /того же/ вида /6/ /с некоторой другой постоянной $C_1=C_1(T)$ /.

В заключении автор приносит благодарность научному руководителю Б.Р. Вайнбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1 О.А. Ладыженская: Решение общей задачи дифракции, ДАН СССР, 96/1964/, 3, 433-436.

2 О.А. Ладыженская: Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гос. Изд-во Техн.-Теор. Лит., Москва, 1953.

3 Р. Сакамото: Смешанная задача для гиперболических уравнений I, II; сб. "Математика" 16:1/1972/, 62-99.

4 Й. Хегедыш: Асимптотическое поведение решения задачи Коши для волнового уравнения с большим параметром, Вест. Моск. Унив., сер. мат. мех., 6/1980; 44-47.