MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 26/1982

MODELLIERUNG DES MECHANISCHEN ZUSTANDES DES MIT LAUFRAD BELASTETEN BODENS

Dr. LÁSZLÓ FENYVESI

TIVADAR KŐFALVI

In den letzten Jahrzehten hat die Landwirtschaft mittels zeitgemässer Machinen und Chemikalien, sowie neuer Sorten, die Erträge in solcher Masse gesteigert, dass die Frage der Bodenstruktur in den Hintergrund gedrängt worden wurde. Heute aber, wenn mit der Verwendung von Hochleistungstraktoren von 5-8 Tonen und Transportmitteln, sowie Erntebergungsmaschinen von 10-20 Tonnen gerechnet werden muss, ist ausserordentlich wichtig sich mit dem auf den Boden ausgeübten Effekt des Gummireifens zu beschäftigen.

Die bisherigen Rechnen und Messungen sind grösstenteils von empirischen Charakters und haben im allgemeinen die Bestimmung je einer Charakteristik angestrebt. Solche Rechnenmethodik ist in den Arbeiten von *Jánosi-Hanamato*, *Komándi*, *Söhne*, usw. angegeben.

Der Zweck warum wir uns mit diesem Problem beschäftigen besteht darin, dass wir die theoretischen und praktischen Ergebnisse der Rheologie bei der Beschreibung des mechanischen Verhaltens des Boden-Rad-Systems verwenden. Im ersten Schritt nehmen wir für die Lösüng der Aufgabe - in Interesse der einfacheren Manipulation - geometrische und mechanische Näherungsverhältnisse: der Gummireifen drückt den Boden auf einer Ellipsenfläche und mit einem den Ellipsoid-Ordinaten entsprechenden Flächendruck; der Boden kann als ein idealer rheologischer Körper behandelt werden.

Bei der Beschreibung des rheologischen Verhaltens spielt die Aufstellung der Materialgleichung eine grosse Rolle. In der Zustandsgleichung der Materialien suchen wir den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Deformationstensoren, sowie deren Derivierten:

$$f(\underline{\underline{T}}, \dot{\underline{\underline{T}}}, \ddot{\underline{\underline{T}}}, \ldots E, \dot{E}, \ddot{E},)\ldots \quad = \underline{\underline{O}}.$$

Für die Ingenieurpraxis sind die ersten Derivierten noch von einer grossen Bedeutung, jedoch die Rolle der anderen hochwertigen Derivierten ist so klein, dass diese vernachlässigt werden können, somit können wir die Zustandsgleichung als linear betrachten. Die allgemeine Form der in dieser Weise erreichten Materialglechung:

$$\underline{\underline{C}}_O + C_1\underline{\underline{T}} + C_2\dot{\underline{\underline{T}}} + C_3\underline{\underline{E}} + C_4\dot{\underline{\underline{E}}} = 0.$$

Bei einem bedeutenden Teil der Ingenieurarbeit bleiben wir innerhalb der Plastizitätsgrenze, also vernachlässigen wir den Plastizitätstensor $\underline{\underline{C}}_O$. Auf die in der Festigkeitslehre gewöhnliche Bezeichnung übergehend erhalten wir die allgemein verwendete Gleichung des Poynting-Thomson-Körpers:

$$\underline{\underline{T}} = 2G\underline{\underline{E}} + 2\eta\,\dot{\underline{\underline{E}}} - \tau\,\dot{\underline{\underline{T}}}\;.$$

Die hier figurierenden Koeffizienten sind materialabhängige, durch Messung bestimmbare rheologische Konstanten. Die geometrischen Zusammenhänge sind in den geometrischen und Gleichgewichtsgleichungen, und bei einer anderen Verhandlungsweise in den Impuls-Waagegleichungen enthalten. Die Materialgleichung ergibt den Spannungswert, falls wir in demselben Punkt die Deformation und deren Veränderungsgeschwindigkeit kennen. Die aufgestellte Gleichung ist symmetrisch und eignet sich auch für die Bestimmung von anderer Unbekannte.

Im Falle einer gegebenen Anfangs- und Randbedingung kann man die Stabilität des Spannungs- und Deformationszustandes des untersuchten mechanischen Systems unter dem Einfluss einer Belastungserregung mittels einer das Gleichgewicht ausdrückenden Differentialgleichung, die auch die geometrischen Verhältnissen des Systems berücksichtigt, untersuchen.

Anlässlich der Untersuchung von rheologischen Körpern, bei Bestimmung des Zusammenhanges zwischen Spannung-Deformation müssen wir die Dynamizität des Prozesses, diese Tatsache berücksichtigen, dass wir in solchem Falle mit einem immer von der Zeit implizite abhängigen mechanischen Vorgang zu tun haben.

Die untersuchten in der Realität stattfindended Wechselwirkungen und Prozesse spielen sich auch auf sehr verschiedener Weise ab.

Die Erörterung dieses Prozesses ist auch deshalb von grosser Bedeutung, weil die verschiedenen, jedoch sich als rheologischer Körper verhaltenden Materialien anders auf eine Belastung langsamen Charakters oder auf eine von schneller Natur, die nämlich beträcgtlich auch die Grenze des Zugrundegehens der einzelnen Materialien beeinflussen können, reagieren. Im Falle beider Grenzewerte der Belastungsgeschwindigkeit $\dot{\sigma} \to 0$ und $\dot{\sigma} \to \infty$ benimmt sich das Material mit einer Linearität, die auf den Hooke'schen Körper charakteristisch ist.

Wird der Fall der dynamischen Belastung untersucht, gibt es auch in diesem Fall - laut underer Interpretierung - ein mit der Geschwindigkeit charakterisierbares Verhältnis, das sogar im Falle eines konduktiven Impulstransportes das Wachstum der Masse auf eine unendliche Grösse verursachen würde. Somit sind unsere im Falle $\dot{\sigma} \to \infty$ ausgesprochenen Festlegungen die Resultate einer Extrapolation. Dementsprechend physikalisch nur eine solche Belastungssituation möglich ist, wo die Kurven der Geschwindigkeitszunahme und - abnahme in der Endlichkeit einander schneiden.

Somit können wir die folgenden behaupten:

- die Belastungsgeschwindigkeit ist im Zeitmoment $t = 0$ von Nullwert, und kann einen unendlichen Wert nicht erreichen;
- die Funktion $\dot{\sigma} = f(t)$ kann Singulärpunkte enthalten, und kann sich asymptotisch der Gerade $\dot{\sigma} = 0$ nähern.

Für jeden charakteristischen Belastungstyp sind unendlich viele konkreten Belastungsfunktionen vorstellbar.

Die einheitliche Beschreibung der Spannung wird bei dem Poynting-Thomson-Körper untersucht, wo im koaxialen Falle die Funktion $\sigma = f(\varepsilon, t)$ durch die Lösung der Differentialgleichung

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda\dot{\varepsilon} - \nu\dot{\sigma}$$

erreicht wird.

Die Eindeutigkeitsbedingungen: im Zeitmoment $t = 0, \varepsilon$ und σ haben einen Nullwert; bei den Rändern können wir den Charakter der Belastung angeben, d.h. die Randbedingungen $\dot{\sigma}(t)$ oder $\dot{\varepsilon}(t)$, es hängt davon ab, welche von denen wahrend der Aufgabe gegeben ist.

Ist die Materialgleichung mit den Bedingungen: $\dot{\sigma} = Konstante$ oder $\dot{\varepsilon} = Konstante$ *angeben,* dann erhalten wir die mit dieser erzeugbare Lösungsflasche. In der Ebene σ, t sind die Spannungswerte mit Radialgeraden beschreiben, da wir eine Geschwindigkeit $\dot{\sigma} = Konstante$ *annehmen.* (*Abb.*) Unendliche viele solchen Fälle existieren.

In der Abb. bezeichnet 4 die Kurve, die das während der Belastung bildenden Spannungsverhältnis beschreibt. Der Grenzwert der dynamischen Belastung ist von der Gerade 1 und die statische Belastung von der Gerade 5 representiert.

Die Darstellungsmethode bezeichnet zugleich den für die rheologischen Materialien charakteristischen Kriech- und Relaxationszusatand. Im Kriechfall $\sigma = Konstante,$ deren Ablauf durch die Kurve 3 in der mit der Ebene, σ,t Parallelebene gezeigt ist. Die Relaxation, den Zustand $\varepsilon = Konstante,$ wird durch die Kurve 2 paralell mit der Ebene σ,t demonstriert. Es ergibt sich die Frage ob sich die verschiedenen Lösungsflächen innerhalb eines beschränkten Bereiches anordnen.

Es ist begreiflich, dass die dynamische Belastungsgeschwindigkeiten $\dot{\sigma} \to \infty$ und statische Belastungsgeschwindigkeiten $\dot{\sigma} \to 0,$ die als Grenzwerte festigstellt worden sind, die die positiven Halbachsen des Koordinatensystem σ,t sind und in diesen Viertel fallen alle Belastungsfunktionen, in jedem Fall produziert werden können, egal von welchem Charakter die Belastung ist.

Den Funktionszusammenhang $\sigma - \varepsilon$ des Poynting-Thomson--Körpers betrachtend kommen diese Grenze auch hier vor, die das elastische Verhalten dem Hooke'schen Körper entsprechend signalisieren. Es ist begreiflich, dass die obere Begrenzungsebene der Lösungsflächen die von der Gerade 1 und der Achse t bestimmte Ebene ist, während die untere Grenze die von der Gerade 5 unt t uasgespannte Ebene ist.

An unsere Ausgangsaufgabe zurückkommend: Labor- und in situ Messungen beweisen, dass es solchen Bodentyp und Bodenzustand gibt, wo der Boden der Gleichung des Poynting--Thomson-Körpers mit ausreichender Genauigkeit folgt, so kann er zur Modellierung angewendet werden.

Die mechanischen Verhältnisse der konzentrierten Kraft, die auf die rheologische Oberfläche beschränkende Ebene senkrecht ist, wurde von Fenyvesi-Lack aufgrund der klassischen Boussinesq'sche Aufgabe erarbeitet, wo die Bewegung in Kraftrichtung:

$$w = \frac{1}{E} \int \{Dt - (1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t}) \left[\frac{\lambda}{E} D - K\right]\} dz + f(r) \, , \qquad (x)$$

wo:

$$D = \dot{\sigma}_z - \mu(\dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\varphi)$$

$$K = \nu[\dot{\sigma}_z - \mu \chi (\dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\varphi)] .$$

Die Spannungswerte können einfach von den geometrischen Verhältnissen bestimmt werden.

Bei einer Belastung auf Ellipsenfläche verteilt sich die Belastung auf der Fläche $A = \pi$ ab der Ellipse sodass, die Druckverteilung mit der Ordinate ξ des Ellipsoids proportional ist:

$$p = p_o \frac{\xi}{c} = p_o \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{b}\right)^2} \, ,$$

wo:

$$p_o = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi ab} .$$

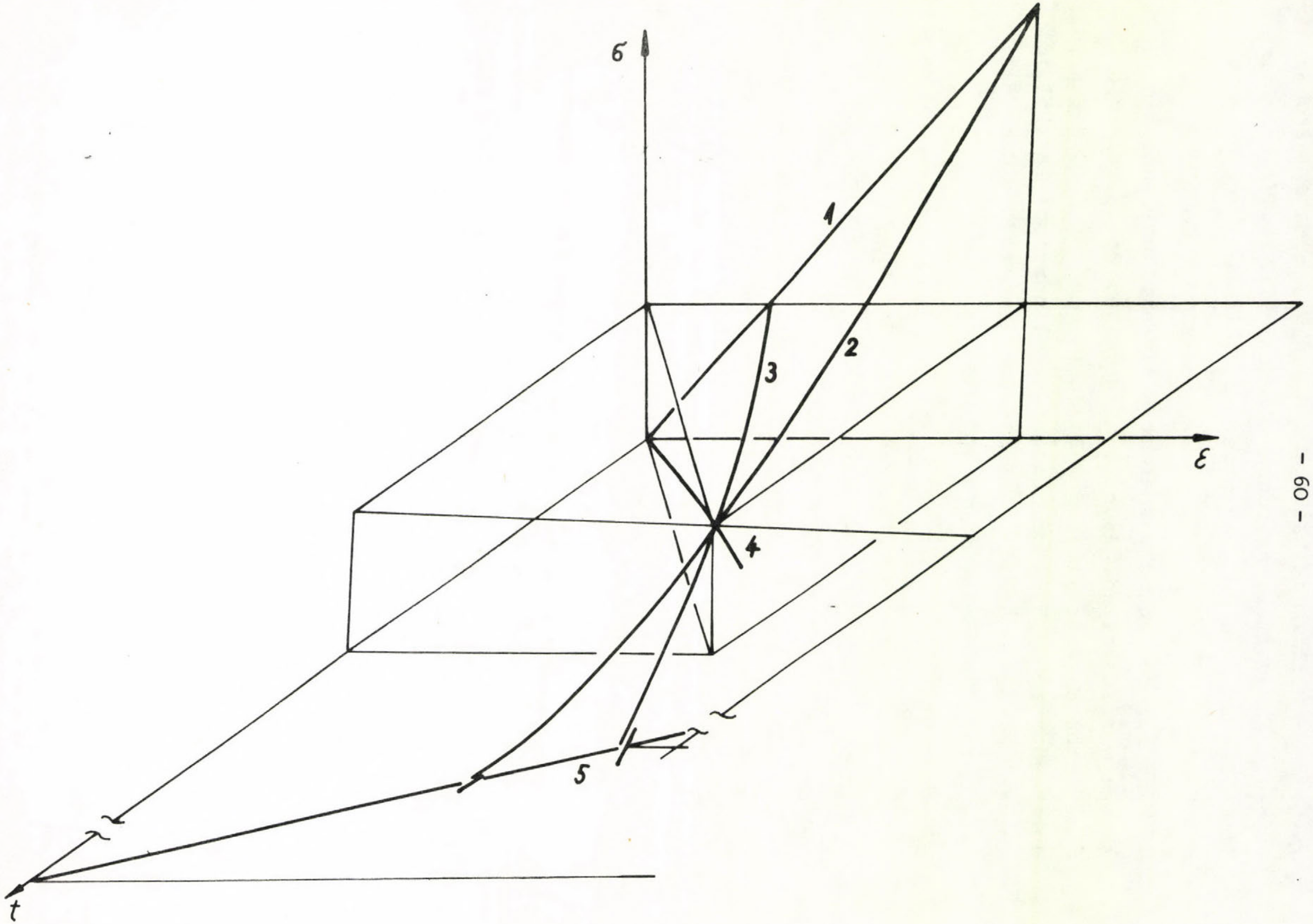
Ausser acht lassend die Deduzierung, mit der Anwendung von (x) wird der Wert der Bewegung w auf die innerhalb des Belastungsbereiches liegenden Punkte der Fläche des Halbraumes:

$$w = \frac{3(1-\mu^3)}{4aE}[abK - \frac{b}{a} Dx_1^2 - \frac{a}{b}(K-D)y_1^2][p - \dot{p}(\frac{\lambda}{E} - \Theta)(1 - e^{-\frac{E}{\lambda} t})]$$

wo: a,b - Ellipsenhalbsachsen; μ,λ,Θ,E - Materialkonstanten, K - vollelliptisches Integral 1. Art, und D die Kombiniertung von K und eines elliptischen Integrals 2. Art sind.

Wird Die Belastung auf einer Ellipsenfläche analysiert, können wir festellen, dass im allgemeinen Fall, wenn die numerische Exzentrizität der Ellipse $0 < e < 1$, die Punkte der Berührung nach Deformation ein elliptisches Paraboloid formen, entartet dieses elliptische Parabolid im Grenzfall $e = 0$ zu einem Rotationsparaboloid, im Falle $e = 1$ zu einem parabolischen Zylinder.

Weiterhin ist unser Ziel im Laufe der theoretischen und praktischen Forschung die theoretischen Ergebnisse durch in situ Nessungen zu beweisen und - durch Weiterentwicklung der theoretischen Ergebnisse und unter Berücksichtigung der Ansprüche an Maschinen, - die Laufrad-Bodenrelation zu optimalisieren.


σ
ε
t
1
2
3
4
5