

UNTERSUCHUNG DER SICH BEI FERMENTATIONSPROZESSEN
AUSGESTALTENDEN TEMPERATURVERTEILUNG

DR. LÁSZLÓ FENYVESI

TIVADAR KŐFALVI

National Institute of Agricultural Engineering

Gödöllő, Hungary

EINLEITUNG

Mehrere wichtigen agrotechnischen Technologien gründen sich auf den Fermentationsprozess (Silierungs-, Düngerbehandlungsverfahren, Methoden der Lebensmittelindustrie). Die die Fermentation auslösenden Mikroorganismen arbeiten im bestimmten Temperaturbereich. Eben deshalb ist die Charakterisierung des thermischen Zustandes des Systems von entscheidender Wichtigkeit.

Daher sollte so ein Modell aufgebaut werden, mit dessen Hilfe die im Material von Einheitsmasse während einer Einheitszeit entstehende Wärmemenge bestimmt werden kann. Für diesen Zweck ist eine Temperaturmessung im fermentierenden Material, das in einem zylinderförmigen Behälter gelegt wurde, vorzunehmen.

In Kenntnis der Wärmeentwicklung müssen wir die konkreten Realisierungsfälle modellieren: den zylinderförmigen, koaxialhohlen und kompakten Körper, sowie das in einem prismatischen Behälter gestelltes, fermentierendes Materialaggregat.

Wir haben konkrete Rechnen bei der thermischen Modellierung des Silierung durchgeführt.

BESTIMMUNG DER IM LAUFE DER FERMENTATION ENTSTEHENDEN WÄRMEMENGE

Wir haben das fermentierende Material in einem zylinderförmigen Behälter eingesetzt und sicherten die Anaerobverhältnisse durch entsprechenden Abschluss. Wir messen während der Fermentation die Temperatur - bei mehreren Punkten des Behälters - sowie die seit der Einlagerung vergangene Zeit. Wir nehmen an: das Temperaturfeld ist zylindersymmetrisch, verändert sich nicht in der Richtung der Längsachse des Behälters, sowie die thermischen Charakteristika des Materials sind bekannt und konstant.

Durch Verwendung der Transportgleichungen in Zylinderkoordinaten haben wir für die Temperaturverteilung die nachstehende Differenzialgleichung aufgestellt:

$$\rho c \frac{\partial U}{\partial t} - \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = A(t, r), \quad (1)$$

hier:

U = Innentemperatur $U = f(r, t)$ [$^{\circ}\text{K}$]

t = die seit Untersuchungsbeginn verlaufene Zeit [h]

r = im Behälter ausgelegter Radius [m]

λ = Wärmeleitkoeffizient des eingelagerten Materials [$\text{K J/m h}^{\circ}\text{K}$]

c = spezifische Wärme des Materials [$\text{K J/kg}^{\circ}\text{K}$]

ρ = Dichte des eingelagerten Materials [kg/m^3]

Bei der Aussenwand ist das Newton'sche Abkühlungsgesetz in Kraft:

$$\lambda \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r_1} + \alpha_1 (U - U_f) = 0, \quad (2)$$

und im Inneraum:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Wir müssen auch die Anfangstemperaturverteilung des eingelagerten Materials angeben:

$$U_0 = f(r) = U|_{t=0}. \quad (4)$$

Bei den obigen Zusammenhängen:

$$U_f = \text{Aussentemperatur } (^\circ\text{K})$$

α_1 - Flächen-Wärmeleitungs-koeffizient bei
der Innenwand [K J/m² h °K].

Bei der Lösung ist es zweckmässig die Rechnen mit einem der hohligen Lagerung entsprechenden Modell durchzuführen. Somit ist die geometrische Form der Untersuchungsbehälter (Abb.1.)

Nun, ist die Randbedingung des Innenhohlraumes:

$$\lambda \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r_0} + \alpha_2 (U - U_f) = 0, \quad (5)$$

hier: α_2 : der Flächen-Wärmeleitungskoeffizient bei der Innenwand. Die Lösung der Gleichung (1) haben wir durch Anwendung der Fourier'sche Methode in der nachstehenden Form ausgesucht:

$$U^*(t, r) = v^*(t, r) + \omega(t, r), \quad (6)$$

wie die Summe der Lösung der homogenen (v^*) und inhomogenen Gleichungen (ω). Unter Beachtung der Aussentemperatur haben wir bei der Lösung die nachstehende Transformation eingeführt:

$$v^* = v + U_f. \quad (7)$$

Unter Berücksichtigung von (6) und (7) wird die neue Form von (1)

$$\rho c \frac{\partial v}{\partial t} - \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \rho c \frac{dU_f}{dt} = 0. \quad (8)$$

Hier wird das inhomogene Glied explizite erscheinen. Durch Lösung der homogenen (v_0) und der inhomogenen Gleichung (v_1)

$$v = v_0 + v_1. \quad (9)$$

Wird die Separation bei dem homogenen Teil

$$v_0 = \tau_0(t) Q_0(r), \quad (10)$$

entsprechend durchgeführt, erreichen wir die nachstehenden Ergebnisse:

$$Q_0^n = B_n \left[I_0(m_n r) + \frac{\lambda_0 m_n I_1(m_n r_1) - \alpha_1 I_0(m_n r_1)}{-\lambda_0 m_n Y_1(m_n r_1) + \alpha_1 Y_0(m_n r_1)} Y_0(m_n r) \right], \quad (11)$$

und $\tau_0 = D_n \exp(\alpha m_n^2 t).$ (12)

Die Eigenwerte können von der Gleichung

$$\begin{aligned} & [-S_n I_1(S_n) + \gamma I_0(S_n)] [-S_n Y_1(S_n \frac{r_0}{r_1}) + \alpha_2 \gamma Y_0(S_n \frac{r_0}{r_1})] - \\ & - [-S_n Y_1(S_n) + \gamma Y_0(S_n)] [-S_n I_1(S_n \frac{r_0}{r_1}) + \alpha_2 \gamma I_0(S_n \frac{r_0}{r_1})] = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

bestimmt werden, wo wir die Formelzeichen

$$S_n = m_n r_1, \quad \gamma = \frac{\alpha_1 r_0}{\lambda}$$

eingeführt haben.

Die Werte von S_n haben wir mittels eines Rechners bestimmt, von denen geben wir einige bekannt:

n	S_n	n	S_n
1	3,098453	7	23,20777
2	6,479410	8	26,54226
3	9,839644	9	29,875338
4	13,18906	10	33,20740
5	16,53220	11	36,53860
6	19,87133	12	39,86923

Weiterhin unter Berücksichtigung von

$$v_1 = \tau_1(t) Q_0(r),$$

sind die Koeffizienten Q_0 , und

$$\tau_1 = - B_n^{-1} \exp(a m_n^2 t) \int_{t_0}^{t_1} C_n(t) \exp(-a m_n^2 t) dt. \quad (14)$$

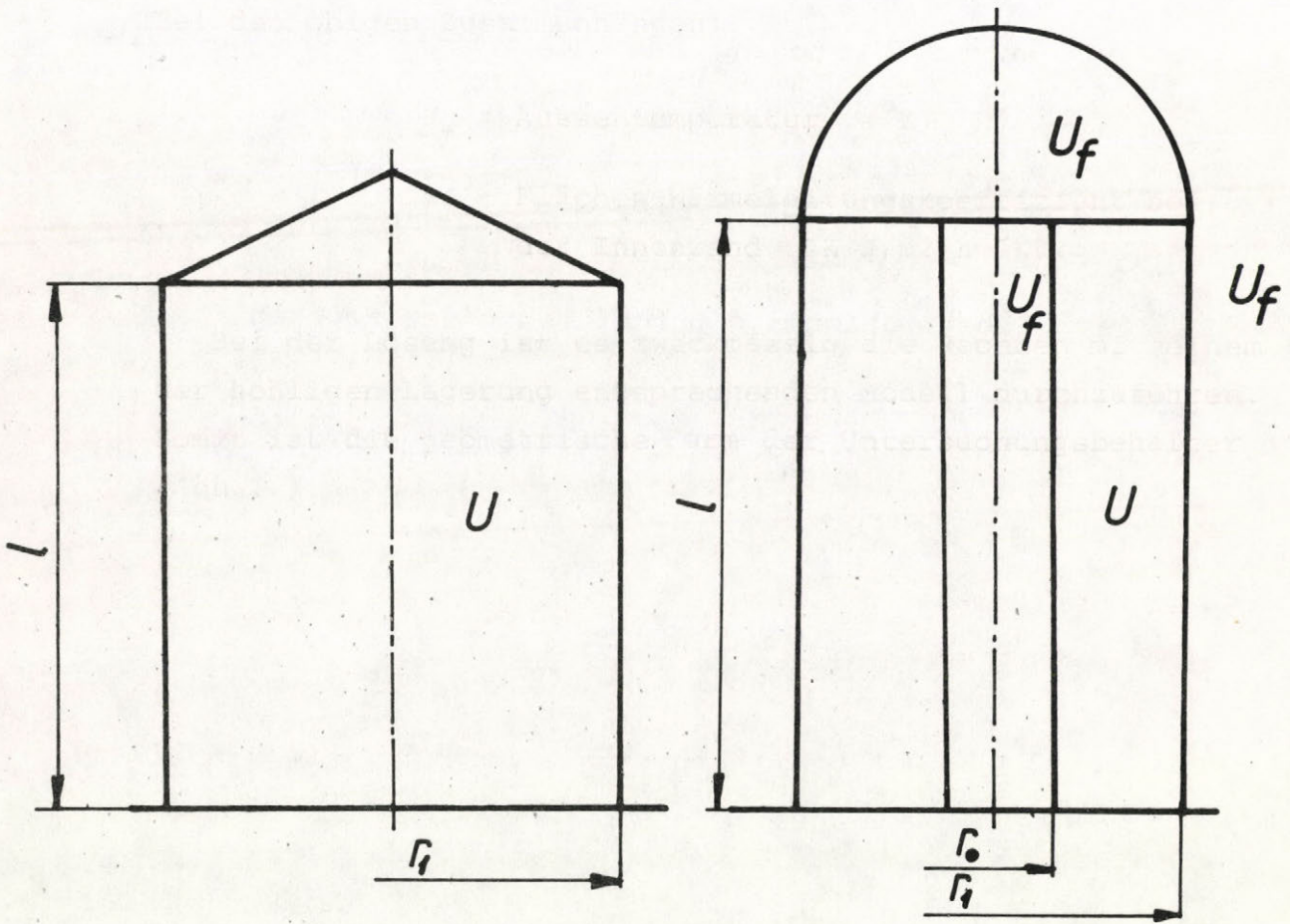
der Partikulärlösung (v_1).

Nun, haben wir die Funktion der Aussentemperatur den Eigenfunktionen entsprechend in Reihen entwickelt:

$$U_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t) Q_0^{(k)}(r). \quad (15)$$

Solcherweise können wir die Lösung des homogenen Teiles der Originalgleichung aufstellen:

$$v^* = \sum_{n=0}^{\infty} Q_0 [M_n - \int_{t_0}^{t_1} C_n(t) \exp(-a m_n^2 t) dt] \exp(a m_n^2 t) + U_f(t). \quad (15/a)$$



M_n, B_n, D_n und C_n sind solche Koeffiziente, die in Laufe der Reihenentwicklungen bestimmt werden können.

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung werden wir die Wärmequellenfunktion den Eigenfunktionen entsprechend in Reihen entwickeln:

$$A(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) Q_0^{(n)}(r), \quad (16)$$

und wir suchen die Lösung in Form

$$\omega(r, t) = R(r)T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) Q_0^{(n)}(r). \quad (17)$$

Nach Substitution und Durchführung der Rechnen

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{H}{\rho c} t\right) \int_0^t \frac{a_n(t')}{\rho c \exp\left(\frac{H}{\rho c} t'\right)} dt'. \quad (18)$$

Also die Lösung:

$$\omega(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{H}{\rho c} t\right) \int_0^t \frac{a_n(t')}{\rho c \exp\left(\frac{H}{\rho c} t'\right)} dt' [I_0(m_n r) - P_n Y_0(m_n r)], \quad (19)$$

wo die Werte von H_n und P_n erzeugt werden können. Demnach können wir die Lösung des Problems:

$$\begin{aligned}
 U^* = & \sum_{n=0}^{\infty} [I_0(m_n r) - P_n Y_0(m_n r)] \left\{ [M_n - \int_{t_0}^{t_1} C_n(t) \exp(-\alpha m_n^2 t) dt] \exp(\alpha m_n^2 t) + \right. \\
 & \left. + \exp\left(\frac{H}{\rho c} t\right) \int_0^{t'} \frac{a_n(t')}{\rho c \exp\left(\frac{H}{\rho c} t'\right)} dt \right\} + U_f(t) \quad (20)
 \end{aligned}$$

aufstellen.

In Kenntnis der Lösung (20) können wir auch diesen Fall erzeugen wo keine Wärmequelle existiert (Abkühlungsfall), $a_n(t) = 0$ und Falls der Behälter kompakt ist: $r_0 \rightarrow 0, \alpha_2 = 0$. In diesem Fall erreichen wir die in der Literatur angegebene Form (CSERMELY, 1974). Wir haben das Problem auch in solchem Fall gelöst, als der Behälter prismatisch war. Die Werte der im Ausdruck (20) figurierenden Funktionen:

- I_0 - lineare Bessel'sche Funktion Null-
-Ordnung und
- Y_0 - quadratische Bessel'sche oder Neumann'sche
Funktion 0. Ordnung

können mittels eines Rechners erzeugt werden. Das Rechnen und Anpassen den gemessenen Werten kann man mit einem Rechner leicht durchführen.