# 古典確率論における諸問題（II）*

武 隈 良 一

## VII　ヤコブス・ベルヌーイの「推論法」

確率論に貢献した最初の書物であるといわれているベルヌーイの「推論法」(Ars Conjectandi, 1713) は非常に著名なので，一度原著に接してみたいと思つていたが，原文がラテン語でありその上容易に入手することが出来ない。僅かにトドハンターの紹介 (1)**によってその一端を知るばかりであったが，最近 Ostwald's Klassiker にその独訳があることを知り早速読んでみる機会を作つてみた。その結果が本稿の拙ない成果であるが，話ばかりで実態が良く知られておらない現状に幾分でも参考になるのではないかと思い敢て禿筆をふるってみた次第である。

独訳(2)は Robert Haussner によるもので，一部分は抄訳になっているがそれは議論が細かくなったり計算が冗慢になった箇所だけに限られているので，殆んど全貌を知ることが出来る。また一部分ではあるが原著を知ることもできた。それは本書の第2部の最初の3章だけではあるが，それの原文と英訳それに他の著名な論文を一括した書物(3)を本学の手塚文庫 (P. 1571) において見出すことができたのである。

さて本書の内容に入るまえに序論めいたことを少しく述べておこう。

ヤコブス・ベルヌーイ (1654—1705) は優れた家系と目されたベルヌーイ一族の筆頭の人である。ライプニッツは彼の勧告によってヤコブスが確率論を研究したといっているが，両者の間に取交わされた書簡によればその確言は正しくはない。むしろ書簡から判断すれば，ライプニッツが耳にする以前にヤコブスは彼の著書を完成していたのである。

---

*（I）は本誌第8巻第3号 (1958年2月) に掲載。

** 後掲文献の番号をあらわす。

「推論法」は著者の死後8年間出版されず，1713年に甥のニコラウス一世(1687—1759) によってやっと世にでた。序文の2頁はニコラウスによって書かれたが，それによるとこの書物の第4部は未完成であるという。出版元はヤコブスの弟ヨハンネス一世 (1667—1748) によってそれが完成されることを希望したが，ヨハンネスは多忙のため果されず，ニコラウスにこの仕事がまわされた。当時ニコラウスは確率論に関心こそはもっていたが彼自身は適役ではないと考え，彼の勧告により残された未完成の部分はそのままにして出版されることになった。なお「推論法」はヤコブス・ベルヌーイの全集には含まれておらない。

「推論法」は本論の外に無限級数に関する研究と附録がつけ加えられている。附録はフランス語で書かれた dissertation で表題は Lettre à un Amy, sur les Parties du Jeu de Paume (テニス遊びの分け前に関する友への手紙) とある。この附録はニコラウスの序文によるとヤコブスのものであるという。

さて本論は4部に分れており，第1部はホイヘンスの論文 De Ratiociniis in Ludo Aleæ (サイコロの勝負ごとにおける計算について) の再刊でヤコブスの註釈が詳しく附加されている。第2部は順列と組合せの理論にささげられている。第3部は偶然のゲームに関する数多くの問題を解いている。第4部は確率論を道徳や経済学の興味深い問題に応用している。

「推論法」の飜訳については，さきに述べた独訳，英訳の外に L. G. F. Vastel による1801年出版の仏訳があるといわれているがこれは入手することが出来なかった。

さて愈々本論の内容へと進もう。最初に4部の内容を述べてから附録にすすみ最後に著名な附帯論文に及ぼそう。

## 第 1 部

### 賭事における可能な計算に關するホイヘンスの論文 ヤコブスの註解附

第1部は原文において1頁から71頁までしめている。ここではヤコブスの註解がホイヘンスの原論文 (Ⅰ参照) よりも一層価値あることが認められる。

すなわち以下ヤコブスによる重要な追加に注目して行こう。

第1，第2，第3の「期待値」に関する定理の註解はことさら変つたものもない。

第4の問題。A とB とが勝負をして，さきに3回勝つた方を勝ちとする。いま A が2回勝ち，B が1回勝ったところで勝負を中止したら，賭金を如何に分配したらよいか。

第5の問題。同じ勝負において，A は勝つために1回不足しており，Bは3回不足している（即ち A は2回勝ち B は1回も勝つてない）ならば，賭金を如何に分配したらよいか。

第6の問題。同じ勝負において，A は勝つために2回不足しており，B は3回不足しているならば，賭金を如何に分配したらよいか。

第7の問題。（さきに4回勝った方を勝ちとする勝負において）A は勝つために2回不足しており，B は4回不足しているならば，賭金を如何に分配したらよいか。

以上4つの得点の問題を論じた後に，ヤコブスは，A が9回以下の勝不足，B が7回以下の勝不足のときの賭金の分配の比に関する表を与えている。

| 不足している競技の回数 | | 競技者B | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 競技者A | 1 | 1: 2 | 3: 4 | 7: 8 | 15: 16 | 31: 32 | 63: 64 | 127: 128 |
| | 2 | 1: 4 | 4: 8 | 11: 16 | 26: 32 | 57: 64 | 120: 128 | 247: 256 |
| | 3 | 1: 8 | 5: 16 | 16: 32 | 42: 64 | 99: 128 | 219: 256 | 466: 512 |
| | 4 | 1: 16 | 6: 32 | 22: 64 | 64: 128 | 163: 256 | 382: 512 | 848: 1024 |
| | 5 | 1: 32 | 7: 64 | 29: 128 | 93: 256 | 256: 512 | 638: 1024 | 1486: 2048 |
| | 6 | 1: 64 | 8: 128 | 37: 256 | 130: 512 | 386: 1024 | 1024: 2048 | 2510: 4096 |
| | 7 | 1: 128 | 9: 256 | 46: 512 | 176: 1024 | 562: 2048 | 1586: 4096 | 4096: 8192 |
| | 8 | 1: 256 | 10: 512 | 56: 1024 | 232: 2048 | 794: 4096 | 2380: 8192 | 6476: 16384 |
| | 9 | 1: 512 | 11: 1024 | 67: 2048 | 299: 4096 | 1093: 8192 | 3473: 16384 | 9949: 32768 |

第8の問題。A, B, C の3人が勝負を行い，A と B は1回 C は2回勝不足とする。

答は A$\frac{4}{9}$q, B$\frac{4}{9}$q, C$\frac{1}{9}$q である。ここに q は全部の賭金をあらわす。

第9の定理。何人かの勝負において勝不足の回数が異なっているとき，ある人の期待値を求めるには，その人および他の全部の人めいめいが次の勝負において勝ったときの，その人の期待値を計算しその合計を全体の人数で割ればよい。

例えば A, B, C において A は1回，B, C は2回勝不足とする。このとき B の賭金の分け前を求めよう。いま次の勝負において A が勝ったとすれば勝負は終って B は何にも得られない。B が勝ったとすれば第8の問題から B は $\frac{4}{9}$q を得る。Cが勝ったとすればやはり第8の問題から B は $\frac{1}{9}$qを得る。従って B の分け前は

$$\frac{0+\frac{4}{9}q+\frac{1}{9}q}{3}=\frac{5}{27}q$$

となる。（この例題はすでにフェルマとパスカルとの往復書簡において論ぜられている。）

かくして3人の場合における表をヤコブスは次のようにつけ加えた。

| | A | B | C | A | B | C | A | B | C | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 不足している競技の回数 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 分け前 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{17}{27}$ | $\frac{5}{27}$ | $\frac{5}{27}$ | $\frac{13}{27}$ | $\frac{13}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{19}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{2}{27}$ |
| 不足している競技の回数 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 5 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 5 |
| 分け前 | $\frac{40}{81}$ | $\frac{40}{81}$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{121}{243}$ | $\frac{121}{243}$ | $\frac{1}{243}$ | $\frac{178}{243}$ | $\frac{58}{243}$ | $\frac{7}{243}$ | $\frac{542}{729}$ | $\frac{179}{729}$ | $\frac{8}{729}$ |
| 不足している競技の回数 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 4 | 1 | 3 | 5 | | | |
| 分け前 | $\frac{65}{81}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{616}{729}$ | $\frac{82}{729}$ | $\frac{31}{729}$ | $\frac{629}{729}$ | $\frac{87}{729}$ | $\frac{13}{729}$ | | | |

| 不足している競技の回数 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 前け前 | $\frac{34}{81}$ | $\frac{34}{81}$ | $\frac{13}{81}$ | $\frac{338}{729}$ | $\frac{338}{729}$ | $\frac{53}{729}$ | $\frac{353}{729}$ | $\frac{353}{729}$ | $\frac{23}{729}$ |
| 不足している競技の回数 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 5 |
| 分け前 | $\frac{133}{243}$ | $\frac{55}{243}$ | $\frac{55}{243}$ | $\frac{451}{729}$ | $\frac{195}{729}$ | $\frac{83}{729}$ | $\frac{1433}{2187}$ | $\frac{635}{2187}$ | $\frac{119}{2187}$ |

次に「サイコロ遊び」の問題を論じている。n 個のサイコロを振つたとき，いろいろな目が出るように投げられるが，その場合の数は全部で $6^n$ である。サイコロが1つのとき投げられた6つの場合はみな異なっている。2つを振つたとき目（の和）は2から12までになるが，そのように投げる場合の数はおのおのいくつあるか。これをさらに拡張している。たとえば3つのサイコロのとき目が6又は15になるように投げる場合の数は10，4つのサイコロのとき目が12になるように投げる場合の数は125になることをしめしている。そしてヤコブスは一般に次のようになると表を与えた。（次頁参照）

第10の問題。1つのサイコロで6の目を出すように投げる場合の数を定めること。

答はもちろん $\frac{1}{6}$ の割合でそのように投げらる。この問題をさらにサイコロが2つ以上5つまでの場合に論じている。

第11の問題。2つのサイコロで12の目を一度出すとすれば，そのような投げは何回になるかを定めること。

答は $\frac{1}{36}$ の割合でそのように投げられる。この問題をさらにサイコロが数多い場合に拡張しメレが矛盾を感じた問題に（以下に示すように）触れている。

次に上の問題を一般化した問題をヤコブスが述べている。まずすべての場合の数を a，成功する場合の数を b，失敗する場合の数を c とし，a=b+c とす。このとき成功する割合は $\frac{b}{a}$，失敗する割合は $\frac{c}{a}$ となる。いま n 回試みるときその間に成功する期待値を求めてみよう。そのための第1の方法は次の

| サイコロの数 | 目の数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| II | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | | | | | | | | | | | |
| III | 3 | 4 | | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | | | | | | |
| IV | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | |
| V | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 等々 |
| VI | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 等々 |
| | 投げる場合の数 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| II | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | |
| III | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 25 | 27 | 27 | 25 | 21 | 15 | 10 | 6 | 3 | 1 | | | | | | |
| IV | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 80 | 104 | 125 | 140 | 146 | 140 | 125 | 104 | 80 | 56 | 35 | 20 | 10 | 4 | 1 | |
| V | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 205 | 305 | 420 | 540 | 651 | 735 | 780 | 780 | 735 | 651 | 540 | 420 | 305 | 205 | 126 | 等々 |
| VI | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 456 | 756 | 1161 | 1666 | 2247 | 2856 | 3431 | 3906 | 4221 | 4332 | 4221 | 3906 | 3451 | 2856 | 2247 | 等々 |

計算による。

$$\frac{b}{a}+\frac{bc}{a^2}+\frac{bc^2}{a^3}+\frac{bc^3}{a^4}+\cdots\cdots+\frac{bc^{n-1}}{a^n}$$
$$=\frac{b}{a^n}\ \frac{a^n-c^n}{a-c}=\frac{a^n-c^n}{a^n}$$

第2の方法は，n 回試みるとき全体の場合の数は $a^n$ であり，全く失敗する場合の数は $c^n$ なので，少くとも1回成功する場合の数は $a^n-c^n$ となり，結果はやはり $\frac{a^n-c^n}{a^n}$ となる。

ここで $a^n=2c^n$，$a=36$，$c=35$ の場合を考えると，$n\log a=\log 2+n\log c$

$$n=\frac{\log 2}{\log a-\log c}=\frac{0.3010300}{0.0122345}$$

となり，これは24より大きく25より小である。

これはメレの問題を解決するもので，2つのサイコロを投げたとき少くとも1回2つとも6の目が出る賭は24回投げるとき損（つまりその確率が $\frac{1}{2}$ より小）で25回投げるとき得（$\frac{1}{2}$ より大）になることをしめしている。パスカル，ホイヘンス，ヤコブスの解答は当然ながらみな一致している。ヤコブスはこのあと次の式に帰着する2つの問題を論じた。

$$\text{I.}\quad \frac{a^{s+n}-c^{s+n}}{a^{s+n}}-\frac{a^s-c^s}{a^s}=\frac{a^n c^s-c^{n+s}}{a^{n+s}}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} m\dfrac{a^n-c^n}{a^n}=\dfrac{a^x-c^x}{a^x} \\ (m-1)\dfrac{a^n-c^n}{a^n}=\dfrac{a^y-c^y}{a^y} \end{cases}$$

より $x-y$ を求めること。

第12の問題。最初の投げで（少くとも）2つ6の目を出すには，いくつのサイコロを振らなければならないか。

この問題は1つのサイコロを何回振つたらそのうち（少くとも）2回6の目が出るか，と変えても内容は同じである。

期待値を順次に計算することによって10個のサイコロがあればよいと答えている。

この問題を一般化して，n 回試みたとき m 回成功する期待値をヤコブス

が求めている。それは

$$\left[c^{n}+\binom{n}{1}bc^{n-1}+\binom{n}{2}b^{2}c^{n-2}+\cdots\cdots+\binom{n}{m-1}b^{m-1}c^{n-m+1}\right]:a^{n}$$

を1から引いたものであるという。

第13の問題は既述の通りでことさらに付加えることもない。

第14の問題。A と B とは次の条件の下に2つのサイコロを交互に投げあう。A は7を投げたら勝，B は6を投げたら勝ちとして B が最初に投げる。A と B との期待値には如何なる関係があるか。

この答は A 対 B が31対30である。ヤコブスはこれを以下のように解いたが，この方法が彼の最も価値ある貢献である。

無限の人が順次に投げ，奇数番目の人は6を投げ，偶数番目の人は7を投げるものとする。奇数番目の人全体が一団となったものがBであり，偶数番目の人全体が一団となったものが A であると考える。いま各人の期待値を計算してみると

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \cdots\cdots \\ \dfrac{b}{a}, & \dfrac{ce}{a^{2}}, & \dfrac{bcf}{a^{3}}, & \dfrac{c^{2}ef}{a^{4}}, & \dfrac{bc^{2}f^{2}}{a^{5}}, & \dfrac{c^{3}ef^{2}}{a^{6}}, & \dfrac{bc^{3}f^{3}}{a^{7}}, & \dfrac{c^{4}ef^{3}}{a^{8}}, & \cdots\cdots \end{array}$$

となる。ここに b は6の目が出る場合の数で5であり，c は31である。e は7の目が出る場合の数で6であり f は30である。

したがって A，B の期待値はそれぞれ

$$\frac{ce}{a^{2}}+\frac{c^{2}ef}{a^{4}}+\frac{c^{3}ef^{2}}{a^{6}}+\frac{c^{4}ef^{3}}{a^{8}}+\cdots\cdots=\frac{ce}{a^{2}-cf}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{bcf}{a^{3}}+\frac{bc^{2}f^{2}}{a^{5}}+\frac{bc^{3}f^{3}}{a^{7}}+\cdots\cdots=\frac{ab}{a^{2}-cf}$$

となり

$$\frac{ce}{a^{2}-cf}=\frac{31}{61},\quad \frac{ab}{a^{2}-cf}=\frac{30}{61}$$

から31対30となる。

このあとに附録として5つの問題があり，これをヤコブスが解いている。

(1) AとBは次の条件のもとに2つのサイコロで勝負をする。Aが6を投げたら勝ち B が7を投げたら勝ちとする。A がはじめに1回投げ，次にBが

2回つづけて投げる。次にAは2回投げ以下交互に（2回ずつ）投げ，両者の一方が勝つまでつづける。AとBとの期待値の比はいくらか。答は10355対12276である。

ヤコブスはこれを次のように解いた。

| 競技者 | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A, | B, | B, | A, | A, | B, | B, |
| 期待値 | $\frac{b}{a}$, | $\frac{ce}{a^2}$, | $\frac{cef}{a^3}$, | $\frac{bcf^2}{a^4}$, | $\frac{bc^2f^2}{a^5}$, | $\frac{c^3ef^2}{a^6}$, | $\frac{c^3ef^3}{a^7}$ |

| 競技者 | 8, | 9, | 10, | 11, | 12, | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A, | A, | B, | B, | A, | …… |
| 期待値 | $\frac{bc^3f^4}{a^8}$, | $\frac{bc^4f^4}{a^9}$, | $\frac{c^5ef^4}{a^{10}}$, | $\frac{c^5ef^5}{a^{11}}$, | $\frac{bc^5f^6}{a^{12}}$, | …… |

したがってAとBの期待値はそれぞれ

$$\frac{b}{a}+\frac{bcf^2}{a^4}+\frac{bc^2f^2}{a^5}+\frac{bc^3f^4}{a^8}+\frac{bc^4f^4}{a^9}+\frac{bc^5f^6}{a^{12}}+\cdots\cdots$$

$$\frac{ce}{a^2}+\frac{cef}{a^3}+\frac{c^3ef^2}{a^6}+\frac{c^3ef^3}{a^7}+\frac{c^5ef^4}{a^{10}}+\frac{c^5ef^5}{a^{11}}+\cdots\cdots$$

となる。それぞれの和は

$$\frac{a^3b+bcf^2}{a^4-c^2f^2} \text{ と } \frac{a^2ce+acef}{a^4-c^2f^2}$$

となり，AとBとの期待値の比は $a^3b+bcf^2$ 対 $a^2ce+acef$ となる。これに $a=36$, $b=5$, $c=31$, $e=6$, $f=30$ を代入すると答が得られる。

ヤコブスの方法はホイヘンスの方法にまさるものがあり，彼はさらに複雑な次の4つの問題を解いている。

| | Ⅰ | | Ⅱ | | Ⅲ | | Ⅳ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | A | B | A | B | A | B |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 6 |
| 4 | 4 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 7 | 8 |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · |

例えば，IV の問題は，2つのサイコロでさきに7の目を投げたら勝として，A が最初に1回投げ，ついでB が2回，A が3回，B が4回，……投げるとき，2人の期待値の比はいくらになるかという。

これらの問題になるとホイヘンスの方法は最早無力になる。ヤコブスの方法によると IV の解は次のようになるという。

$$m=\frac{c}{a}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}=0.833\cdots\cdots$$

にして A，B の期待値はそれぞれ

$$1-m+m^3-m^6+m^{10}-m^{15}+m^{24}-m^{28}+m^{36}-m^{45}+\cdots\cdots$$

$$m-m^3+m^6-m^{10}+m^{15}-m^{24}+m^{28}-m^{36}+m^{45}+\cdots\cdots$$

なるを以つて，その比は，52392 対 47608 になるという。

ヤコブスはこの種の問題を解く一般法則を与え それを次の興味深い例に適用している。

A,　B,　A,　B,　A,　B,　A,　B,　A,　……

3,　1,　4,　1,　5,　9,　2,　6,　5,　……

のとき，すなわち A が3回先きに投げ，次に B が1回，A が4回……投げるときを問題にしている。先ず数字の和を順次につくり

0, 3, 4, 8, 9, 14, 23, 25, 31, 36……

これを用いて A，B の期待値はそれぞれ次のようになるという。

$$1-m^3+m^4-m^8+m^9-m^{14}+m^{23}-m^{25}+m^{34}-m^{36}+\cdots\cdots$$

$$m^3-m^4+m^8-m^9+m^{14}-m^{23}+m^{25}-m^{34}+m^{36}+\cdots\cdots$$

これらの級数の和はもちろん直に求められるという訳にはいかない。

(2)　3人の競技者 A，B，C は12個の石をもっている。そのうち4個は白で8個は黒である。いま次の法則のもとに勝負をする。すなわち目隠しをして最初に白石をつかんだものが勝ちとし，A から始めて B，C，次にまた A へと順次に行う。3人の期待値にはいかなる関係があるか。

ヤコブスはこの問題を3つの場合に分けた。第1は各石が取出される毎に再びもとの壺へもどす。第2は12個の石が3人共有で取出してからもどさない。第3は各人が12個の石をもち取出してからもどさない。

この問題はホイヘンスの方法によってもヤコブスの方法によっても解け

る。答は第1の場合 9:6:4，第2の場合 77:53:35，第3の場合 6476548:4231370:2768457 である。なお第2の場合は第3部第8の問題において再び解かれている。

(3)と(4)は組合せ論を用いても解けるとヤコブスはいう。実際この2つは第3部の第5および第6の問題として後にとり上げられている。

(5) A と B は12個の貨幣をもって3つのサイコロで次の法則のもとに勝負する。11の目が投げられたら A は B に貨幣を1枚わたす。しかし14の目が投げられたら A はBから1枚とる。かくしてすべての貨幣をもつことができたら勝ちとする。A と B の期待値の関係は 244140625:282429536481 である。

これを解くのに，14の目が出るのは216回のうち15回であり，11の目が出るのは27回であるから結果は $\left(\frac{b}{c}\right)^{12}=\left(\frac{15}{27}\right)^{12}=\left(\frac{5}{9}\right)^{12}=\frac{244140625}{282429536481}$ になるという。この詳細な解は省略するが，ヤコブスは一般に，A が m 枚の貨幣，B が n 枚の貨幣をもつとき，A と B の期待値の比は

$$(b^n c^m - b^{m+n}):(c^{m+n} - b^n c^m)$$

になるという。この公式の証明は非常に複雑な計算を必要とするので読者に委ねるといっているが，現代的形式の解はトドハンターの著書（62頁）とオストワルトの註（148頁）において見られる。

ヤコブスのこの公式は後にニコラウス・ベルヌーイとモンモールの間にとりかわされた書簡のなかにあらわれてくる。しかしはじめて出版されたのはドモァヴルの De Mensura Sortis の第9の問題においてである。

## 第　2　部

## 順 列 論 と 組 合 せ 論

第2部は原文において72頁から137頁までしめ内容は順列と組合せを論じている。彼以前にスホーテン，ライプニッツ，ウォリスおよび Prestet（1690死）が論じているので材料が全部新しいという訳にはいかない。

第1章順列は，すべてが異なる物の順列の数と一部分が相等しい物の順列の数を求める法則を述べている。そして終りに Bauhusius の問題を正しく計算

している。その問題というのは，イエズス会の修道士 Bernhard Bauhusius (1575—1619) が作った六脚韻の詩（マリヤを讃えるうた）の一行に

Tot Tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera coelo（おとめマリヤよ，汝には，天にある星と同じくらいのたまものがある。）

というのがあり，これの順列が何通りあるかというのである。これに対して先ず Ericius Puteanus（1574—1646，修辞学教授）がその著 Thaumata Pietatis（敬虔の奇蹟）において48頁もついやして1022通りあるといった次に Gerard Vossius（1577—1649, 古典語学者）はその著 De Scientiis Mathematicis の第7章においてやはり1022通りあるといった。第3に Prestet は Elemens des Mathematiques の初版348頁において2196通りあるといったが，第2版第1巻133頁において3276通りと訂正した。第4に Acta Eruditorum の勤勉な編集者が Wallis の Treatise of Algebra を批評しながら，その数を2580と定めた。最後に Wallis は後年その自著のラテン語版（1693）の494頁において3096と与えた。しかし以上の数はすべて誤りである。ヤコブスは3312と正しく計算した。

第2章一般の組合せにおいては，すべてが相異なる物の組合せを考えている。例えば a, b, c, d, e が与えられたとき，これらを用いて作られる組合せを次のように級にまとめている。級とは1つだけのもの，2つだけのもの，……にまとめたものを意味する。

a,

b, ab,

c, ac, bc, abc,

d, ad, bd, cd, abd, acd, bcd, abcd,

e, ae, be, ce, de, abe, ace, bce, adebde, cde,
abce, abde, acde, bcde, abcde,

そして一般に次の法則を与えている。

級別にならべてつくられる組合せのすべての数を決定するには，2をその物の数だけ累乗して1を引けばよい。

これにより物が n 個あるとき，組合せの数は $2^n-1$ となる。例えば上の

例のように n が5のときは $2^5-1=31$ となるが，これは$5+10+10+5+1$ に等しい。

第3章　一定の級の組合せ，図表にした数とその性質。

この章においてはまず各級の組合せの数が求められ，それを表にすると次のようになる。

図表にした数の表

| 級 | | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ | Ⅵ | Ⅶ | Ⅷ | Ⅸ | Ⅹ | Ⅺ | Ⅻ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 組 | 3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 合 | 4 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| さ | 5 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| れ | 6 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| る | 7 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 物 | 8 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| の | 9 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 数 | 10 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | 0 | 0 |
| | 11 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | 0 |
| | 12 | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 |

ヤコブスはこの図表にした数の表についての驚くべき性質として12をあげているが，それらは組合せ論においてよく知られたものである。それらの性質はヤコブスもいっているように，既に先人によって得られたものではあるが，誰もきちんとした証明を公にしたものはなかった。少くともそれらの証明はヤコブスにとって既知ではなかったので，彼が証明をなしとげたのである。従って例えば性質8である二項定理の正整数乗の場合の証明はヤコブスに帰せられる。

このあと1から nまでの自然数の和，自然数の2乗の和，3乗の和，……を次のように求めている。

$$\int n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$$

$$\int nn = \frac{1}{3} n^2 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$$

$$\int n^3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2$$

$$\int n^4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n$$

$$\int n^5 = \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2$$

$$\int n^6 = \frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n' - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n$$

$$\int n^7 = \frac{1}{8} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^2$$

$$\int n^8 = \frac{1}{9} n^9 + \frac{1}{2} n^8 + \frac{2}{3} n^7 - \frac{7}{15} n^5 + \frac{2}{9} n^3 - \frac{1}{30} n$$

$$\int n^9 = \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^6 + \frac{1}{2} n^4 - \frac{1}{12} n^2$$

$$\int n^{10} = \frac{1}{11} n^{11} + \frac{1}{2} n^{10} + \frac{5}{6} n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2} n^8 + \frac{5}{66} n$$

そして一般に

$$\int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1}$$

$$+ \frac{c \cdot \overline{c-1} \cdot \overline{c-2}}{2 \cdot 3 \cdot 4} B n^{c-3} + \frac{c \cdot \overline{c-1} \cdot \overline{c-2} \cdot \overline{c-3} \cdot \overline{c-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C n^{c-5}$$

$$\frac{c \cdot \overline{c-1} \cdot \overline{c-2} \cdot \overline{c-3} \cdot \overline{c-4} \cdot \overline{c-5} \cdot \overline{c-6}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} D n^{c-7} \cdots\cdots$$

なる公式を与えている。

ここに n のべき指数は2ずつ下つて n 又は $n^2$ でおわる。A, B, C, D, ……は $\int n^2$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, ……における n の係数を表わす。すなわち

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{30}, \quad C = \frac{1}{42}, \quad D = -\frac{1}{30} \cdots\cdots$$

である。これらを求めるには，その係数を含む式のすべての項の係数の和が1

であることから得られる。例えば D は

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{15}+\frac{2}{9}+D=1$$

から求まるというように。

また上の公式を用いて 1 から1000までの10乗の和を計算し次の結果を得ている。

914099242414242434242419242500

最後に次の表であらわされる級数の和を求めている。

| D | C | B | A |
|---|---|---|---|
| d | c | b | a |
| d | c+d | b+c | a+b |
| d | c+2d | b+2c+d | a+2b+c |
| d | c+3d | b+3c+3d | a+3b+3c+d |
| d | c+4d | b+4c+6d | a+4b+6c+4d |
| d | c+5d | b+5c+10d | a+5b+10c+10d |

A の級数の各項の差は B の級数の各項となり，B の級数の各項の差は C の級数の各項となり，C の級数の各項の差は D の級数の各項となり，これはいずれも d に等しい。

このとき A の級数の第 n 項は

$$a+\overline{n-1}\cdot b+\frac{\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{2}c+\frac{\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}}{2\cdot 3}d$$

となり，A の級数の第 n 項までの和は

$$na+\frac{n\cdot\overline{n-1}}{2}b+\frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{2\cdot 3}c+\frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}}{2\cdot 3\cdot 4}d$$

となる。

第 4 章一定の級の組合せの数については，n 個のものから c 個とる組合せの数を求める公式 $\frac{n\ (n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-c+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots c}$ をまず与え，それから導かれる種々の結果を述べている。

附録として本筋を離れてはいるが得点の問題を論じている（107頁）。即ち

得点の問題を組合せを用いて解く2つの方法を与えた。第1の方法は，まず本書の第1部において与えた表をいかに続けるか又その項の法則がいかに表わされるかを示し，A と B が勝つために不足している得点 m，n の数に対する表を与え分配の割合を定めた。パスカルは6点勝負の表を与えたが，その表の拡張をヤコブスが第1部16頁にて与え，さらにこれを一般化した。また $m=n+1$ の場合を一般に論じパスカルの特別の場合をしのいでいる。第2の方法はより簡単で直接的である。これは第1部の第12の問題における方法に帰着する。A，B がそれぞれ m, n 点不足しているならば勝負は $m+n-1$ 回後に完了する。両者が同じ伎倆のとき可能なすべての場合は $2^{m+n-1}$ である。B が無得点で A が勝つたとき，B が1点とって A が勝ったとき，……B が $n-1$ 点とって A が勝ったとき，と分類して A の勝つ場合を求めると

$$1+\binom{m+n-1}{1}+\binom{m+n-1}{2}+\cdots\cdots+\binom{m+n-1}{m-1}$$

となる。これを $2^{m+n-1}$ で割ったものが A の勝つ率である。パスカルもこれに類したことを述べているが，パスルカの算術三角形よりこの公式の方がより便利である。

第5章繰返しをゆるす組合せの数においては，n個のものから繰返しを許して c 個とるとき組合せの数は $\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+c-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots c}$ になると公式を与えている。

第6章繰返しが制限されている組合せの数においては，まず次の例をあげている。文字が a，b，c，d と与えられ，a は5回，b は4回，c は3回，d は2回までくりかえするとを許すとき，全部の組合せの数はいくらになるかという。これは $a^5 b^4 c^3 d^2$ の約数の個数に等しいので $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$ 通りあるという。ただし $a^0 b^0 c^0 d^0=1$ を余分に含んでいる。これより一般の法則を導いている。

整数の約数の問題はスホーテンとウォリスが組合せを用いて論じたことは既に述べたが，これはヤコブスも認めている。

第7章 complex においては組合せと順列を一しよにしたものを論じている。即ち n 個のものから c 個とりだしてこれを並べたとき幾通りの並べ方が

あるかという。ヤコブスは n 個のものを並べるとき順列とよび，c個とりだしてから並べるとき complex と称して両者を区別した。n が1から10までの値をとるとき，complex のすべての数は次のようになるという。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 物の数 | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10 …… |
| complex の数 | 1, | 4, | 15, | 64, | 325, | 1956, | 13699 | 109600, | 986409, | 9864100…… |

第8章繰返しをゆるす complex においては，まず一定の級においては与えられた物の数を級の数だけ累乗することによって求める数が得られると法則を与えている。例えば9個のものから繰返しをゆるして4つとって並べる順列の数は $9^4=6561$ であるといい，外にアリストテレスの三段論法の例から，A E, I, 0 のうち3つとって並べると $4^3=64$ あるがそのうち意味のあるものは36だけであると述べている。

次に物が m 個あるとき1から n までの級のすべての complex の数を求める公式として

$$m+m^2+m^3+\cdots\cdots+m^n=\frac{(m^n-1)m}{m-1}$$

を与えている。

第9章繰返しが制限されている complex の数においては，次の例をあげている。文字が a, b, c と与えられ，a は4回，b は3回，c は2回まで繰返すことが許されるとき，全部の順列の数はいくらになるかを求めている。

## 第 3 部

## 種々の賭事およびサイコロ勝負への組合せ論の應用

第3部は原文において138頁から209頁までしめ内容はこれまでの組合せ論その他を応用して24の問題を解いている。

第1の問題。壺のなかに黒石と白石とが2つ入っている。A, B, C が次の条件の下に勝負をする。最初に白石を取出した者が勝ちとする。しかし3人とも白石をとり出さなかったら賞は与えられない。A からはじめて B, C とつ

づくが，取出した石は再び戻すことにする。3人の期待値はいくらになるか。

（解） これは第1部第11の問題の後にしめした2つの問題のうちの前者の特別の場合である。従つて公式 $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$ において，a=2，c=1，n=1，s=0, 1, 2 とおけば $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$ と A, B, C の期待値が得られる。残りの $\frac{1}{8}$ は無勝負になる期待値で世話役のものである。

第2の問題。前題における条件をそのままにしておいて，世話役が3人の競技者の好意による彼の分前，すなわち誰も白石を取出さないときの分を断念するならば競技者各人の期待値はいくらになるか。

（解） $\frac{1}{8}$ を3人に分けて追加すると，A, B, C はそれぞれ $\frac{13}{24}$，$\frac{7}{24}$，$\frac{4}{24}$ となる。

第3の問題。A，B，C，D，F，F の6人が勝負をする。世話役は最初の人よりも最後の人に好意をよせている，すなわち先ず A と B とが勝負して，勝った者が C と争ひ，この勝者がまた D と争う。このようにして F まで行う。そして最後に勝つた者が賞を得る。以上の勝負において争っている2人はつねに同じ期待値をもつものとする。6人の期待値はいくらか。

（解） A と B とは同じ期待値で $\frac{b^5}{a^5}$ である。C, D, E, F の期待値はそれぞれ $\frac{b^4}{a^4}$，$\frac{b^3}{a^3}$，$\frac{b^2}{a^2}$，$\frac{b}{a}$，である。a = 2b なるを以て求める期待値は $\frac{1}{32}$，$\frac{1}{32}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$ となる。

第4の問題，6人は前と同じ順序で勝負をする。ただし今度は勝つ割合が変化するものとする。すなわち2度目の対手と争うときは，最初のときより勝の負に対する割合が2倍となり，3度目の相手のときは4倍，4度目の相手のときは8倍になる。最初 A と Bが同じ期待で勝負をはじめる。このようにすれば6人は同じ期待値をもつことができるか。

（解） A と B の期待値は $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{16}{17}=\frac{512}{2295}$ にして，C は $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{9}=\frac{64}{405}$ であることは容易に分る。D は最初に C とぶつかるか，A 又は B とぶつかる。それ故これに勝つ期待値は

$\frac{1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{5}}{3}=\frac{11}{45}$ にして，ついで E, F に勝たねばならぬから，$\frac{11}{45}\cdot$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{88}{675}$ が求める期待値となる。同様に E, F の期待値を求めると $\frac{10}{81}$, $\frac{181}{1275}$ となる。よって6人の期待値の比は 7680 : 7680 : 5440 : 4488 : 4250 : 4887 となり相等しくはならない。

第5の問題。40枚の札があって10枚ずつは同色で4通りあるものとする。いま A は B に対して，4枚とり出すとき全部が異色になるようにすると，賭けた。両者の期待値はいかなる関係にあるか。

（解） これは第1部附録第3の問題である。ヤコブスは組合せを用いて次のように解いている。40枚から4枚とる組合せの数は $\binom{40}{4}=81390$ にして，全部が異色である場合の数は $10^4=10000$ なるを以て，A と B との期待値の比は 10000 対 81390 即ち 1000 対 8139 である。

第6の問題。壺に12の石があり4つは白で8つは黒とする。A は目隠くして7つの石をとりそのうち3つは白をとると，B に賭けた。両者の期待値はいかなる関係にあるか。

（解） これは第1部附録第4の問題である。$\binom{12}{7}=792$, $\binom{4}{3}\binom{8}{4}=280$ なるを以て，期待値の比は280対512即ち35対64である。

第7の問題。任意に多くの競技者 A, B, C……が積んである札を一枚ずつめくる。札のうちの一枚だけに印がつけられ他には印がない。順々にめくって印のついた札を引いた人が勝ちとする。A からはじめて B，つぎに C というように最後までつづけ終ったら再び A にもどり札がなくなるまで行う。各人の期待値はいかなる関係にあるか。

（解） 札の数 ma が人数 a で割切れる場合には期待値はみな相等しく $\frac{m}{ma}=\frac{1}{a}$ である。札の数 ma+b, b<a が人数 a で割切れぬ場合には，期待値は最初の b 人とあとの a−b 人とは異なり，その比は m+1 対 m である。

第8の問題。前題と同じ方法で競技を行うが，印のつけられた札が数枚あるとき，最初にそれを引いた人を勝ちとすれば，各人の期待値はいかなる関係にあるか。

（解） 競技者を A, B, C とし札12枚のうち4枚に印がついている場合を考えよう。札を石とすれば第1部附録第2の問題の第2の場合に相当する。札

が積まれている順序のすべての場合は $\binom{12}{4}=495$ 通ある。最初に印のついた札がでる場合は，他の11枚のなかの3枚に印がついているので，その数は $\binom{11}{3}=165$ 通りである。第2枚目にはじめて印のついた札がでる場合は，つづく10枚のなかの3枚に印がついているので，その数は $\binom{10}{3}=120$ 通りである。第3枚目は同様に $\binom{9}{3}=84$ 通りである。このようにして次の表ができ上る。

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A, | B, | C, | A, | B, | C, | A, | B, | C, | A, | B, | C, |
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10, | 11, | 12, |
| 165, | 120, | 84, | 56, | 35, | 20, | 10, | 4, | 1, | 0, | 0, | 0, |

それ故 A のすべての場合は $165+56+10=231$，B は 159，C は 105 となりそれらの比は 77:53:35 となる。

第9の問題。競技者の順序は前の問題と同じくする。今度は印のついた札を最も多く引いた人を勝ちとする。もし2人又はそれ以上の人が同数の札を引いたときは賭金を等分することにし，他の人は0とする。各人の期待値にはいかなる関係があるか。

（解） 具体的な数字をいれた場合を解いているが，長くなるので省略する。次題も同様。

第10の問題。A, B, C, D が前題と同じように競技をする。そして36枚の札の山から一枚ずつめくるが，16枚に印がついている。いま23枚がめくられて，A は4枚，B は3枚，C は2枚，D は1枚の印のついた札をもったものとする。すなわち残りは13枚でそのうち6枚は印のついた札である。今度めくる番になっている D が他の人に自分の権利を譲るとすれば，この権利はいくらに見積られるか，又この場合における各人の期待値はいくらになるか。

第11の問題。普通のサイコロを6回投げて毎回あらわれる目がみな異なるようにしたい。その期待値はいかほどか。

（解） $\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6^6}=\dfrac{5}{324}$

第12の問題。6つのサイコロを投げたとき第1のサイコロの目が 1，第2のサイコロの目が2，……，となるようにしたい。その期待値はいくらか。

（解） $\dfrac{1}{6^6}=\dfrac{1}{46656}$

第13の問題。A, B, C の3人が各自1から6までの数字を書いておく。サイコロを順次にふって出た目の数字を消してゆくことにする。もし出た目が既に消されたものならば次の人に番をゆずり，誰か1人が全部6つの数字を消すまでつづける。いま長い時間試みた後に A はまだ2つ，B は4つ，C は3つ消してないとする。今度 A の番とすれば3人の期待値はいくらか。

（解） これは非常な労力と忍耐を要する問題で，もっと良い簡単な方法は私も知らないとヤコブス自身が述べている程である。解は長くなるので省略しておく。

第14の問題。2人の競技者 A, B は次のようにとりきめをする。A が最初にサイコロを振つて，そのとき出た目と同じ回数だけサイコロを振るものとする。かくして出た目の数の和が12以上ならば A は賭金をもらう。もし12ならば賭金を折半し，12以下ならば B が賭金をもらう。このときいずれの期待値が大きいか，またその大きさを求めよ。

（解） この問題を2つの場合に分けて解く。

1. 最初の目の数は計算にいれないとする。このとき A はさらに出た目と同じ回数だけ振りつづけることができる。

最初に A が1を振ればこれはとうてい12を越えられない。2を振れば36の場合のうち1つだけ12になる場合があるので（この場合は賭金折半）次のように計算される。$\dfrac{1\cdot\frac{1}{2}+35\cdot 0}{36}=\dfrac{1}{72}$，次に3を振れば216の場合のうち12になるのは25の場合，12以下は 135 の場合があり，12以上は56の場合があるので次のように計算される。$\dfrac{25\cdot\frac{1}{2}+56\cdot 1}{216}=\dfrac{137}{432}$

同様にして最初に

4をふった場合 $\dfrac{125\cdot\frac{1}{2}+861\cdot 1}{1296}=\dfrac{1847}{2592}$

5をふった場合 $\dfrac{305\cdot\frac{1}{2}+7014\cdot 1}{7776}=\dfrac{14333}{15552}$

6をふった場合 $\dfrac{456\cdot\frac{1}{2}+45738\cdot 1}{46656}=\dfrac{45966}{46656}=\dfrac{7661}{7776}$

となる。故に求める A の期待値は

$$\frac{1}{6}\left(0+\frac{1}{72}+\frac{137}{432}+\frac{1847}{2592}+\frac{14333}{15552}+\frac{7661}{7776}\right)=\frac{15295}{31104}$$

となり，Bは$\frac{15809}{31104}$となる。即ち B の方が有利である。

2．最初の目の数を計算に入れるとする。このとき A はその目の数より1回少ない回数だけさらに振りつづけることができる。

最初にAが1および2を振れば，もはや12に達することはできない。3を振れば，次の36の場合において9になるのは4つの場合，9以下は26の場合，9以上は6つの場合があるので次のように計算される。$\frac{4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot 1}{36}=\frac{2}{9}$，同様に以下計算して合計すれば A の期待値は

$$\frac{1}{6}\left(0+0+\frac{2}{9}+\frac{341}{432}+\frac{1271}{1296}+\frac{15545}{15552}\right)=\frac{46529}{93312}$$

となり，A は不利となる。

ヤコブスはこの後にこの問題の別解を与えている。それは尤もらしく思われるが誤りである。というのはヤコブスは一種の平均を考えており，12より多くまたは等しくまたは少なく何回振ることができるかを考いていないからである。ヤコブスは最初の解は絶対明白に正しいから別解は誤りに違いないという以上どうしようもなかったようである。

第15の問題。前題と同じように競技が行われるものとする。ただし今度はA が最初に振つた目の数の平方より多くの目を振れば A が賭金をもらい，同じなら折半，少なければ B が賭金をもらうものとする。

（解） 1．最初の目の数が計算にいれないときは$\frac{259993}{359872}$と$\frac{299879}{559872}$になる。

2．最初の目の数が計算に入るときは$\frac{35155}{93312}$と$\frac{58157}{93312}$とになる。

第16の問題。Cinq et neuf（5と9）と名づけられる競技の期待値を求めよ。これは A と B が2つのサイコロで競技する勝負である。A だけがサイコロを振り次のとりきめに従う。A が最初に3又は11又は2つとも同じ目のものを振ったら A の勝ちとする。しかし5と9を振ったら B の勝ちとする。それ以外のものを振ったら無勝負とする。かくきめて何回も A が振るが，再び5又は9があらわれて B が勝つか，又は最初に出た目が再びあらわれて A が勝ったら競技はとりやめる。両者の期待値はいくらか。

（解）　$\dfrac{4189}{9009}$ と $\dfrac{4820}{9009}$

第17の問題。円盤が4本の直径によって8等分され8つの部分ができる。Ⅰの部分に入ればⅠ点，Ⅱの部分に入れば2点，……というとりきめの下に小さな球4つを一回投げるときその期待値はいくらか。

（解）　これはヤコブスが歳の市で見た競技である。4点になったら120プフェンニヒ，5点になったら100プフェンニヒ，……というように表が別に与えられている。ヤコブスは各点のあらわれる期待値を計算して，この競技の期待値を $4\dfrac{349}{3596}$ と計算した。実際には4プフェンニヒで一回投げさせてくれるので客の方が得である。

第18の問題。Trijaques（3人のジャック）とよばれるトランプ遊びの競技者の期待値を求めよ。

この遊びは非常に複雑な規則で行われるのでここには省略しておく。

第19の問題。親元が勝つ場合が負ける場合よりも僅かに多いとする。また次回の勝負において親元が自分の地位を保つ場合が，相手にゆずる場合よりも大きいとする。このとき親元の権利はどれ位の値があるか。

（解）　賭金を a とし，親元は p 回勝つて q 回負けるとする（$p>q$）。また m 回地位を保つて n 回ゆずるとする（$m>n$）

最初の勝負において親元は

$$\frac{pa+q\ (-a)}{p+q}=\frac{p-q}{p+q}\,a=\frac{r}{s}\,a$$

を得る。従つて相手は $-\dfrac{r}{s}a$

を得る。

次の勝負において親元は

$$\frac{m\dfrac{ra}{s}+n\dfrac{-ra}{s}}{m+n}=\frac{r}{s}\,\frac{m-n}{m+n}a=\frac{rt}{sv}a$$

を得る。かくして第 Z 回までには

$$\frac{r}{s}a+\frac{t}{v}\,\frac{r}{s}a+\frac{t^2}{v^2}\,\frac{r}{s}a+\cdots\cdots+\frac{t^{z-1}}{v^{z-1}}\,\frac{r}{s}a$$

$$=\frac{ra}{s}\,\frac{1-\dfrac{t^z}{v^z}}{1-\dfrac{t}{v}}=\frac{ra}{s}\left[\frac{m+n}{2n}-\frac{t^z}{2n\ v^{z-1}}\right]$$

を得ることになる。

m と n との差が小にして，z が大なるとき，親元の期待値は $\frac{ar}{s}\cdot\frac{m+n}{2n}$ と見積って差支えない。

第20の問題。ボック遊びとよばれるトランプ遊びの期待値を求めよ。これは2人又はそれ以上で行う遊びである。一人が親になって務をはたす（これをボックをもったという）。すなわち札をまぜて自分および各人に分配すると幾枚かずつからなる山ができる。親以外のものは一つの山を任意の値段で引取り，親も残りの山をとる。そして親は全部の山をひっくりかえして見て一番下にある札が何であるかを見る。このとき親の札よりも高い札に対しては親は賭金（さっきの値段）を払い，同等又は低い札に対しては賭金をもらう。この勝負は親が全部の人に負けるときまで続けるものとする。親が勝つ場合と負ける場合の比 p:q および次の勝負において自分の地位を保つ場合と相手にゆずる場合の比 m:n を求めよ。

（解） 1. 山が2つのとき，2. 山が3つのとき，3. 山が4つのとき，いかになるかを詳しく解いているがここには省略する。

第21の問題。Bassette とよばれるトランプ遊びについて。

（解） この問題は Joseph Sauveur が 1679年2月に提出したもので，その際証明は与えられてなかったのでヤコブスはこれに8頁も費して詳しく証明した。かなり複雑な問題なのでここには省略しておく。

第22の問題。ある競技において，すべての場合の数を a，起り得る場合の数を b，残りの場合の数を a−b=c とする。いま各勝負ごとに Titius は Cajus に1プフェンニヒを支払うが，b の場合の1つが起つたとき T は C から m プフェンニヒをもらうことにする。ただし c の場合の1つが起つたとき T は C から何にももらわない。その他の条件として連続して n 回 c の場合の1つが起つたら T は C から n プフェンニヒ返してもらうことにする。このとき T と C とはいかなる期待値をもつか。

（解） 問題を逆の方から考える。いま T が n−1 プフェンニヒを支払つたとする。即ち c の場合の1つが n−1 回起り，こんどは第 n 回目とする。このとき b の場合の1つが起れば T は C から m だけもらえるがそのうち

n を支払わねばならぬ。また c の場合の1つが起れば T は C から n を返してもらえるので $n-n=0$ の利益になる。故にこのときの期待値 $h_{n-1}$ は $\dfrac{b(m-n)+c\cdot 0}{a}=(m-n)\dfrac{b}{a}$ となる。

次に T が n−2 プフェンニヒ支払って，第 n−1 回目になったとする。このとき

$$h_{n-2}=\frac{b(m-n+1)+ch_{n-1}}{a}=\frac{(m-n+1)ab+(m-n)cb}{a^2}$$

となる。これをつづけると

$$\frac{(m-1)a^{n-1}b+(m-2)a^{n-2}cb+(m-3)a^{n-3}c^2b+\cdots\cdots+(m-n)c^{n-1}b}{a^n}$$

$$=\frac{mb}{a}\left(1+\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}+\cdots\cdots+\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

$$-\frac{b}{a}\left(1+2\frac{c}{a}+3\frac{c^2}{a^2}+\cdots\cdots+n\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{m(a^n-c^n)}{a^n}-\left(\frac{a^n-c^n}{a^{n-1}b}-\frac{nc^n}{a^n}\right)$$

と求まる。これが T の期待値である。（これより両者の期待値が等しくなるためにはこの式が0であればよい。）

第23の問題。めくらサイコロの遊び，6つのサイコロがあって第1のには1の目だけ，第2のには2の目だけ，……というような点が打ってあるがその他の5つの面は全部白くなっている。これらを同時に振れば全部の目が出たとき21となり，全部が出ないときは0である。この6つのサイコロを振つたときの期待値を求めよ。ただし0から21までの数に対しては別表（省略）による賞金が与えられるものとする。

（解）これはやはり歳の市で行われた賭の一種である。ヤコブスはすべての場合の数を計算して期待値を求めたが，ここでは省略しておく。

第24の問題。同じ条件の下で，0がつづけて5回でたら最初の賭金を戻すことにすれば，両者の期待値はいくらになるか。

（解）第22の問題の公式を用いる。

## 第　4　部

### これまでの理論の日常の，道徳上の，經濟上の事態への應用

第4部は原文において210頁から239頁までをしめている。これは不幸にも著者によって未完成に残されたものであるが，それにもかかわらず全体のなかで最も重要な部分であると認められている。内容は5章に分けられている。

第1章は事象の確実，確からしさ，必然，偶然に関する始めの注意と題されていて，それらの4つの概念を説明しているが，単なる哲学的な思弁ではないので読みやすい。然しことさらに紹介の必要もない内容である。

第2章は知識と推定，推定の技術，推定の理由，これに属する二三の一般公理と題されている。

確実で疑わしくないものを知識と名づけ，それ以外のものを推定という。事象が推定とよばれるのはその確からしさが計測されるからである。このためには推定又は確からしさの技術（ars conjeotandi sive stochastice）を定めておかねばならぬ。こう述べておいて推定の理出に関する9つの公理を展開している。

第3章は理由の種々の型，事象の確率の計算に対する重さの評価と題されている。

先ず理由は次の3つの場合に分けられるという。理由が必然的に存在して事実が偶然的にしめされるとき，理由が偶然的に存在して事実が必然的にしめされるとき，理由が偶然的に存在して事実が偶然的にしめされるときというように。例えば兄弟から近頃さっぱり手紙がこないというとき，3つの理由が考えられる。無精か，死んでいるか，仕事の故かである。第1の場合には兄弟が無精なことは知っているので，理由は必然的であるが，手紙のこないのは偶然的である。第2の場合には死んでいるかどうか分らないので理由は偶然的であるが，死んでいるとすれば手紙のこないことは必然的である。第3の場合には仕事が多忙かどうかは分らないので理由は偶然的であるが，どちらの場合であっても手紙のこないことは偶然的である。

これによって理由を2つの場合に大別しよう。第1は純粋理由で，これは

いくつかの場合に事実を証明することができるがそれ以外の場合には積極的に証明できない。第2は混合理由で，これはいくつかの場合に事実を証明することができた上にそれ以外の場合にはその反対をも証明できる。

1．理由が偶然的に存在して事実が必然的にしめされるとき。

いま理由が偶然的に存在する場合の数を b，存在しない場合の数を c として，全体を $b+c=a$ としよう。しかるとき b の場合に事実(1)がしめされ，c の場合に事実がしめされないので，重さ(確率)は $\frac{b\cdot1+c\cdot0}{a}=\frac{b}{a}$ となる。即ち事実の理由は $\frac{b}{a}$，事実の確実性は $\frac{b}{a}$ となる。

2．理由が必然的に存在して事実が偶然的にしめされるとき。

いま事実の理由が偶然的にしめされる場合の数を $\beta$，しめされないか又はその反対がしめされる場合の数を $\gamma$ として，全体を $\beta+\gamma=\alpha$ としよう。しかるとき $\frac{\beta\cdot1+\gamma\cdot0}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$ と計算され，これが事実の確実性 $\frac{\beta}{\alpha}$ になる。その上理由が混合のとき*，反対の確実性は $\frac{\gamma\cdot1+\beta\cdot0}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}$ となる。

3．理由が偶然的に存在して事実が偶然的にしめされるとき。

まず存在するのは事実の $\frac{\beta}{\alpha}$ であって，理由が混合のとき反対は $\frac{\gamma}{\alpha}$ である。理由が存在する場合の数を b，存在しない場合の数（しないと証明できる場合）を c とすれば，事実の証明に対してこの理由は，重さ $\frac{b\frac{\beta}{\alpha}+c\cdot0}{a}=\frac{b\beta}{a\alpha}$ を与える。もし混合ならば反対の証明に対して $\frac{b\frac{\gamma}{\alpha}+c\cdot0}{a}=\frac{b\gamma}{a\alpha}$ を与える。

4．理由と事実が数多くある場合にこれらが全部作用した場合の重さを求めよう。

| | |
|---|---|
| | 1，2，3，4，5，…… |
| すべての場合の数 | a，d，g，p，s，…… |
| 証明される場合の数 | b，e，h，q，t，…… |
| 証明されないか又は反対が証明される場合の数 | c，f，i，r，u，…… |

において第1に理由が純粋の場合を考えよう。

理由が1つの場合には，重さは

$$\frac{b}{a}=\frac{a-c}{a}=1-\frac{c}{a}$$

---

* 混合のとき反対を考えることができる。これは今日の余事象にあたる。

理由が2つの場合には，重さは

$$\frac{(d-f)\cdot 1+f\dfrac{a-c}{a}}{d}=\frac{ad-cf}{ad}=1-\frac{cf}{ad}$$

理由が3つの場合には，重さは

$$\frac{(g-i)\cdot 1+i\dfrac{ad-cf}{ad}}{g}=\frac{adg-cfi}{adg}=1-\frac{cfi}{adg}$$

となる。

5．第2に理由が混合の場合を考えよう。

このとき事実の確率と反対の確率の比は beh……: cfi…… なるを以て，事実の確率は $\dfrac{beh\cdots\cdots}{beh\cdots\cdots+cfi\cdots\cdots}$ となり反対の確率は $\dfrac{cfi\cdots\cdots}{beh\cdots\cdots+cfi\cdots\cdots}$ となる。

6．第3に理由が純粋なものと混合なものとがまざっているとき，例えば5つのうちの最初の3つは純粋で残りの2つが混合の場合を考えよう。

4により純粋の場合を一しよにすると事実の重さは $\dfrac{adg-cfi}{adg}$ となり，5により混合の場合を一しよにすると事実の重さは $\dfrac{qt}{qt+ru}$，反対の重さは $\dfrac{ru}{qt+ru}$ となるのでこれを一しよにすると

$$\frac{(adg-cfi)\cdot 1+cfi\dfrac{qt}{qt+ru}}{adg}=\frac{adg(qt+ru)-cfiru}{adg(qt+ru)}=1-\frac{cfiru}{adg(qt+ru)}$$

となる，とヤコブスは解決している。然しこの解は誤であることが後にラムベルトによって指摘された。

7．（省略）

第4章は場合の数が計算される2種のものについてと題されている。内容は今日の言葉でいえば2項分布と大数の法則に相当するベルヌーイの定理である。その計算は次の章でなされている。

第5章は前問題の解と題されている。

まず5つの補助定理を準備して，2項定理の展開に関する次の結論を証明している。

即ちいま $(r+s)^{nt}$ を2項定理によって展開し，t は r+s に等しいものとする。展開された項のなかで最大のものを M とし，M より左にある n個の項と右にある n 項との和を

$$u=L_1+L_2+\cdots\cdots+L_n+M+R_1+R^2+\cdots\cdots+R_n$$

とおく。

この和と展開における残余の項の和との比は n を十分大きくとるといくらでも大きくすることができる。

そこでこの比を c より小さくないようにするには n を次の 2 つの式のうちの大きい方にとればよいという。

$$\frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1)-\log r}\left(1+\frac{s}{r+1}\right)-\frac{s}{r+1}$$

$$\frac{\log[c(s-1)]}{\log(s+1)-\log s}\left(1+\frac{r}{s+1}\right)-\frac{r}{s+1}$$

以上を証明してからこの結論を確率に次のように結びつけている。$(r+s)^{nt}$ の展開における u は，nt 回の試行において事象がおこる回数が $n(r-1)$ と $n(r+1)$ との間（両端を含む）であるとき，すなわち事象の起る回数が全体の回数に対する比が $\frac{r+1}{t}$ と $\frac{r-1}{t}$ との間にあるときの確率に等しい。これにより c をきめたとき，n を前述の2式のうちの大きい方にとれば，事象の起る回数の全体の回数に対する比が $\frac{r+1}{t}$ と $\frac{r-1}{t}$ との間にあるようにきめられる。

例えば $r=30$, $s=20$, $t=r+s=50$ としよう。このとき

$$\frac{r+1}{t}=\frac{31}{50},\quad \frac{r-1}{t}=\frac{29}{50}$$

となるので，$c=1000$ とすれば

$$\frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1)-\log r}=\frac{4.2787536}{0.0142405}<301$$

故に $nt<\left(301\left(1+\frac{20}{31}\right)-\frac{20}{31}\right)50=24728$

$$\frac{\log[c(s-1)]}{\log(s+1)-\log s}=\frac{4.4623980}{0.0211893}<211$$

故に $nt<\left(211\left(1+\frac{30}{21}\right)-\frac{30}{21}\right)50=25550$

それ故 $c=1000$ なるとき試行回数を 25550 にすればよい。これを詳言すれば起る回数の全体の回数に対する比が $\frac{31}{50}$ と $\frac{29}{50}$ との間にあるような可能性が1000対 1 であるようにするには試行を 25550 回行えばよいということになる。なお 1 万対 1 にするには 31258 回，10万対 1 にするには 36966 回の試行を

行えばよいという。

ヤコブスは大数の法則をこのような形式で述べているのである。

以上で第4部を終っているが，実は重要なことが洩れている。それというのは第4章によると大数の法則の逆をヤコブスが知っており，彼自身は逆に用いることをすすめているのに，それを明確に第5章では述べておらないのである。即ち多数回の試行により$\frac{r}{s}$を逆に推測するという問題はあまり深くは論じられなかった。なお大数の法則という名は後年ポアソン（Poisson, 1781—1840）の著書 Recherches sur la probabilité（確率論研究。1837）において与えられたものである。

## 附　　録

「推論法」の241頁から306頁までは1744年に出版された彼の全集に含まれており，内容は級数論なのでここでは省略しておこう。

最後の附録である「テニス遊びの分け前に関する友への手紙」は35頁にわたって述べられているが，これは得点の問題を論じたもので22個の問題が解かれてある。

1.　テニスにおいて先きに4回勝ったものが優勝とする。各回の得点は15点とする。

いまA，B両者の得点がともに45点とする。このときもう1回だけ勝てばよいから A の優勝する期待値（確率）は $\frac{2}{1}$ である。次に A が30点，B が45点のとき，A が勝てばともに45点となるので期待値は$\frac{1}{2}$，負ければ B が優勝するので期待値は 0，それ故 A の期待値は $\frac{1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 0}{2}=\frac{1}{4}$ となる。また A が15点，B が45点のとき，同様にして A の期待値は $\frac{1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot 0}{2}=\frac{1}{8}$ となる。なお A が15点，B が30点のとき，A が勝てばともに30点となり期待値は $\frac{1}{2}$，負ければ15点と45点となるので期待値は$\frac{1}{8}$，それ故 A の期待値は $\frac{1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{8}}{2}=\frac{5}{16}$ となる。このように計算して A，B の種々の得点に対する A の期待値の表を与いている。

2．3．（省略）

4．A, B の技倆が異なっているとき，その比を n:1 とする。この場合に A, B の得点が等しいならば A の期待値 x はいくらになるか。

これを $$\frac{n\cdot\frac{n+x}{n+1}+1\cdot\frac{nx}{n+1}}{n+1}=\frac{n^2+2nx}{n^2+2n+1}$$

故に $$x=\frac{n^2+2nx}{n^2+2n+1}$$ より $$x=\frac{n^2}{n^2+1}$$

と解いている。そして A, B の種々の得点に対する A の期待値の表を与えている。

5．n=2，3，4 のときの表を与えている。

6．前題の表をよく見ることにより技倆が異なるとき，どれ位の差がつくかが分るという。

7．A, B の得点が与えられたとき A の期待値を $\frac{1}{2}$ にするには n を如何に定めたらよいか。

例えば問題 4 の表 4 によると，A が 0，B が45とのき A の期待値は $\frac{n^5}{(n+1)^3(n^2+1)}$ なるを以て

$$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4n^2+3n+1}=\frac{1}{2}$$

を解くとよい。答．n=4.216

8．或るハンディキャップが与えられたとき，A は B の何倍の技倆をもてば公平になるか。

これを詳細に論じているが基本になるのは問題 4 の表 4 である。

9—12．これは 6 から 8 までの問題の応用例で実際の数値が与えられている。

13．技倆が分つている 3 人の競技者 A, B, C がいる。単独の A が 2人組の B, C に対等に対抗できるのはいかなる場合か。

14．4人の競技者 A, B, C, D がいる。A, B の組と C, D の組とが対等に対抗できるのはいかなる場合か。

15．A は B に予め得点を与える程技倆がすぐれているとする。このとき何回勝負をすればその得点の差がなくなって対等になるか。

例えば A は B に45点与えるとする。このとき問題 7 により A は B の

4.216 倍の技倆をもつ。次に0点対0点から勝負に始めるとき A, B の期待値は表4により

$$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{(n+1)^5(n^2+1)}, \quad \frac{15n^3+11n^2+5n+1}{(n+1)^5(n^2+1)}$$

となるのでその比は

$$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{15n^3+11n^2+5n+1}$$

となる。これに n=4.216 を代入すると

$\frac{7114529}{134167}$(=mとおく)になる。そこで問題4によるとAの最初の期待値は $\frac{m^2}{m^2+1}$ であるが，x 回勝負をすると期待値は $\frac{m^{x+1}}{(m^2+1)(m+1)^{x-1}}$ となるので，これが $\frac{1}{2}$ に等しくなるのは

$$x=\frac{\log(m+1)+\log m+\log 2-\log(m^2+1)}{\log(m+1)-\log m}$$

のときである。m の上の値を代入してこの x の値を計算すると $x=38\frac{6686}{81137}$ になる。

16. A は B に予め45点を与える程の技倆の差はあるが，A は0点 Bは15点として勝負を始めたら何回で対等になるか。また B が30点ならば如何。

(解) 0点対15点から勝負を始めるとき A, B の期待値の比は表4により

$$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{10n^4+15n^3+11n^2+5n+1}$$

となるので，これに n=4.216 を代入して $m=\frac{6798590}{450105}$，故に x=12 となる。

次に0点対30点から勝負を始めるとき A, B の期待値の比は表4により

$$\frac{n^6+4n^5+n^4}{6n^4+8n^3+7n^2+4n+1}$$

となるので，これに n=4,216 を代入して $m=\frac{1125963}{263741}$，従つてx=4となる。

17. A が B に予め30点を与える程の技倆の差があるときは如何。また15点ならば如何。

18. 19. ビスク (bisque, 庭球で強い方が弱い方に与える15点のハンディキャップ) の問題を論じている。

20. サーヴの問題

21. Schassen の問題

22．誤まった結論に対する批評

## 附　帯　論　文

最後に序のなかで述べた英訳に附加されている諸論文について述べておこう。即ち書物(3)の内容についてである。

この書物は Francis Maseres によって英語で1795年に出版されたものである。

1. Artis conjectandi pars secunda, continens doctorinam de permutationibus et combinationibus（順列論と組合せ論を含む推論法の第２部）

これは表題通り「推論法」の第２部でそのうちの第１章から第３章までのラテン語原文である。

2．ヤコブス・ベルヌーイの「推論法」と題された優秀な論文の第２部の最初の第３章の飜訳（Maseres の英訳）

これによると Ars Conjectandi とは「偶然による事象に関して確からしい推測をつくる技術」と訳されている。

3．シンプソンの第10番目の論文

これは Thomas Simpson（1710—1761）1740 の年の論文で，内容は等差数列の累乗の和を求めている。

4. ニュートンの二項定理の研究と証明

5. A discourse of combinations, alternations, and aliquot parts. by John Wallis.

これはウォリスの代数書（英語版，1685.）に付属してやはり1685年に出版されたものであるが，ラテン語版（1693）では 485 頁から 529 頁にいれられている。

内容についてはさきに本稿（Ⅰ）Ⅳ「組合せについて」のなかで概要を述べておいた。第４章について一寸補充しておこう。フェルマがウォリスに提出した２つの問題というのは次の通りである。

(1) 立方数であり，しかもその約数（aliquot part）のすべての和が平方数になるものを求めよ。例えば $343=7^3$ の約数の和は $1+7+49+343=400=20^2$

となる。

(2) 平方数であり，しかもその約数のすべての和が立方数になるものを求めよ。

これらについて論じたのち逆にウォリスはフェルマに次の問題を提出している。

(3) 2つの平方数で，その約数の和が一致するものを求めよ。例えば16と25がそれであって約数の和は 16+8+4+2+1=31=25+5+1 となる。

6. Rhonius の代数学（ドイツ語）の Thomas Brancker による英訳(1668) の附録。

この附録に10万以下の奇数の表をかかげ，そのなかに素数と合成因数をしめしている。

7. 直角三角形の辺を表わす有理数
8. 連続せる立方数の階差
9. 与えられた数の立方根の近似計算
10. De Lagny による m 乗根の近似計算
11. Raphson による数字方程式の近似解
12. C. Hutton による1から1000までの数の平方根と逆数に関する表。

## 引 用 文 献

(1) I. Todhunter, A history of the mathematical theory of probability. From the time of Pascal to that of Laplace. (1949) Chelsea Publ.

(2) Jakob Bernoulli, Wahrscheinlichkeitsrechnung (I, II) (III, IV). Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 107. 108 (1899)

(3) James Bernoulli, Doctorine of Permutations and Combinations, and some other useful mathematical tracts. (1795).

(1959. 5. 29.)