PONTO DE VISTA

UTILIZANDO A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA PARA CARACTERIZAR FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL QUE SÃO INVERSAS DE SI MESMAS

Duelci Aparecido de Freitas Vaz[1]
Julio Cezar Saavedra Vasquez[2]

Resumo: *Este artigo resulta de um estudo que investigou as propriedades das funções de uma variável real que são inversas de si mesmas. Começa apresentando casos particulares e na percepção de uma infinidade de soluções que permitiram investigar propriedades interessantes conjecturadas a partir de casos experimentados com o auxílio do software Geogebra. Na formalização dessas propriedades utilizou-se ideias obtidas da visualização e dinamização que o software permite. A experiência mostra que a investigação Matemática com o Geogebra proposta em Vaz (2012) é um critério eficaz para este tipo de trabalho.*

Palavras-chave: *Funções Inversas Reais; Investigação Matemática com o Geogebra; Tecnologias na Educação Matemática.*

Esta Investigação Matemática com o Geogebra começa a partir de uma questão particular que exigia o cálculo de f(f(x)), onde f(x) = - x + 2. A solução evidentemente é dada por f(f(x)) = f(-x+2) = - (-x+2) -2 = x. Assim, percebe-se que f é uma função in-

1 Doutor em educação matemática pela UNESP-RC-SP. Professor da Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás) e do Instituto Federal de Goiás(IFG). duelci.vaz@gmail.com.

2 Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas. Professor do Instituto Federal de Goiás (IFG).

versa de si mesma, que gerou a pergunta: quais as funções reais que são inversas de si mesmas? As investigações iniciais indicaram que a família de funções f(x)= -x +k, k constante real, eram funções que respondia a pergunta inicial.

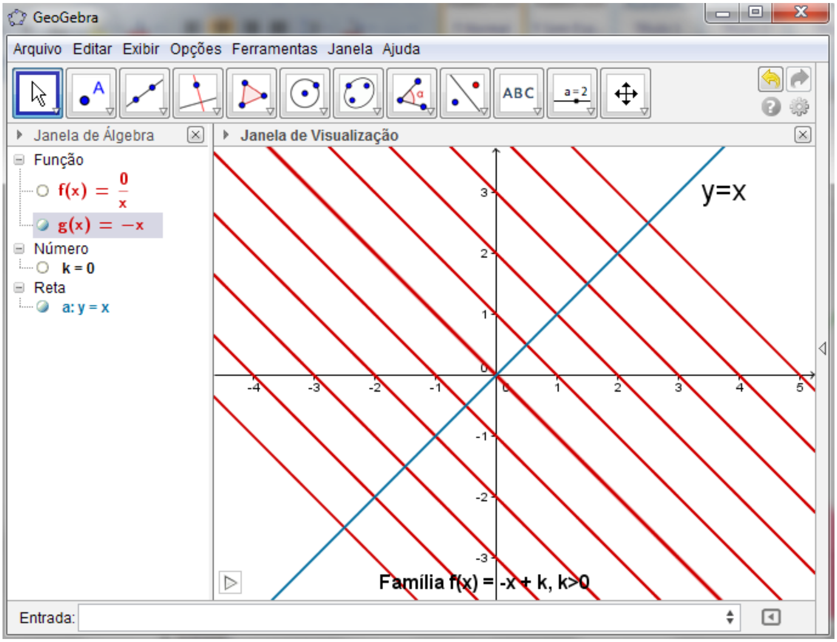

Figura I: Exemplo de uma família de funções que respondem a pergunta

Outra família de funções satisfazendo esta característica é, onde é uma constante real não nula, é exibida nos dois gráficos abaixo.

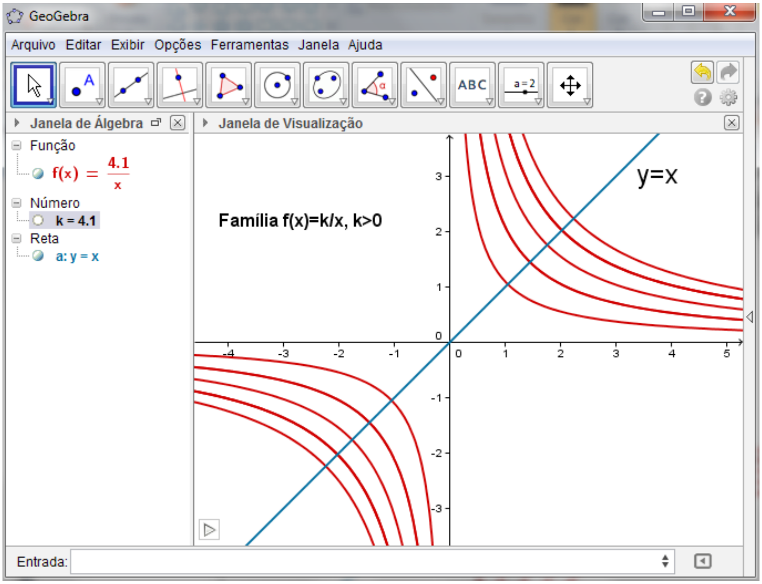

Figura II: Gráfico da família de funções f(x) = k/x, k>0.

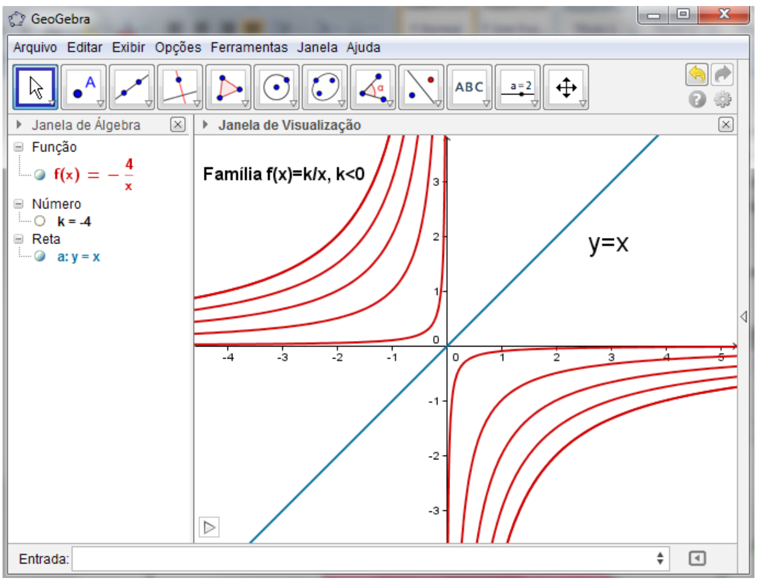

Figura III: Gráfico da família de funções f(x) = k/x, k<0.

Note que cada ramo é simétrico em relação a si mesmo e que para cada k, a função é simétrica em relação à origem e à reta y = x.

Obviamente a função identidade também satisfaz tal questão. Esses exemplos iniciais, juntamente com a propriedade da simetria das funções inversas, foram suficientes para intuir que existe uma infinidade de funções com essa propriedade. Os exemplos iniciais permitiram conjecturar e demonstrar alguns teoremas que passamos apresentar.

TEOREMAS SOBRE FUNÇÕES QUE SÃO INVERSAS DE SI MESMA

Teorema I. Seja f uma função de uma variável real que admite inversa f^{-1} então $f=f^{-1}$ se, e somente se, o gráfico de f, $graf(f)$ é simétrico em relação à reta $y=x$.

Demonstração:

($\rightarrow$) Dado qualquer ponto $(x, f(x)) \in graf(f)$ então $(f(x), x) \in graf(f^{-1}) = graf(f)$, pois se $f=f^{-1}$ logo $(f(x), x) \in graf(f)$, ponto que como sabemos é simétrico em relação à reta $y=x$. Assim para cada ponto $(x, f(x)) \in graf(f)$ existe seu simétrico em relação à reta identidade $(f(x), x) \in graf(f)$, portanto f é simétrica em relação à reta identidade.

($\leftarrow$) Decorre diretamente do fato que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à $y=x$.

Observe-se que esta propriedade nos fornece um critério para construir gráficos de funções com esta característica. Assim os gráficos abaixo, correspondem a funções f tais que $f=f^{-1}$.

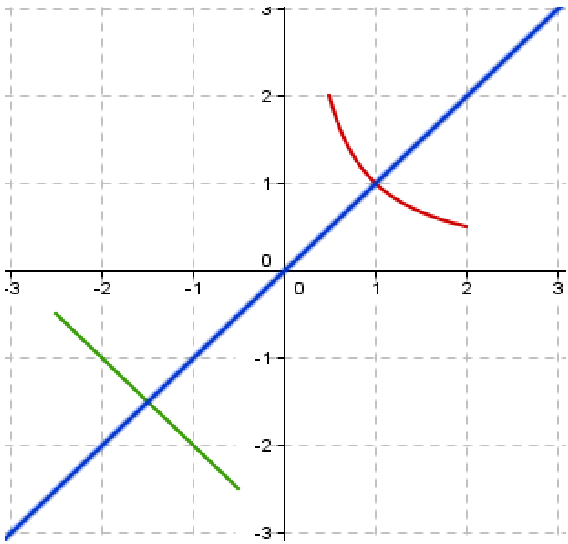

Figura IV: Gráfico de uma função que satisfaz o problema e intersecta a reta y = x.

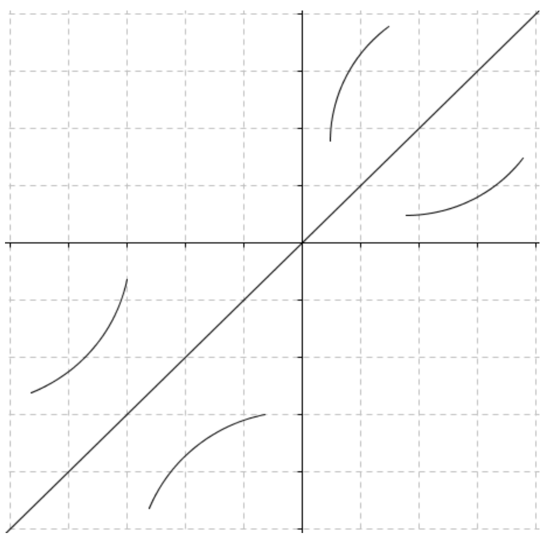

Figura V: Gráfico de uma função que satisfaz o problema, mas não intersecta a reta y = x.

Os gráficos exibidos nas figuras II e III sugerem que este tipo de função é ímpar. Os gráficos das figuras IV e V, contidos nos quadrantes I e III, correspondem a funções que não são impares. Assim, estes gráficos sugerem que este tipo de funções são impares desde que o seu gráfico esteja contido no segundo e quarto quadrantes, tal como é demonstrado no teorema abaixo, mas antes apenas por comodidade denotamos por Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 os quadrantes do plano cartesiano.

Teorema II. Seja f uma função tal que $f = f^{-1}$. Suponhamos que $graf(f)$ esteja contido em $Q_2 \cup Q_4$. Então para cada subconjunto simétrico S contido no $dom(f), f$ é uma função impar.

Demonstração: dado $x \in S$, o qual sem perda de generalidade podemos supor positivo, então $A = (x_o, f(x_o)) \in graf(f) \cap Q_4$ pela simetria do gráfico em relação à reta $y = x, A' = (f(x_o), x_o) \in graf(f) \cap Q_2$ tal como o sugere o gráfico da figura VI. Analogamente segue-se que os pontos $B = (-x_o, f(-x_o)) \in graf(f) \cap Q_2$ e $B' = (f(-x_o), -x_o) \in graf(f) \cap Q_4$. Sejam C e C' os pontos médios dos segmentos AA' e BB' respectivamente então:

$$C = \left(\frac{x_o + f(x_o)}{2}, \frac{x_o + f(x_o)}{2} \right)$$ e

$$C' = \left(\frac{-x_o + f(-x_o)}{2}, \frac{-x_o + f(-x_o)}{2} \right)$$, uma vez que os comprimentos de $0C$ e $0C'$ são iguais, e os pontos O, C e C' são colineares então O éponto médio de

CC' assim: $\frac{-x_o+f(-x_o)+x_o+f(x_o)}{2}=0$, portanto, $f(-x_o)=-f(x_o)$.

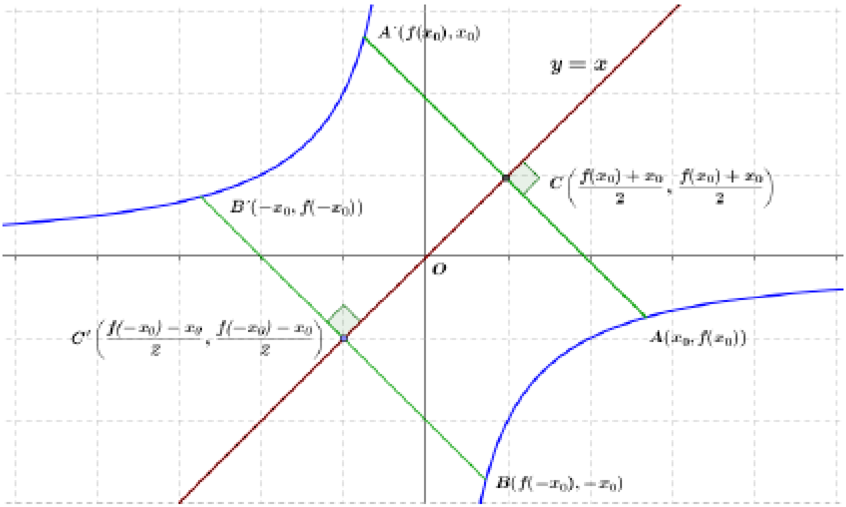

Figura VI: Ilustração do teorema II.

Funções f cujo gráfico está contido em $Q_1 \cup Q_3$, não são necessariamente ímpares. Tal é o caso das funções das figuras IV e V, outro exemplo é considerar a seguinte função por partes:

$$f(x)=\begin{cases} 1/x \; para \; x>0 \\ -x-3 \; para \; -3<x<0 \end{cases}$$

Ao tentarmos investigar o comportamento crescente ou decrescente destas funções, através dos gráficos antes exibidos, observamos que funções deste tipo são decrescentes desde que elas sejam continuas num intervalo contendo um ponto no qual f intersecta a função identidade, tal como reza o teorema

Teorema III. Sejam f uma função tal que $f=f^{-1}$ diferente da função identidade e $x_0 \in dom(f)$ tal que $f(x_0)=x_0$. Seja I_{x_0} $dom(f)$ o intervalo contendo x_0 no qual f é contínua, então f é decrescente em I_{x_0}.

Demonstração: Como $f: I_{x_0} \to R$ é contínua e injetora, então por propriedade f é monótona em I_{x_0}, veja a demonstração em Lima (1999), segue-se então que f é decrescente ou crescente nesse intervalo. Supondo que f seja crescente temos que para todo $x \in I_{x_0}$ com $x<x_0$, $f(x)<f(x_0)=x_0$, dessa forma o gráfico correspondente a este intervalo estaria localizado na região R_1 limitada pela reta $y=x$ e a vertical da $x=x_0$ (a menos que se trate da função $f(x)=x$), por outro lado o reflexo deste gráfico através da reta $y=x$ que também faz parte do $graf(f)$ estaria localizado na região R_1 limitada pela reta $y=x$ e a horizontal da $y=x_0$, mas isto contradiz o fato de f ser uma função. Para os valores de todo $x \in I_{x_0}$ com $x>x_0$, $f(x)>f(x_0)=x_0$ a conclusão é a mesma. Portanto segue-se f que é decrescente em I_{x_0} uma vez que a questão da simetria do seu gráfico não interfere no fato dela ser função, tal como sugere o gráfico em anexo.

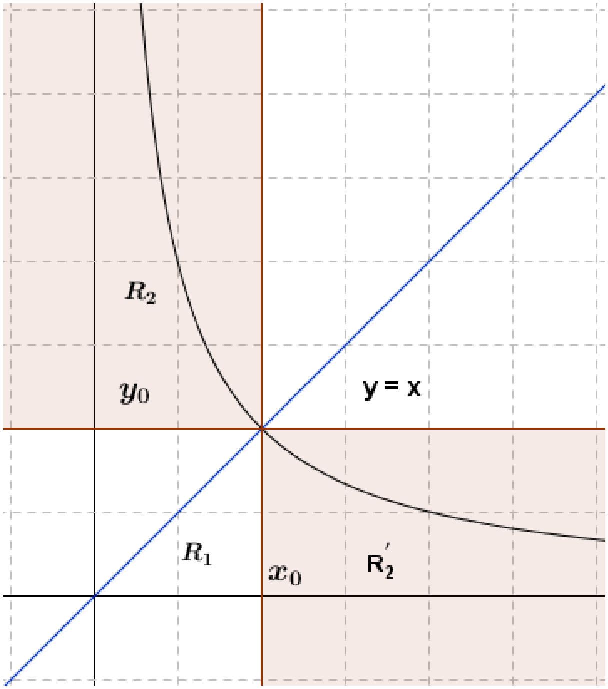

Figura VII: Exemplo de uma função obedecendo as condições do teorema III.

Observação: no caso de f, com $f = f^{-1}$, não sendo contínua em seu domínio de definição permite a possibilidade dela não ser decrescente. Tal como o sugere o gráfico abaixo.

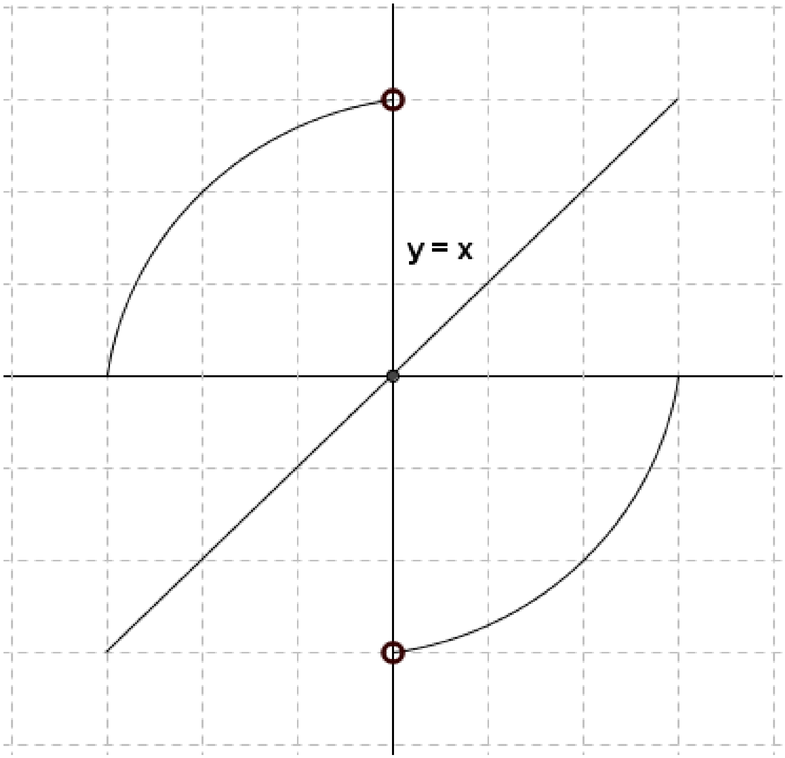

Figura VIII: Exemplo de uma função descontínua na origem, mostrando que para este caso a propriedade não é válida.

Os gráficos das funções das figuras I, II, IV e VII sugerem o seguinte teorema.

Teorema IV. Seja f com as mesmas condições do teorema III. Supondo ainda que f seja derivável em $x_0 = f^{-1}(y_0)$, então o gráfico de f corta a reta $y = x$ no ponto (x_0, x_0) em ângulo reto, i.e, $f'(x_0) = -1$.

Demonstração. De fato se f é derivável em $x_0 = f^{-1}(y_0)$ então f é contínua neste ponto, portanto sua inversa f^{-1} além de ser contínua é derivável em y_0, logo de acordo com o teorema da derivada da função inversa tem-se: $Df^{-1}(y_0) = 1/(f'(x_0))$, onde D indica a derivada da função. Em virtude que $f'(x_0) \neq 0$. Uma vez que $f = f^{-1}$ então $Df^{-1}(y_0) = Df^{-1}(x_0) = f'(x_0)$ desta forma segue-se que: $(f'(x_0))^2 = 1 \rightarrow f'(x_0) = \pm 1$. Uma vez que de acordo com o teorema III, f é decrescente conclui-se que $f'(x_0) = -1$. O gráfico abaixo ilustra essa situação.

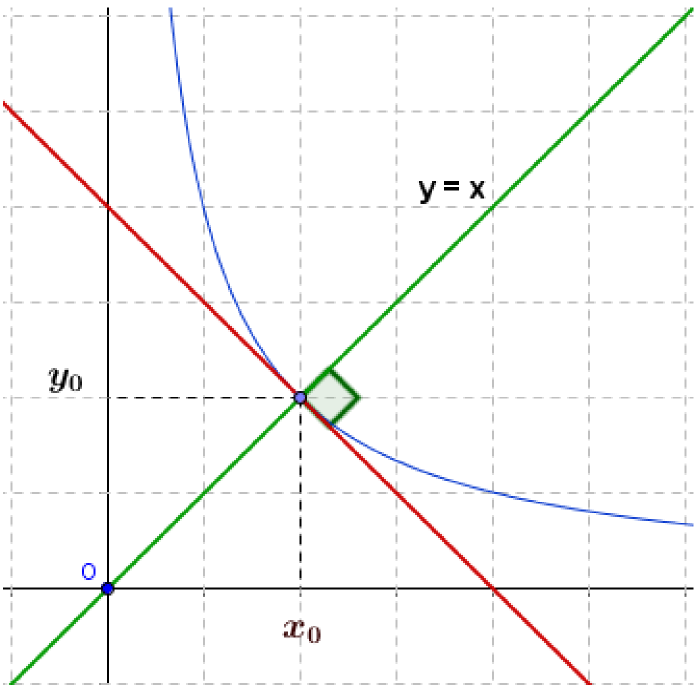

Figura IX: Uma ilustração para o teorema IV.

CONCLUSÃO

Do exposto, notamos que a Investigação Matemática com o *software* Geogebra é importante na releitura de conteúdos elementares, pois permite a descoberta de propriedades que passou despercebida, permitindo a percepção de resultados importantes, mesmo para pessoas com o pensamento matemático maduro. A estrutura do *software,* se bem trabalhada, ajuda-nos a compreender situações através da experimentação possibilitada pela dinâmica que oferece aos objetos matemáticos. Assim, estende nosso olhar possibilitando testar hipóteses, negando-as ou confirmando-as. Caso a hipótese fique confirmada pode-se seguir adiante, buscando formas de formalizá-la. Não resta dúvida que o uso de *software* na educação matemática se torna importante na busca da construção e na produção de conhecimento. Representa possibilidade de trabalhos inovadores na educação matemática, introduzindo a investigação científica mesmo nas séries inicias de nossas escolas.

USING MATH INVESTIGATION WITH GEOGEBRA FOR FEATURING REAL FUNCTIONS INVERSE THEMSELVES

Abstract: *This article results from a study that investigated properties of functions of a real variable which are inverse of themselves. It begins by presenting particular cases and in the perception of an infinity of solutions that allowed investigate interesting properties of these functions. Many of these properties have been conjectured from particular cases experimented with the assistance of Geogebra software. The formalization of these properties was used ideas derived from the view that the software allows indicating ways and showing that mathematics investigation with Geogebra proposal in Vaz (2012) is an effective criterion for this type of work.*

Keywords*: Inverse Real Functions; Mathematics investigation with Geogebra; Technologies in mathematics education.*

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon. **Curso de análise**, vol. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1999.

VAZ, D. A. F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando Investigação Matemática com o Geogebra. **Educativa**, Goiânia, v. 15, n. 1, 2012, p. 39-51.