A BELEZA PELA (NA) MATEMÁTICA

EUDES ANTONIO DA COSTA

Resumo: *os gregos antigos e os romanos tinham um padrão de beleza e a expressavam por meio da divisão áurea, que além de um conceito matemático, é uma expressão de harmonia e beleza. Era usada por diversos povos e culturas em suas construções arquitetônicas. Era a maneira de avaliarem a harmonia, inclusive nos seres vivos, buscavam em suas dimensões uma proporção que se aproximasse da razão áurea.*

Palavras-chave: *padrão, beleza, pitagóricos, poliedros regulares e razão áurea*

A filosofia está escrita neste vasto livro, constantemente aberto diante de nossos olhos (quero dizer o universo) e só podemos compreendê-lo se primeiro aprendermos a conhecer a língua, os caracteres nos quais está escrito. Ora, ele está escrito em linguagem matemática, e seus caracteres são o triângulo e o círculo e outras figuras geométricas, sem os quais é impossível compreender uma só palavra. (Galileu Galilei[1])

A beleza é algo que nos dá prazer, ficamos emocionados ao ouvir uma música que julgamos bela, mudamos nosso estado emocional com uma simples poesia, passamos horas no computador – na internet- escrevendo (esperando ou lendo) um *e-mail* da pessoa amada, perdemos tempo admirando uma flor ou uma simples abelha colhendo o pólen. Quantos minutos em nossa infância foram gastos coletando borboletas: a maior, a mais colorida, a mais bonita; e cigarras: aquela grande, a que canta mais alto. O espanto diante da beleza é algo contagiante.

A matemática também tem suas belezas, nas formas, figuras e sólidos geométricos, nas equações simples e precisas; no entanto, não estamos habituados a admirá-las[2], porque não temos consciência ou conhecimento de tal beleza, e este texto pretende provocar o espanto e a curiosidade pela beleza nesta ciência ou a beleza vista através desta ciência.

Observa-se que não faremos nem estética[3] nem uma matemática-estética[4]. Apenas testaremos a sensibilidade humana, pois elucidaremos a beleza que há na matemática para a apreciação dos leitores e para que julguem segundo conceitos e asserções pessoais, estéticas e/ou filosóficas. Pretendo desenvolver a sensibilidade estética, fazendo com que passem a observar a beleza das formas geométricas que também estão na natureza.

Algumas das referências mais antigas aos prazeres da matemática estão ligadas ao nome de Pitágoras, que observou a ocorrência na natureza de certas combinações e relações entre os números. Para Pitágoras, a explicação da ordem e da harmonia na natureza seria encontrada na ciência (conhecimento – estudo) dos números.

UM POUCO DE HISTÓRIA

A tentativa de usar a matemática para compreender o universo, para ver a harmonia (beleza) no mundo é bem antiga. Na Grécia antiga, houve uma comunidade mística que se dedicou ao estudo da beleza matemática, os pitagóricos. Eles entediam que o "número dirige o universo". Com esta frase queriam dizer que tudo que existe na natureza (mundo-universo) pode ser explicado através dos números naturais.

O espanto, a surpresa diante do novo é algo que nos qualifica como seres racionais, o que gera a vontade e a necessidade de entender, de dar uma explicação àquilo que nos agrada (ou incomoda). Vejamos o que o pitagórico Alcmeão de Cróton[5] escrevia no séc. V a.C.: "O homem distingue-se dos demais (seres) por ser o único que compreende, pois todos os outros percebem, mas não compreendem" (BORNHEIM, 1999, p. 51).

estudos, Goiânia, v. 35, n. 2, p. 187-199, mar./abr. 2008.

Pitágoras de Samos (580/78-497/6 a.C.) pertence mais ao mundo da lenda que à realidade, atingiu o acme de sua existência em torno de 530 a.C., fundou uma espécie de associação de caráter mais religioso que filosófico, cujas doutrinas eram mantidas em segredo. Os ensinamentos não eram escritos, eram transmitidos oralmente e guardados em segredo pelos iniciados. A transgressão desta norma acarretava excomunhão. Segundo seus ensinamentos, o 'sagrado mistério da ciência'[6] tem o seu centro nas matemáticas, no estudo do número, cuja lei domina todas as coisas: nos astros, cujas distâncias, grandezas e movimentos são regulados por meio de relações matemáticas (geométricas e numéricas); nos sons, cujas relações de harmonia obedecem a leis numéricas fixas; na vida e na saúde, que são proporções numéricas e harmônicas de elementos; nos fatos morais entre os quais também a justiça é a proporção etc. Assim concluem eles (os pitagóricos) que os números são entes geométricos e reduzem todas as coisas à unidade e ao ponto (unidade que tem posição), e consideram os elementos do 'número'[7] (limite e ilimitado) como elementos de todas as coisas.

O que se conhece do pensamento pitagórico é baseado em fontes posteriores. Não é possível precisar aquilo que é próprio de Pitágoras e o que é contribuição de seus discípulos. Outro importante membro da escola pitagórica foi Filolau de Crotona (meados do séc. V a.C.), que dizia que todas as coisas têm um número e que sem os números nada se pode conceber ou compreender, ou seja, Filolau de Crotona (1978, p. 249-54) e os pitagóricos apregoavam (e acreditavam) que os números eram a essência de todas as coisas:

> *E realmente tudo que é conhecido tem número; pois nada é possível pensar ou conhecer sem ele.*
> *Com natureza e harmonia, dá-se o seguinte: a essência das coisas, que é eterna, e a própria natureza seguem conhecimento divino e não humano, e seria absolutamente impossível que alguma das coisas existentes se tornasse conhecida por nós, se não existisse a essência das coisas das quais se constitui o cosmos.*

O conhecimento desenvolvido pelos pitagóricos no estudo da acústica mantém-se válido até hoje. Eles descobriram que a altura de um som tem relação com o comprimento da corda que, ao vibrar, o produz. Por exemplo, se dobrarmos o tamanho de uma corda que produz uma nota 'dó', obteremos a mesma nota, mas uma oitava mais grave. Eles ainda identificaram as subdivisões para obter as demais notas.

Crê-se que o estudo dos sons tenha auxiliado Pitágoras a desenvolver a idéia de que o próprio universo estivesse organizado sobre os números e as relações entre eles.

Na matemática, o nome de Pitágoras permanece associado a uma importante relação numérica que demonstrou haver no triângulo retângulo, conhecido como teorema de Pitágoras. O teorema de Pitágoras estabelece que "a área do quadrado relativo à hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados relativos aos catetos".

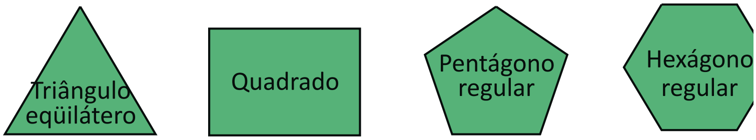
Os pitagóricos deixaram também um fracasso na teoria da medida de grandezas geométricas, ao atribuírem uma dimensão e uma unidade de medida chamada mônada, a qual eles consideravam ser o "menor" segmento, originando um paradoxo quanto ao movimento entre os extremos, fato já detectado por Zenão de Eléia (COSTA, 1999).

POLIEDROS REGULARES

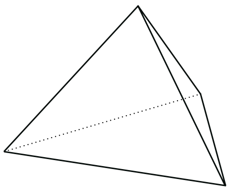
Para treinar nosso senso de beleza em matemática, iniciemos com os poliedros regulares, que fazem parte do estudo (dedutivo) da geometria, desde o início, entre os gregos. Eles possuem uma beleza simétrica que fascinaram os homens em todos os tempos. Alguns poliedros regulares já eram conhecidos dos egípcios[8], que os usavam em sua arquitetura.

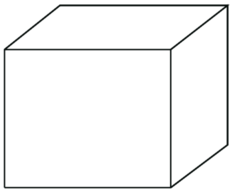
Primeiramente olhemos para um polígono[9]. Sabemos que um polígono tem lados e ângulos, sendo que o número de lados é igual ao número de ângulos. E ainda, um polígono que tem todos os lados de mesmo comprimento e todos os ângulos internos de mesma medida é um polígono regular. É possível construir polígonos regulares com qualquer número n de lados, para $n \geq 3$. É fato que quanto maior for o número de lados, mais a forma do polígono aproxima-se do círculo, que podemos "ver" como um polígono regular de infinitos lados. Vejamos alguns exemplos:

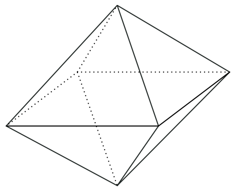
estudos, Goiânia, v. 35, n. 2, p. 187-199, mar./abr. 2008.

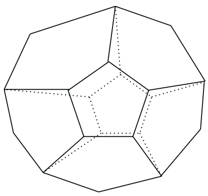


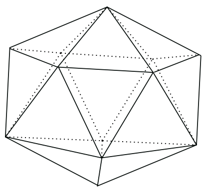
Agora passemos ao poliedro[10]. Um poliedro que tenha como face polígonos regulares, todos idênticos, e que também apresente todos os ângulos internos idênticos entre si é um poliedro regular. Curiosamente só são possíveis as construções de cinco tipos de poliedros regulares (4-tetraedro, 6-hexaedro, 8-octaedro, 12-dodecaedro e 20-icosaedro).


Tetraedro regular


Hexaedro regular


Octaedro regular


Dodecaedro regular


Icosaedro regular

Este fato era conhecido pelos gregos antigos (pitagóricos), que os impressionou de tal forma que atribuíam explicações místicas a ele. São quatro os elementos formadores do universo: terra, ar, água e fogo.

> *Os gregos acreditavam que os cinco sólidos correspondiam aos elementos do Universo – o tetraedro ao fogo, o cubo à terra, o octaedro ao ar, o icosaedro à água e dodecaedro ao universo* (KLAASEN, 1992, p. 58).

O icosaedro e as suas doze faces corresponderiam aos doze signos do zodíaco, por isso era o símbolo do universo. Platão e seus seguidores estudaram os sólidos regulares com tal intensidade que eles ficaram conhecidos como “poliedros de Platão”. Platão construiu sua cosmogonia associando os cinco poliedros regulares aos constituintes fundamentais da natureza.

> *Os poliedros regulares estão presentes na natureza: os três primeiros sob a forma de cristais, e os outros dois como esqueletos de animais marinhos microscópicos. Todavia, sua beleza e simetria é que mantiveram o interesse humano por eles através dos séculos. Não há nenhuma disciplina matemática específica baseada nos cinco sólidos, mas muita coisa importante da matemática foi descoberta como subproduto dos estudos dessas figuras* (KLAASEN, 1992, p. 59).

Foram encontrados, também, modelos de poliedros regulares em civilizações anteriores à grega; o seu fascínio, quer pela harmonia quer pelas propriedades matemáticas, tem inspirado artistas e cientistas até nossos dias.

A RAZÃO ÁUREA

Mais de 500 anos antes de Cristo, os gregos (pitagóricos), estudando as relações entre os segmentos de um pentagrama[11], determinaram um número que desempenha um importante papel na geometria, na estética, nas artes, na arquitetura e na biologia. Este número é chamado de número áureo (número de ouro) ou razão (secção) áurea. A razão áurea, além de um conceito matemático, é uma expressão de harmonia e beleza. Os antigos gregos avaliavam essa harmonia nos seres vivos e não-vivos, buscando em suas dimensões uma proporção que se aproximasse da razão áurea.

Em um segmento de reta, um ponto P determina a divisão áurea (ou a divisão em média e extrema razão) de um segmento de medida a, quando uma de suas partes x é média proporcional, ou geométrica, entre a outra parte a-x e o segmento todo a.

Ou seja, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$ o que equivale a $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. Resolven-

estudos, Goiânia, v. 35, n. 2, p. 187-199, mar./abr. 2008.

do a equação, (considerando x a variável) obtemos:

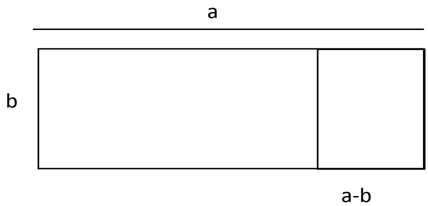
$$x^2 + ax - a^2 = o \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

e $x_2 = \frac{-a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$. Veja que x2 é negativo, o que não nos interessa pela natureza geométrica do problema. E chamando $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$ o número áureo (ou o número de ouro), assim podemos escrever $x_1 = a\phi$.

Por outro lado, fazendo $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{AP}}}$, temos $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{AP}}} = \frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{\overline{AP}}} = 1 + \frac{1}{\lambda}$, o que resulta em $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, isto é, $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ (consideramos apenas o caso em que λ é positivo, visto ser uma medida geométrica). A razão λ é denominada "razão áurea".

Veja que $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\lambda}$

No plano, encontramos a razão áurea no retângulo áureo, um retângulo com a propriedade descrita a seguir. Seja R um retângulo de lados a e b ($b < a$), tal que o retângulo de lados b e a-b seja semelhante ao retângulo R, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$. Resulta que $a - b < b$ e que $\frac{a}{b}$ é a razão áurea, isto é, $\frac{a}{b} = \lambda$.

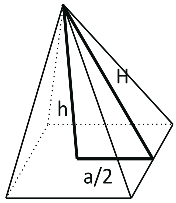


A divisão de um segmento em média e extrema razão já aparece no Livro VI de Euclides e o retângulo áureo é encontrado com freqüência nas esculturas e obras arquitetônicas da Grécia antiga.

O Partenon é um templo grego situado na Acrópole da cidade de Atenas e é dedicado à deusa Atena. É considerado como uma das mais belas construções arquitetônicas da humanidade. Foi construído entre os anos 447 e 432 a.C. Partenon é um dos exemplos mais claro do conhecimento (saber) em geometria por parte dos matemáticos e arquitetos gregos da época. Eles conseguiram um efeito visual perfeito de harmonia que encanta ainda hoje. Isto porque o Partenon, ou templo da deusa Atena, revela em seu frontispício um quase exato retângulo áureo. Todavia, não há evidencias históricas de que, ao construir o templo no 5o século a.C., os arquitetos de Péricles tenham usado conscientemente o retângulo áureo.

Um triângulo retângulo de hipotenusa λ e catetos 1 e $\sqrt{\lambda}$ é denominado de "triângulo áureo". Veja que o nome de triângulo áureo se justifica pela relação $\lambda^2 = \lambda + 1$.

Considere agora uma pirâmide reta (P) de altura h com base quadrada de lado a e H a altura de suas faces. Dizemos que P é uma "pirâmide áurea" quando o triângulo de lados H (hipotenusa), h e $\frac{a}{2}$ (catetos) for um triângulo áureo.



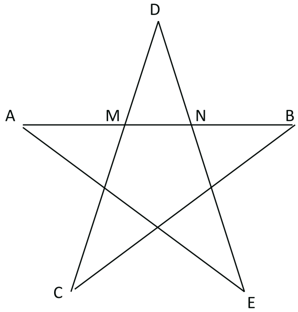
Apenas para mostrarmos a relação entre a matemática grega e a matemática egípcia, e também para nossa surpresa, Saraiva (RPM, vol 48) mostra que a pirâmide de Quéops é uma pirâmide áurea. Mais uma vez ressaltamos que isto não é uma prova histórica de que os Egípcios tenham usado a razão áurea conscientemente, já em 2500 a.C.

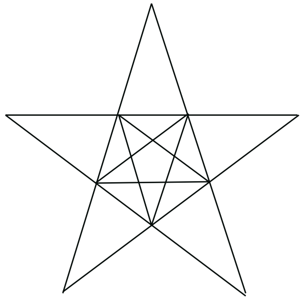
E o *Pentagrama?* O pentagrama, a estrela regular de cinco pontas, era o símbolo do (da seita) pitagóricos.

Na figura abaixo, o lado AB do pentagrama é cortado pelos lados CD e DE nos pontos M e N, respectivamente. As razões

$\frac{\overline{AN}}{\overline{AM}}$ e $\frac{\overline{MN}}{\overline{AM}}$ são áureas, isto é, $\frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} = \lambda$.

Os pitagóricos traziam (tatuagem) o pentagrama na mão. Segundo alguns historiadores, a razão disto é que, além de aparecer a "razão áurea", dentro de um pentagrama tem um pentágono e neste é possível inscrever um outro pentagrama, dentro deste pentagrama outro pentágono, depois outro..., ou seja, aparece a noção de infinito.

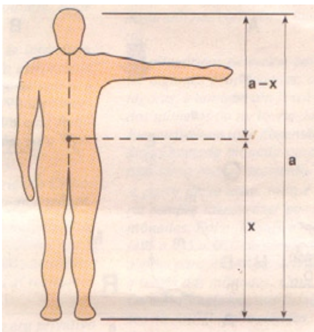




CONCLUSÃO

Não pense que a história do fascinante "número áureo" se inicia no Egito, ou que passa pela Grécia antiga e que termina na idade média. Assim como Egípcios e Gregos, ainda hoje arquitetos e artistas utilizam o retângulo áureo em suas obras, pois o consideram o mais bem proporcionado e de grande valor estético. Veja que o conceito de belo e o senso de harmonia são ludibriados com o número áureo.

A "razão áurea", como dissemos anteriormente, aparece em muitas relações do corpo humano: por exemplo, a razão entre a altura (a) de uma pessoa e a distância do umbigo aos pés (x) é uma razão áurea e $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = \lambda$ (faça você o teste).



Sempre utilizada como padrão na arquitetura clássica, a razão entre a medida da largura e a medida da altura do Parthenon é próxima da razão áurea. Mesmo hoje, escultores modernos utilizam este padrão. Sabe-se que ela, também, se revelou como fator de crescimento de uma população de coelhos, estudada por Fibonacci. Estudiosos de arte dizem ainda que foi usada inúmeras vezes por Leonardo da Vinci em seus desenhos e pinturas.

Para nos inquietarmos, experimente determinar a razão entre as medidas da altura e a largura da porta – e/ou janela – de sua casa, surpreenda-se com um valor próximo do número do número áureo.

Não satisfeito, determine a razão entre a altura da parede do seu quarto (do teto ao solo) e a altura da caixa de tomada da lâmpada elétrica.

estudos, Goiânia, v. 35, n. 2, p. 187-199, mar./abr. 2008.

Encontramos (aproximadamente) o retângulo áureo em uma folha de papel sulfite, em cartões postais e fotos. Para confirmar experimente dividir a medida do maior lado pelo menor, o resultado gira em torno do número áureo. Não vale ficar surpreso com o resultado.

Para terminar, invoco Kepler[12] (1571-1630)

A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma jóia preciosa.

Inicialmente Kepler tentou descrever o percurso dos planetas em torno do Sol, usando os poliedros regulares. Neste sistema, cada planeta percorreria sua órbita numa superfície esférica, com centro no Sol, e cada esfera estaria inscrita num sólido (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) que, por sua vez, estaria inscrito na esfera do planeta seguinte, e assim por diante. Kleper, ao dar uma formulação matemática ao seu sistema solar, teve que abandonar os sólidos regulares e procurar curvas que se adequassem melhor às medidas tomadas das posições do planeta Marte[13], levando-o assim às elipses.

Este último fato nos alerta de que nem tudo que é belo é real ou verdadeiro.

Notas

1 Galileu Galilei (1564-1642) astrônomo e físico italiano, construtor do telescópio, e um dos precursores do heliocentrismo. Galileu viveu o renascentismo Europeu, período em que os intelectuais da época estudaram os gregos.

2 Ao contrário, a matemática é considerada o terror no ensino brasileiro. A matemática é apontada como o "mostro de sete cabeças" na educação brasileira. Ela é considerada a responsável pela maioria das desistências e repetências nas escolas (COSTA, 1997).

3 "Estética: palavra originada do grego *aisthesi*, que significa 'sensibilidade'. Termo emprestado pelo filósofo alemão Baumgarten (1714-1762) para batizar a disciplina Estética – a ciência das sensações ou o estudo sobre a arte e o belo. Modernamente, ela oscila entre ser entendida como ciência ou como filosofia. É um ramo da filosofia que trata da reflexão sobre a experiência artística e as obras de arte" (CORDI et al., 1995, p. 193).

4 “Filosofia das belas artes; ciência que trata do belo, na natureza e na arte”. [Bueno, 1984].

5 Alcmeão nasceu em Cróton, o mais importante centro pitagórico. Atingiu o ápice no início do século V a.C., é considerado um dos principais discípulos de Pitágoras.

6 O aspecto religioso e sagrado que os pitagóricos mantinham, fazendo de ensinamentos científicos(filosófico e matemático) uma doutrina sagrada. O misticismo em torno dos números não é exclusivo dos pitagóricos. Até hoje as pessoas vêem neles qualidades sobrenaturais: 7 é conta de mentiroso, 13 é número de azar... Essa crença deu origem à numerologia.

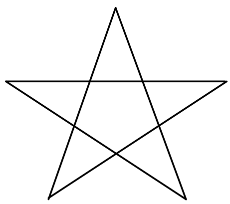
7 O pensamento pitagórico era dualista, pois atribuíam qualidades diferentes aos números pares ou ímpares. Os números pares, por exemplo, eram considerados femininos e os ímpares, com exceção do 1, eram masculinos. O número 1 era o gerador de todos ou outros. O 5 era o símbolo do casamento, por ser a soma do primeiro número feminino, 2, com o número masculino, 3.

8 É consenso entre os historiadores dizerem que a matemática grega deve ter se baseado na matemática dos egípcios e relatam as viagens (entre outras) de Tales de Mileto e do próprio Pitágoras de Samos ao Egito.

9 Polígono é uma figura plana formada por vários ângulos, em grego, *poli* quer dizer muitos (vários), e *gono* quer dizer ângulo.

10 Poliedro é um sólido geométrico com muitas faces, pois *edro (hedra),* em grego, quer dizer face.

11 Pentagrama: pentágono regular estrelado. Símbolo da seita pitagórica.



12 Johannes Kepler (1571-1630), um dos primeiros astrônomos a anunciar que os planetas descrevem órbitas elítipcas em torno do sol, com o sol ocupando um dos focos.

13 As concepções heliocêntrica, com órbitas elipticas, de Kepler fui publicada em 1609, após medições e cálculos realizados em parceria com Tycho Brahe -astrônomo dinamarquês.

Referências

BORNHEIM, G. A. *Os filósofos pré-socráticos.* São Paulo: Cultrix, 1999.

BUENO, F. da S. *Dicionário escolar da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: MEC/FAE, 1984.

CHAUÍ, M. et al. *Primeira filosofia*: lições introdutórias. São Paulo: Brasiliense, 1987.

estudos, Goiânia, v. 35, n. 2, p. 187-199, mar./abr. 2008.

CORDI, C. et al. *Para filosofar.* São Paulo: Scipione, 1995.

COSTA, E. A. da. O homem, a matemática e a calculadora. *Fragmentos de Cultura*. Goiânia, v. 19, 1996.

COSTA, E. A. da. *O* paradoxo de Zenão. *Fragmentos de Cultura*. Goiânia, v. 23, 1997.

COSTA, E. A. da. *Progressão geométrica e o paradoxo de zenão.* In: III Seminário NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. *Anais*... Vitória, v. 1, p. 453-465, 1999.

FILOLAU DE CROTONA. Pré-socrático. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978. (Os Pensadores).

GUELLI, O. *Dando corda na trigonometria.* São Paulo: Ática, 1996.

HUNTLEY, H. E. *A divina proporção*: um ensaio sobre a beleza na matemática. Brasília: Ed. da UnB, 1985.

KLAASEN, D. L. *Polígonos regulares.* In:_____. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. [S.l.]: Atual, 1992. p. 58-60.

MACHADO, N. J. *Poliedros de Platão e os dedos da mão*. São Paulo: Scipione, 1995.

PRÉ-SOCRÁTICOS. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978. (Os pensadores).

SARAIVA, J. C. V. As pirâmides do Egito e a razão áurea. *Revista do Professor de Matemática*, v. 48, [1990].

Abstract: *the ancient Greeks and the Romans had a standard of beauty and expressed through the gold division, which in addition to a mathematical concept, it is an expression of harmony and beauty. Used by many people, and culture in its architectural constructions. It was a way of assessing the line, including those living beings, looking for its size in a proportion that approximates the reason gold.*

Key words: *Standard, Beauty, Pythagoras, Polyhedra regular and Reason gold*

EUDES ANTONIO DA COSTA
Professor da Universidade Federal do Tocantins UFT/Arraias. *E-mail*: eudes@uft.edu.br