Gale の「Kuhn-Tucker の定理」*

戸島　熙

1. 序

$f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1, \dots, m)$ は R_+^n で定義された実数値関数とし

$$\varphi(x, \lambda)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(x)$$

とおく。ここで，λ は λ_j を第 j 成分とする m–vector である。次のような問題を考えよう。

non-linear programming の問題：

$$\max f(x)$$

subject to

$$g_j(x)\geqq 0,\ (j=1, \dots, m),$$

$$x \in R_+^n.$$

saddle point の問題：

$$\varphi(x, \bar{\lambda})\leqq\varphi(\bar{x}, \bar{y})\leqq\varphi(\bar{x}, \lambda)$$

for all $x \in R_+^n$, $\lambda \in R_+^m$

となる $\bar{x} \in R_+^n$, $\bar{\lambda} \in R_+^m$ を求めよ。

もし，saddle point の問題に解 $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ が存在すれば，$\bar{x}$ が non-linear programming の問題の解になることは容易に証明することができる。しかし，その逆は，たとえ，$f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1, \dots, m)$ が concave function であっても，必ずしもなりたたない。Kuhn-Tucker の定理は，これがどのような条件の下でなりたつかをあきらかにするものである。$f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1, \dots, m)$ に微分可能性を仮定しない場合，そのような条件

---

* 原稿受領　1969年10月27日

* この論文は，本年（昭和44年）度の筆者の「管理科学 I」の講義 note の1部分をもとにしてかかれたものである。受講者諸氏の参考になれば幸いである。

として

Slater の条件：$gj(x^0)>0$ $(j=1, \dots, m)$ となる $x^0 \geqq 0$ が存在する。

がよく知られている。**しかし**，これは，$\boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{g_j(x)}$ $(\boldsymbol{j}=1, \dots, \boldsymbol{m})$ **が concave function のとき，non-linear programming の問題が解 $\bar{x}$ をもてば，ある $\bar{\lambda}$ が存在して，$(\bar{x}, \bar{\lambda})$ が saddle point の問題の解となる**十分条件ではあっても，必要条件ではない。微分可能な場合には必要かつ十分条件が見出されているから，(1) 微分可能性を前提としない場合にも，必要かつ十分条件を見出すことには興味がある。

最近，Gale [2] は，この問題を通常の定式化と多少違う形で取扱ったが，われわれは，ここでその結果を上でのべた問題に即して再述してみることにしたい。そのさい，ある命題の成立に必要な仮定は何であるかを明確にするように心がける。

2. 予 備 的 結 果

定義 1. $T=\{(x, y) \mid x \in R_+^n, y=-g(x)+z, z \in R_+^m\}$,

$Y=\{y \mid (x, y) \in T\}$,

$X(y)=\{x \mid x \in R_+^n, g(x) \geqq -y, y \in Y\}$,

$C=\{x \mid x \in R_+^n, g(x) \in R_+^m\}$.

ただし，$g(x)$ は $g_j(x)$ を第 j 成分とする m-vector である。

Lemma 1. $g_j(x)$ $(j=1, \dots, m)$ が concave function ならば，T は convex set である。

証明 $\theta \in [0, 1]$ とする。$(x^1, y^2), (x^2, y^2) \in T$ ならば，$\theta x^1+(1-\theta)x^2 \in R_+^n$ はあきらかである。つぎに

$$y^i=-g(x^i)+z^i \text{ for some } z^i \in R_+^m \quad (i=1, 2)$$

であるから，$g_j(x)$ の convexity により

$$\begin{aligned}\theta y^1+(1-\theta)y^2 &= -[\theta g(x^1)+(1-\theta)g(x^2)]+\theta z^1+(1-\theta)z^2 \\ &\geqq -g[\theta x^1+(1-\theta)x^2]+\theta z^1+(1-\theta)z^2\end{aligned}$$

---

(1) Arrow, Hurwicz and Uzawa [1] をみよ。

となる。ここで，$\varepsilon\in R_+^m$ を適当にえらべば

$$\theta y^1+(1-\theta)y^2=-g[\theta x^1+(1-\theta)x^2]+(\theta z^4+(1-\theta)z^2+\varepsilon)$$

とすることができる。

$$\theta z^1+(1-\theta)z^2+\varepsilon\in R_+^m$$

はあきらかであるから

$$(\theta x^1+(1-\theta)x^2,\ \theta y^1+(1-\theta)y^2)\in T$$

となる。**(証明終)**

Lemma 2. $g_j(x)$ $(j=1, \dots, m)$ が concave function ならば，Y は convex set である。

証明 $\theta\in[0, 1]$ とする。$y^1, y^2\in Y$ ならば，ある x^1, x^2 が存在して，$(x^1, {}^1y), (x^2, y^2)\in T$ となる。この lemma の仮定は lemma 1 のそれと同じであるから，T は convex set である。そこで

$$T\ni\theta(x^1, y^1)+(1-\theta)\ (x^2, y^2)=(\theta x^1+(1-\theta)x^2,\ \theta y^1+(1-\theta)y^2)$$

がなり立つ。したがって

$$\theta y^1+(1-\theta)y^2\in Y$$

となる。**(証明終)**

Lemma 3. $C\neq\phi$ ならば，$0\in Y$ である。

証明 $C\neq\phi$ ならば，ある $x\in R_+^n$ が存在して，$g(x)\in R_+^m$ となる。すなわち

$$-g_j(x)\leqq 0,\ (j=1,\ \dots,\ m).$$

ここで，適当に $z\in R_+^m$ をえらんで

$$-g(x)+z=0$$

とすることができる。このことから

$$(x,\ 0)\in T.$$

ゆえに

$$0\in Y$$

である。**(証明終)**

Lemma 4. $X(y) \neq \phi$.

証明 $y \in Y$ ならば，ある x が存在して

$$(x, y) \in T$$

となるから

$$x \in R^n_+ \text{ かつ } y = -g(x) + z \text{ for some } z \in R^m_+$$

である。よって

$$y \geqq -g(x)$$

すなわち

$$g(x) \geqq -y$$

となる。このことは，$X(y)$ の要素が少なくてもひとつは存在することを示している。
(証明終)

Lemma 5. $(x, y) \in T$ である必要かつ十分条件は $x \in X(y)$ となることである。

証明 $(x, y) \in T \iff x \in R^n_+$, $y = -g(x) + z \in Y$ for some $z \in R^m_+ \iff x \in R^n_+$, $g(x) \geqq -y$ かつ $y \in Y \iff x \in X(y)$. **(証明終)**

定義 2. $\mu(y) = \sup\limits_{x \in X(y)} f(x)$.

Lemma 6. $f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1, \ldots, m)$ が concave function であれば，$\mu(y)$ も concave function である。

証明 まず，この lemma の仮定の下では，T, Y は convex set であることに注意しよう。$\theta \in [0, 1]$ かつ $y^1, y^2 \in Y$ とし

$$\bar{y} = \theta y^1 + (1-\theta) y^2$$

とおく。

(i) $\mu(y^1)$, $\mu(y^2) < \infty$. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$x^i \in X(y^i)$ $(i=1, 2)$ を適当にえらんで

$$f(x^i) \geqq \mu(y^i) - \varepsilon \quad (i=1, 2)$$

とすることができる。ところで，$x^i \in X(y^i)$ ならば

$$x^i \in R^n_+ \text{ かつ } g(x^i) \geqq = -y^i,\ y^i \in Y$$

であるから，$z^i \in R^m_+$ を適当にえらべば

$$x^i \in R^n_+,\ y^i = -g(x^i) + z^i \quad (i=1,\ 2)$$

とすることができる。ゆえに，$(x^i,\ y^i) \in T$ $(i=1,\ 2)$ である。

$$\bar{x} = \theta x^1 + (1-\theta)x^2$$

とおけば，T の convexity から

$$(\bar{x},\ \bar{y}) \in T$$

がなり立つ。よって

$$\bar{x} \in R^n_+,\ g(\bar{x}) \geqq -\bar{y}$$

となる。Y の convexity から，$\bar{y} \in Y$ であるから，このことは

$$\bar{x} \in X(\bar{y})$$

をいみする。そこで，$f(x)$ の concavity により

$$\begin{aligned}\mu(y) &= \sup_{x \in X(\bar{y})} f(x) \geqq f(\bar{x}) \geqq \theta f(x^1) + (1-\theta)f(x^2)\\ &\geqq \theta(\mu(y^1)-\varepsilon) + (1-\theta)(\mu(y^2)-\varepsilon)\\ &\geqq \theta\mu(y^1) + (1-\theta)\mu(y^2) - \varepsilon\end{aligned}$$

をうる。ここで，$\varepsilon \to 0$ とすれば

$$\mu(\theta y^1 + (1-\theta)y^2) \geqq \theta\mu(y^1) + (1-\theta)\mu(y^2)$$

をうる。

(ii) $\mu(y^1)=\infty$ または $\mu(y^2)=\infty$. $\mu(y^1)=\infty$ ならば，どんな $M>0$ に対しても，$x^1 \in X(y^1)$ を適当にえらんで

$$f(x) > M$$

とすることができる。いま，任意の $x^2 \in X(y^2)$ に対して

$$\bar{x} = \theta x^1 + (1-\theta)x^2$$

とおくと，(i) の場合と同様に，$f(x)$ の concavity により

$$\begin{aligned}\mu(\bar{y}) &\geqq f(\bar{x}) \geqq \theta f(x^1) + (1-\theta)f(x^2)\\ &\geqq \theta M + (1-\theta)f(x^2)\end{aligned}$$

となるから，$\mu(\bar{y}) = \infty$ である。**(証明終)**

Lemma 7. non-linear programming の問題に解が存在すれば，$\mu(y)$ は $y=0$ で

定義される。

証明 non-linear programming の問題に解があれば，当然，$C \neq \phi$. よって，$0 \epsilon Y$ であるから，$\mu(0)$ の値は定義される。（**証明終**）

3. Kuhn-Tucker の定理

定理 1. $\bar{x}$ は non-linear programming の問題の解とする。このとき，saddle point の問題が解 $(\bar{x}, \bar{y})$ をもつ必要かつ十分条件は，ある $\bar{\lambda} \epsilon R^m$ があって

$$f(x)-\bar{\lambda}'y \leqq f(\bar{x}) \quad \text{for all } (x, y) \epsilon T$$

がなり立つことである。

証明 必要性．$(\bar{x}, \bar{y})$ が saddle point の問題の解であれば

$$\bar{x} \epsilon R^n_+, \quad \bar{\lambda} \epsilon R^m_+$$

$$\varphi(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leqq \varphi(\bar{x}, y) \quad \text{for all } \lambda \epsilon R^m_+$$

がなり立っているから

$$\bar{\lambda}'g(\bar{x}) \leqq \lambda' g(\bar{x}) \quad \text{for all } \lambda \epsilon R^m_+$$

でなければならない。このことから

$$\bar{\lambda}'g(\bar{x})=0$$

をうる。よって

$$\varphi(x, \bar{\lambda}) \leqq \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{for all } x \epsilon R^n_+$$

は

$$f(x)+\bar{\lambda}'g(x) \leqq f(\bar{x}) \quad \text{for all } x \epsilon R^n_+$$

をいみする。そこで，任意の $z \epsilon R^m_+$ に対して

$$\begin{aligned} f(x)-\bar{\lambda}'[-g(x)+z] &= f(x)+\bar{\lambda}'g(x)-\bar{\lambda}'z \\ &\leqq f(x)+\bar{\lambda}'g(x) \leqq f(\bar{x}) \quad \text{for all } x \epsilon R^n_+ \end{aligned}$$

がなり立つ。これは

(※)　$f(x)-\bar{\lambda}'y \leqq f(\bar{x}) \quad \text{for all } (x, y) \epsilon T$

とかきかえることができる。

十分性．逆に，ある $\bar{\lambda} \epsilon R^m$ があって，(※) がなり立てば

$$f(x)-\bar{\lambda}'[-g(x)+z]\leqq f(\bar{x}) \text{ for all } x\in R^n_+,\ z\in R^m_+$$

となっているから，$\bar{\lambda}\in R^m_+$ である。なぜなら，もし $\bar{\lambda}\notin R^m_+$ ならば，ある j_0 が存在して，$\bar{\lambda}_{j_0}<0$ となるから，$-\bar{\lambda}_{j_0}>0$. そこで，z_{j_0} を十分大きくとれば，ある $x\in R^n_+$, $z\in R^m_+$ に対して

$$f(x)-\bar{\lambda}'[-g(x)+z]>f(\bar{x})$$

とすることができることになる。これは矛盾である。ここで，とくに，$z=0$ とすれば

$$f(x)+\bar{\lambda}'g(x)\leqq f(\bar{x}) \text{ for all } x\in R^n_+$$

をうる。さらに，$x=\bar{x}$ とおけば

$$\bar{\lambda}'g(\bar{x})\leqq 0$$

である。他方，$\bar{x}$ は non-linear programming の問題の解であるから

$$\bar{x}\in R^n_+ \text{ かつ } g(\bar{x})\in R^m_+$$

となっている。よって

$$\bar{\lambda}'g(\bar{x})\geqq 0$$

である。これらから

$$\bar{\lambda}'g(\bar{x})=0.$$

そこで

$$f(x)+\bar{\lambda}'g(x)\leqq f(\bar{x})+\bar{\lambda}'g(\bar{x}) \text{ for all } x\in R^n_+.$$

また

$$f(\bar{x})+\bar{\lambda}'g(\bar{x})=f(\bar{x})\leqq f(\bar{x})+\lambda'g(\bar{x}) \text{ for all } \lambda\in R^m_+.$$

よって

$$\bar{x}\in R^n_+,\ \bar{\lambda}\in R^m_+,$$

$$\varphi(x,\bar{\lambda})\leqq\varphi(\bar{x},\bar{\lambda})\leqq\varphi(\bar{x},\lambda) \text{ for all } x\in R^n_+,\ \lambda\in R^m_+.$$ **(証明終)**

定義 3. $\mu(y)$ が $y=\bar{y}$ で support をもつとは，ある $\xi\in R^m$ が存在して

$$\mu(y)-\mu(\bar{y})\leqq\xi'(y-\bar{y})$$

となることである。

定理 2. $\bar{x}$ は non-linear programming の問題の解とする。このとき，ある $\bar{\lambda}\in R^m$ があって

$$f(x)-\bar{\lambda}'y\leqq f(\bar{x}) \text{ for all } (x,y)\in T$$

がなり立つ必要かつ十分条件は，$\mu(y)$が $y=0$ で support をもつことである。

証明 まず，lemma 7 によって，「$\mu(y)$ が $y=0$ で support をもつ」という命題は無意味でないことを注意しておこう。

十分性．$\mu(y)$ が $y=0$ で support をもてば，ある $\bar{\lambda}\epsilon R^m$ が存在して

$$\mu(y)-\mu(0)\leqq\bar{\lambda}'y$$

がなり立つから，lemma 5 を考えれば，任意の $(x, y)\epsilon T$ に対して

$$\begin{aligned} f(x)-\bar{\lambda}'y &\leqq \sup_{x\epsilon X(y)} f(x)-\bar{\lambda}'y \\ &\leqq \mu(y)-\bar{\lambda}'y\leqq\mu(0) \\ &=\sup_{x\epsilon X(0)} f(x) \\ &=\sup\ \{f(x)\mid x\epsilon R^n_+,\ g(x)\epsilon R^m_+\} \\ &=f(\bar{x}) \end{aligned}$$

となる。

必要性．ある $\bar{\lambda}\epsilon R^m$ があって

$$f(x)-\bar{\lambda}'y\leqq f(\bar{x}) \text{ for all } (x,\ y)\epsilon T$$

となったとすれば

$$f(x)\leqq f(\bar{x})+\bar{\lambda}'y \text{ for all } (x,\ y)\epsilon T$$

であるから，$y\epsilon Y$ を任意に固定するとき，$x\epsilon X(y)$ ならば $f(x)$ は上に有界となり，したがって，$\mu(y)$ は finite である。そこで，任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当に $x\epsilon X(y)$ をえらべば

$$f(x)\geqq\mu(y)-\varepsilon$$

とすることができる。よって

$$\mu(y)-\varepsilon-\bar{\lambda}'y\leqq f(x)-\bar{\lambda}'y\leqq f(\bar{x})=\mu(0)$$

がなり立つ。これをかきかえれば

$$\mu(y)-\mu(0)\leqq\bar{\lambda}'y+\varepsilon$$

となる。ここで，$\varepsilon\to0$ とすれば

$$\mu(y)-\mu(0)\leqq\bar{\lambda}'y$$

がえられる。これは，$\mu(y)$ が $y=0$ で support をもつということである。**(証明終)**

定理 3. $\bar{x}$ は non-linear programming の問題の解とする。このとき，saddle point の問題が解 $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ をもつ必要かつ十分条件は $\mu(y)$ が $y=0$ で support をもつことである。

証明　定理 1 と定理 2 を併せて考えれば，あきらかである。**(証明終)**

Remark　定理 3 では，$f(x)$，$g_j(x)$ $(j=1, \ldots, m)$ に何の条件も課されていないことに注意すべきである。そのいみで，この定理は，きわめて一般的なものである。

4.　Slater の条件との関連

Lemma 6 により，$f(x)$，$g_j(x)$ $(j=1, \ldots, m)$ が concave function ならば，$\mu(y)$ も concave function となる。ところで，concave function が微分可能なら，定義域の任意の点で support をもつが，微分可能でなくても，concave function が定義域の内点において support をもつ[(2)]ことは容易に証明することができる。そこで，$f(x)$，$g_j(x)$ $(j=1, \ldots, m)$ に関する上の仮定の下で，$\mu(y)$ が $y=0$ で support をもつためには，0 が Y の内点であれば十分である。しかし，そのことは一般的には必ずしもなり立たない。次の lemma は，そのひとつの十分条件を示す。

Lemma 8.　Slater の条件がなり立てば，$0 \in \text{int } Y$ である。

証明　Slater の条件がなり立てば

$$g_j(x^0)>0, \ (j=1, \ldots, m)$$

となる $x^0 \geqq 0$ が存在するから

$$g_j(x^0)>z_j \geqq 0$$

をみたす z_j に対しては

$$y_j \equiv -g_j(x^0)+z_j<0, \ (j=1, \ldots, m)$$

となる。よって，Y は十分小なる $\varepsilon>0$ に対する 0 の ε-近傍を含む。したがって，0 は Y の内点である。**(証明終)**

(2)　1 変数の concave function は定義域の内点で連続で，かつ，左および右の微係数をもつということは，初等解析学ではよく知られている事柄である。

定理 4. **(Kuhn-Tucker)** $f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1, \ldots, m)$ は concave function とする。さらに，Slaterの条件がなり立つとする。このとき，non-linear programming の問題が解 $\bar{x}$ をもてば，ある $\bar{\lambda}$ が存在して，$(\bar{x}, \bar{\lambda})$ は saddle point の問題の解である。▮

証明　定理3と lemma 8 を考え併せれば，あきらかである。（**証明終**）

引　用　文　献

[1]　Arrow, K. J., L. Hurwicz and H. Uzawa, "Constraint Qualifications in Maximization Problems," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 8, No. 2 (June, 1961), pp. 175-191.

[2]　Gale, D., "A Geometric Duality Theorem with Economic Applications," *Review of Economic Studies*, Vol. XXXIV (1), No. 79 (January, 1967), pp. 19-24.