Joint Production を含む Neo-Classical Growth (2)*

戸島　熈
若林信夫

目　　次

1. 序 ——2部門 model vs. 2財 model——

2部門 model から2財の production-possibility frontier（以下，P-P F と略記する）を導くことは容易にできる。[(1)] この P-P F のいくつかの性質は，例えば，戸島[10]，若林[11]などによって論じられた。ところで，逆に，P-P F が与えられても，これが直ちに2部門 model をいみしないことは明らかであろう。このことに関して Samuelson [3] は，各財がそれぞれの産業で分離して生産される時に，P-P F がどのような条件をみたさなければならないかを一般的に論じて，non-joint production の fundamental singularity theorem を証明した。この定理によると，P-P F が joint production を含まないならば，P-P F をあらわす関数の2次偏導関数からなる Jacobian matrix の rank はたかだか生産要素の数から1をひいたものに等しい。いま，このことを2部門 model に即していえば，P-P F をあらわす関数の Hessian matrix の rank が1であることが，non-joint production，すなわち，2部門 model

* 原稿受領 1970年5月8日
(1) 以下，P-P F は per capita の term で考えられている。

の必要条件である。このことはまた Hessian matrix の 2×2 の首座小行列は singular でなければならないといいかえることができる。(2)

さて，経済成長との関連で2部門 model が扱われる場合に問題にされるのは主として次の2点である。(1) 生産要素が所与の時，2部門 model に均衡解が存在するか？ すなわち，需要と供給がある価格の下で均等することは可能であろうか？ (2) 任意の生産要素比率から出発する growth path は生産要素比率が一定で，従って経済はただその scale だけを増大して行く，いわゆる balanced growth の path に次第に接近して行くであろうか？ ところで，これらの問題では，いずれも2財の転形関係のみが本質的に必要とされるのであって，生産が2部門で分離されて行われているかどうかということは議論の本質とは必ずしも関係がないのである。すなわち，2部門 model は必ず P-P F を規定するから，上記の問題(1)は P-P F の上に，その点の限界転形率で評価した産出額と需要額が等しくなるような点が存在するか否かということに帰着する。ここで，需要額は貯蓄関数をどのように考えるかに依存して変るが，この論文で採用される貯蓄関数に関する仮定については後にふれる。(3) Uzawa [7] は始めに Robinson 的な貯蓄関数を考えたが，後には Keynes 的なそれを考えた。P-P F は生産要素比率が変化すればそれに従って shift するが，生産要素比率は投資財産出量に依存する資本量の成長率が労働の成長率と等しくない限り変化する。そこで，P-P F 上の産出額と需要額が等しい点で生産が行われても，一般には P-P F は shift することになるが，上記の問題(2)はこの shift によって P-P F がある P-P F に向って漸近して行くか否かを問うものに他ならない。(4) このように2部門 model における経済成長の分析は「2財の転形関係」のみが議論の基礎となる。こうした観点からいえば，2財の転形関係の特殊な場合にしかすぎない2部門 model に，2財に関する経済成長の議論を局限してはならないであろう。より一般には，上でのべたような2部門 model との関連を認識しつつ，2財の転形関係を規定する P-P F から議論を出発させるべきである。戸島 [9] は貯蓄関数に特殊な仮定をおいたが，そのような線にそった議論を展開した。

(2) 戸島 [9, p.63] は2部門 model について，たしかにこの条件がなり立っていることを示して，これは「non-jointness を示すものに他ならない」とかいたが，これは実は，singularity が2部門の必要条件であることからいえば，多少 misleading である。正しくは「2部門でないことをいみしない」，すなわち，「joint production をいみしない」というべきであった。

(3) 戸島 [10, pp.51-52] は Keynes 型の貯蓄関数を前提にした場合のこの問題の具体的呈示を行っている。

(4) 戸島 [10, p.58] の説明も参照せよ。

Samuelson [4] は Solow [6] の 1 部門 model の類比から two-sector canonical model として，実際には，一般的な転形関係を示す P-P F について議論を展開しているが，必ずしも，2 部門 model が 2 財の転形関係の special case であることを明瞭に意識して理論を一般化しようとしてはいないようである。他方，Uzawa [8] の論文に対する comment において，McFadden は戸島 [9] と同様な model 設定を行なっているが，2 部門 model との論理的関連が明らかにされていない点では Samuelson [4] と軌を一にすると考えられる。また，Shell, Sidrauski, Stiglitz [5] も，多少異った文脈で，2 部門 model を P-P F に関連させて議論しているが，これに対しても上記の 2 つの場合と同じ評言があてはまるであろう。Inada [1] は，はっきり joint production を排除しない case として，P-P F から出発する議論を展開しているが，やはり 2 部門 model との論理的関連が戸島 [9] におけるようにはつけられていない。

なお，ここで消費財部門の capital / labor ratio が投資財部門のそれよりも大であるという capital intensity hypothesis が P-P F では何をいみするかについてのべておこう。戸島 [10] が証明したように，2 部門 model においては，capital intensity hypothesis がなり立つ必要かつ十分条件は限界転形率，すなわち P-P F の接線の勾配の絶対値が，生産要素比率の増加に従って P-P F が shift して行く時に，投資財産出量が一定ならば，次第に増加して行くことである。すなわち，capital intensity hypothesis は P-P F の shift の態様を規定するものに他ならない。これはやや異った形としては Rybczynski [2] の定理として定式化されることもある。そこで，P-P F から議論を出発させる場合に，P-P F の shift の態様について，限界転形率が上の条件の下で，増加して行くことが仮定されても，それは十分な合理性をもつことになるであろう。

この論文は戸島 [9] でおかれていた貯蓄関数に関する特殊な仮定をより一般的な仮定におきかえた model を考えて，同論文の諸命題がそのように拡張された model についても同様になり立つことを示す。従って，この論文は戸島 [9] の前半の部分の一般化を図るものである。以下，**2** では model を構成し，**3** では短期均衡の存在を証明し，**4** ではその均衡点が安定的であることを示し，**5** では balanced growth path が存在すれば，その path は大域的に安定的であることを証明する。

2. model と仮定

資本 K と労働 L によって，2種類の財，消費財 C と投資財 I が生産されるものとし，2財の転形関係を P-P F によって

(1)　$C=F(I, K, L)$

とあらわす。ここで，実数値関数 F について次の仮定をおく。

(2)　$F \in C^2[R^3_+]$,

(3)　$F(0, K, L)>0$ for $K>0$, $L>0$,

(4)　$\lambda C=F(\lambda I, \lambda K, \lambda L)$ for $\lambda>0$,

(5)　$\dfrac{\partial F}{\partial I}<0$,

(6)　$\dfrac{\partial F}{\partial K}>0$,

(7)　$\dfrac{\partial F}{\partial L}>0$,

(8)　$\dfrac{\partial^2 F}{\partial I^2}<0$,

(9)　$\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0$,

(10)　$\dfrac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}<0$.

(2)は F が R^3 の非負象限で定義された実数値関数でかつ連続2回微分可能であることを示す。(3)は投資財を生産しない時の消費財産出量は正であることをいみする。(4)は F が正値1次同次，すなわち，規模に関して収獲不変であることをいみする。(5)—(9)は通常の neo-classical な仮定で，資本の限界生産力は正でかつ逓減的であることなどをいみする。(5) (10)は2部門 model の capital intensity condition のわれわれの model における表現である。(4)により，$L>0$ ならば，(1)は

$$C=LF\left(\frac{I}{L}, \frac{K}{L}, 1\right)$$

---

(5) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$ は仮定しなくてもよい。なぜなら，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=\left(\frac{K}{L}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}+\left(\frac{I}{L}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial I^2}+\left(\frac{K}{L}\right)\left(\frac{I}{L}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial I \partial K}$$

であるから，(8)-(10)から $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$ がなり立つ。

$$\equiv Lf\left(\frac{I}{L}, \frac{K}{L}\right)$$

とかくことができる。ここで

$$c=\frac{C}{L}, \; i=\frac{I}{L}, \; k=\frac{K}{L}$$

とおけば，(1)は

(11) $c=f(i, k)$

となる。(3)により

(12) $f(0, k)>0 \quad \text{for } k>0$

である。(5)—(10)は次の条件と同等である。

(13) $f_i\equiv\dfrac{\partial f}{\partial i}<0,$

(14) $f_k\equiv\dfrac{\partial f}{\partial k}>0,$

(15) $c-if_i-kf_k>0,$

(16) $f_{ii}\equiv\dfrac{\partial f_i}{\partial i}<0,$

(17) $f_{kk}\equiv\dfrac{\partial f_k}{\partial k}<0,$

(18) $f_{ik}\equiv\dfrac{\partial f_i}{\partial k}<0.$

次に，貯蓄に関する仮定をのべよう。戸島 [9] では，労働者は貯蓄せず，資本家は消費しないという極端な case が扱われたが，この論文では，労働者も資本家もそれぞれ賃銀所得と rental 所得の一定割合を貯蓄するものと考える。ただし，その割合は資本家のそれの方が小さくないと仮定する。より厳密には，s_w, s_r をそれぞれ労働者の貯蓄係数，資本家の貯蓄係数をあらわすものとすれば

(19) $0\leqq s_w\leqq s_r\leqq 1$ (ただし，$0<\dfrac{s_w+s_r}{2}<1$ とする)

と仮定する。いま，W を賃銀所得，P を rental 所得，S を貯蓄とすれば

$$S=s_wW+s_rP$$

となる。戸島 [9] の case は，$s_w=0$, $s_r=1$ の場合になり，Keynes 型の貯蓄関数は，$s_w=s_r\equiv s$, すなわち

$$S=s(W+P)$$

の場合ということになる。よって，(19)は戸島［9；10, p. 25］を special case として含むより一般的な貯蓄行動を反映するものである。なお，$0<\frac{s_w+s_r}{2}<1$ であるから，$s_w=s_r$ の時は

(20)　$0<s_w=s_r<1$

でなければならない。

そこで，われわれの model は次のように構成される。

(1)　$C=F(I,\ K,\ L)$,

(21)　$\frac{P_1}{P_2}=-\frac{\partial F}{\partial I}$,

(22)　$r=P_2\frac{\partial F}{\partial K}$,　$w=P_2\frac{\partial F}{\partial L}$,

(23)　$P_1I=s_w\cdot wL+s_r\cdot rK$.

ここで，P_1，P_2 はそれぞれ投資財，消費財の価格をあらわし，w, r はそれぞれ賃銀率，rental 率をあらわす。(21)は限界転形率（機会費用）と価格比の均等を示している。(22)は周知の限界生産力に関する条件である。(23)は投資・貯蓄均等，従って，需給均等を示している。いま，$p=\frac{P_1}{P_2}$とおく。(1)，(21)—(23)はいずれも per capita の term で表現することができるので，結局，われわれの model は次のようにかくことができる。

(11)　$c=f(i,\ k)$,

(24)　$p=-f_i$,

(25)　$p\cdot i=s_rkf_k+s_w(c-if_i-kf_k)$.

3. 短 期 均 衡

さて，k を任意の正の値に固定した時に，(11)，(24)，(25)に均衡解が存在するであろうか？　まず，次の lemma を証明することから始めよう。

Lemma 1.　(12)，(13)，(14)，(16)がなり立っているとする。この時，任意の $k^*>0$ に対して

(26)　$f(i,\ k^*)=0$

は一意な正の解をもつ。

証明. (13)，(16)により，$f(i,\ k^*)$ は concave でかつ減少関数であるから，(26)は必ず一意な解をもつ。(12)により，$f(0,\ k^*)>0$ であるから，(13)と併せ考えれば，この解は正でなければならない。**(証明終)**

以下，(26)の解を m とし，k^* を所与の任意の正数とする。いま

$$\underline{p}=-f_i(0,\ k^*),\ \overline{p}=-f_i(m,\ k^*)$$

とおけば，(13)がなり立てば

$$0<\underline{p},\quad 0<\overline{p}$$

である。

Lemma 2. (16)がなり立っているとする。この時

$$\underline{p}\leqq p\leqq\overline{p}$$

であれば

(27) $p=-f_i(i,\ k^*)$

は一意な解 $i=i(p)$ をもち

$$\frac{di}{dp}>0$$

となる。

証明. (16)により，$-f_i(i,\ k^*)$ は単調増加関数であるから，$\underline{p}\leqq p\leqq\overline{p}$ なる p に対して，(27)がなり立つような i は一意に存在する。また，陰関数の定理によって

$$\frac{di}{dp}=-\frac{1}{f_{ii}}>0$$

である。**(証明終)**

以下，(27)を i についてといた解を $i(p)$ とかき，(13)，(16)がなり立っている時に

$$\underline{p}\leqq p\leqq\overline{p}$$

なる p に対して

$$E(p)=s_rk^*f_k(i(p),\ k^*)+s_w\{f(i(p),\ k^*)-i(p)f_i(i(p),\ k^*)$$
$$-k^*f_k(i(p),\ k^*)\}-pi(p)$$

という関数を定義しよう。[(6)] $E(p)$ は(2)により連続微分可能な関数である。

Lemma 3. (12)，(13)，(14)，(15)，(16)，(19)がなり立っているとする。この時

$$E(\underline{p})>0 \quad かつ \quad E(\overline{p})<0$$

となる。

証明. (12)，(14)，(19)から

$$E(\underline{p})=(s_r-s_w)k^*f_k(0,\ k^*)+s_wf(0,\ k^*)>0$$

---

(6) (13)により 0 は $E(p)$ の定義域に含まれないことに注意すべきである。

となり，他方，(14)，(15)，(19)から

$$E(\bar{p})=mf_i(m,\ k^*)-s_wmf_i(m,\ k^*)+(s_r-s_w)k^*f_k(m,\ k^*)$$
$$\leqq(1-s_w)\{mf_i(m,\ k^*)+k^*f_k(m,\ k^*)\}<0$$

となる。(**証明終**)

Lemma 4. (12)，(13)，(14)，(15)，(16)，(19)がなり立っているとする。この時，ある $p^*>0$ が存在して

(28)　$E(p)=0$

を満足する。

証明. $E(p)$ は連続関数であるから，lemma 3 と中間値の定理により，開区間 $(\underline{p}, \bar{p})$ に(28)がなり立つような p^* が少くとも 1 つ存在する。(13)により，$\underline{p}>0$ であるから，当然に $p^*>0$ である。(**証明終**)

Lemma 5. (13)，(16)，(18)，(19)がなり立っているとする。この時，$E(p)$ は減少関数となる。

証明. $E(p)$ を微分すれば

$$\frac{dE}{dp}=-\left\{p\frac{di}{dp}+(1-s_w)i(p)-(s_r-s_w)k^*f_{ki}\frac{di}{dp}\right\}<0$$

となることから明らかである。(**証明終**)

Lemma 6. (13)，(16)，(20)がなり立っているとする。この時，$E(p)$ は減少関数となる。

証明. $s=s_w=s_r$ とおく。

$$\frac{dE}{dp}=-\left\{p\frac{di}{dp}+(1-s)i(p)\right\}<0$$ (**証明終**)

Lemma 7. (12)，(13)，(14)，(15)，(16)がなり立っているとする。さらに，次の条件 (i)，(ii) のいずれかがなり立つものとする。

(i)　(18)，(19)がなり立つ。

(ii)　(20)がなり立つ。

この時，一意な $p^*>0$ が存在して(28)を満足する。

証明. この lemma の仮定の下で，lemma 5, 6 により，$E(p)$ は減少関数であるから，lemma 4 と併せ考えれば，(28)には一意の正の解が存在する。(**証明終**)

定理 1. (12)，(13)，(14)，(15)，(16)がなり立っているとする。さらに，次の条件 (i)，(ii) のいずれかがなり立つものとする。

(i) (18), (19) がなり立つ。

(ii) (20) がなり立つ。

この時, k を任意の正の値 k^* に固定すれば, (11), (24), (25) をみたす一意な解 (c^*, i^*, p^*) が存在して

$$c^*>0,\ i^*>0,\ p^*>0$$

となる。

証明. この定理の下では, lemma 4 により, (28) を満足する, ある $p^*>0$ が存在するから, これに対して

(29) $i^*=i(p^*)$,

(30) $c^*=f(i^*, k^*)$

と定義すれば, (27) は

(31) $p^*=-f_i(i^*, k^*)$

となり, (28) は

(32) $p^*i^*=s_r k^* f_k(i^*, k^*)+s_w\{f(i^*, k^*)-i^*f_i(i^*, k^*)-k^*f_k(i^*, k^*)\}$

とかきかえられる。(29), (31), (32) は (c^*, i^*, p^*) が (11), (24), (25) の解であることを示している。Lemma 6 により, p^* は一意であるから, i^*, c^* も一意である。また, lemma 4 の証明から $\underline{p}<p^*<\overline{p}$ であるから, $\underline{p}$, $\overline{p}$ の定義と (12) を併せ考えれば, $i^*>0$, $c^*>0$ となることは明らかである。**(証明終)**

定理1は Keynes 型の貯蓄関数が仮定される時, 2財の P-P F が concave でかつ減少関数であれば, 一意な均衡解が存在することを示している。このことを2部門に即していえば, Keynes 型の貯蓄関数が仮定される時は, capital intensity condition がなくても一意な均衡解が存在するということである。なお, $s_w \neq s_r$ の場合であっても, lemma 4 から明らかなように均衡解の存在だけならば (18) を仮定しなくてもよい。一般に (18) がなり立てば, $\dfrac{dE}{dp}<0$ となるから均衡解は一意となる。しかし, (18) は $\dfrac{dE}{dp}<0$ の十分条件ではあるが, 必要条件ではない。

4. 模 索 過 程

定理1は neo-classical な条件の下において, (11), (24), (25) であらわされる system に市場均衡が存在することを保証しているが, この均衡は果して安定的であろうか？ この問題に答えるために, 前節で定義した関数 $E(p)$ を考えてみよう。$E(p)$ は $\underline{p} \leqq p \leqq \overline{p}$

なる p に対して定義されていたが，ここでは，$E(p)$ をすべての $p\geqq 0$ に対して定義が行われるように拡張することをこころみる。そこで

$$j(p)=\begin{cases}0 & \text{if } 0\leqq p<\underline{p},\\ i(p) & \text{if } \underline{p}\leqq p\leqq\overline{p},\\ m & \text{if } \overline{p}<p\end{cases}$$

という関数を定義する。$j(p)$ は $p\geqq 0$ に対する投資財の供給 schedule をあらわすと解釈することができよう。すなわち，$\underline{p}\leqq p\leqq\overline{p}$ ならば投資財の供給量はその供給（生産）に伴う機会費用（限界転形率）と p が等しくなるように定められる。$0\leqq p<\overline{p}$ なら，価格は機会費用を下廻るから，投資財の供給は全く行われない。逆に，$\overline{p}<p$ なら，価格は機会費用を上廻るから，投費財は可能な最大量，すなわち，m だけが供給される。このような供給 schedule をあらわす $j(p)$ を用いて，あらためて

$$\overline{E}(p)=s_r k^* f_k(j(p),\ k^*)+s_w\{f(j(p),\ k_*)-j(p)f_i(j(p),\ k^*)$$
$$-k^* f_k(j(p),\ k^*)\}-pj(p)$$

と定義すれば，これは前節で定義された $E(p)$ の定義域をすべての $p\geqq 0$ に拡張したものになっていることは明らかであろう。すなわち

(33) $$\overline{E}(p)=\begin{cases}E(\underline{p}) & \text{if } 0\leqq p<\underline{p},\\ E(p) & \text{if } \underline{p}\leqq p\leqq\overline{p},\\ E(\overline{p}) & \text{if } \overline{p}<p\end{cases}$$

となっている。さて

$$s_r k^* f_k(j(p),\ k^*)+s_w\{f(j(p),\ k^*)-j(p)f_i(j(p),\ k^*)-k^* f_k(j(p),\ k^*)\}$$

は，$j(p)$ だけの投資財生産が行われる時に生ずる投資財需要額であるから，$\overline{E}(p)$ は投資財に対する超過需要額をあらわすものとみることができる。従って，$p>0$ に対して，$\dfrac{E(p)}{p}$ を考えれば，これは投資財の超過需要関数に他ならない。いま，投資財価格 p は超過需要が正であれば上昇し，負であれば下落すると考えれば，この模索過程は

(34) $$\dot{p}=\frac{\overline{E}(p)}{p}$$

という微分方程式によってあらわすことができるであろう。[7]

---

(7) sign preserving な monotone 関数 H を考えて

$$\dot{p}=H\left(\frac{\overline{E}(p)}{p}\right)$$

としても，以下の議論は変らない。

Lemma 8. (12), (13), (14), (15)がなり立っているとする。さらに，次の条件 (i), (ii) のいずれかがなり立つものとする。

(i) (18), (19)がなり立つ。

(ii) (20)がなり立つ。

この時，(11), (24), (25)をみたす一意な解 $(c^*, i^*, p^*)>0$ が存在して

$$\frac{\bar{E}(p)}{p}>0 \quad \text{if } 0<p<p^*,$$

$$\frac{\bar{E}(p)}{p}=0 \quad \text{if } p=p^*,$$

$$\frac{\bar{E}(p)}{p}<0 \quad \text{if } p>p^*$$

がなり立つ。

証明. Lemma の帰結の前半は定理 1 と同じである。後半は(33)と lemma 3, 4, 5, 6 からあきらかである。(**証明終**)

定理 2. (12), (13), (14), (15)がなり立っているとする。さらに，次の条件 (i), (ii) のいずれかがなり立つものとする。

(i) (18), (19)がなり立つ。

(ii) (20)がなり立つ。

この時，(11), (24), (25)をみたす一意な解 $(c^*, i^*, p^*)>0$ が存在して，(34)の任意の正の初期条件に対する解を $p(t)$ とすれば

(35) $$\lim_{t\to\infty} p(t)=p^*$$

となる。

証明. Lemma 8 により

$$\dot{p}>0 \quad \text{if } 0<p<p^*,$$

$$\dot{p}=0 \quad \text{if } p=p^*,$$

$$\dot{p}<0 \quad \text{if } p^*<p$$

となるから，定理の帰結の後半がなり立つことは明らかである。(**証明終**)

定理 2 は，(34)で示される模索過程を考えれば，定理 1 の neo-classical な仮定の下で，(11), (24), (25)の一意な均衡解 (c^*, i^*, p^*) が安定的であることを保証するものである。実際，(12), (13), (14), (15)に加えて，(18), (19)または(20)がなり立っている時

$$j(t)=j(p(t)),$$

$$c(t)=f(j(t),\ k^*)$$

と定義すれば

$$(36)\quad \lim_{t\to\infty} c(t)=c^*,\quad \lim_{t\to\infty} j(t)=i^*$$

となる。(35) と (36) は (c^*, i^*, p^*) が，(34) であらわされる模索過程に対して安定的であることを示している。

5. 長 期 均 衡

これまでは k が所与の任意の正の値に固定されているものと考えてきたが，実は，k は一般的には，資本蓄積に伴って変化する。いま，L は外生的に所与の一定の成長率をもって成長して行くものとすれば

$$(37)\quad \frac{\dot{L}}{L}=n$$

である。また，資本の減耗率 μ が一定であると仮定すれば，資本蓄積は

$$(38)\quad \dot{K}=I-\mu K$$

によってあらわされる。(37) と (38) から k の time path をあらわす微分方程式

$$(39)\quad \frac{\dot{k}}{k}=\frac{i}{k}-(\mu+n)$$

がえられる。(11), (24), (25) の均衡解，従って i は k の値を与えれば一意に定まるが，今度はその k の time path が (39)，すなわち i によって定められることになるから，これで完結したひとつの動学 system ができ上る。すなわち，以下では

$$(11)\quad c=f(i,\ k)$$

$$(24)\quad p=-f_i(i,\ k),$$

$$(25)\quad p\cdot i=s_r k f_k(i,\ k)+s_w\{c-if_i(i,\ k)-kf_k(i,\ k)\}$$

$$(39)\quad \frac{\dot{k}}{k}=\frac{i}{k}-(\mu+n)$$

という system を問題にする。

まず，(11), (24), (26) を縮約すれば

$$(40)\quad \Psi(i,\ k)\equiv f_i(i,\ k)\cdot i+s_r k f_k(i,\ k)+s_w\{f(i,\ k)-if_i(i,\ k)-kf_k(i,\ k)\}=0$$

となる。(12), (13), (14), (15), (16) がなり立ち，さらに，(18), (19) または (20) のいずれかがなり立っていれば，定理1により，任意の $k>0$ に対して (40) を満足するある i が一意に存

在するから，陰関数の定理により，(40)を満足する k の連続関数が存在して

$$(41)\quad \frac{di}{dk}=-\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial k}}{\dfrac{\partial\Psi}{\partial i}}=-\frac{(1-s_w)f_{ik}i+(s_r-s_w)kf_{kk}+s_rf_k}{(1-s_w)f_{ii}i+(s_r-s_w)kf_{ki}+f_i}$$

となる。以下，(40)を満足する i を k に依存していることを明示して $i(k)$ とかくことにする。そこで，(40)から

$$(42)\quad \frac{i(k)}{k}=\frac{s_rkf_k(i(k),k)+s_w\{f(i(k),k)-kf_k(i(k),k)\}}{-(1-s_w)kf_i(i(k),k)}$$

がえられる。

Lemma 9. (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19)がなり立っているとする。さらに，(40)を満足する一意な関数 $i=i(k)$ が存在し，(41)がなり立っているとする。この時，$\dfrac{i(k)}{k}$ は減少関数となる。

証明. (42)を微分して，(41), (42)を使って適当に整理すると[8]

$$\frac{d\left(\dfrac{i(k)}{k}\right)}{dk}=\frac{1}{1-s_w}\cdot\frac{1}{k^2f_i^2}\cdot\frac{f_i}{\{(1-s_w)f_{ii}i+(s_r-s_w)kf_{ki}+f_i\}}$$
$$\times(s_r-s_w)k\{k(s_r-s_w)f_kf_{ki}-(1-s_w)f_if_{kk}$$
$$+(s_wff_{ki}+(1-s_w)if_kf_{ii})\}-(1-s_w)^2kif_if_{ki}$$
$$+s_w(1-s_w)\{ff_{ii}i+f_i(f-if_i-kf_k)\}<0$$

となる。(**証明終**)

Lemma 10. $\dfrac{i(k)}{k}$ は減少関数とする。さらに

$$\lim_{k\to\infty}\frac{i(k)}{k}<n+\mu<\lim_{k\to 0}\frac{i(k)}{k}$$

がなり立っているとする。この時，ある $k^*>0$ が一意に存在して

$$\frac{i(k)}{k}>n+\mu \quad \text{if } 0<k<k^*,$$

$$\frac{i(k)}{k}=n+\mu \quad \text{if } k=k^*,$$

$$\frac{i(k)}{k}<n+\mu \quad \text{if } k^*<k$$

---

(8) 以下の式の導出は若林による。

がなり立つ。

証明. $\frac{i(k)}{k}$ が減少関数であることからほとんど自明である。(**証明終**)

Lemma 10 でのべられている k^* を balanced capital / labor ratio とよぶ。

Lemma 11. Balanced capital / labor ratio $k^*>0$ が存在するものとする。この時，(39) の任意の正の初期条件に対する解を $k(t)$ とすれば

$$\lim_{t\to\infty} k(t)=k^*$$

となる。

証明. Lemma 10 により

$$\dot{k}>0 \quad \text{if } 0<k<k^*,$$

$$\dot{k}=0 \quad \text{if } k=k^*,$$

$$\dot{k}<0 \quad \text{if } k^*<k$$

となることから明らかである。(**証明終**)

定理 3. (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19) がなり立っているとする。さらに

$$\lim_{k\to\infty} \frac{i(k)}{k}<n+\mu<\lim_{k\to 0} \frac{i(k)}{k}$$

がなり立つとする。この時，(39) の任意の正の初期条件に対する解を $k(t)$ とすれば

$$\lim_{t\to\infty} k(t)=k^*$$

となる。

証明. この定理の仮定の下では，定理 1 と陰関数の定理により $i(k)$ が存在することに注意すれば，lemma 9, 10, 11 から，定理の成立は明らかである。(**証明終**)

定理 3 は，neo-classical な仮定の下では初期の capital / labor ratio がどんな値であっても，経済成長に伴って，capital / labor ratio は balanced capital / labor ratio に限りなく接近して行くことを主張している。従って経済は究極的にはその scale だけを増大して行く balanced growth をとげることになる。

引用文献

[1] Inada, K., "On Neoclassical Models of Economic Growth," *Review of Economic Studies*, Vol.XXXII (2), No.90 (April 1965), pp.151-160.

[2] Rybczynski, T.N., "Factor Endowment and Relative Commodity Prices," *Economica* (N.S.), Vol.22, No.88 (November 1955), pp.336-341.

[3] Samuelson, P.A., "The Fundamental Singularity Theorem for Non-Joint Production," *International Economic Review,* Vol. 7, No. 1 (January 1966), pp. 34-41.

[4] Samuelson, P.A., "Indeterminacy of Development in a Heterogeneous-Capital Model with Constant Saving Propensity," in K. Shell (ed. by), *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth,* Cambridge: MIT Press, 1967, pp. 219-231.

[5] Shell, K., M. Sidrauski and J.E. Stiglitz, "Capital Gains, Income, and Saving," *Review of Economic Studies,* Vol. XXXVI (1), No. 105 (January 1969), pp. 15-26.

[6] Solow, R.M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics,* Vol. LXX, No. 1 (February 1956), pp. 65-94.

[7] Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth I, II," *Review of Economic Studies,* Vol. XXIX (1), No. 78 (October 1961), pp. 40-47, Vol. XXX (2), No. 83 (June 1963), pp. 105-118.

[8] Uzawa, H., "An Optimal Fiscal Policy in an Aggregative Model of Economic Growth," in I. Adelman and E. Thorbeck (ed. by), *Theory and Design of Economic Development,* Johns Hopkins Press, 1966, pp. 113-146.

[9] 戸島 凞,「Joint Production を含む Neo-Classical Growth」商学討究, 第18巻第2号 (1967年11月), pp. 59-87.

[10] 戸島 凞,「2部門 model の Production-Possibility Frontier について」商学討究, 第19巻第2号 (1968年9月), pp. 47-60.

[11] 若林信夫,「新古典派二部門モデルにおける生産可能性フロンティアと要素価格フロンティア」北大・経済学研究, 第19巻第3号 (1969年11月), pp. 153-182.