SDシミュレーションモデルの最適化について

樋口　透

序

ソーシャル・システムのような，大規模なシステム分析を行なう手法の一つに，システム・ダイナミックス（以下 SD と略す）がある。SDモデルをコンピュータでシミュレーションするための言語として DYNAMO という言語が使用される。DYNAMO は離散型のシミュレーション言語であり，社会科学の分野で遭遇する，数式モデルになじまない現象の分析にも適用し得る。

これに反して，連続型シミュレーション言語として，SL-1（CSMP，SSL などメーカーにより名称と，内容にも多少の相異にある）がある。連続型シミュレーション言語は，主として，モデルが比較的簡単な微分方程式で十分記述し得る，自然科学の分野のシミュレーションに用いられる。

本研究では，DYNAMO によるモデルを一階微分方程式として記述し，制御（政策）変数の最適化（最適制御）を試み，SDシミュレーションに最適化の概念を導入することを試みる。簡単なモデルについて，既定の政策変数によるものと，最適政策によるものとが，ある評価関係について比較される。さらに SL-1 モデルの記述についても言及する。

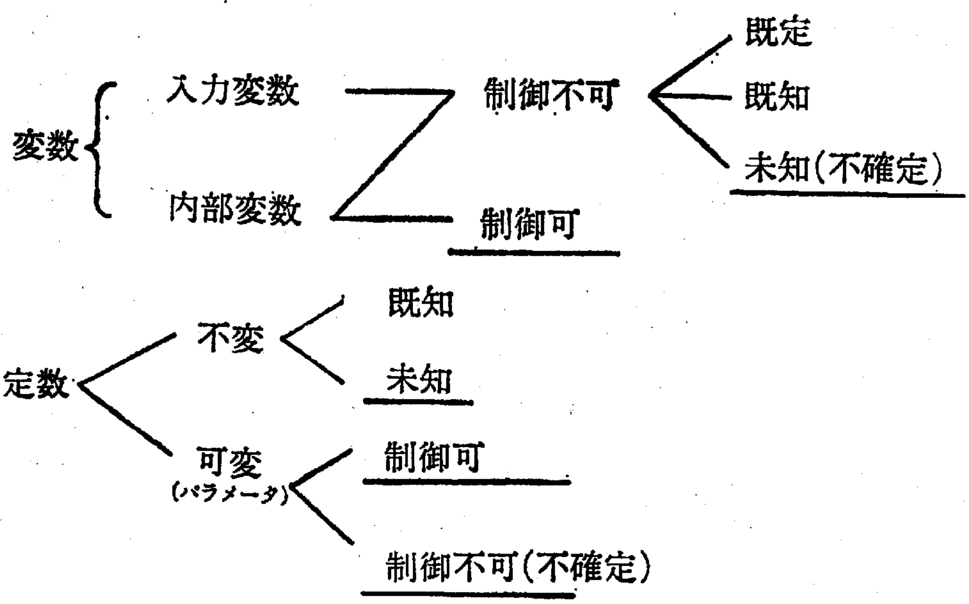
（1）SDモデル

SDモデルを構成する要素は，システムに対する投入の蓄積を表わすレベル変数（v_L）と投入量，あるいはレベルへの流入量を表わすレイト変数（v_R），投入（流入）量を決定する情報である補助変数（v_A），それに少なくともシステ

ムの考察期間はその値が一定と考えられる定数（C），である。さらに物(情報)の生産（処理)，あるいは輸送（伝達）に伴なう遅れや，数式によっては表現しにくい関数をテーブル関数として導入する。

レイト変数には，①システムに関係なく外から与えられるもの，②システムの記述から自動的に定まるもの，③その決定に裁量の余地のあるものとが考えられる。①，②は制御不可能な（uncontrolable）変数であり，③は制御可能な(controlable)変数という。①はシステムに対する入力（input)変数でもある。[1]

入力変数は，実際には独立変数に時間をもつテーブル関数で与えることができる。一方制御可能な変数について，これをモデル上で試行錯誤的に操作し，システムのより好ましい状態や条件を見出すプロセスは政策シミュレーションといわれている。SD モデル上で定数として扱われているものに，不変[2]なもの（既知または予知できるものと，未知のもの）および可変なもの（制御可能なものと制御不可能でその値が確定していないもの)が考えられる。(図一1参照)



図一1

原稿受領　1978年1月17日

(1)　入力変数は投入変数，出力変数は産出変数ともいう。SDモデルでは特に出力変数を意識しないことが多い。入力・出力モデルでは途中をブラック・ボックスとして扱かうがSDモデルではブラック・ボックスの中味を問題にするからである。

(2)　ここでいう不変とか可変とかは，シミュレーション期間の時刻に対しては一定であるが，その一定値が，他の条件等により変わり得ることをいっている。

図一1で下線を施したものは，シミュレーション操作で思考錯誤の対象となり得る変数または定数である。このうち，未知あるいは不確定な定数(3)については，起り得ると考えられる種々の状況を仮定することを意味し，制御可能なものについては，システムのより好ましい条件を模索することを意味する。制御不可能な変数や不変の定数であっても，それが未知なら，一時その関数または値を固定して考察を進めることを意味する。

本研究の例では内部変数の一つを制御可能とし他はすべて既知，もしくは既定であるという簡単な最適政策シミュレーションを説明する。

さて，SDモデルを既述のv_L，v_R，v_Aを用いて形式的に表わすと，

$$\dot{v}_L=f(v_R) \tag{1}$$

$$v_R=g(v_L,\ v_A)\cup g(v_L)\cup g(v_A) \tag{2}$$

$$v_A=h(v_R,\ v_A)\cup h(v_R) \tag{3}$$

$$v_L(t=t_o)=v_{Lo}\ (\text{初期条件}) \tag{4}$$

とかける。(1)は実際には差分形で

$$\dot{v}_L=\frac{v_L(t+\triangle t)-v_L(t)}{\triangle t}=f(v_R)$$

と表わせるが，これを変形して，

$$v_L(t+\triangle t)=v_L(t)+f(v_R)\cdot\triangle t \tag{1'}$$

という形で記述される。補助変数v_Aとレイト変数v_Rは実は本質的ではない。(1)，(2)，(3)は，再帰的記述であるが，v_A，v_Rの部分要素からなるベクトルv'_A，v'_Rで，

$$v'_R=g(v_L),\ v'_A=h(v'_R)=h(g(v_L))$$

なるものから次々に代入して結局，

$$\dot{v}_L=f(v_L)$$

$$v_{L(t=to)}=v_{Lo}$$

の形に帰着されるからである。ダイナモではv_R，v_Aを導入し差分形に表わすことによりモデルの表現を容易にしている。なお，$v_R=g(v_A)$で$v_A=t$（tは

(3) パラメータ（parameter）と呼ぶことがある。

時間を表わす）により入力変数あるいは外生変数を表わすことができる。

（2）最適制御モデルとSDモデル

状態ベクトル[4]を$x(t)$，時間をtとすれば，システムは一般的に

$$\dot{x}=f(x,\ t) \qquad x(t_o)=x_o \tag{5}$$

の形に記述できる。

次に制御ベクトル$u(t)$と制御パラメータpを付加すると，

$$\dot{x}=f(x,u,p,t) \qquad x(t_o)=x_o \tag{6}$$

(5)式は，初期条件 $x(t_o)=x_o$ に基づいて解を求めることができるが，(6)式は解xはuとpを含む。最適制御問題は，モデルの考察期間，t_o〜t_fで定義されたある評価関数[5]（それはx，uそれにpの関数となる）を最適（たとえば最大）ならしめるような$u(t)$とpを決定することである。

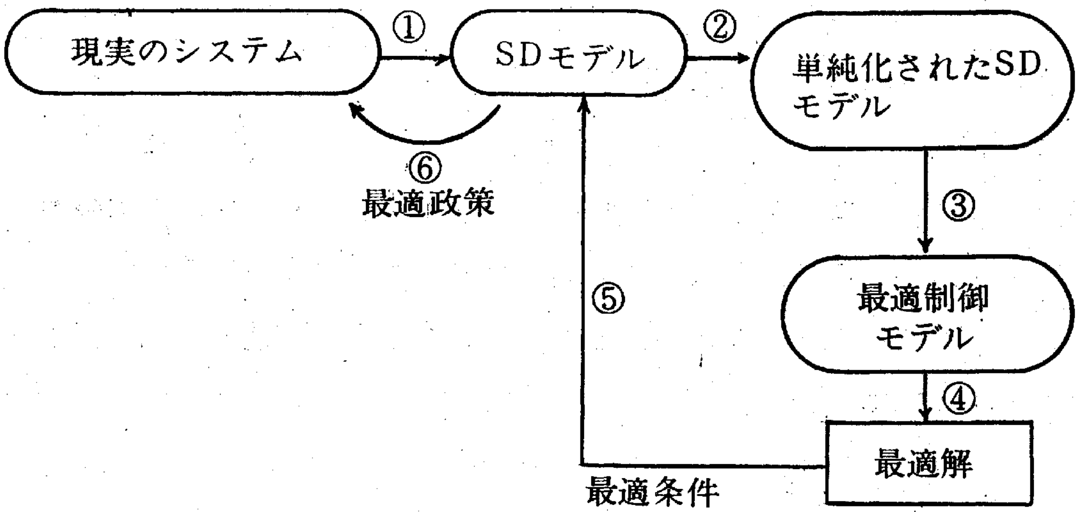
SDモデルが即制御モデルで表示し得るならはじめから，制御モデルとして記述すればよいのであるが，複雑な非線形方程式を解くことは一般に困難なことが多い。そこでまず，現実のシステムをSDでモデル化し，これを単純化する。次にこれと等価な制御モデルをつくり最適解（最適制御変数またはパラメータ）を求め，これを元のSDモデルに適用してみる。単純化されたSDモデルと元のSDモデルの等価性が保証されなければ元問題に対する最適解とはならないが，しかし，その場合でも，何らかの意味で予め限定された満足基準[6]を満す解に導びかれることが期待される。（図—2参照）

次に，システムの評価関数について考えてみよう。一般的に，考察期間中のある量の蓄積量と最終時点でのある量の和と考えられるから，評価関数をF_0とすると，

$$F_0\ (u,p,t_f)\ =\alpha\int_{t_0}^{t_f} f_o(x,u,p,t)dt+\beta\cdot g_o(x,u,p,t)\Big|_{t=t_f} \tag{7}$$

---

(4) SDモデルのレベル変数v_Lがこれに相当する。
(5) 終端時刻t_fはここでは固定しておく。
(6) 満足基準は，たとえば，評価関数がある一定の水準に達し，かつ，他の基準をも考慮して決定される。



図－2

と表わせる。ここで αとβは一種のウエイトである。たとえば，目標年次（t_f）までに得られる所得の総和（積分の項）と目標年次における生活水準（第2項）の加重和などが考えられる。

評価関数を複数個のしかも異質の目標関数から構成することは一般に困難である。これらの加算には意味がないし，効用関数の概念を導入しても，実際にこれをつくることは容易なことではない。多目標関数の最適化の問題に対しては多くの研究があるが，いずれも決定的なものとは思えない。ここでは一目標関数，したがって上式で $\alpha=1$， $\beta=0$ の場合を考えることにする。被積分関数が，将来にわたる収益のような場合，これを現時点に割引く操作は容易である。

（3）最適制御問題の定式化と解法

ここではパラメータ制御は考えないことにする。したがって，システムのしたがうべき方程式は，

$$\dot{x}=f(x,u,t) \tag{8}$$

$$x(to)=x_0 \text{（所与）} \tag{9}$$

で表わされ，評価関数は，

$$F_0(u)=\int_{to}^{tf} f_0(x,u,t)dt \tag{10}$$

さらに，一般には状態ベクトル，御制ベクトルにも制約があるから，X, U をそれぞれの許容ベクトル空間として

$$x \in X, \qquad u \in U \tag{11}$$

を考慮しなければならない。したがって，評価関数$F_0(u)$を，制約条件，(8)，(9)および(11)のもとに最適化すればよい。解法には，変分法，最大原理，ダイナミック・プログラミングなどがあるが，ここでは変分問題として考察する。

ただし条件(11)は満されているものとみなし除いた。条件付最大化問題であるから，ラグランジュ乗数ベクトル（λ）を導入し，$F_0(u)$の代わりに $J(u, \lambda)$を用いる。

$$J(u,\lambda)=\int_{to}^{tf}\{f_o(x,u,t)+\lambda'(f-\dot{x})\}dt\dot{x} \tag{12}$$

ここで，

$$x_0 \equiv f_o(x,u,t)$$

$$x_o=\int_0^t f_o(x,u,t)dt=\int_{to}^t f_0(x,u,t)dt \qquad x_0(t_o)=0$$

を導入し，$x, \dot{x}, \lambda, f$を拡大して，

$$x=(x_o, x_1, \cdots, x_n)$$

$$\dot{x}=(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$$

$$\lambda=(\lambda_o, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

$$f=(f_o, f_1, \cdots, f_n)$$

と再定義する。ここで$f_0=x_0$であるから(8)，(12)はそのまま成立つ。Jの最大化は$\delta J=0$より得られるから，

$$\delta J=\int_{t_o}^{f_t}\{f_o(x+\delta x,\ u+\delta u,\ t)+\lambda'[f(x+\delta x,\ u+\delta u,\ t)-(\dot{x}+\delta\dot{x})]\}dt$$

$$-\int_{to}^{tf}\{f_o(x,u,t)+\lambda'[f(x,u,t)-x]\}dt \quad [7] \qquad (13)$$

$\delta J=0$ より次式を得る。

---

(7) (13)式の被積分関数を$G(x,\dot{x},u,\lambda,t)$とおき $x+\delta x=\bar{x}$ などとおくと，

$$\delta J=\int_{to}^{tf+\delta tf}G(\bar{x},\dot{\bar{x}},u,\bar{\lambda},t)dt-\int_{to}^{tf}G(x,\dot{x},u,\lambda,t)dt$$

$$=\int_{to}^{tf}\{G(\bar{x},\dot{\bar{x}},\bar{u},\bar{\lambda},t)-G(x,\dot{x},u,\lambda,t)\}dt+\int_{tf}^{tf+\delta tf}G(\bar{x},\dot{\bar{x}},\bar{u},\bar{\lambda},t)dt$$

ここで第2項$\cong G(x,\dot{x},u,\lambda,t)\Big|_{t=tf}\cdot\delta t$ (1)

であり，第1項は

$$\int_{to}^{tf}\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)'\delta x+\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\delta\dot{x}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)'\delta u+\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)'\delta\lambda\right\}dt$$

さらにこの第2項を部分積分すると，$t=t0$ で $\delta x=0$ であるから，

$$\int_{to}^{tf}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\delta\dot{x}dt=\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\delta x\Big|_{t=tf}-\int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\delta x dt$$

$$\delta x\Big|_{t=tf}=\delta x(t_f)-x\delta t_f$$

を上式に代入すると，

$$\int_{to}^{tf}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}dt=\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\{\delta x(t)-\dot{x}\delta t_f\}-\int_{to}^{tf}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\delta x dt$$

よって，

$$\delta J=\int\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\Big|_{t=tf}\delta x(t)+\left\{G-\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\dot{x}\right\}\Big|_{t=tf}\delta t_{tf}$$

$$+\int_{to}^{tf}\left[\left\{\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\delta x+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)'\delta u+\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)'\delta\lambda\right.\right]dt$$

$\delta J=0$となるためには被積分関数の各変数の増分の係数が零とならねばならない。ここで $\delta t_f=0$であるから（t_fは固定されている），

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)'\Big|\ \delta x(t)=0,\quad \frac{\partial G}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)=0,\quad \frac{\partial G}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial G}{\partial \lambda}=0$$

が得られる。

$G=\dot{x}_o+\lambda'(f-\dot{x})=\{-(1-\lambda_o),\ -\lambda_1,\ \cdots\cdots-\lambda_n\}x+\lambda'f$

第1式より

$$\left\{-(-1+\lambda_0),\ -\lambda_1,\ \cdots-\lambda_n\right\}\Big|_{t=tf}\cdot\{\delta x(t_f)\}=0$$

$$\therefore\ \delta x_0(t_f)-\lambda'(tf)\delta x(t_f)=0$$

第2式より

$$\delta x_o(t_f)-\lambda'(t_f)\delta x(t_f)=0 \tag{14}$$

$$\dot{\lambda}'+\lambda'\frac{\partial f}{\partial x}^{(8)}=0 \tag{15}$$

$$\lambda'\frac{\partial f}{\partial u}^{(8)}=0 \tag{16}$$

$$\dot{x}-f(x,u,t)-=0 \tag{17}$$

(14)から λ に対する終端条件が導びかれる。

$$\{(1-\lambda_o),-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n\}\{\delta x_o,\delta x,\cdots,\delta x_n\}'\Big|_{t=tf}=0$$

よって，$\lambda'(_{tf})=(1,0,0,\cdots,0)$ (18)

が得られ，システム方程式(17)に関しては$t=t_o$，随伴方程式(15)に関しては$t=t_f$ における$x(t_o)$，$x(t_f)$を初期条件として解けるから結局，

$$\dot{x}=f(x,u,t) \qquad x'(t_o)=(o,x_1{}^o,\cdots,x^o{}_n) \tag{19}$$

$$\lambda'=-\lambda'\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \lambda'(t_f)=(1,0,\cdots 0) \tag{20}$$

$$\lambda'\frac{\partial f}{\partial u}=0 \tag{21}$$

と表わせる。(21)は u に関する極値条件となる。

（4）最大傾斜法による数値解法

(21)式は極値条件が達成されたときのに満たされるから，反復計算により，極

$$\lambda'\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\{-(\lambda_0-1),\ -\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \cdots\cdots-\lambda_n\}=0$$

$$\therefore \lambda'+\lambda'\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

第3・第4式から(16)，(17)が得られる。

(8) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_0}{\partial x_0}\cdots\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_0}{\partial x_m}\\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial f}{\partial u}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{\partial f_0}{\partial u_m}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{\partial fu}{\partial u_m}\end{pmatrix}$$

m，nは制御変数と状態変数の個数をそれぞれ表わす。ただしfはx_0を含まないから，$\partial f/\partial x_0=0$である。

値に収束させるには，(13)式のδuによる変分を零とはせずに，

$$\delta J(u)=\int_{t_o}^{t_f}\lambda'\frac{\partial f}{\partial u}\delta u dt \quad (\neq 0) \tag{22}$$

とする。ここで，制御ベクルトの変分δuを

$$\delta u=K\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)'\lambda \tag{23}$$

とおけば，(22)式は，

$$\delta J(u)=K\int_{t_o}^{t_f}\|\lambda'\frac{\partial f}{\partial u}\|dt\geqq 0 \tag{24}$$

となるから，ある初期制御ベクトルu_oから出発して，十分小さい正数εに対して

$$J\delta(u_o)>\delta J(u_1)>\cdots>\varepsilon>\delta J(u_n)>0 \tag{25}$$

となるような（$u_o, u_1, \cdots, u_n$）が(23)により得られる。したがって反復終了条件として，

$$\int_{t_o}^{t_f}\|\lambda'\frac{\partial f}{\partial u}\|dt<\varepsilon \tag{26}$$

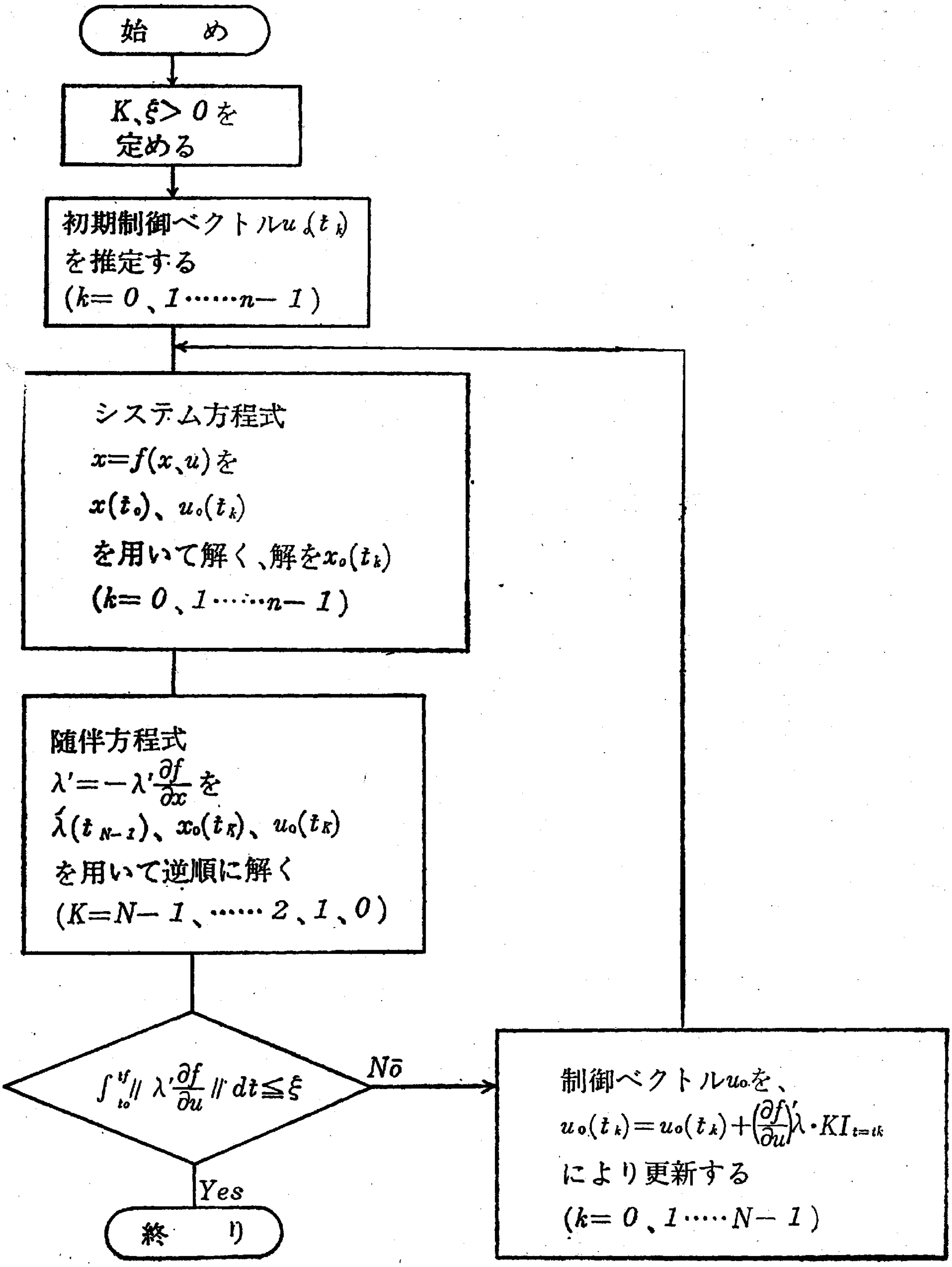
を採用することができる。ここにK，εは十分小さい正数とする。

以上を要約すると，まず$t=t_o$における初期条件x_oと，仮に定めた初期制御ベクトル $u_o(t)$，（$t=t_o\sim t_f$）とからシステム方式を解く。次に，$t=t_f$における $\lambda(t_f)$ を初期条件とし，$u_o(t)$ といま求めた$x(t)$，（$t=t_o\sim t_f$）を用いて随伴方程式を t に関して逆順に解く。ここで反復終了条件(26)を調べ満たされていなければ(23)により，制御ベクトルを，

$$u_o=u_o+K\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)'\lambda \tag{27}$$

で与えられるu_oに更新する。以上のプロセスを $\delta J\leq\varepsilon$ が満されるまで反復すればよい。

反復演算を実行するために，変数を離散化する。そのために$t_o\sim t_f$をt_k($k=0,1,\cdots,n-1$) とすればよい。フローチヤートを図－3に示す。


始　め
K、$\xi > 0$ を
定める
初期制御ベクトル $u_0(t_k)$
を推定する
($k=0$、$1 \cdots\cdots n-1$)
システム方程式
$\dot{x}=f(x、u)$ を
$x(t_0)$、$u_0(t_k)$
を用いて解く、解を $x_0(t_k)$
($k=0$、$1 \cdots\cdots n-1$)
随伴方程式
$\dot{\lambda}'=-\lambda'\frac{\partial f}{\partial x}$ を
$\lambda(t_{N-1})$、$x_0(t_K)$、$u_0(t_K)$
を用いて逆順に解く
($K=N-1$、$\cdots\cdots 2$、1、0)
$\int_{t_0}^{t_f} \| \lambda' \frac{\partial f}{\partial u} \| dt \leq \xi$
Nō
制御ベクトル u_0 を、
$u_0(t_k)=u_0(t_k)+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)'\lambda \cdot KI_{t=t_k}$
により更新する
($k=0$、$1 \cdots\cdots N-1$)
Yes
終　り

図－3

（5）例題による考察

この例は，国のレベルで計画された基幹産業に対する投資に対して，地方自治体が，その関連産業に対する波及効果を最大ならしめるように，補助金の資出額を決定することを目的とするモデルである。

システムの状態変数は，基幹産業の蓄積投資額（x_1），関連産業の蓄積投資額（x_2），人口（x_3），それに入力変数として国の投資計画（x_4）および，政策変数としては自治体の関連産業に対する補助金資出計画（u）を表わしている。tf_1～tf_5はテーブル関数であり，tf_1，tf_3は基幹産業と関連産業の再投資可能額を，tf_2は基幹産業の関連産業への投資額を，tf_4は相対個人所得によるこの地域への人口移動を，tf_5は国の投資計画をそれぞれ表わしている。評価関数は計画期間における累積個人所得の最大化を考える。ただし補助金は，コストとみなし，これを差引いたものを所得と考えることにした。

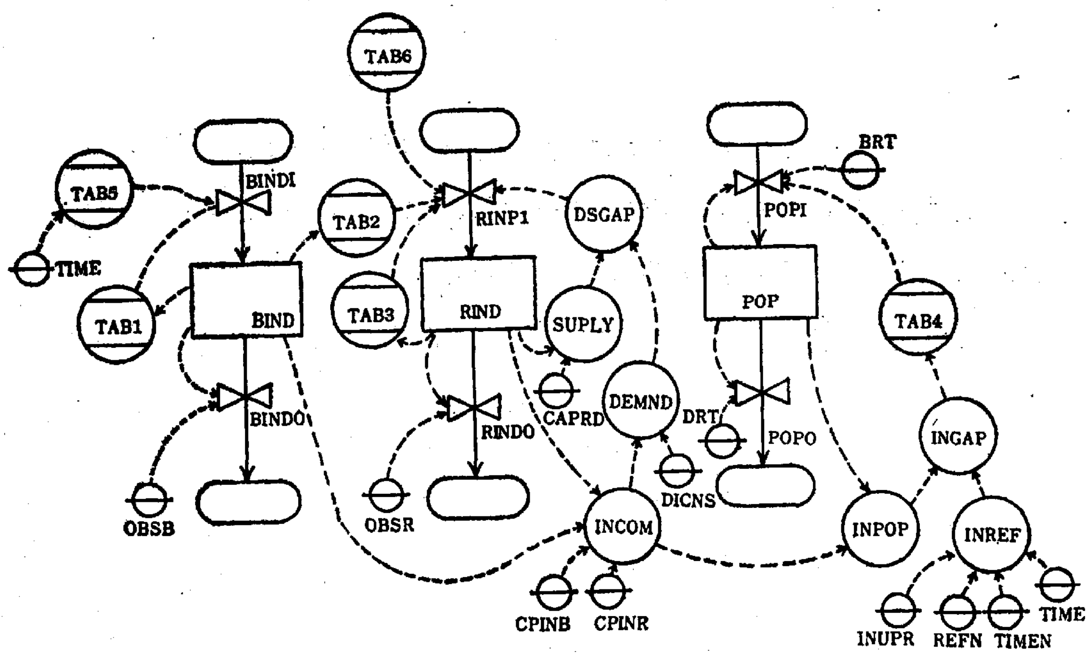
（5・1）ダイナモによる定式化

基幹産業，関連産業，それに人口の３つのセクターに分けて，モデルの概略と定式化，および各変数の意味について述べる。フロー・ダイアグラムを図－4に示す。

(1) 基幹産業セクター

国による計画された独立投資，および再投資（蓄積投資のテーブル関数として与える）を考える一方蓄積投資の一部は廃棄されるものとする。

```
R  BINDI. KL=TABHL (TAB5, TIME. K, 1970, 1975, 1)
              +TABHL (TAB1, BIND. K, 0, 5. 0. 5)
T  TAB5=0/0. 2/0. 3/0. 4/0. 1/0
T  TAB1=0/0. 03/0. 05/0. 06/0. 06/0. 06/0. 06/0. 06/0. 06/0. 06/0. 06
R  BINDO. KL=BIND. K * OBSB
C  OBSB=0. 01
```



図—4

L　BIND. K=BIND. J+DT＊(BINDI. JK−BINDO. JK)

N　BIND=0

（変数の意味）

BINDI；各年の投資額

TAB 6 ；国の投資計画

TAB 1 ；再投資計画

BINDO；毎年廃棄される設備

BIND；蓄積投資（初期値０）

OBSB；設備の廃棄率

(2)　関連産業セクター

基幹産業からの投資（テーブル関数）と地域内の需給ギャップを考慮した再投資計画（テーブル関数）および政策変数である補助金配分計画からなる。

R　RINDI. KL=TABHL (TAB6, TIME. K, 1970, 1989, 1)
　　　　+TABHL (TAB2, BIND. K, 0, 5, 0.5)
　　　　+SDGAP＊TABHL (TAB3, RIND. K, 0, 2, 0.2)

L　RIND. J+DT＊(RINDI. JK−RINDO. JK)

N RIND=0.2

R RINDO.KL=RIND.K * OBSR

C OBSR=0.05

A SDGAP.K=DEMND.K−SUPLY.K

A DEMND.K=INCOM.K * DICNS

C DICNS=0.7

A SUPLY.K=RIND.K * CAPRD

C CAPRD=0.5

A INCOM.K=BIND.K * CPINB+RIND.K * CPINR

C CPINB=0.1

C CPINR=0.5

T TAB2=0/.003/.007/.015/.03/.05/.08/.09/.098/.10

T TAB3=0.1/0.1/0.1/0.1/0.1/0.12/0.16/0.25/0.5/0.9/1.0

T TAB6=0.05/0.053/0.55/0.58/0 061/0.64/0.67/0.071/0.074/0.078/
0.082/0.086/0.09/0.099/0.1/0.105/0.109/0.115/0.121/0.127

（変数の意味）

RINDI ；毎年の投資額

RIND ；蓄積投資額（初期値0.2兆円）

RINDO ；廃棄される設備

OBSR ；設備の廃棄率

SDGAP ；需給ギャップ

DEMND ；需要

DICNS ；総所得に対する需要比率

SUPLY ；供給

CAPRD ；設備投資に対する生産比率

INCOM ；所得

CPINB ；基幹産業の設備に対する所得比率

CPINR ；関連産業に対する所得比率

TAB2 ；基幹産業の関連産業への投資計画

TAB3 ；再投資能力

TAB6 ；補助金計画

(3) 人口セクター

社会移動は，対前年比率一定で上昇する参照個人所得に対する地域内個人所得（平均）の相対ギャップにより移動比率をテーブルで与える。

R POPI. KL ; TABHL (TAB4, INGPA. K, −0.5, 0.5, 0.1)

  * POP. K + BRT * POP. K

C BRT = 0.02

A INGAP. K = (INPOP. K − INREF. K)/INREF. K

A INPOP. K = INCOM. K/POP. K

A INREF. K = INREFN * (1 + INUPR) ** (TIME. K − TIMEN)

C TIMEN = 1970

N TIME = 1970

C INUPR = 0.05

C REFN = 1.5 * 10^{-7} (兆円)

R POPO. KL = DRT * POP. K

C DRT = 0.01

L POP. K = POP. J + DT * (POPI. JK − POPO. JK)

N POP = 1000000 (人)

（変数の意味）

POPI ；人口の社会増減＋自然増

BRT ；出生率

INGAP ；相対個人所得格差

INPOP ；個人所得（平均）

INREF ；参照個人所得

TIMEN ；基準年次（1970）

TIME ；時間（年次，初期値1970）

INUPR ；全国所得上昇率（実質）

REFN ；基準年次の参照個人所得

POPO ；死亡人口

DRT ；死亡率

POP ；人口（初期値100万人）

式の定義で左端の英記号は，L，R，Aがv_L，v_R，v_Aをそれぞれ表わし，Cは定数，Nは初期値，Tはテーブル関数であることを示している。モデルの考察期間は1970～2000年まで31年間である。TAB6により与えられる補助金出資計画が政策変数である。

（5・2）微分方程式による記述

状態ベクトルと制御ベクトルをそれぞれx，uとする。xに属する変数は，基幹産業と関連産業の蓄積投資（BINDとRIND）および人口（POP），さらに国の投資計画，および評価関数からなり，uはここでは補助金支出計画である。評価関数（x_0）は，前述の如く定めたから，次のように表わせる。

$$x_0=\int_{t_o}^{t_f}\{(\text{各年の所得}-\text{各年の補助金})/\text{人口}\}dt \quad t_o=0,\ t_f=30$$

このモデルで用いる変数と前節で述べたSDモデルの変数や定数との関連は次のように定める（括弧内はSDモデルによる記号）。

$x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$，　$u=u_1$

x_0；評価関数

x_1；基幹産業の蓄積投資（BIND）

x_2；関連産業の蓄積投資（RIND）

x_3；人口（POP）

x_4；国の投資計画（TABHL（TAB5，TIME.K，1970，1975，1））

u_1；自治体の支出する補助金計画（TABHL（TAB6，TIME.K，1970，1989，1））

定数については次，のように定める。

α_1(OBSB); α_2(OBSR), α_3(DICNS), α_4(CAPRD), γ_2(CPINR), β_3(BRT−DRT), t(TIME), d(INUPR), γ_1(REFN),（ただし t は変数である）以上の記号を用いると x_0 は，

$$x_0=\int_{t_0}^{t_f}\{(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2-u_1)/x_3\}dt$$

と記述できる。

以上から x に関する方程式（システム方程式）を記述すると，[9]

$$f_1(x,u,t)=tf_1(x_1)-\alpha_1x_1+tf_5(t)$$

$$f_2(x,u,t)=tf_2(x_1)+u_1-\alpha_2x_2+\{\alpha_3(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)-\alpha_4x_2\}\cdot tf(x_2)$$

$$f_3(x,u,t)=tf_4[\{(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)/x_3-c(t)\}/c(t)]+\beta_3x_3$$

$$f_4(x,u,t)=t\dot{f}_5(t)$$

$$f_5(x,u,t)=(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2-u_1)/x_3$$

ただし $c(t)$ は

$$c(t)=\gamma(1+d)^t$$

で与えられる。$tf_i(x)$ ($i=1\sim5$) はテーブル関数のデータをもとに曲線，

$$tf_i(x)=c_i(x-a_i)^{b_i}(a_i'-x)^{b'_i}$$

を仮定し，最小二乗法により，c_i, b_i, b'_i を決めそれを多少手直しして，関数の適用範囲を広げるよう工夫してつくられたものである。

次に λ に関する方程式（随伴方程式）と，u_1 の増分を求めるために，行列 $\partial f/\partial x$ とベクトル $\partial f/\partial u_1$ を求める必要がある。そこで，

$$f_{ij}\equiv\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ (i,\ j=0\sim4)$$

とおくと，

---

(9) たとえば，$\dot{x}_1=f_1(x,u,t)$ は，SD式の BIND.L($=x_1$)の右辺にレイト方程式 BINDI.JK と BINDO.JK を代入し，tfi=TABHL（TABi……），α_1=OBSBとおきかえ，(BIND.L−BIND.K)/DT→$\dot{x}_1$ とおきかえれば得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{vmatrix}0, & f_{01}, & f_{02}, & 0, & 0\\ 0, & f_{11}, & 0, & 0, & 0\\ 0, & f_{21}, & f_{22}, & 0, & 0\\ 0, & f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0\end{vmatrix}$$

ここでf_{ij}は,

$$f_{01}=\gamma_3/x_3$$

$$f_{02}=r_2/x_3$$

$$f_{11}=dtf_1(x_1)-\alpha_1$$

$$f_{22}=-\alpha_2+(\alpha_3\gamma_2-\alpha_4)tf_3(x_2)+\{\alpha_3(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)-\alpha_4x_2\}\cdot dtf_3(x_2)$$

$$f_{21}=dtf_2(x_1)+\alpha_3\gamma_1\cdot tf_3(x_2)$$

$$f_{31}=dtf_4(y)\cdot\gamma_1/c(t)$$

$$f_{32}=dtf_4(y)\gamma_2/c(t)$$

$$f_{33}=dtf_4(y)\{-(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)/\overline{x_3c(t)}\}$$

ただし,

$$y=\{(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)/x_3-c(t)\}/c(t)$$

$$dtf_i(\cdot)\equiv\frac{d\{tf_i(\cdot)\}}{d(\cdot)}$$

したがってλについて次式をうる。

$$\dot{\lambda}_0=0$$

$$\dot{\lambda}_1=-(\lambda_0f_{01}+\lambda_1f_{11}+\lambda_2f_{21}+\lambda_3f_{31})$$

$$\dot{\lambda}_2=-(\lambda_0f_{02}+\lambda_2f_{22}+\lambda_3f_{32})$$

$$\dot{\lambda}_3=-\lambda_3f_{33}$$

$$\dot{\lambda}_4=0$$

u_1に関する微分は,

$$\{\partial f/\partial u_1\}'=(-{}^1/_{x_3},\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$$

これより,

$$\delta u_1=k\cdot\lambda'\frac{\partial f}{\partial u_1}=k(-\lambda_0/x_3+\lambda_2)$$

$$\int_{to}^{tf} \| \lambda' \partial f/\partial u_1 \| dt = \int_{to}^{tf} \{(\lambda_0/x_3)^2 + \lambda^2{}_2\} dt$$

を得る。最後の式はδJの評価式であり，反復停止条件として用いる。実際には離散化されるので，

$$\sum_{K=0}^{N-1} [\{\lambda_0(t_k)/x_3(t_k)\}^2 + \{\lambda_2(t_k)\}^2]$$

を用いる。

最後に，実際に数値解を求めるために，x，λ それにu_1の初期値を与えねばならない。

$x'(0) = (0,\ 0,\ 0.2,\ 10^6,\ 0)$

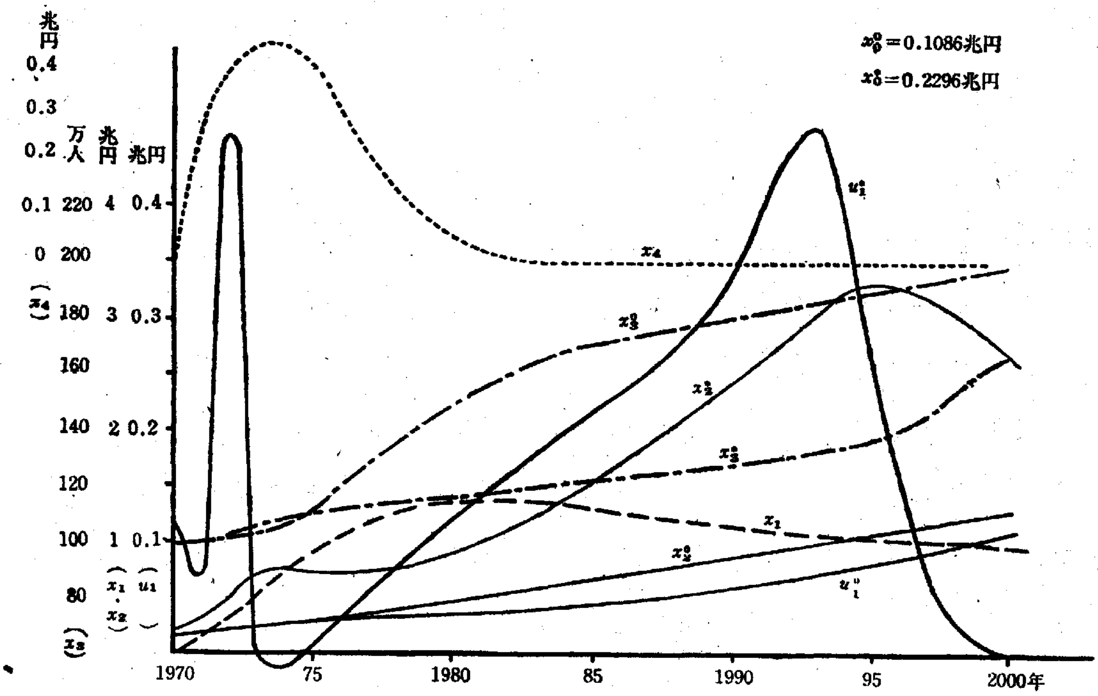
$\lambda'(30) = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$u_1{}^{0\prime}(t_k) = u_1{}^0(0) \cdot 1.025^{t_k}$ [10] $(t_k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 30)$

$u_1{}^0(0) = 0.05$ (兆円)

以上で最適制御問題は完全に記述された。微分方程式の数値解法には，オイラ法，ルンゲ・クッタ法，ミルン法などあるが，ここでは，初期設定が簡単で，比較的精度の高いルンゲ・クッタ法を採用した。得られた最適政策（$u^*{}_1$)と，仮定された政策（$u^1{}_0$）をもとのSDモデルに入れて得られたものを，図－5に示す。最適政策$u_*{}^1$は$u^1{}_0$から出発して，約180回反復の後に得られた。このとき目的関数の比（$x^*{}_0/x^0{}_0$）は約2倍となっている。関連産業の伸びも$x^0{}_2$と$x^*{}_2$を比べて分かるように改善されているが人口は逆に最適政策をとった場合の方が低くなっている。$u_1{}^0$と$u_1{}^*$を比べて気付くことは，あまりにもその形が異なっていることである。このことは，$u_1{}^*$が必ずしも実現可能な政策ではないということを意味している。だがしかし，図には示されていないが，反復の過程で，$u_1{}^0$に類似した（あるいは実現可能な範囲の）ある$u_1{}^i$を選び，しかも$x_0{}^0 \ll x_0{}^i$とするような可能性を模索し得る。このような観点を考慮する一つの方

(10)　x，λに対しては，初期値は時間に関してであるが，uに関しては，反復について，つまり第0反復について，時間については t＝0～30，すべてについて与えなければならない。ここではこれを$u_1{}^0(t)$で示した。$u_1{}^0(t)$は，基準年次（$t_0=0$ つまり1970年）の値を0.05兆円とし，以降，前年比2.5％増という支出計画を用いている。



図－5

法として，目的関数の中にu_1のu_1^0からの乖離をペナルティとして導入することが考えられる。

（6）SL-1の適用

これまで述べてきたことから明きらかなように，最適制御問題は結局，制御ベクトル$\boldsymbol{u}$を改善しながら，状態ベクトル$\boldsymbol{x}$と，ラグランジュベクトル$\boldsymbol{\lambda}$に関する微分方程式を繰り返し解くことに帰する。しかし，実際に数値解を求めるプロセスにおいて，特に非線形方程式においては，いろいろ困難な問題に遭遇する。連続量を離散化する場合の分割数，初期制御ベクトル$\boldsymbol{u}^0$の与え方，数値積分の方法，収束判定条件と制御ベクトルの増分$\delta\boldsymbol{u}$の与え方などは，解の安定性や演算時間に影響を与える主要なファクターである。たとえば，この例では，分割数30（$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{\lambda}$と$\boldsymbol{u}$の要素の和は5＋5＋1＝11）において，100反復に要する時間は約5分であった。また収束条件を$\varepsilon=10^{-11}$とするとタイム・オーバ（20分）となるなど好ましい結果を得るまでには相当の根気とコンピュータ・タイムを要することが分かった。少しでも能率を上げるためにSL-1の適用を

考えたが，まだ十分使い慣れていないこともあり，その効果を云々する段階に至っていない。

（7）おわりに

本研究の例題であげたSDモデルは，単純化されたモデルであり，元モデルに含まれているより複雑な因果関係はテーブル関数に集約してある。したがって，テーブル関数の構成如何が成否の鍵となる。ここで用いたテーブル関数は定性的には受容される（と確信している）が，実証レベルで使える関数をつくるには多くのデータと注意深い考察が要るであろう。今後の研究課題として，(1)テーブル関数の構成法，(2) SDモデルの単純化，(3)多目的関数の導入[11]，(4)数値解法上の考察をとりあげたいと思っている。

参　考　文　献

1）J. G. M. Cuypers and O. Rademarker, "An Analysis of Forrester' s World Dynamics Model", ***Automatica***, Vol. 10, 1974, p. 195–201.

2）L. Mariani and B. Nicoletti, "World Dynamics: An Optimization Study of the Pollution Subsystem", ***Journal of Optimization Theory and Applications***, Vol. 17, 1975, p. 251–271.

3）J. R. Burns, "Error Analysis of Nonlinear Simulations: Applications to World Dynamics". ***IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics***, Vol. MSC–5, No. 3, May 1975, p. 331–340.

4）B. Roy, "Problems and Methods with Multiple Objective Functions", ***Mathematical Programming*** 1, 1971, p. 239–266.

5）A. Charnes, "Goal Programming and Multiple Objective Optimizations", ***European Journal of Operational Research***,Vol. 1, 1977, p. 39–54.

6）J. R. Burns, et al., "Optimization Techniques Applied to the Forrester Model of the World", ***IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics***, Vol. SMC–4, No. 2, March 1974, p. 164–171.

7）G. C. Chow, "Problems of Economic Policy from the Viewpoint of Optimal Control", ***The American Economic Review***, Vol. 63, No.5, Dec. 1971, p. 825–837.

8）M. S. Mahmoud, "Multilevel Systems Control and Applications; A Survey", ***IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics***,Vol. SMC–7, No. 3, March 1977, p. 125–142.

---

(11) 単一関数であっても，この例のように終端時刻 t を固定せずに，x(t) と t に関するもっと一般的な条件（横断性条件）を導入すると別のタイプの目的関数が得られる。