2種類の情報がある場合の価格のサーチ*

遠藤　薫
長尾昭哉

1. はじめに

ある商品の価格が売手によってことなり，どの売手がどんな価格で売っているかが買手にはわからないとき，買手は安い価格で買おうとして個々の売手をたずねるであろう。このような価格のサーチ[1)]において，ある売手がある価格で売っているということを買手が知ったとき，この情報はこれにもとづいてその価格で買うかあるいは買わないで他の売手をさがすかのいずれかの行動をとることができるのであるから，買うという行動に直接役だてることのできる情報ということができる。

これに対して，売手全体のうちの一部分の売手についてこれらの個々の売手がどの価格で売っているかはわからないが，ある価格の売手は何人，他のある価格の売手は何人というように価格の分布が買手に知らされるなら，このような一部分の売手の価格の分布という情報は，買うという行動に間接的に役だてることのできる情報ということができる。なぜならこの情報ではどの売手がどの価格で売っているかはわからないので，ただちにもっとも安い価格の売手の

原稿受領日　1984年4月28日

* 本稿は日本オペレーションズ・リサーチ学会で前後二回にわたり発表されたものにもとづく（昭和57年9月17日，於慶応義塾大学，昭和58年10月27日，於工学院大学）。発表に先だって大阪大学坂口実教授から有益な助言をいただいた。北海道大学関口恭毅助教授には長期間討論していただいた。記して感謝の意を表します。

1）価格のサーチあるいはジョブ・サーチについてリップマン，マッコール〔1〕のサーベイ論文がある。

ところに行って買うことはできないが，これから売手をたずねるにあたって売手全体をサーチの対象にしたほうがよいか，それともこの一部分の売手だけをサーチの対象にしたほうがよいか，いずれか有利なほうを選択できるからである。

このように行動に直接役だてることのできる情報と間接的に役だてることのできる情報という2種類の情報を買手がくりかえし求めることができるとき，これらの情報をどのように組合せて収集してゆくとよいか，あるいはどのような順序で収集してゆくとよいかが本稿での問題である。

情報収集になんの費用もかからないのであれば，あるいは時間的な余裕が十分にあるのであれば，直接役にたつ情報ばかりを求めていくことで十分であり，あえて間接的に役にたつ情報を求める必要はない。本稿では情報収集の費用については考えず，情報収集のための時間的余裕が情報を集める回数に反映すると考えて，直接役に立つ情報を得る回数と間接的に役にたつ情報を得る回数の和が最大限N回に制約されている場合に最適な情報収集のしかたはどうなるかを考える。

情報を行動に直接役にたつ情報と間接的に役にたつ情報とにわけて考えることはマンハイム〔2〕による。マンハイムは高速道路の経路決定のために粗い調査から精確な調査にいたる何段階かの調査がおこなわれることに注目した。そこでは直接役にたつ情報も間接的に役にたつ情報もすべて調査をおこなうことにより得られる。本稿では間接的に役にたつ情報は何らかの機関，団体あるいは企業により供給されるものとする。

2. モ　デ　ル

買手が個々の売手をたずねるときに，その売手の価格がどんな値であるかは事前にはわからない。そこで価格は買手にとっては確率変数であるとみなすことができ，買手が個々の売手をたずねて知った値はその確率変数の実現値であると考えることができる。ここで簡単化のために買手は売手全体の価格の分布を知っていると仮定する。これより，価格を確率変数 X であらわしたときその

確率分布は既知であり未知パラメータを含まないとすることができる。買手が個々の売手をたずねて知った値は確率変数 X の実現値であると考えることができ，これを x であらわす。

情報を得る行為を実験ということにし，2種類の情報を得るための次のような3種類の実験を考える。売手全体の中からランダム[2)]に1人の売手をとりだしその売手の価格を知ることを実験Aということにする。この実験Aをおこなった結果確率変数 X の一つの実現値 x が得られることになる。次に売手全体の中からランダムにとりだされた k 人[3)]の売手について，それらの売手の価格の分布を知ることを実験Bということにする。このとき買手には k 人の売手のうちのだれがどの価格で売っているかは知らされない。このことは確率変数 X と同じ確率分布にしたがうたがいに独立な k 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ の実現値 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ が得られたことになるが，買手にとってはどの売手がどの価格かはわからないので，k 個の実現値の分布を作り，それを確率分布になおして，買手はその確率分布を知ったということである。実験Bはこのような性質をもつとするので k は2以上でなければならない。次にもしBで得られた一部分の売手についての価格の分布を知って，この一部分の売手だけを対象にサーチしたほうが，売手全体を対象にサーチするよりも有利であるなら，一部分の売手だけを対象にサーチできるものとする。そこで実験 B で知った k 人の売手からランダムに1人の売手をとりだして価格を聞くことを実験Cということにする。このとき，$x_1, x_2, \ldots x_k$ の中のどれか一つが得られたことになり，これを x_i であらわすことにする。以上実験 A, B, C の3種類の実験を考える。

本稿では行動に間接的に役にたつ情報が実験Bをおこなったようにして得られると想定しているが，一般的に間接的に役にたつ情報がそのようにして得られるということではない[4)]。実験Cは1人の売手をランダムにとりだすという

2) 簡単化のために，売手のところに行くのに要する時間に差はなく，また過去に買ったときの経験は役にたたないと仮定して，個々の売手は買手によってランダムに選ばれるものと想定する。

3) 簡単化のために，売手の総数が有限のときは復元抽出の方法によりとりだされるとする。

意味で実験Aと同じ性質をもつが，サーチの対象が実験Aでは売手全体であるのに対し，実験Cでは実験Bでとりだされた一部分の売手であるという点でことなっている。

実験Aあるいは実験Cによってランダムに選ばれた1人の売手から価格を聞いたときにその売手から買わなかった場合，あとになってその売手のところにもどって最初に聞いた価格で買うことはできないとする。すなわち売手が価格を変えることがある，あるいは他の買手に売ってしまってもう売ることができない場合を考える。実験AあるいはCの結果についてはリコールできないということである。このとき売手全体の価格の分布は変化しないと仮定する。実験Bの結果 k 人の売手の価格の分布を得るが，この k 人の売手を対象に価格をたずねてまわることはそれが連続しておこなわれるならば何回でも可能であるとする。すなわち実験Bの結果にたいして実験Cを連続的に適用するならそれは何回でも可能であるということである。しかしいったんある実験Bの結果が有利でないと判断してそのあとに実験AあるいはBをおこなったときにもとの実験Bの結果を対象に実験Cを適用することはできないとする。原則として実験Bの結果もリコールできないが，実験Bで得られた一部分の売手を対象に集中的にサーチすることはかまわないということである。このときもある実験Bの結果について k 人の個々の売手の価格は変化するかもしれないが，k 人全体の価格の分布は変わらないとする。

行動に直接役にたつ情報を得る回数と間接的に役にたつ情報を得る回数との和は最大限 N 回としたので（第1節），実験A, B, Cはあわせて最大限 N 回まで可能ということになる。サーチをおこなっているある途中の段階での残りの可能な実験回数を n であらわすことにする $(0 \leqq n \leqq N)$。以下では安い価格で買おうとするときに，残り n 回の実験を，実験を止めることも含めて最適におこなったときに期待される，買うときの価格を導くことにする。

売手全体の中からランダムに1人の売手を選んで価格をきいて x という値で

4）この点で本稿のモデルがマンハイム〔2〕のモデルと基本的にことなるところがる。

あることを知ったときに，あと n 回のサーチが可能である場合，サーチを止めることも含めて残り n 回のサーチを最適におこなったときに得られる安い価格の期待値を $e_n(x)$ であらわすことにする。すなわち実験Aをして x を得たときに残り n 回の実験が可能であるとき，それらの実験を，実験を止めることも含めて最適におこなったとき得られる価格の期待値が $e_n(x)$ である。同じようにして実験Bの結果 $x_1, x_2,..., x_k$ を得たときに，残り n 回の実験を最適におこなうことにより得られる価格の期待値を $g_n(x_1, x_2,..., x_k)$ とする。そして実験Cの結果 x_i を得たときに残り n 回の実験を最適におこなうことにより得られる価格の期待値を $h_n(x_i|x_1, x_2,..., x_k)$ とする。これら三つの期待値は次のように計算される。以下では価格 X の分布関数を $F(x)$ とする。

最初に $e_n(x)$ は実験Aの結果の x を知ったところで残り n 回の実験が可能なとき，最適に実験をおこなうことにより得られる期待価格であるが，これはいま知った価格 x, このあと最初に実験Aをおこないそれ以降は最適に実験をおこなったときの期待価格，あるいはこのあと最初に実験Bをおこないそれ以降は最適に実験をおこなったときの期待価格のいずれか小さいほうを選ぶことにより決定される。最初に実験Aをおこないそれ以降は最適に実験をおこなったときの期待価格を a_n とすると

$$a_n=\int e_{n-1}(y)dF(y)$$

となる。実験Aをしたとき得られる値を y としたとき，そのあと残り $n-1$ 回の実験を最適におこなうときの期待価格は $e_{n-1}(y)$ となる。どのような y の値が得られるかは前もってわからないので $e_{n-1}(y)$ の期待値を求めるのである。次に最初に実験Bをおこないそれ以降は最適に実験をおこなったどしたときの期待価格を b_n とすると

$$b_n=\int\dots\int g_{n-1}(y_1,\dots, y_k)dF(y_1)\dots dF(y_k)$$

となる。考え方は a_n の場合と同じである。以上より

$$e_n(x)=\min\begin{cases} x & \text{（止める）} \\ a_n & \text{（実験 A）} \\ b_n & \text{（実験 B）} \end{cases} \tag{1}$$

となる。ただし $n=1,\dots, N-1$ のときである。$n=0$ のときはもう実験をおこなうことができないので x の価格で買うしかなく，$e_0(x)=x$ となる。$n=N$ のときはサーチをはじめるときであるが，必ず価格をたしかめてから買うと仮定すると a_N と b_N のうちの小さいほうの実験を選択するということになる。

次に $g_n(x_1,\dots, x_k)$ は実験Bの結果 k 人の売手の価格の分布を知って残り n 回の実験が可能なとき，最適に実験をおこなうことにより得られる価格の期待値であるが，この結果をもとにただちに買うことはできず，実験Cをおこなうか，それともこの結果を捨てて実験 A あるいは実験 B をおこなうかのいずれか有利なほうを選択することにより得られる。最初に実験Cをおこない，それ以降は残り $n-1$ 回の実験を最適におこなうことにより得られる価格の期待値を $c_n(x_1,\dots, x_k)$ とすると

$$c_n(x_1,\dots,\ x_k)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} h_{n-1}(x_i\,|\,x_1,\dots,\ x_k)$$

となる。$x_1,\dots, x_k$ の中からランダムに一つが選ばれる確率は $1/k$ だからである。最初に A をおこなったときと実験 B をおこなったときの期待価格は前述のように a_n と b_n であるから

$$g_n(x_1,\dots,\ x_k)=\min\begin{cases} a_n & \text{（実験 A）} \\ b_n & \text{（実験 B）} \\ c_n(x_1,\dots,\ x_k) & \text{（実験 C）} \end{cases} \tag{2}$$

となる。これは $n=1, 2,\dots, N-1$ のときである。実験 B の結果を得たところでもうサーチすることができないと，実験Bの結果はただちに買う行動につなぐことができないという想定から，買えずに終ってしまうことになる。このことを避けるようにするため $n=0$ のときは $g_0(x_1,\dots, x_k)=\infty$ とおくことにする。

最後に実験 C の結果，$x_1,\dots, x_k$ の中からの一つである x_i を得て残り n 回の実験が可能なときの期待価格 $h_n(x_i|x_1,\dots, x_k)$ を求める。このときは x_i の価格で買うか，買わないで最初に実験 A あるいは B をするか，それとも続けて実験 C をするかのいずれかが可能なので

$$h_n(x_i|x_1,\dots,\ x_k)=\min\begin{cases} x_i & \text{（止める）} \\ a_n & \text{（実験 A）} \\ b_n & \text{（実験 B）} \\ c_n(x_1,\dots,\ x_k) & \text{（実験 C）} \end{cases} \qquad (3)$$

となる。ここで $n=1, 2,\dots, N-1$ であり，$n=0$ のときは $h_0(x_i|x_1,\dots, x_k)=x_i$ となる。

実験 A, B, C あわせて最大限 N 回の実験が可能であるとき，どのように実験を選択すると買うときの価格がもっとも低いと期待されるかは (1), (2), (3) の連立方程式をトリーで表現してバックワードに解いていくことにより求められる。また最適に選択された実験の満たすべき性質はこの連立方程式を検討することにより導かれる。

3. 最適なサーチにみられるいくつかの特徴

最初に可能な実験回数の多いほうが少ない場合より不利になることはないというまったく明らかなことを確かめておく。以下では残り n 回の実験が可能であるときに最初に実験 A をおこなったときの期待価格 a_n と最初に実験Bをおこなったときの期待価格 b_n のうちの小さいほうを s_n とあらわすことにする。すなわち

$$s_n=\min(a_n,\ b_n)$$

とおく。このとき次の補題が成りたつ。

補題　$s_{n+1}\leqq s_n \qquad n=1,\ 2,\dots,\ N-1$

〔証明〕 残り $n+1$ 回の実験が可能であるときに最初に実験 A をおこなったときの期待価格 a_{n+1} は (1) を用いると

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \int e_n(x)dF(x) \\
&= \int \min(x,\ a_n,\ b_n)dF(x) \\
&= \int \min(x,\ s_n)dF(x) \\
&= \int \min(x-s_n,\ 0)dF(x)+s_n
\end{aligned} \tag{4}
$$

となる。これより

$$
a_{n+1} \leqq s_n \tag{5}
$$

を得る。同様にして (2) より

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= \int\dots\int g_n(x_1,\dots,\ x_k)dF(x_1)\dots dF(x_k) \\
&= \int\dots\int \min\{a_n,\ b_n,\ c_n(x_1,\dots,\ x_k)\}dF(x_1)\dots dF(x_k) \\
&= \int\dots\int \min\{s_n,\ c_n(x_1,\dots,\ x_k)\}dF(x_1)\dots dF(x_k) \\
&\leqq \int\dots\int s_n\ dF(x_1)\dots dF(x_k) \\
&= s_n
\end{aligned} \tag{6}
$$

を得る。不等号が成りたつのは実現値 $x_1,\dots,x_k$ に依存して，一度でも $c_n(x_1,\dots,x_k)$ が s_n より小さいことがある場合である。また実験 B をおこなって $x_1,\dots,x_k$ を得て残り n 回の実験が可能なとき，最初に実験 A あるいは B をおこなって得られる期待価格 a_n あるいは b_n はこの $x_1,\dots,x_k$ には依存しないので，s_n もこれに依存しないことになり最後の等式を得る。以上より

$$
b_{n+1} \leqq s_n \tag{7}
$$

を得る。したがって，(5), (7) を用いると

$$
\begin{aligned}
s_{n+1} &= \min(a_{n+1},\ b_{n+1}) \\
&\leqq s_n
\end{aligned}
$$

となる。（証明終）

売手全体の中からランダムに選ばれた k 人の売手の価格の分布を知ったとき，それらの売手を対象に，連続的にであれば何回でもサーチすることができると想定しているが，もしそれができずに1回しかサーチできないということであれば，このように k 人の売手の価格の分布を知るということをあえておこなう必要はなくなる。このことは次の命題1で示される。

命題1　実験Bの結果に実験Cを1回しか適用できないときは

$$a_n \leqq b_n \qquad n=1,\ 2, \ldots,\ N$$

が成りたつ。

〔証明〕 (i) $n=1$ のとき。b_1 は残り1回の実験が可能であるときに，それに実験Bをあてたときの期待価格である。実験Bを最後に用いることは避けるとしたので

$$b_1 = \infty$$

とおかれることになる。一方

$$\begin{aligned} a_1 &= \int e_0(x)\,dF(x) \\ &= \int x\ dF(x) \end{aligned}$$

となり，これは価格の確率分布の期待値（存在を仮定する）であるから

$$a_1 \leqq b_1$$

を得る。

(ii) $n=2, 3, \ldots, N$ のとき。実験Bの結果に対して実験Cを1回しか適用できないということは (3) において実験Cの項がないということである。このとき補題の証明の中の (4) と同じように

$$a_n=\int \min(x-s_{n-1},\ 0)dF(x)+s_{n-1}, \tag{8}$$

(6) と同じように

$$b_n=\int\cdots\int \min\{s_{n-1},\ c_{n-1}(x_1,\ldots,\ x_k)\}dF(x_1)\ldots dF(x_k) \tag{9}$$

と書くことができるが，(9) の中の $c_{n-1}(x_1,\ldots,x_k)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}c_{n-1}(x_1,\ldots,\ x_k)&=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}h_{n-2}(x_i|x_1,\ldots,\ x_k)\\&=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min(x_i,\ a_{n-2},\ b_{n-2})\\&=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min(x_i,\ s_{n-2}).\end{aligned} \tag{10}$$

なお $n=2$ のとき b_2 は残り2回の実験が可能なときに最初に実験 B をおこなったときの期待価格をあらわす。このとき $c_1(x_1,\ldots,x_k)$ は実験Bの次に実験Cをおこなったときの実験Cにともなう期待価格をあらわす。このあと実験はできないので $n=2$ のとき (10) の s_{n-2}，すなわち s_0 は存在しないことになり，x_i だけが残る。しかし s_0 を無限大とおけば必ず x_i が残ることになるので s_0 をそのように考える。$s_1=\min(a_1,\ b_1)=a_1=E(X)$ であるから〔$E(X)$ は確率変数 X の期待値で存在すると仮定する〕，$s_1<s_0$ となる。このことと補題から

$$s_{n+1}\leqq s_n \qquad n=0,\ 1,\ldots,\ N-1$$

となる。

このとき (9) は

$$\begin{aligned}b_n&=\int\cdots\int\min\Big\{s_{n-1},\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min(x_i,\ s_{n-2})\Big\}dF(x_1)\ldots dF(x_k)\\&\geqq\int\cdots\int\min\Big\{s_{n-1},\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min(x_i,\ s_{n-1})\Big\}dF(x_1)\ldots dF(x_k)\\&=\int\cdots\int\min\Big\{0,\ \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min(x_i-s_{n-1},\ 0)\Big\}dF(x_1)\ldots dF(x_k)+s_{n-1}\end{aligned}$$

$$=\int\ldots\int\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min(x_i-s_{n-1},\ 0)dF(x_1)\ldots dF(x_k)+s_{n-1}$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\int\min(x-s_{n-1},\ 0)dF(x)+s_{n-1}$$

$$=\int\min(x-s_{n-1},\ 0)dF(x)+s_{n-1}$$

となる。最後の式は (8) により a_n に等しいので $b_n\geqq a_n$ となる。(証明終)

このことからサーチの回数が高々2回と限られているときは ($N=2$), あえて一部分の売手の価格の分布を聞いてみる必要はまったくなく，売手全体をサーチの対象にすることで十分であることがわかる。すなわち $N=2$ のときは最初に実験 A をして買うか，2回続けて実験 A をしたあとに買うかのいずれかがおこなわれることになる。サーチを3回以上してよいときは，売手全体の中から一部分の売手をとりだしてみることが有利となることがある。有利となるかどうかは売手全体の価格の分布と最大限可能なサーチ回数に依存する。

補題および命題1のようにして得られた結論は，価格の分布について想定された確率分布が期待値をもつようなものであれば，いかなる確率分布についても成りたつ。以下では最適なサーチにみられる特徴をさらに明らかにするために確率分布を特定のものに限定する。

売手は $\alpha(>0)$ の価格で売っているか $\beta(>\alpha)$ の価格で売っているとする。α の価格で売っている売手の割合は $p(0<p<1)$ であり，β の価格で売っている売手の割合は $1-p$ であるとする。売手全体の中からランダムに選ばれた k 人の売手の価格の分布を知るということは，実験 B で得られた結果である x_1, $x_2,\ldots,x_k$ について，この各々は α か β のいずれかであるので，これらの k 個のうち何個が α であり，何個が β であるかを知ることである。k 個のうち u 個が α である状態 (k 個のうち $k-u$ 個は β である状態) を K_u であらわすことにする。u は0から k までの値をとりうる。

このとき，残りの可能な実験回数が n のときに実験 A あるいは B のうち有

利なほうを最初におこなうときの期待価格 s_n は安いほうの価格 α よりも大きく，高いほうの価格 β よりも小さい。実験Cを最初におこなったときも同じようになるが，このときの期待価格 $c_n(x_1,\dots,x_n)$ を K_u の記号を用いて $c_n(K_u)$ と表わすことにすると，これは $u=k$ のとき，すなわち実験Bの結果すべての売手の価格が安いほうの価格 α であったときは，α に等しくなり，$u=0$ のとき，すなわち k 人すべてが高いほうの価格 β で売っているときは，実験Cが最後である場合，すなわち $n=1$ である場合，にかぎり β に等しくなる。このことは次の命題2のように確かめることができる。そこでは，価格が α と $\beta(>\alpha)$ の二つだけのときは a_n, b_n, $c_n(K_u)$ が次のように簡単に表わされることを用いる。

最初に，$n=2, 3,\dots, N$ について

$$a_n=\min(\alpha,\ a_{n-1},\ b_{n-1})p+\min(\beta,\ a_{n-1},\ b_{n-1})(1-p)$$

となるが，$\alpha\leqq s_{n-1}$, $a_{n-1}\leqq\beta$ であることは明らかであるから

$$a_n=\alpha p+s_{n-1}(1-p) \tag{11}$$

となる。次に価格が α である確率が p であり，β である確率が $1-p$ であることを確率関数 $p(x)$ で表わすことにすると，$n=2, 3,\dots, N$ について

$$\begin{aligned} b_n&=\sum_{x_1}\dots\sum_{x_k} g_{n-1}(x_1,\dots,\ x_k)p(x_1)\dots p(x_k)\\ &=\sum_{u=0}^{k}\min\{a_{n-1},\ b_{n-1},\ c_{n-1}(K_u)\}\binom{k}{u}p^u(1-p)^{k-u}\\ &=\sum_{u=0}^{k}\min\{s_{n-1},\ c_{n-1}(K_u)\}\binom{k}{u}p^u(1-p)^{k-u} \end{aligned} \tag{12}$$

となる。そして $n=2, 3,\dots, N$ について

$$c_n(K_u)=\frac{u}{k}\alpha+\frac{k-u}{k}\min\{s_{n-1},\ c_{n-1}(K_u)\} \tag{13}$$

となる。

命題2 $n=1, 2, \ldots, N-1$ について

$$\alpha < s_n < \beta \tag{14}$$

$$\alpha < c_n(K_u) < \beta \qquad u=1, 2, \ldots, k-1 \tag{15}$$

$$c_n(K_k) = \alpha \tag{16}$$

が成りたち，$u=0$ のときは

$$\alpha < c_n(K_0) = s_{n-1} < \beta \qquad n=2, 3, \ldots, n-1 \tag{17}$$

$$c_1(K_0) = \beta \tag{18}$$

となる。

(証明) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} s_1 &= \min(a_1, b_1) \\ &= \min\{\alpha p + \beta(1-p), \infty\} \\ &= \alpha p + \beta(1-p) \end{aligned}$$

となるので，$\alpha<\beta$, $0<p<1$ と仮定していたことより，$\alpha<s_1<\beta$ となる。また $n=1$ のとき，$u=1, 2, \ldots, k-1$ について

$$c_1(K_u) = \frac{u}{k}\alpha + \frac{k-u}{k}\beta$$

となるので $\alpha<c_1(K_u)<\beta$ となる。

ここで $n\geqq 2$ であるような n について $\alpha<s_{n-1}<\beta$, および $\alpha<c_{n-1}(K_u)<\beta$ を仮定すると，(11) の

$$a_n = \alpha p + s_{n-1}(1-p)$$

より $\alpha<a_n<\beta$ を得る。次に (12) より

$$b_n = \sum_{u=0}^{k} \min\{s_{n-1}, c_{n-1}(K_u)\}\binom{k}{u} p^u (1-p)^{k-u}$$

$$>\sum_{u=0}^{k}\alpha\binom{k}{u}p^u(1-p)^{k-u}$$
$$=\alpha\{p+(1-p)\}^{u+(k-u)}$$
$$=\alpha$$

となり，同じようにして $b_n<\beta$ となる。これより $\alpha<b_n<\beta$ となるので，すでに得られた $\alpha<a_n<\beta$ とあわせて $\alpha<s_n<\beta$ を得る。さらに (13) より

$$c_n(K_u)=\frac{u}{k}\alpha+\frac{k-u}{k}\min\{s_{n-1},\ c_{n-1}(K_u)\}$$

であるから，$u\neq 0, k$ のとき $\alpha<c_n(K_n)<\beta$ を得る。これで (14) と (15) が得られたことになる。$u=k$ のとき (16) が成りたつことは k 人の売手の価格がすべて α であることから明らかである。$u=0$ のとき (17) と (18) が成りたつことも k 人の売手の価格がすべて高いほうの価格 β であることから明らかである。(証明終)

売手全体のうち安いほうの価格 α で売っている売手の割合 p に対して，実験 B で得られた k 人の売手のうち安いほうの価格 α で売っている売手の割合 u/k のほうが大きいか小さいかによって，この実験 B のあとに実験 C をしたほうがよいか，それともこの実験 B の結果を捨ててあらためて実験 A あるいはBのいずれかをしたほうがよいかについては少くとも次のことがいえる。すなわち実験 B で得られた k 人のうち安いほうの価格 α で売っている売手の割合 u/k が，売手全体のうち α の価格で売っている売手の割合 p よりも小さいならば，k 人の売手を対象にサーチするよりも売手全体を対象にサーチしたほうが有利である。このことは次の命題3で示される。

命題3　$p>u/k$ ならば，$n=1, 2,\ldots, N-1$ について

$$s_n<c_n(K_u)\qquad u=0,\ 1,\ldots,\ k-1 \tag{19}$$

が成りたつ。

（証明）

$u=0$ のとき，$n=1$ ならば命題2の (14) と (18) から (19) の成りたつことがあきらかである。$u=0$ で $n\geqq 2$ のときは，(11) と命題2の (17) から

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha p + s_{n-1}(1-p) \\ &= \alpha p + c_n(K_0)(1-p) \\ &< c_n(K_0) \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned} s_n &= \min(a_n,\ b_n) \\ &< c_n(K_0) \end{aligned}$$

となり，やはり (19) が成りたつ。

次に $u=1, 2, \ldots, k-1$ の場合である。$n=1$ のとき

$$\begin{aligned} s_1 &= \min(a_1,\ b_1) \\ &= a_1 \\ &= \alpha p + \beta(1-p) \end{aligned}$$

$$c_1(K_u) = \frac{u}{k}\alpha + \frac{k-u}{k}\beta$$

であるから

$$\begin{aligned} s_1 - c_1(K_u) &= \alpha\left(p - \frac{u}{k}\right) + \beta\left(\frac{u}{k} - p\right) \\ &= (\beta - \alpha)\left(\frac{u}{k} - p\right) \end{aligned}$$

となる。$\alpha < \beta$ であるから $u/k < p$ のとき

$$s_1 < c_1(K_n) \qquad n=1,\ 2, \ldots,\ k-1$$

となる。$n\geqq 2$ であるような n について，$u/k<p$ のときに

$$s_{n-1} < c_{n-1}(K_u) \qquad u=1,\ 2, \ldots,\ k-1$$

を仮定する。このとき (11) と (13) より

$$a_n - c_n(K_u) = \alpha p + s_{n-1}(1-p) - \frac{u}{k}\alpha - \frac{k-u}{k}\min\{s_{n-1},\ c_{n-1}(K_u)\}$$

$$= \alpha\left(p - \frac{u}{k}\right) + s_{n-1}\left(\frac{u}{k} - p\right)$$

$$= (s_{n-1} - \alpha)\left(\frac{u}{k} - p\right)$$

となるので，命題2の (14) と，ここでの条件である $u/k < p$ より

$$a_n - c_n(K_u) < 0$$

となる。こうして

$$\begin{aligned} s_n &= \min(a_n,\ b_n) \\ &< c_n(K_u) \qquad u = 1,\ 2, \ldots,\ k-1 \end{aligned}$$

を得る。(証明終)

この命題3は実験 B でとりだす売手の数 k が2以上であるならどんな値でもよかった。この売手の数 k がちょうど2であるときはさらに次のことがいえる。すなわち，売手の価格が α か $\beta(>\alpha)$ のどちらかであるとしたとき，売手全体のうち安いほうの価格 α で売る売手の割合が 1/2 より小のときは，もし実験 B で得られた2人 ($k=2$) の売手のうち1人が α の価格で1人が β の価格ならば，この2人の売手を対象にサーチしたほうがよいということである。ただしこのサーチは復元抽出によるとする。このことは次の命題4の (22) で示される。

命題4　$k=2$ のとき，$n=1, 2, \ldots, N-1$ について

$$s_n < c_n(\alpha,\ \beta) \qquad p > \frac{1}{2} \tag{20}$$

$$s_n = c_n(\alpha,\ \beta) \qquad p=\frac{1}{2} \tag{21}$$

$$s_n > c_n(\alpha,\ \beta) \qquad p<\frac{1}{2} \tag{22}$$

（証明） (i) 命題3において $k=2,\ u=1$ としたときが (20) であるから証明はすでにおこなわれていることになる。

(ii) $n=1$ のとき　$b_1=\infty$ とおくので

$$\begin{aligned} s_1 &= \min(a_1,\ b_1) \\ &= a_1 \\ &= \alpha p+\beta(1-p) \end{aligned}$$

となる。$k=2$ の実験Bの結果が価格 α の売手と価格 β の売手であったとき，この結果に実験Cをおこなったときの期待価格は

$$c_1(\alpha,\ \beta)=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta$$

である。したがって

$$\begin{aligned} s_1-c_1(\alpha,\ \beta) &= \alpha\left(p-\frac{1}{2}\right)+\beta\left(\frac{1}{2}-p\right) \\ &= (\beta-\alpha)\left(\frac{1}{2}-p\right) \end{aligned}$$

となる。$\beta>\alpha$ であるから，$p=1/2$ のとき

$$s_1=c_1(\alpha,\ \beta)$$

となり，$p<1/2$ のとき

$$s_1>c_1(\alpha,\ \beta)$$

となる。

（イ）　ここで $p<1/2$ のとき，$n\geqq 2$ である n について $s_{n-1}>c_{n-1}(\alpha, \beta)$ を仮定する。命題2の (15) から $c_{n-1}(\alpha, \beta)>\alpha$ であることも用いると次のようになる。

$$\begin{aligned}
a_n-c_n(\alpha, \beta)&=\alpha p+s_{n-1}(1-p)-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\min\{s_{n-1}, c_{n-1}(\alpha, \beta)\}\\
&=\alpha\left(p-\frac{1}{2}\right)+s_{n-1}(1-p)-\frac{1}{2}c_{n-1}(\alpha, \beta)\\
&>\alpha\left(p-\frac{1}{2}\right)+c_{n-1}(\alpha, \beta)\left(\frac{1}{2}-p\right)\\
&=\{c_{n-1}(\alpha, \beta)-\alpha\}\left(\frac{1}{2}-p\right)\\
&>0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n-c_n(\alpha, \beta)&=\alpha p^2+2\min\{s_{n-1}, c_{n-1}(\alpha, \beta)\}p(1-p)\\
&\qquad+s_{n-1}(1-p)^2-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\min\{s_{n-1}\ c_{n-1}(\alpha, \beta)\}\\
&=\alpha p^2+2c_{n-1}(\alpha, \beta)p(1-p)+s_{n-1}(1-p)^2\\
&\qquad-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}c_{n-1}(\alpha, \beta)\\
&>\alpha\left(p^2-\frac{1}{2}\right)+c_{n-1}(\alpha, \beta)\left\{2p(1-p)+(1-p)^2-\frac{1}{2}\right\}\\
&=\alpha\left(p^2-\frac{1}{2}\right)+c_{n-1}(\alpha, \beta)\left(-p^2+\frac{1}{2}\right)\\
&=\left(p^2-\frac{1}{2}\right)\{\alpha-c_{n-1}(\alpha, \beta)\}\\
&>0.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
s_n&=\min(a_n, b_n)\\
&>c_n(\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

を得る。これで (22) が証明された。

（ロ） $p=1/2$ のとき，$n\geqq 2$ である n について $s_{n-1}=c_{n-1}(\alpha, \beta)$ を仮定する。このとき（イ）の計算と同じようにして

$$a_n-c_n(\alpha, \beta)=\alpha p+s_{n-1}(1-p)-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}s_{n-1}$$

$$=0$$

$$b_n-c_n(\alpha, \beta)=\alpha\left(p^2-\frac{1}{2}\right)+c_{n-1}(\alpha, \beta)\left(-p^2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(p^2-\frac{1}{2}\right)\{\alpha-c_{n-1}(\alpha, \beta)\}$$

$$>0$$

となる。したがって $a_n=c_n(\alpha, \beta)<b_n$ となるから

$$s_n=\min(a_n, b_n)$$

$$=a_n$$

$$=c_n(\alpha, \beta)$$

を得る。これで (21) が証明された。（証明終）

この命題4を用いると，残り $n-1$ 回の実験が可能なときに実験Bが選択されるならば，残り n 回の実験が可能なときにも実験Bが選択されることを確かめることができる。このことは次の命題5で示される。ただし価格は α と $\beta(>\alpha)$ の二つだけであり，実験Bでとりだすことのできる売手の数 k は2である。

命題5　$p<1/2$ のとき，$n=4, 5,\ldots, N$ について $b_{n-1}<a_{n-1}$ ならば $b_n<a_n$ である。

（証明） (11) および命題4の (22) から

$$a_n=\alpha p+s_{n-1}(1-p)$$

$$b_n=\alpha p^2+2c_{n-1}(\alpha, \beta)p(1-p)+s_{n-1}(1-p)^2$$

となるので

$$a_n - b_n = \alpha p(1-p) - 2c_{n-1}(\alpha, \beta)p(1-p) + s_{n-1}(1-p)p$$
$$= p(1-p)\{\alpha - 2c_{n-1}(\alpha, \beta) + s_{n-1}\}$$

となる。$\alpha-2c_{n-1}(\alpha, \beta)+s_{n-1}$ を t_{n-1} とおくと，命題4の (22) より

$$t_{n-1} = \alpha - 2c_{n-1}(\alpha, \beta) + s_{n-1}$$
$$= \alpha - 2\left\{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}c_{n-2}(\alpha, \beta)\right\} + s_{n-1}$$
$$= s_{n-1} - c_{n-2}(\alpha, \beta)$$

となる。a_n-b_n が正か負かは，$p(1-p)$ が正であるので t_{n-1} が正か負かと同じである。そこで以下では t_{n-1} についてみていく。

(i) $n=4$ のとき。仮定より $b_3<a_3$ なのと命題4の (22) を用いることにより

$$t_3 = s_3 - c_2(\alpha, \beta)$$
$$= b_3 - c_2(\alpha, \beta)$$
$$= \alpha p^2 + 2c_2(\alpha, \beta)p(1-p) + s_2(1-p)^2 - c_2(\alpha, \beta)$$
$$= p^2\{\alpha - 2c_2(\alpha, \beta) + s_2\} + p\{2c_2(\alpha, p) - 2s_2\} + s_2 - c_2(\alpha, \beta)$$
$$= p^2\{\alpha - 2c_2(\alpha, \beta) + s_2\} + \{c_2(\alpha, \beta) - s_2\}(2p-1)$$
$$= p^2\left\{\alpha - 2\left[\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}c_1(\alpha, \beta)\right] + s_2\right\} + \left\{c_2(\alpha, \beta) - s_2\right\}(2p-1)$$
$$= p^2\{s_2 - c_1(\alpha, \beta)\} + \{c_2(\alpha, \beta) - s_2\}(2p-1)$$

となる。ここで第1項については命題1を応用して，$s_2=\min(a_2, b_2)=a_2$ より

$$s_2 - c_1(\alpha, \beta) = a_2 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

となる。このとき

$$a_2 = \alpha p + a_1(1-p)$$
$$= \alpha p + \{\alpha p + \beta(1-p)\}(1-p)$$
$$= \alpha p + \alpha p(1-p) + \beta(1-p)^2$$
$$= 2\alpha p - \alpha p^2 + \beta - 2\beta p + \beta p^2$$

$$=(\beta-\alpha)p^2-2(\beta-\alpha)p+\beta$$
$$=(\beta-\alpha)p(p-2)+\beta$$

であるから

$$s_2-c_1(\alpha,\ \beta)=(\beta-\alpha)p(p-2)+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$
$$=(\beta-\alpha)\left(p^2-2p+\frac{1}{2}\right)$$

となり，これは $p<1-(\sqrt{2}/2)<1/2$ のときに正となる。

第2項については命題4の (22) と $p<1/2$ より正になる。したがって $t_3>0$ となり，$a_4>b_4$ となる。

(ii) $n\geqq 4$ である n について $a_n>b_n$, 同じことであるが，$t_{n-1}>0$ が成りたつと仮定する。このとき $s_n=\min(a_n,\ b_n)=b_n$ より

$$t_n=s_n-c_{n-1}(\alpha,\ \beta)$$
$$=b_n-c_{n-1}(\alpha,\ \beta)$$
$$=\alpha p^2+2c_{n-1}(\alpha,\ \beta)p(1-p)+s_{n-1}(1-p)^2-c_{n-1}(\alpha,\ \beta)$$
$$=p^2\{\alpha-2c_{n-1}(\alpha,\ \beta)+s_{n-1}\}+2\{c_{n-1}(\alpha,\ \beta)-s_{n-1}\}p$$
$$+s_{n-1}-c_{n-1}(\alpha,\ \beta)$$
$$=p^2\left\{\alpha-2\left[\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}c_{n-2}(\alpha,\ \beta)\right]+s_{n-1}\right\}+\left\{c_{n-1}(\alpha,\ \beta)-s_{n-1}\right\}(2p-1)$$
$$=p^2\{s_{n-1}-c_{n-2}(\alpha,\ \beta)\}+\{c_{n-1}(\alpha,\ \beta)-s_{n-1}\}(2p-1)$$
$$=t_{n-1}p^2+\{c_{n-1}(\alpha,\ \beta)-s_{n-1}\}(2p-1)$$

を得る。仮定より $t_{n-1}>0$ であり，第2項については命題4の (22) と $p<1/2$ より正となるので $t_n>0$, したがって $a_{n+1}>b_{n+1}$ を得る。(証明終)

このことから，価格が α と β の二つだけであり，実験Bでとりだすことのできる売手の数 k が2の場合，実験の選択について一貫性のあることが確かめられた。たとえば実験Bをしたがよい結果が得られなかったと考えて次に実験

Aをしたが，またよい結果が得られなかったと考えて次は実験Bを選択するということは，本稿のようなモデルにおいては合理的でないということである。

4. 数　値　例

価格が α か $\beta(>\alpha)$ であり，実験Bでとりだす売手の数 k が2のとき，安いほうの価格 α で売っている売手の割合 p がどのような値であれば買手は実験Bを用いることになるであろうか。可能な総実験回数 N が3のときのトリリーが図1に示されている。それを用いて計算すると，$N=3$ のとき $p<1-(\sqrt{2}/2)$ ならば最初の実験は実験Aよりも実験Bのほうが有利であるとなる。

$N=4$ のときはさらに大きなトリーを書かねばならないが，$p<.3994$ なら最初の実験は実験Bが有利と計算される。

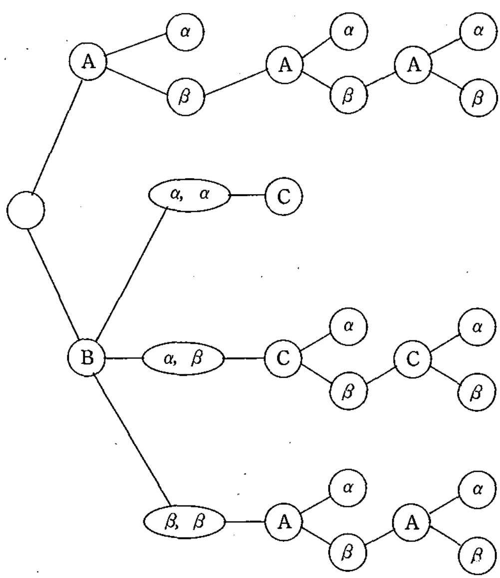

図1　$p<\frac{1}{2}$, $N=3$ のときのトリー（A, B, C は実験を表わし，α, β はその結果としての価格を表わす。）

5. 結　　び

行動に直接役にたつ情報と間接的に役にたつ情報という2種類の情報のもとでの価格のサーチについて考察した。価格が α と β の二つのときで，実験Bでとりだすことのできる売手の数が2のとき，最適な情報収集過程においては実験A, Bの選択に一貫性があることが確かめられた。また売手全体のうち，安いほうの価格 α で売る売手の割合 p が小さいときは，最初に実験Aをするよりも実験Bをしたほうが有利であると判断される。p がどの程度小さければよいかは，最大限可能な総実験回数 N に依存する。

参 考 文 献

[1] Lippman, S. A. and J. J. McCall, "The Economics of Job Search: A Survey (Part 1)," *Economic Inquiry,* Vol. 14, No. 2, 1976, pp. 155–189.

[2] Manheim, M. L., *Hierarchical Structure: A Model of Design and Planning Processes,* The M. I. T. Press, 1966.