分布が未知のときの2種類の情報による価格のサーチ*

遠藤　薫

1. はじめに

直接役にたつ情報と間接的に役にたつ情報の2種類の情報がある場合の，価格のサーチにおける買手の行動について考察する。価格の分布が既知の場合については，遠藤・長尾 [2] により検討された。本稿では価格の分布が未知の場合について考える。

売手の1人から価格を聞いたとき，買手はその価格で買うことができるのであるから，個々の売手から聞く価格は直接役にたつ情報である。一部分の売手について，そのなかのどの売手がどの価格で売っているかはわからないが，それらの売手の価格の分布が買手に知らされるとき，買手はただちにある価格で買うことはできないが，それらの売手だけを対象にしてサーチするか，それとも売手全体を対象にしてサーチするかの選択が可能であるので，一部分の売手の価格の分布は間接的に役にたつ情報ということができる。

価格の分布が未知の場合のサーチについては，価格の分布を多項分布，そこにおける未知パラメターについての主観的確率分布を多項分布に共役なディリクレ分布として，ロスチャイルド [4] により研究された。そこでは本稿でいう直接役にたつ情報だけが用いられており，間接的に役にたつ情報は考慮されていない。

原稿受領日　1984年11月20日

* 本稿は日本オペレーションズ・リサーチ学会北海道支部研究会（1984年1月24日），および小樽商科大学土曜研究会における報告にもとづいている。メンバーの方々から有益なコメントをいただいた。また筑波大学長尾昭哉教授，北海道大学関口恭毅助教授から貴重な助言をいただいた。記して感謝の意を表します。

全体のなかから一部分だけをとりだして，その一部分についての情報を得て，全体をサーチの対象とするか，一部分だけをサーチの対象とするかの判断をすることは，マンハイム [3] にもとづく。そこでは一部分についての間接的に役にたつ情報が，1つの値で与えられる。本稿ではそれが分布で与えられる。売手全体の価格の分布は未知であるが，一部分の売手の価格の分布が買手に提供されるとき，それ自体は既知となる。

第2節では，モデルを定式化し，第3節では，価格が2つあるとき[1)]，安い価格で買うことを目的として，最適に情報を収集するときの期待価格について検討する。第4節では，間接的に役にたつ情報を買手が求めるのはどんな場合であり，求めないのはどんな場合であるかを調べる。一部分の売手の価格の分布を，売手全体のなかからくり返し求めて，よい分布が得られたところで，その一部分の売手を対象に連続的に何回でも，回数の制約の範囲内でサーチすることができるなら，一部分の売手の価格の分布という間接的に役にたつ情報は買手から求められることがある。このことは数値例で示される。そこではまた全部で2回しかサーチできないときは間接的に役にたつ情報が買手から求められないことも示される。

2. モ デ ル

個々の売手の価格がいくらであるか，買手にはわからないので，買手にとって価格は確率変数であるとみなすことができる。価格を確率変数 X であらわし，実際に知った価格を，確率変数 X の実現値として x であらわす。

売手全体の中から1人の売手をランダムにとりだして価格を聞くことを実験Aということにする。売手全体のなかからランダムに（復元抽出で）とりだされた $k(\geqq 2)$ 人の売手の価格の分布を知ることを実験Bということにする。このとき k 人のなかのどの売手がどの価格で売っているかは，買手にはわからな

1) この場合，売手の価格は高いほうと安いほうの2つだけである。このことは現実的ではない。しかしある値以下の価格と，それを越える価格との，2つにわけた場合に買手が関心をもつという状況があるであろう。

い。実験 B でとりだされた k 人のなかから，ランダムに1人の売手をとりだして価格を聞くことを実験Cということにする（簡単のために復元抽出によるものとする)。

サーチの途中で，過去に聞いた売手のところにもどって買うことはできないし，過去に知った k 人の売手を対象にサーチすることもできないとする[2]。しかし k 人の売手の価格の分布を知ったときに，そこをサーチしようとするなら，可能なかぎり何回でもサーチすることができるとする。

実験 A, B, C について，合計 N 回のサーチが可能であるとする。もっとも安い価格の売手に出あったところで，サーチをやめ買うことにする。最後まで，もっとも安い価格にであわないということもありうる。N 回目に，すなわち最後に実験 B をおこなっても，k 人の価格の分布を知るだけであり，そのなかの売手の1人から買うことはできないとする。

どの実験についても，費用はかからないものとする。買手にとっての制約は総実験回数 N だけである[3]。

サーチの途中における，残りの可能な実験回数を n とする。そのときまでに $N-n$ 回の実験をおこなったことになる。そのうちの最初の $N-n-1$ 回の実験結果の集合を G であらわすことにする。

このとき，これまでの $N-n$ 回の実験のうち最後の実験が，実験 A, 実験 B, 実験 C のいずれかであるかによって，次の3つの式が得られる。

i)　実験 A の結果が x であるときに，残り n 回の実験が可能なとき，実験をやめることもふくめて，以後の実験を最適に選択することにより得られる期待価格を $e_n(x|G)$ とすると

$$e_n(x|G)=\min\begin{cases} x & \text{（実験をやめる）} \\ a_n[G,(x)] & \text{（実験 A）} \\ b_n[G,(x)] & \text{（実験 B）} \end{cases} \qquad (1)$$

2）リコールできない。

3）これらの仮定は，遠藤・長尾〔2〕における仮定と同じである。

となる。集合 $\{G, (x)\}$ は，これまでの $N-n$ 回の実験結果の集合である。$a_n[G, (x)]$ は，残り n 回の実験のうち，最初は実験 A をおこない，そのあとは実験をやめることもふくめて最適に実験を選択したときの期待価格をあらわすとする。$H=\{G, (x)\}$ とおくと

$$a_n[G,(x)]=a_n(H)$$
$$=\sum_y e_{n-1}(y|H)p(y|H) \tag{2}$$

となる。価格 X は離散的であるとし，実験結果の集合が H であるときに，価格が x の値をとる確率は $p(x|H)$ であるとした。

$b_n[G, (x)]$ は，残り n 回の実験のうち，最初は実験 B をおこない，そのあとは実験をやめることもふくめて最適に実験を選択したときの期待価格とする。

$$b_n[G,(x)]=b_n[H]$$
$$=\sum_{y_1}\cdots\sum_{y_k} g_{n-1}(y_1,\ldots,y_k|H)p(y_1,\ldots,y_k|H) \tag{3}$$

である。$g_{n-1}(y_1,\ldots, y_k|H)$ は次の ii) であきらかにされる。$p(x_1,\ldots, x_k|H)$ は，実験結果の集合が H であるときに，ランダムにとられた k 人の売手の価格が $x_1,\ldots, x_k$ となる確率をあらわす。以上は $n=1,\ldots, N-1$ のときである。$n=0$ のときは最後に聞いた価格 x で買うしかないので，$e_0(x|G)=x$ となる。

ii) 実験 B の結果として $x_1,\ldots, x_k$ を得たときに，残り n 回の実験が可能なとき，実験をやめることもふくめて，以後の実験を最適に選択したときの期待価格を $g_n(x_1,\ldots, x_k|G)$ とすると

$$g_n(x_1,\ldots,x_k|G)=\min\begin{cases} a_n[G,(x_1,\ldots,x_k)] & \text{(実験 A)} \\ b_n[G,(x_1,\ldots,x_k)] & \text{(実験 B)} \\ c_n(x_1,\ldots,x_k|G) & \text{(実験 C)} \end{cases} \tag{4}$$

となる。$H=\{G, (x_1,\ldots, x_k)\}$ とおくと，$a_n(H)$, $b_n(H)$ は i) のときとおなじように計算される。

$c_n(x_1,\ldots, x_k|G)$ は，残り n 回の実験のうち，最初は実験 C をおこない，そ

れ以後は，実験をやめることもふくめて，最適に実験を選択したときの期待価格をあらわすものとする。

$$c_n(x_1,\ldots,x_k|G)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}h_{n-1}(x_i|x_1,\ldots,x_k:\ G) \tag{5}$$

であり，$h_{n-1}(x_i|x_1,\ldots,x_k:G)$ については次の iii）であきらかにされる。以上は $n=1,\ldots,N-1$ のときである。最後に実験 B をおこなったときは，買うことはできないとしたので，それをさけるため $g_0(x_1,\ldots,x_k|G)=\infty$ とおく。したがって $a_0(H)=\infty$, $b_0(H)=\infty$, $c_0(x_1,\ldots,x_k|G)=\infty$ とおかれることになる。

iii） 実験 C の結果として，$x_1,\ldots,x_k$ のなかからある1人の売手の価格 x_i を得たときに，残り n 回の実験が可能なとき，実験をやめることもふくめて以後の実験を最適に選択したときの期待価格を $h_n(x_i|x_1,\ldots,x_k:G)$ とすると

$$h_n(x_i|x_1,\ldots,x_k:\ G)=\min\begin{cases} x_i & \text{(実験をやめる)} \\ a_n[G,\ (x_1,\ldots,\ x_k)] & \text{(実験 A)} \\ b_n[G,\ (x_1,\ldots,\ x_k)] & \text{(実験 B)} \\ c_n(x_1,\ldots,\ x_k|G) & \text{(実験 C)} \end{cases} \tag{6}$$

となる。これは $n=1,\ldots,N-1$ のときである。最後に実験 C をおこなうときは，得られた価格 x_i で買うしかないので，$h_0(x_i|x_1,\ldots,x_k:G)=x_i$ となる。

以上が買手の最適なサーチのしかたについての数式による表現である。必ずサーチをおこなってから買うと仮定する。そうすると最初の選択，すなわち $n=N$ のときの選択は，実験 A と実験 B のどちらをおこなうかとなる。

売手の価格は $\alpha(>0)$ か $\beta(>\alpha)$ のいずれかであるとする。買手は価格が α か β であることはわかっているが，それぞれの価格で売っている売手の割合がどのようになっているかは，わからないとする。価格の分布は，α である確率が p($0<p<1$ であるが，p は未知)，β である確率が $1-p$ と表わされる。しかしここで便宜的に確率変数 X は価格そのものをあらわさず，売手から聞いた価格が安いほうの価格 α であるならば $x=1$, 高いほうの価格 β であるならば $x=0$ という値をとるものとして考える。このため，(1) と (6) 式の右辺の，

実験をやめた場合に対応する x あるいは x_i は，それが1の値なら α で，0の値なら β でおきかえられることになることに注意しなければならない。すなわち，$v(x=1)=\alpha$, $v(x=0)=\beta$ であるような関数 $v(x)$ を，x のかわりとして用いることになる。このとき，確率変数 X はパラメターが $p(0<p<1)$ のベルヌイ分布にしたがうことになり，確率関数は

$$f(x|p)=p^x(1-p)^{1-x} \qquad x=0,1$$

とあらわされる。

未知パラメター p について，買手は主観的確率分布をもち，それはベルヌイ分布に共役なベータ分布であるとする。この分布の密度関数は，$s(>0)$, $t(>0)$ をパラメターとして

$$\xi(p|s,t)=\frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)\Gamma(t)}p^{s-1}(1-p)^{t-1} \qquad 0<p<1$$

とあらわされる。

サーチをして価格を知ることにより，主観的確率分布はベイズの定理をもちいて修正されるものとする。パラメターが s, t のベータ分布を主観的確率分布としてもつ買手が，ランダムにとられた m 人の売手の価格を聞いて，l 人が α, $m-l$ 人が β であるとわかったとき，修正された主観的確率分布はパラメターが $s+l$, $t+m-l$ のベータ分布となる4)。

3. 実験結果の集合と期待価格

価格 α の得られる確率 p（未知）についての主観的確率分布は，実験結果がわかるたびに修正される。修正された分布はベイズの定理による事後分布である。実験 A あるいは実験 C で価格 α を得たときに実験をやめるが，実験 B の結果に α が含まれていても，実験 B の結果の要素すべてが α ということでないなら，実験をやめることは確定しない。過去の実験結果の集合を G と

4) DeGroot [1], p. 160. たがいに独立な $X_1,\dots,X_m$ の実現値として，l 個の1と $m-l$ 個の0を得たからである。

おく。価格 α を得たとき，ベルヌイ分布にしたがう確率変数 X の実現値として1を得たと考えるが，G のなかには実験Bで α を得たときの1がふくまれていることがあろう。G のなかの1の個数と0の個数の相違が期待価格におよぼす影響を命題3,4で調べる。命題1は期待価格の基礎的性質である。

命題1　価格は $\alpha(>0)$ と $\beta(>\alpha)$ の2つであり，α である確率 $p(0<p<1)$ が未知で，p についての主観的確率分布がベータ分布であるとする。実験Bでとりだすことのできる売手の数を $k(\geqq 2)$ とする。このとき任意の結果集合 G について

$$\alpha<a_n(G)<\beta \qquad n=1,\ldots,N$$
$$\alpha<b_n(G)<\beta \qquad n=2,\ldots,N$$
$$\alpha\leqq c_n(x_1,\ldots,x_k|G)<\beta \qquad n=2,\ldots,N-1,\ \text{等号は}\ x_1=1,\ldots,x_k=1\ \text{のとき}$$
$$c_1(x_1,\ldots,x_k|G)=\alpha \qquad x_1=1,\ldots,x_k=1\ \text{のとき}$$
$$c_1(x_1,\ldots,x_k|G)=\beta \qquad x_1=0,\ldots,x_k=0\ \text{のとき}$$
$$\alpha<c_1(x_1,\ldots,x_k|G)<\beta \qquad x_1=1,\ldots,x_k=1\ \text{でなく}\ x_1=0,\ldots,x_k=0\ \text{でないとき}$$

となる。

〔証明〕実験結果の集合 G のもとでの，主観的確率分布であるベータ分布のパラメターを s,t とすると，これはいつも正である。次に m 人の売手をランダムにとりだして価格を聞いたとき，たとえば最初の l 人の価格が α で，残りの $m-l$ の価格が β となる確率は次のようになる（$m\geqq 1$）。

$$p(x_1=1,\ldots,x_l=1,x_{l+1}=0,\ldots,x_m=0|G)$$
$$=\int_0^1 f(x_1=1,\ldots,x_l=1,x_{l+1}=0,\ldots,x_m=0|p)\xi(p|s,t)dp$$
$$=\int_0^1 p^l(1-p)^{m-l}\frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)\Gamma(t)}p^{s-1}(1-p)^{t-1}dp$$

$$=\begin{cases} \dfrac{s(s+1)\dots(s+l-1)t(t+1)\dots(t+m-l-1)}{(s+t)(s+t+1)\dots(s+t+m-1)} & l\neq 0,\ m-l\neq 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{s(s+1)\dots(s+l-1)}{(s+t)(s+t+1)\dots(s+t+m-1)} & m-l=0 \text{ のとき} \\ \dfrac{t(t+1)\dots(t+m-l-1)}{(s+t)(s+t+1)\dots(s+t+m-1)} & l=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

したがって，この確率は必ず正である。

実験 B によって k 人の売手の価格の分布が得られたとき，あと 1 回の実験が可能であるとする。k 人の売手の価格のすべてが α なら，そのなかの 1 人の売手をたずねることにより (実験 C), α の価格で買うことができる。k 人の売手の価格がすべて β なら，同じようにすると β の価格で買うことになる。このいずれでもないときは，α で売る売手の数を $u(\neq 0, k)$ としたとき，期待価格が $\{\alpha u+\beta(k-u)\}/k$ となるので，これは α より大きく，β よりは小さくなる。これで証明すべき 6 つの式のうち最後の 3 つの式が得られた。

任意の G について

$$a_1(G)=\alpha p(x=1|G)+\beta p(x=0|G)$$

であり，$p(x|G)$ はこの証明のはじめにあきらかにされたように必ず正となるので，$\alpha<a_1(G)<\beta$ を得る。残りの関係については数学的帰納法を用いることにする。

$n=2$ のとき，まず $a_2(G)$ については，$H=\{G, (x=0)\}$ とおくと

$$\begin{aligned} a_2(G)&=\alpha p(x=1|G)+\min\{\beta,\ a_1(H),\ b_1(H)\}p(x=0|G) \\ &=\alpha p(x=1|G)+a_1(H)p(x=0|G) \end{aligned}$$

となる。$b_1(H)=\infty$ だからである。ここで，すでに得られているように $p(x|G)$ は正であり，$\alpha<a_1(H)<\beta$ であるから，$\alpha<a_2(G)<\beta$ を得る。つぎに，$H=\{G, (x_1,\dots, x_k)\}$ とおくと

$$b_2(G)=\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k}\min\{a_1(H), b_1(H), c_1(x_1,\ldots, x_k|G)\}p(x_1,\ldots, x_k|G)$$
$$=\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k}\min\{a_1(H), c_1(x_1,\ldots, x_k|G)\}p(x_1,\ldots, x_k|G)$$

となる。実験 B の結果としては，$x_1=1,\ldots, x_k=1$ あるいは $x_1=0,\ldots, x_k=0$ 以外の結果も生じるので，期待価格 $b_2(G)$ についても $\alpha<b_2(G)<\beta$ を得る。

$$c_2(x_1,\ldots, x_k|G)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min\{v(x_i), a_1(H), b_1(H), c_1(x_1,\ldots, x_k|G)\}$$
$$=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min\{v(x_i), a_1(H), \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}v(x_j)\}$$

において，$x_1=1,\ldots, x_k=1$ のときは $c_2(x_1,\ldots, x_k|G)=\alpha$ となるが，それ以外のときは，$\alpha<a_1(H)<\beta$ であることをも用いて，$\alpha<c_2(x_1,\ldots, x_k|G)<\beta$ を得る。

$n\geqq3$ である n について，任意の結果集合 H にかんして

$\alpha<a_{n-1}(H)<\beta$

$\alpha<b_{n-1}(H)<\beta$

$\alpha\leqq c_{n-1}(x_1,\ldots, x_k|H)<\beta$　　等号は $x_1=1,\ldots, x_k=1$ のとき

が成りたつと仮定する。

このとき，$H=\{G, (x=0)\}$ とおくと

$$a_n(G)=\alpha p(x=1|G)+\min\{\beta, a_{n-1}(H), b_{n-1}(H)\}p(x=0|G)$$

となる。帰納法の仮定を用いると，これまでと同じようにして $\alpha<a_n(G)<\beta$ を得る。つぎに $H=\{G, (x_1,\ldots, x_k)\}$ とおくと

$$b_n(G)=\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k}\min\{a_{n-1}(H), b_{n-1}(H), c_{n-1}(x_1,\ldots, x_k|G)\}\,p(x_1,\ldots, x_k|G)$$

となり，やはり $\alpha<b_n(G)<\beta$ を得る。同様に，$H=\{G, (x_1,\ldots, x_k)\}$ とおくと

$$c_n(x_1,\dots,\ x_k|G)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\min\{v(x_i),\ a_{n-1}(H),\ b_{n-1}(H),\ c_{n-1}(x_1,\dots,\ x_k|G)\}$$

となり，$x_1=1,\dots,\ x_k=1$ のときは $c_n(x_1,\dots,x_k|G)=\alpha$ となるが，その他のときは帰納法の仮定から $\alpha<c_n(x_1,\dots,\ x_k|G)<\beta$ を得る。(証明終)

実験 A および実験 B で得られたある結果の集合から出発する場合，残り実験回数が n 回のときよりも $n+1$ 回のときのほうが，期待価格が小さいか，すくなくとも同じである。このことはつぎの命題2で示される。

命題2　価格が $\alpha(>0)$, $\beta(>\alpha)$ で，α の生じる確率 p (未知) にベータ分布を想定したとき，任意の G について

$$a_{n+1}(G)<a_n(G)\qquad n=1,\dots,\ N-1$$
$$b_{n+1}(G)<b_n(G)\qquad n=1,\dots,\ N-1$$
$$c_{n+1}(x_1,\dots,\ x_k|G)\leqq c_n(x_1,\dots,\ x_k|G)\qquad n=1,\dots,\ N-2$$

が成立する。

〔証明〕$n=1$ のとき。$H=\{G,\ (x=0)\}$ とおく。

$$a_1(G)=\alpha p(x=1|G)+\beta p(x=0|G)$$
$$a_2(G)=\alpha p(x=1|G)+\min\{\beta,\ a_1(H),b_1(H)\}p(x=0|G)$$
$$=\alpha p(x=1|G)+a_1(H)p(x=0|G)$$

ここで命題1から $a_1(H)<\beta$ であるから，$a_2(G)<a_1(G)$ を得る。つぎに $H=\{G,\ (x_1,\dots,\ x_k)\}$ とおく。$g_0(x_1,\dots,\ x_k|G)=\infty$ とおいていたので

$$b_1(G)=\sum_{x_1}\dots\sum_{x_k}g_0(x_1,\dots,\ x_k|G)p(x_1,\dots,\ x_k|G)=\infty$$

となり

$$b_2(G)=\sum_{x_1}\dots\sum_{x_k}\min\{a_1(H),\ b_1(H),\ c_1(x_1,\dots,\ x_k|G)\}p(x_1,\dots,\ x_k|G)$$

において，命題１から $a_1(H)<\beta$ であるので $b_2(G)<b_1(G)$ を得る。つぎに同じ H を用い，$u=\sum_{i=1}^{k}x_i$ とおくと

$$c_1(x_1,\dots,x_k|G)=\frac{u}{k}\alpha+\frac{k-u}{k}\beta$$

$$c_2(x_1,\dots,x_k|G)=\frac{u}{k}\alpha+\frac{k-u}{k}\min\{a_1(H),\ c_1(x_1,\dots,x_k|G)\}$$

となるので，$c_2(x_1,\dots,x_k|G)\leqq c_1(x_1,\dots,x_k|G)$ を得る。等号は $u=k$ のときである。

帰納法の仮定として，$n\geqq 2$ である n，および任意の H について

$$a_n(H)<a_{n-1}(H)$$
$$b_n(H)<b_{n-1}(H)$$
$$c_n(x_1,\dots,x_k|H)\leqq c_{n-1}(x_1,\dots,x_k|H)$$

が成立するとする。このとき，$H=\{G,(x=0)\}$ とすると，命題１から $a_n(H)<\beta$, $b_n(H)<\beta$ であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}(G)&=\alpha p(x=1|G)+\min\{\beta,\ a_n(H),\ b_n(H)\}p(x=0|G)\\&=\alpha p(x=1|G)+\min\{a_n(H),\ b_n(H)\}p(x=0|G)\end{aligned}$$

となる。同様にして

$$a_n(G)=\alpha p(x=1|G)+\min\{a_{n-1}(H),\ b_{n-1}(H)\}p(x=0|G)$$

となる。帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}&a_{n+1}(G)-a_n(b)\\&=\{\min[a_n(H),\ b_n(H)]-\min[a_{n-1}(H),\ b_{n-1}(H)]\}p(x=0|G)<0\end{aligned}$$

を得る。したがって，$a_{n+1}(G)<a_n(G)$ となる。つぎに $H=\{G,(x_1,\dots,x_k)\}$ とおくと

$$b_{n+1}(G)=\sum_{x_1}\dots\sum_{xk}\min\{a_n(H),\ b_n(H),\ c_n(x_1,\dots,x_k|G)\}p(x_1,\dots,x_k|G)$$

$$b_n(G)=\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k} \min\{a_{n-1}(H),\ b_{n-1}(H),\ c_{n-1}(x_1,\ldots,x_k|G)\}p(x_1,\ldots,x_k|G)$$

となるので，帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}&b_{n-1}(G)-b_n(G)\\&=\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k}\{\min[a_n(H),\ b_n(H),\ c_n(x_1,\ldots,\ x_k|G)]\\&\quad-\min[a_{n-1}(H),\ b_{n-1}(H),\ c_{n-1}(x_1,\ldots,\ x_k|G)]\}p(x_1,\ldots,\ x_k|G)<0\end{aligned}$$

を得る。したがって，$b_{n+1}(G)<b_n(G)$ となる。同じ H を用いると

$$c_{n+1}(x_1,\ldots,\ x_k|G)=\frac{u}{k}\alpha+\frac{k-u}{k}\min\{a_n(H),\ b_n(H),\ c_n(x_1,\ldots,\ x_k|G)\}$$

$$c_n(x_1,\ldots,\ x_k|G)=\frac{u}{k}\alpha+\frac{k-u}{k}\min\{a_{n-1}(H),\ b_{n-1}(H),\ c_{n-1}(x_1,\ldots,\ x_k|G)\}$$

となる。帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}&c_{n+1}(x_1,\ldots,\ x_k|G)-c_n(x_1,\ldots,\ x_k|G)\\&=\frac{k-u}{k}\{\min[a_n(H),\ b_n(H),\ c_n(x_1,\ldots,\ x_k|G)]\\&\quad-\min[a_{n-1}(H),\ b_{n-1}(H),\ c_{n-1}(x_1,\ldots,\ x_k|G)]\}\leqq 0\end{aligned}$$

となり，$c_{n+1}(x_1,\ldots,\ x_k|G)\leqq c_n(x_1,\ldots,\ x_k|G)$ を得る。等号は $x_1=1,\ldots,\ x_k=1$ のときである。(証明終)

ここで，$s_n(G)=\min\{a_n(G),\ b_n(G)\}$ とおくと，任意の G について

$$s_{n+1}(G)<s_n(G)\quad n=1,\ldots,\ N-1$$

となる。また $n=0$ のときは，$s_0(G)=\infty$ なので $s_1(G)<s_0(G)$ ともなる。つぎの命題3，命題4は実験結果の集合がことなるときについてである。実験Bでとりだすことのできる売手の数 k は2と限定する。

命題3　価格は $\alpha(>0)$ と $\beta(>\alpha)$ があり，α の得られる確率 p（未知）についての主観的確率分布をベータ分布とする。結果集合 G と G' の要素について，G は G' より1つ多くの1をもち，G' は G より1つ多くの0をもつとする。また $k=2$ と限定する。このとき

$$a_n(G)<a_n(G') \qquad n=1,\ldots, N$$
$$b_n(G)<b_n(G') \qquad n=2,\ldots, N$$

が成りたつ。

〔証明〕一般性を失うことなく，G を得たあとのベータ分布のパラメターを $s+1,\ t$ とし，G' を得たあとのベータ分布のパラメターを $s,\ t+1$ とすることができる。ただし $s>0,\ t>0$ とする。

$n=1$ のとき，条件を満たす任意の $G,\ G'$ について

$$a_1(G)=\frac{(s+1)\alpha+t\beta}{s+t+1}$$
$$a_1(G')=\frac{s\alpha+(t+1)\beta}{s+t+1}$$

となるので，$a_1(G)<a_1(G')$ を得る。また $b_1(H)=b_1(H')=\infty$ である。

$n=2$ のとき，$H=\{G,\ (x=0)\}$，$H'=\{G',\ (x=0)\}$ とおくと，命題1より $a_1(H)<\beta$，$a_1(H')<\beta$ であるので

$$a_2(G)=\frac{(s+1)\alpha+t\ a_1(H)}{s+t+1}$$
$$a_2(G')=\frac{s\alpha+(t+1)a_1(H')}{s+t+1}$$

となる。$n=1$ のとき示されたように $a_1(H)<a_1(H')$ であり，また命題1により $\alpha<a_1(H')$ であるから，$a_2(G)-a_2(G')<0$ より，$a_2(G)<a_2(G')$を得る。つぎに $H=\{G,\ (x_1=0,\ x_2=1)\}$，$I=\{G,\ (x_1=0,\ x_2=0)\}$，$H'=\{G',\ (x_1=0,\ x_2=1)\}$，$I'=\{G',\ (x_1=0,\ x_2=0)\}$ とすると

$$b_2(G)=\frac{1}{(s+t+1)(s+t+2)}\{(s+1)(s+2)\alpha$$

$$+2(s+1)t\min\left[s_1(H), \frac{\alpha+\beta}{2}\right]+t(t+1)s_1(I)\}$$

$$b_2(G')=\frac{1}{(s+t+1)(s+t+2)}\{s(s+1)\alpha$$

$$+2s(t+1)\min\left[s_1(H'), \frac{\alpha+\beta}{2}\right]+(t+1)(t+2)s_1(I')\}$$

となる。このとき，$b_2(G)-b_2(G')$ の分子はつぎのようになる。

$$2(s+1)\alpha+2st\{\min[s_1(H), (\alpha+\beta)/2]-\min[s_1(H'), (\alpha+\beta)/2]\}$$
$$+2t\min[s_1(H), (\alpha+\beta)/2]-2s\min[s_1(H'), (\alpha+\beta)/2]$$
$$+t(t+1)[s_1(I)-s_1(I')]-2(t+1)s_1(I')$$

$s_1(H)<s_1(H')$ であるから，第2項は負または零となる。$s_1(I)<s_1(I')$ であるから第5項も負となる。残りの項は

$$2\{\alpha-s_1(I')\}+2s\{\alpha-\min[s_1(H'), (\alpha+\beta)/2]\}$$
$$+2t\{\min[s_1(H), (\alpha+\beta)/2]-s_1(I')\}$$

と変形され，各項ともに負である。したがって，$b_2(G)<b_2(G')$ を得る。

帰納法の仮定として，$n\geqq3$ である n について，条件を満たす任意の結果集合 H, H' にかんして，$a_{n-1}(H)<a_{n-1}(H')$, $b_{n-1}(H)<b_{n-1}(H')$ および $a_{n-2}(H)<a_{n-2}(H')$, $b_{n-2}(H)\leqq b_{n-2}(H')$ を仮定する。したがって，$s_{n-1}(H)<s_{n-1}(H')$, $s_{n-2}(H)\leqq s_{n-2}(H')$ を仮定することになる。このとき $H=\{G, (x=0)\}$, $H'=\{G', (x=0)\}$ とおくと

$$a_n(G)=\frac{(s+1)\alpha+t\,s_{n-1}(H)}{s+t+1}$$

$$a_n(G')=\frac{s\alpha+(t+1)s_{n-1}(H')}{s+t+1}$$

となる。$\alpha<s_{n-1}(H')$ および仮定の $s_{n-1}(H)<s_{n-1}(H')$ より $a_n(G)<a_n(G')$

を得る。$H=\{G, (x_1=0, x_2=1)\}$, $H'=\{G', (x_1=0, x_2=1)\}$ および $I=\{G, (x_1=0, x_2=0)\}$, $I'=\{G', (x_1=0, x_2=0)\}$ とおくと

$$b_n(G)=\frac{1}{(s+t+1)(s+t+2)}\{(s+1)(s+2)\alpha$$

$$+2(s+1)t\min\left[s_{n-1}(H), \frac{\alpha+s_{n-2}(H)}{2}\right]+t(t+1)s_{n-1}(I)\}$$

$$b_n(G')=\frac{1}{(s+t+1)(s+t+2)}\{s(s+1)\alpha$$

$$+2s(t+1)\min\left[s_{n-1}(H'), \frac{\alpha+s_{n-2}(H')}{2}\right]+(t+1)(t+2)s_{n-1}(I')\}$$

となる。帰納法の仮定としての $s_{n-1}(H)<s_{n-1}(H')$, $s_{n-2}(H)\leqq s_{n-2}(H')$ および $s_{n-1}(I)<s_{n-1}(I')$ を用い，さらに $s_{n-1}(H)<s_{n-1}(I')$ となることも用いると $b_n(G)<b_n(G')$ を得る。(証明終)

命題4　価格は $\alpha(>0)$ と $\beta(>\alpha)$ の2つであり，α の得られる確率 p (未知) についての主観的確率分布をベータ分布とする。結果集合 G と H の要素について，H は G より1つ多くの0をもつが，1については同じ個数であるとする。実験Bでとりだすことのできる売手の数 k は2と限定する。このとき，上記の条件を満たす任意の結果集合 G, H について

$$a_n(G)<a_n(H) \qquad n=1,\dots, N$$

$$b_n(G)<b_n(H) \qquad n=2,\dots, N$$

が成りたつ。

〔証明〕　一般性を失うことなく，G を得たあとのベータ分布のパラメターを $s(>0)$, $t(>0)$, H を得たあとのベータ分布のパラメターを s, $t+1$ とすることができる。

$n=1$ のとき

$$a_1(G)=\frac{\alpha s+\beta t}{s+t}$$

$$a_1(H)=\frac{\alpha s+\beta(t+1)}{s+t+1}$$

となるので，$a_1(G)<a_1(H)$ を得る。また $b_1(G)=b_1(H)=\infty$ である。

$n=2$ のとき，$G'=\{G,(x=0)\}$, $H'=\{H,(x=0)\}$ とおく。$a_1(G')<b_1(G')=\infty$, $a_1(H')<b_1(H')=\infty$ であるから

$$a_2(G)=\frac{\alpha s+a_1(G')t}{s+t}$$

$$a_2(H)=\frac{\alpha s+a_1(H')(t+1)}{s+t+1}$$

となる。ここで，G' と H は同一の要素をもつので，$n=1$ のときにあきらかになったように，$a_1(G')<a_1(H')$となり，$a_2(G)<a_2(H)$ を得る。つぎに $G'=\{G,(x_1=0,\ x_2=1)\}$, $G''=\{G,(x_1=0,\ x_2=0)\}$ とおき，$H'=\{H,(x_1=0,\ x_2=1)\}$, $H''=\{H,(x_1=0,\ x_2=0)\}$ とおくと，

$$b_2(G)=\frac{\alpha s(s+1)+2st\min\{a_1(G'),(\alpha+\beta)/2\}+a_1(G'')t(t+1)}{(s+t)(s+t+1)}$$

$$b_2(H)=\frac{\alpha s(s+1)+2s(t+1)\min\{a_1(H'),(\alpha+\beta)/2\}+a_1(H'')(t+1)(t+2)}{(s+t+1)(s+t+2)}$$

となる。$b_2(G)-b_2(H)$ を求めると，分母を $(s+t)(s+t+1)(s+t+2)$ として，分子は

$$\begin{aligned}&2\alpha s(s+1)+t(t+1)(t+2)\{a_1(G'')-a_1(H'')\}\\&+st(t+1)\{a_1(G'')-a_1(H'')\}-2s(t+1)a_1(H'')\\&+2st(s+t+1)\{\min[a_1(G'),(\alpha+\beta)/2]-\min[a_1(H'),(\alpha+\beta)/2]\}\\&+2st\min\{a_1(G'),(\alpha+\beta)/2\}-2s^2\min\{a_1(H'),(\alpha+\beta)/2\}\end{aligned}$$

となる。$n=1$ のときの結果から，第2項，第3項，第5項は負である。これ以外の項は

$$\begin{aligned}&2s^2\{\alpha-\min[a_1(H'),(\alpha+\beta)/2]\}+2s\{\alpha-a_1(H'')\}\\&+2st\{\min[a_1(G'),(\alpha+\beta)/2]-a_1(H'')\}\end{aligned}$$

となる。この第１項，第２項は命題１から負となり，第３項は $n=1$ のときの結果と命題３を用いることにより負となる。これより，$b_2(G)<b_2(H)$ を得る。

$n\geqq3$ である n について，条件を満たす任意の G と H に関して，$a_{n-1}(G)<a_{n-1}(H)$，$a_{n-2}(G)<a_{n-2}(H)$，$b_{n-1}(G)<b_{n-1}(H)$，$b_{n-2}(G)\leqq b_{n-2}(H)$ が成りたつと仮定する。このとき $s_{n-1}(G)<s_{n-1}(H)$，$s_{n-2}(G)\leqq s_{n-2}(H)$ となる。$G'=\{G,(x=0)\}$，$H'=\{H,(x=0)\}$ とおくと

$$a_n(G)=\frac{\alpha s+s_{n-1}(G')t}{s+t}$$

$$a_n(H)=\frac{\alpha s+s_{n-1}(H')(t+1)}{s+t+1}$$

となるので，命題１および帰納法の仮定を用いて，$a_n(G)-a_n(H)<0$ を得る。したがって $a_n(G)<a_n(H)$ となる。つぎに $G'=\{G,(x_1=0,x_2=1)\}$，$G''=\{G,(x_1=0,x_2=0)\}$，$H'=\{H,(x_1=0,x_2=1)\}$，$H''=\{H,(x_1=0,x_2=0)\}$ とおくと

$$b_n(G)=\frac{\alpha s(s+1)+2st\min\{s_{n-1}(G')+[\alpha+s_{n-2}(G')]/2\}+s_{n-1}(G'')t(t+1)}{(s+t)(s+t+1)}$$

$$b_n(H)=\frac{\alpha s(s+1)+2s(t+1)\min\{s_{n-1}(H')+[\alpha+s_{n-2}(H')]/2\}}{(s+t+1)(s+t+2)}$$
$$+\frac{s_{n-1}(H'')(t+1)(t+2)}{(s+t+1)(s+t+2)}$$

となる。$b_n(G)-b_n(H)$ を求めると，分母を $(s+t)(s+t+1)(s+t+2)$ として，分子は

$$\begin{aligned}&2st(s+t+1)\{\min[s_{n-1}(G'),(\alpha+s_{n-2}(G'))/2]\\&-\min[s_{n-1}(H'),(\alpha+s_{n-2}(H'))/2]\}\\&+t(t+1)(s+t+2)\{s_{n-1}(G'')-s_{n-1}(H'')\}+2\alpha s(s+1)\\&-2s(t+1)s_{n-1}(H'')+2st\min\{s_{n-1}(G'),[\alpha+s_{n-2}(G')/2]\}\\&-2s^2\min\{s_{n-1}(H'),[\alpha+s_{n-2}(H')]/2\}\end{aligned}$$

となる。第1項と第2項は帰納法の仮定から負となる。残りの項はつぎのようになる。

$$2s\{\alpha-s_{n-1}(H'')\}+2s^2\{\alpha-\min[s_{n-1}(H'),\ (\alpha+s_{n-2}(H'))/2]\}$$
$$+2st\{\min[s_{n-1}(G'),\ (\alpha+s_{n-2}(G'))/2]-s_{n-1}(H'')\}$$

この最初の2つの項は命題1から負となり，最後の項も命題3と帰納法の仮定から負になる。したがって $b_n(G)<b_n(H)$ となる。(証明終)

以上の命題3，4では，実験結果に相違があるとき，期待価格にどのような差異がもたらされるかを検討した。このことは，サーチをはじめるときにもつ主観的確率分布の相違が，どのような差異をもたらすかということにおきかえて考えることができる。最初に楽観的に判断していると，その時における期待価格は小さくなる。価格の分布についての買手の判断が，真の分布に近づくことにより，実験選択についての買手の決定は疑問のないものとなるが，この側面はまだ分析できない。

4. 実験 B の有用性についての数値例

総実験回数が2回のとき

$$D=(s+t)(s+t+1)(s+t+2)$$

とおくと

$$a_2(G)=[\alpha s(s+2t+1)+\beta t(t+1)](s+t+2)/D$$
$$b_2(G)=\{\alpha s(s+1)(s+t+2)+\min[(\beta-\alpha)(t-s)st,\ 0]$$
$$+(\alpha+\beta)st(s+t+2)+\alpha st(t+1)$$
$$+\beta t(t+1)(t+2)\}/D$$

となり，$a_2(G)-b_2(G)<0$ より，$a_2(G)<b_2(G)$ を得る。すなわち，安いほうの価格 α の得られる確率 p（未知）についての主観的確率分布がどのようにな

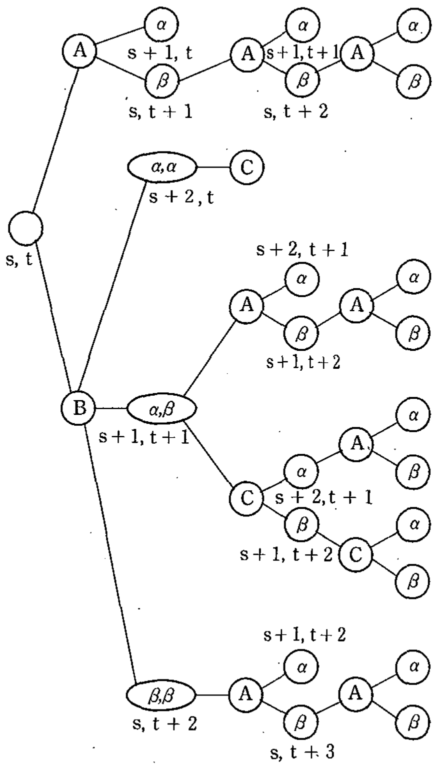

図1 $N=3$ のときのトリー。A, B, C は実験であり，α, β は価格である。s と t で表わされているのは事後分布のパラメターである。

っていようと，2回しか実験できないときには，実験Bが選択されることがまったくない。売手全体のなかからサーチする実験Aだけが選択される。

このことは総実験回数が2以上であっても，残り実験回数が2回となった段階では，もはや実験Bが選択されないことを意味している。

この結果を利用すると，総実験回数 N が3のときのトリーは図1のように表わされる。このトリーを用いて期待価格を計算すると，買手がサーチをはじめる前にもっている，α の得られる確率 p（未知）についての主観的確率分布のパラメターが　$s(>0)$, $t(>0)$ のとき

$$t > s - \frac{1}{2} + \sqrt{2s^2 + 4s + \frac{9}{4}}$$

であるならば，最初に実験Bが選択される。たとえば，$s=1$, $t>(1+\sqrt{33})/2$ のときに実験Bが選択される。ただし総実験回数の制約内であるなら，実験Bの結果に実験Cを何回でも適用できるということが前提となっている。

5. 結　び

価格の分布が未知な場合に，直接役にたつ情報と間接的に役にたつ情報があるとき，買手がそれらをどのように選択するか，そして期待価格はどのような性質をもつか，について考察した。実験Bによる間接的な情報が，どのような場合に有益となり，どのような場合に求められることがないかは，数値例によって検討された。また分布が未知ということにたいしてはベイズ接近に依存した。

引用文献

[1] DeGroot M. H., *Optimal Statistical Decisions,* McGraw-Hill Book Company, 1970.
[2] 遠藤　薫・長尾昭哉「2種類の情報がある場合の価格のサーチ」『商学討究』第35巻第1号，1984年，pp. 1–23.
[3] Manheim, M. L., *Hierarchical Structure: A Model of Design and Planning Processes,* The M. I. T. Press, 1966.
[4] Rothschild, M., "Searching for the Lowest Price When the Distribution of Prices is Unknown," *Journal of Political Economy,* Vol. 82, No. 4, 1974, pp. 689–711.