Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 12, No. 6 (2023), hal 527 – 536.

PENENTUAN PEWARISAN GENOTIP PADA GENERASI KE-n DENGAN APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS

Selkia Mawarni, Bayu Prihandono , Yudhi

INTISARI

Dalam matematika, teori matriks ialah satu diantara beberapa cabang aljabar linear yang bisa diterapkan di ilmu biologi. Salah satu pengimplementasiannya ialah diagonalisasi matriks dalam menyelidiki pewarisan genotip pada penurunan terkait-X. Penelitian ini memiliki tujuan guna menentukan pewarisan genotip pada generasi ke-n dalam kasus penurunan terkait-X. Dalam kasus penurunan terkait-X ditentukan peluang generasi keturunan yang mewarisi genotip induk. Selanjutnya menentukan model distribusi genotip pada generasi ke-n. Pewarisan genotip pada kasus penurunan terkait-X dalam jangka waktu yang sangat panjang akan menghasilkan keturunan (A, AA) dan keturunan (a, aa) apabila setiap induk disilangkan dengan pasangan sekandung.

Kata Kunci : *diagonalisasi matriks, pewarisan genotip, penurunan terkait-X*

PENDAHULUAN

Dalam matematika, teori matriks ialah satu diantara beberapa cabang aljabar linear yang bisa diterapkan pada ilmu biologi [1]. Permasalahan biologi yang bisa dijawab dengan matriks yaitu permasalahan genetika. Genetika merupakan ilmu yang mewarisi sifat-sifat induk atau orang tua pada keturunannya [2].

Gamet jantan dan betina bertanggung jawab untuk mewariskan karakteristik spesies kepada keturunannya. Inti sel adalah tempat informasi genetik disimpan dan diwariskan dari generasi ke generasi. Informasi keturunan disimpan dalam kromosom di dalam inti sel. Autosom adalah kromosom tubuh, dan gonad adalah kromosom kelamin, yang keduanya ditemukan di dalam inti setiap sel. Kromosom kelamin bertanggung jawab terhadap penentuan jenis kelamin.

Spesies jantan hanya memiliki satu gen (A atau a) dan "spesies betina" memiliki dua gen (AA, Aa atau aa). Istilah terkait-X dipakai karena gen-gen seperti ini dijumpai di kromosom-X, dimana spesies jantan memiliki satu dan spesies betina memiliki dua kromosom. Penurunan dari gen-gen tersebut meliputi keturunan jantan akan menerima satu dari dua gen induk betinanya dengan probabilitas yang sama, dan keturunan betina akan menerima satu gen dari induk jantannya, serta satu gen dari dua gen induk betinanya dengan probabilitas yang sama [3].

Dalam pewarisan pada hewan terdapat perkawinan sedarah atau sekandung dengan tujuan mengurangi variasi genetik dalam rasa atau populasi. perkawinan sekandung telah menjadi landasan bagi pengembang ras keturunan murni karena persilangan menghasilkan keturunan yang diperkirakan serupa. Diagonalisasi matriks memberikan pendekatan matematis untuk memecahkan kesulitan pewarisangenetik. Proses diagonalisasi matriks memfasilitasi pemahaman manusia tentang transmisi gen ke keturunan yang tak terbatas [4].

Hal yang ingin di tuju dari kajiam ini antara lain, 1.) untuk menetukan peluang dari persilangan keturunan pada penurunan terkait-X, 2.) untuk membentuk matriks dari hasil peluang persilangan keturunan pada penurunan terkait-X, 3.) untuk menentukan diagonalisasi matriks persilangan keturunan pada penurunan terkait-X, 4.) untuk menentukan limit dari persamaan eksplisit. Penelitian ini dibatasi oleh persilangang antar genotip induk hanya pada kasus ganotip induk disilangkan dengan genotip normal *heterozygote* dan diasumsikan pewarisan sifat genotip diatur oleh 2 gen yaitu gen A dan gen a, tanpa melihat faktor lain yang mempengaruhi pewarisan sifat seperti kromosom, alel, dan DNA.

Langkah pertama dalam kajian ini adalah mengubah tabel yang berisi daftar probabilitas setiap genotipe menjadi persamaan linier, yang kemudian dapat ditulis dalam notasi matriks untuk menghasilkan matriks M. Kemudian, Anda harus mencari nilai eigen matriks M untuk mendapatkan vektor eigen yang terkait. Kemudian, matriks P dibuat dengan menggunakan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen itu. Setelah matriks dibuat, persamaan eksplisit diformulasikan dengan mengganti matriks berikutnya, M, dengan matriks D, yang telah didiagonalisasi oleh matriks P. Langkah selanjutnya adalah menghitung solusi tak hingga untuk setiap persamaan.

MATRIKS

Matriks adalah susunan angka persegi panjang (nyata atau kompleks) yang diurutkan berdasarkan baris dan kolom. Elemen-elemen matriks ialah skalar. Gunakan huruf kapital A, B, C, dst. jika ingin membuat matriks tanpa mencantumkan setiap elemen. Secara general, a_{ij} akan memberikan pernyataan elemen matriks A yang berada pada baris i dan kolom j. Jadi, jika A ialah matriks $m \times n$, maka:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notasi diatas kadang-kadang disingkat menjadi: $= (a_{ij})$.

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

Teorema 1 *Jika A ialah matriks yang memiliki invers, maka* [5]

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

Bukti:
"Jika A tak singular, maka $det(A)$ adalah skalar tak nol sehingga invers sebuah matriks dapat dinyatakan dengan":

$$A\left(\frac{1}{det(A)} adj\ (A)\right) = I$$
$$A\big(adj\ (A)\big) = det(A)$$

Pertama dibuktikan bahwa $A\big(adj\ (A)\big) = det(A)I$
Perkalian dari $A\big(adj\ (A)\big)$ adalah:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

secara umum entri pada matriks diatas dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn}$$

Jika $i \neq j$, maka seperti hasil diatas diperoleh $b_{ij} = 0$.
Jika $i = j$, maka diperoleh $b_{ij} = det(A)$.
Sehingga:

$$A\big(adj(A)\big) = \begin{bmatrix} det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & edt(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & det(A) \end{bmatrix} = det(A)I$$

Sehingga: $\left(adj(A)\right) = det(A)I$
Jika $det(A) \neq 0$, maka diperoleh:

$$A\left(adj(A)\right)\frac{1}{det(A)} = I$$

$$A^{-1}\left(adj(A)\right)\frac{1}{det(A)} = A^{-1}I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}adj(A) \blacksquare$$

NILAI DAN VEKTOR EIGEN

"vektor eigen" ialah kombinasi dari bahasa Jerman dan Inggris. Nilai eigen juga dikenal sebagai nilai riil atau nilai karakteristik karena kata "eigen" dalam bahasa Jerman dapat berarti salah satu dari hal-hal tersebut. Vektor ialah jenis matriks khusus dengan hanya satu dari setiap baris atau kolom yang dieliminasi. Oleh karena itu, vektor eigen bisa dianggap sebagai vektor asli.

Definisi 1 "*Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka vektor x yang tidak nol di R^n disebut vektor eigen (eigen vector) dari A, jika Ax adalah kelipatan scalar dari x, yaitu $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ. Scalar λ dinamakan nilai eigen (eigen value) dari A* " [3].

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{1}$$

"Supaya λ jadi nilai eigen, maka wajib ada pemecahan tak nol dari Persamaan (1). Suatu persamaan akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika":

$$det(\lambda I - A)x = 0 \tag{2}$$

Nilai eigen dari A adalah skalar yang memenuhi Persamaan (2), yang merupakan persamaan karakteristik dari A. Persamaan karakteristik dapat dituliskan sebagai perluasan dari polinomial karakteristik berderajat n, di mana memiliki koefisien I. Akibatnya, bentuk polinomial karakteristik dari suatu matriks berorde nXn adalah:

$$det(\lambda I - A)x = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Dengan $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$ ialah persamaan karakteristik yang punya n terbanyak penyelesaian yang berbeda, sehingga suatu matriks $n \times n$ punya paling banyak n nilai eigen yang berbeda.

DIAGONALISASI MATRIKS

"Suatu matriks bujur sangkar M dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matriks *P* yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga:"

Definisi 2 *"Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan dapat didiagonalisasikan, jika terdapat suatu matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalisasikan A"* [3].

Teorema 2 *Jika A ialah suatu matriks $n \times n$, maka kedua pernyataan berikut ini ialah ekuivalen.*
a. *A bisa didiagonalisasikan.*
b. *A memiliki nilai vektor eigen yang bebas linear* [3]
Bukti
$(a) \Longrightarrow (b)$karena A bisa didiagonalisasi, maka ada matriks yang bisa dibalik:
$P = \left[v_1, v_{2,} \cdots, v_n\right], P$ merupakan vektor-vektor kolom yang bebas linear.

$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ sehingga $P^{-1}AP$ diagonal

Jika $P^{-1}AP = D$, dengan $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ maka $AP = PD$

Sehingga $AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$ (3)

Dimisalkan $P_{1,}P_{2,\dots,}P_n$ memberikan pernyataan vektor-vektor kolom P maka wujud Persamaan (3) kolom-kolom AP yang berurutan adalah $\lambda_1 P_{1,}\lambda_2 P_{2,\dots\dots,}\lambda_n P_n$, tapi kolom-kolom dari AP yang secara berturut ialah:

$$AP_1 = \lambda_1 P_{1\,,}\ AP_2 = \lambda_2 P_{2,\dots\dots,}AP_n = \lambda_n P_n \quad (4)$$

"Karena P dapat dibalik, maka vektor-vektor kolomnya semuanya tak nol. Jadi menurut Persamaan (4) $\lambda_{1,}\ \lambda_{2,\dots\dots,}\lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen A, dan $P_{1,}P_{2,\dots,}P_n$ adalah vektor-vektor yang bersesuaian. Karena P dapat dibalik, maka diperoleh $P_{1,}P_{2,\dots,}P_n$ bebas linear, sehingga A mempunyai n vektor eigen bebas linear."

$(b) \Longrightarrow (a)$ dimisalkan kalau A punya n vektor eigen bebas linear artinya $P_{1,}P_{2,\dots,}P_n$ dengan nilai eigen yang bersesuaian $\lambda_{1,}\ \lambda_{2,\dots\dots,}\lambda_n$ dan misalnya:

$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ Adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya $P_1, P_{2\,,\dots,}P_n$, kolom-kolom dari hasil kali AP ialah $AP_1, AP_{2\,,\dots,}AP_n$, tetapi $AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \dots\dots, AP_n = \lambda_n P_n$

Sehingga:

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = AP \quad (5)$$

Dengan D ialah matriks diagonal yang punya nilai-nilai eigen $\lambda_{1,}\ \lambda_{2,}, \dots\dots, \lambda_n$ pada diagonal utama. Karenanya, vektor-vektor kolom dari P bebas linear sehingga P bisa dibalik. Jadi Persamaan (5) bisa ditulis ulang sebagai $P^{-1}AP = D, A$ terdiagonalisasi. ■

PERSAMAAN REKURSIF

Misalkan sebuah matriks M_{nxn} dengan entri m_{ij} dengan $ij = 1,2, \dots, n$, maka matriks dapat ditulis:

$$M_{nxn} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks M_{nxn} merupakan matriks non-singular, maka matriks M memiliki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sebagai nilai eigen yang sama dengan vektor-vektor eigen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_\mathrm{n}$. Diasumsikan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Vektor kolom $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_\mathrm{n}$ dibentuk menjadi sebuah matriks P_{nxn} yang dapat ditulis $P = [\mathbf{p_1}\ \vdots\ \mathbf{p_2}\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \mathbf{p}_n]$. Maka matriks P_{nxn}dapat dinyatakan dengan:

$$P_{nxn} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Misalkan P_{nxn} adalah matriks non-singular, maka ada invers dari matriks P_{nxn} yaitu ${P^{-1}}_{nxn}$. Misalkan matriks M dapat didiagonalisasikan maka ada sebuah matriks P yang bisa dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}MP$ ialah diagonal berukuran nxn,yaitu:

$$P^{-1}MP = D$$

$PP^{-1}MP = PD$ (kedua ruas dikalikan dengan matriks P)

$IMP = PD$ (berlaku $PP^{-1} = P^{-1} = I; I$ merupakan matriks identitas)

$$MP = PD$$

$MPP^{-1} = PDP^{-1}$

$MI = PDP^{-1}$

$M = PDP^{-1}$

Jadi, diperoleh matriks $M = PDP^{-1}$

$M^2 = MM$ (dengan $M = PDP^{-1}$)

$M^2 = PDP^{-1}PDP^{-1}$

$M^2 = PDIDP^{-1}$ (berlaku $PP^{-1} = P^{-1} = I$)

$M^2 = PDDP^{-1}$

$M^2 = PD^2P^{-1}$ (D merupakan matriks diagonal)

dan seterusnya, sehingga secara umum, dapat dituliskan:

$$M^n = PD^nP^{-1} \text{ ; untuk } n = 1,2,3, \dots \qquad (6)$$

$$\text{Persamaan rekursif: } \mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}, n = 1,2,3, \dots, \qquad (7)$$

dengan matriks M_{nxn} yang dapat didiagonalisasikan maka dapat dituliskan:
Untuk $n = 1$:
$\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(1-1)}$
$\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(0)}$
Untuk $n = 2$:
$\mathbf{x}^{(2)} = M\mathbf{x}^{(2-1)}$
$\mathbf{x}^{(2)} = M\mathbf{x}^{(1)}$, dengan $\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(0)}$
$\mathbf{x}^{(2)} = M\,M\,\mathbf{x}^{(0)}$
$\mathbf{x}^{(2)} = M^2\mathbf{x}^{(0)}$
Untuk $n = 3$:
$\mathbf{x}^{(3)} = M\mathbf{x}^{(3-1)}$
$\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(2)}$, dengan $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\mathbf{x}^{(0)}$
$\mathbf{x}^{(3)} = M\,M^2\mathbf{x}^{(0)}$
$\mathbf{x}^{(3)} = M^3\mathbf{x}^{(0)}$dan seterusnya, secara umum dapat dituliskan:

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)} \text{ , untuk } n = 1,2,3, \dots \qquad (8)$$

Dari persamaan (6) diketahui bahwa $M^n = PD^nP^{-1}$, sehingga Persamaan (8) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)} \qquad (9)$$

dengan $D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{bmatrix}$

Persamaan (8) ditulis menjadi $x^n = P\ D^n a$; dengan $a = P^{-1}x^{(0)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$

sehingga, $\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

PEWARISAN TERKAIT-*X*

Dalam penurunan terkait-X, spesies jantan hanya memiliki satu gen "A atau a" dan spesies betina memiliki dua gen (AA, Aa atau aa). Istilah "terkait-X" dipakai karena gen-gen seperti ini dijumpai pada kromosom-X, di mana spesies jantan memiliki satu dan spesies betina memiliki dua kromosom. Penurunan dari gen-gen tersebut adalah seperti berikut: Keturunan jantan akan menerima satu dari dua gen induk betinanya dengan probabilitas yang sama, dan keturunan betina akan menerima satu gen dari induk jantannya dan satu gen dari dua gen induk betinanya dengan probabilitas yang sama.

Misalnya dalam penurunan terkait-X hewan jantan dan hewan betina disilangkan, maka pewarisan dapat diperoleh pada tabel 1.

Rekapitulasi hasil persilangan pada kasus penurunan terkait-X ditampilkan pada Tabel 1

Tabel 1. Hasil persilangan pada kasus penurunan terkait-X

			Genotip Induk (Jantan, Betina)					
			(A, AA)	(A, Aa)	(A, aa)	(a, AA)	(a, Aa)	(a, aa)
Keturunan	Jantan	A	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
		a	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
	Betina	AA	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
		Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
		aa	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Jantan-betina asal bisa berupa satu dari keenam tipe berikut, berkaitan dengan keenam kolom pada tabel:

$$(A, AA), (A, Aa), (A, aa), (a, AA), (a, Aa), (a, aa)$$

Pasangan sekandung yang dikawinkan pada masing generasi yang berurutan punya probabilitas-probabilitas tertentu guna menjadi salah satu dari keenam tipe ini. Guna melakukan perhitungan probabilitas tersebut, untuk $n = 0,1,2, \ldots$,

Dibentuk matriks dari permasalahan persilangan pada kasus penurunan terkait-X

Dengan $|\lambda I - M| = 0$

Maka

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

Maka nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{2}, \lambda_4 = -\frac{1}{2}, \lambda_5 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}), \lambda_6 = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})$

Tahapa setelhanya ialah menemukan vektor eigen dengan nilai eigen dari matriks M.

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\\-2\\1\end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix}1\\-6\\-3\\3\\6\\-1\end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}(-3-\sqrt{5})\\1\\\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\\\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\\1\\\frac{1}{4}(-3-\sqrt{5})\end{bmatrix}\ v_6 = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})\\1\\\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})\\\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})\\1\\\frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})\end{bmatrix}$$

diperoleh vektor eigennya:

$$D^n = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^n & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)^n\end{bmatrix}$$

Diagonalisasi M akan menghasilkan

$$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Dimana

Didapat matriks pendiagonal dari matriks M adalah matriks

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})\\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})\\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})\\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})\end{bmatrix}$$

Diagonalisasi M akan menghasilkan

$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}, \qquad n = 1,2,\ldots$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) & \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})\right)^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}(5+\sqrt{5}) & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}(5-\sqrt{5}) & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{20}(5-\sqrt{5}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

Karena nilai-nilai absolut dari empat entri diagonal terakhir pada D lebih kecil dari 1. Maka dilihat n cenderung mendekati tak terhingga.

$$D^n \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka $\mathbf{x}^{(n)} \to PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$

$$\mathbf{x}^{(n)} \to \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 \end{bmatrix}$$

KESIMPULAN

Berdasar hasil pembahasan, bisa diambil kesimpulan kalau:Pewarisan genotip pada kasus penurunan terkait-X dalam jangka waktu yang sangat panjang akan menghasilkan keturunan (A, AA) dan keturunan (a, aa) apabila setiap induk disilangkan dengan pasangan sekandung.

1. Matriks dari hasil peluang persilangan keturunan pada penurunan terkait-X adalah

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Hasil diagonalisasi matriks pada persilangan keturunan pada penurunan terkait-X adalah

$$\mathbf{x}^{(n)} \to \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 \end{bmatrix}$$

3. Limit dari persamaan eksplisit yang diperoleh dari tabel persilangan monohibrid ialah:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0) = \frac{2}{3}$
$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$
$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$
$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$
$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$
$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}(f_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0) = \frac{1}{3}$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Agustini. Implementasi Diagonalisasi untuk Menyelidiki Pewarisan Autosomal Generasi Ke-*n*. *Makasar: Universitas Islam Negeri Alauddin Makasar*. 2016.
[2]. Effendi Y. *Buku Ajar Genetika Dasar*. Kabupaten Magelang: Pustaka Rumah Cinta. 2020.
[3]. Anton H dan Rorres C. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi, Jilid 1, Edisi ke-8*. Jakarta: Erlangga. 2002.
[4]. Haryanto D. Implementasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Genotip
[5]. Anton H dan Rorres C. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi, Jilid 1, Edisi ke-8*. Jakarta: Erlangga. 2011.

SELKIA MAWARNI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
selkiamawarni@student.untan.ac.id

BAYU PRIHANDONO : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
bayuprihandono@math.untan.ac.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yudhi@math.untan.ac.id