Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 12, No. 6 (2023), hal 495-502

MENCARI JUMLAHAN BILANGAN ASLI PERTAMA DAN PANGKATNYA MENGGUNAKAN RELASI REKURENSI

Rais Iskandar, Fransiskus Fran, Yudhi

INTISARI

Sistem bilangan telah ada sejak zaman dahulu salah satunya adalah bilangan asli dapat diaplikasikan dalam suatu permasalahan matematika. Penjumlahan bilangan asli pertama dapat direpresentasikan ke bentuk relasi rekurensi. Pada umumnya relasi rekurensi terbagi menjadi dua bentuk yaitu relasi rekurensi homogen dan relasi rekurensi tak homogen. Adapun langkah-langkah hasil jumlahan bilangan asli dan pangkatnya yang di notasikan dengan $\sum_{r=1}^{n} r^k$ untuk $k \in \mathbb{N}$ adalah membentuk relasi rekurensi yang terlebih dahulu. Kemudian, menentukan solusi homogen dan solusi partikular dari relasi rekurensi yang terkait sehingga diperoleh solusi umumnya.. Relasi rekurensi untuk penjumlahan bilangan asli berpangkat k, $\sum_{r=1}^{n} r^k$, adalah $S_n - S_{n-1} = n^k$. Solusi yang diperoleh yaitu $S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$ dengan $S_n^{(h)} = 0$ dan $S_n^{(p)} = \sum_{i=0}^{k} a_i\, r^{i+1}$.

Kata Kunci : *Bilangan asli pertama, pangkat, relasi rekurensi.*

PENDAHULUAN

Sistem *tally* merupakan sistem perhitungan bilangan yang dilakukan dengan menggunakan garis tegak sebagai simbol bilangan, telah memberikan kontribusi terhadap perkembangan matematika sebagai pondasi awal terbentuknya suatu bilangan. Dalam matematika, konsep bilangan selama bertahun tahun lamanya telah diperluas yang meliputi bilangan asli. Teori bilangan tidak hanya berkembang sebatas konsep, tapi juga banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Hal ini dapat dilihat pada pamanfaatan konsep bilangan dalam metode kode baris, kriptografi, komputer dan sebagainya [1].

Pada penelitian ini membahas tentang jumlah bilangan asli pertama dan pangkat yang berbeda, yang diawali dari beberapa teori berupa defenisi dari penelitian-penelitian terdahulu. Seperti penelitian yang di bahas oleh Essi (2020) [2]. Untuk menghitung jumlahan bilangan asli pertama dan pangkat satu dengan menggunakan relasi rekurensi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa hasil penjumlahan bilangan asli pertama adalah $S_n = \frac{n}{2}(n+1)$. Bilangan asli dapat diaplikasikan dalam suatu permasalahan matematika, dengan menjumlahkan hasil dari bilangan asli tersebut, penjumlahan bilangan asli menjadi alat sederhana untuk menghitung dan memahami informasi secara lebih baik. Pemanfaatan konsep penjumlahan bilangan asli dalam berbagai aspek kehidupan, dari hal-hal praktis hingga analisis data, menghitung jumlah populasi, menentuka rata-rata dan yang lain-lain [3]. Jumlahan bilangan asli pertama adalah jumlah dari semua bilangan asli dari *n*, dimana *n* memenuhi bilangan positif tertentu. Hal ini menjelaskan bagaimana relasi rekurensi dapat digunakan untuk menghitung jumlahan bilangan asli pertama dan pangkatnya [4].

Relasi rekurensi merupakan hubungan matematika yang mengaitkan suatu elemen-elemen sebelumnya dalam urutan bilangan asli. Dalam konteks jumlahan bilangan asli pertama dan pangkatnya, relasi rekurensi dapat digunakan untuk menghitung suku-suku dalam jumlahan berdasarkan suku-suku sebelumnya. Untuk mencari jumlahan bilangan asli pertama akan melibatkan operasi eksponensial dengan *n* dan pangkat sebelumnya [5]. Pada umumnya relasi rekurensi muncul dari fenomena yang terjadi pada kehidupan sehari-hari. Seperti perubahan yang teramati, yaitu sebagai contoh perubahan jumlah populasi kelinci disuatu pulau pada setiap waktu dengan jenis variabel diskrit waktu. Perubahan populasi kelinci dapat dinyatakan ke dalam bentuk persamaaan fibonacci. Persamaan Fibonaci merupakan contoh dari persamaan relasi rekurensi [6].

MENCARI JUMLAHAN BILANGAN ASLI PERTAMA DAN PANGKATNYA MENGGUNAKAN RELASI REKURENSI

Relasi rekurensi adalah sebuah formula rekursif dimana setiap bagian barisan dapat ditentukan menggunakan satu atau lebih dari bagian sebelumnya. Relasi rekurensi terbagi menjadi dua bentuk yaitu relasi rekurensi homogen dengan solusinya dinotasikan $S_n^{(h)}$ dan relasi rekurensi tak homogen dengan solusinya dinotasikan $S_n^{(p)}$. Untuk membentuk suatu persamaan relasi rekurensi berdasarkan jumlahan bilangan asli berpangkat satu yaitu $S_n = S_{n-1} + n$ dan akan di cari solusi relasi rekurensinya, $S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$. Dengan memisalkan $S_n - S_{n-1} = 0$ sebagai relasi rekurensi homogen, diperoleh solusi homogennya $S_n^{(h)} = C_1.r^n = C_1.1^n = C_1$. Kemudian membentuk relasi rekurensi partikular dengan $S_n = S_{n-1} + n$ dan diperoleh solusi partikularnya yang berbentuk polinomial $S_n^{(p)} = n(A + Bn)$. Untuk mengetehui lebih lanjut perhatikan persamaan berikut. Diberikan bilangan asli pertama dengan pangkatnya yaitu pangkat satu,$1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 \dots \dots + n^1 = \sum_{r=1}^{n} r$, akan dikonstruksikan menjadi bentuk relasi rekurensi $S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$.

Dimisalkan $S_1 = 1$,

$$S_2 = 1 + 2 = S_1 + 2$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3 = S_2 + 3$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_{n-1} + n$$

Dari persamaan relasi rekurensi orde satu tersebut, akan di cari solusi relasi rekurensi.

$$S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$$

dengan $S_n^{(h)}$ adalah solusi homogen dan $S_n^{(p)}$ adalah solusi partikular. Kemudian akan dicari solusi homogen terlebih dahulu dari relasi rekurensi.

Dimisalkan $S_n - S_{n-1} = 0$

Sehingga diperoleh solusi homogennya yaitu:

$$S_n^{(h)} = C_1.r^n = C_1.1^n = C_1$$

Kemudian akan mencari solusi partikularnya,

Dimisalkan $S_n^{(p)} = n(A + Bn)$

$$S_{n-1}^{(p)} = A(n-1) + B(n-1)^2$$
$$S_{n-1}^{(p)} = (An - A + B(n^2 - 2n + 1))$$
$$S_{n-1}^{(p)} = (An - A + Bn^2 - 2Bn + B)$$

Maka $S_n^{(p)} - S_{n-1}^{(p)} = n$

$$An + Bn^2 - (An - A + Bn^2 - 2Bn + B) = n$$
$$n + Bn^2 - An + A - Bn^2 + 2Bn - B = n$$
$$A - B + 2Bn = n$$

Dari hasil tersebut diperoleh nilai $A = \frac{1}{2}$ dan nilai $B = \frac{1}{2}$, maka solusi partikular tersebut adalah

$$S_n^{(p)} = An + Bn^2$$
$$= \frac{n}{2}(n + 1)$$

Berdasarkan penyelesaian tersebut, diperoleh relasi rekurensi yaitu

$S_n = S_{n_n}^{(h)} + S_{n_n}^{(p)}$

$\quad = C_1 + \dfrac{n}{2}(n+1)$

Misalkan $p(n) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 \ldots \ldots + n^1 = \frac{n}{2}(n+1)$

Akan ditunjukkan benar untuk $p(1)$

$p(1) = \frac{1}{2}(1)(1+1) = \frac{1}{2}.2 = 1$ Jadi $p(1)$ benar

Asumsikan benar untuk $p(k)$

$p(k) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 \ldots \ldots + k^1 = \dfrac{k}{2}(k+1)$

Akan ditunjukkan benar $p(k+1) := \sum_{r=1}^{k+1} r = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

$= \frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1)$

Kesimpulannya yaitu $1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 \ldots \ldots + n^1 = \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$ adalah benar ■.

Untuk jumlahan bilangan asli pertama dengan pangkatnya yaitu pangkat dua, yang akan dikonstruksikan menjadi bentuk relasi rekurensi. Diberikan bilangan asli pertama dengan pangkat dua, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2$.

Dimisalkan $S_1 = 1^2 = 1$

$S_2 = 1^2 + 2^2 = S_1 + 2^2$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^3 = S_2 + 3^3$

$\vdots$

Dari persamaan relasi rekurensi orde satu tersebut, akan dicari solusi relasi rekurensi

$$S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$$

dengan $S_n^{(h)}$ adalah solusi homogen dan$S_n^{(p)}$ adalah solusi partikular. Kemudian akan dicari solusi homogen terlebih dahulu dari relasi rekurensi,

Dimisalkan $S_n - S_{n-1} = 0$

Maka diperoleh solusi homogennya yaitu:

$$S_n^{(h)} = C_1.r^n = C_1.1^n = C_1$$

Selanjutnya akan mencari solusi partikularnya, dimisalkan:

$$S_n^{(p)} = n(A + Bn + Cn^2)$$

Sehingga, $S_{n-1}^{(p)} = A(n-1) + B(n-1)^2 + C(n-1)^3$

Maka $S_n^{(p)} - S_{n-1}^{(p)} = n^2$

$An + Bn^2 + Cn^3 - (An - A + Bn^2 - 2Bn + B + Cn^3 - 3Cn^2 + 3Cn - C) = n^2$

$An + Bn^2 + Cn^3 - An + A - Bn^2 + 2Bn - B - Cn^3 + 3Cn^2 - 3Cn + C = n^2$

$A - B + C + 2Bn - 3Cn + 3Cn^2 = n^2$

Dari hasil tersebut diperoleh

nilai $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$, dan $C = \frac{1}{3}$, maka solusi partikular tersebut adalah

Sehingga, $S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$

$= C_1 + \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$

Maka, $S_1 = C_1 + \frac{1}{6}(1+3+2)$

$1 = C_1 + 1$

$C_1 = 0$

Jadi diperoleh, $S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$

$$= 0 + \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$$

$$= \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$$

Jadi untuk jumlahan bilangan asli pertama berpangkat dua menggunakan relasi rekurensi diperoleh.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$$

Akan dibuktikan bahwa $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$

Misalkan $p(n) := 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$

Akan ditunjukkan benar untuk $p(1)$

$p(1) = \frac{1}{6}((1) + 3(1)^2 + 2(1)^3) = \frac{1}{6}(1 + 3 + 2) = \frac{1}{6}(6) = 1$ Jadi $p(n)$ benar

Asumsikan benar untuk $p(k) \coloneqq \sum_{r=1}^{n} r^2$

$$p(k) := 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}(k + 3k^2 + 2k^3)$$

Akan ditunjukkan benar $p(k+1) \coloneqq \sum_{r=1}^{k+1} r^2 = \frac{1}{6}(2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + (k+1)$

$$(k+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k + 3k^2 + 2k^3) + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + (k+1)$$

Kesimpulannya yaitu $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3)$ adalah benar ■.

Selanjutnya menentukan jumlahan bilangan asli pertama dan pangkat ke-k yang akan dikonstruksikan menggunakan relasi rekurensi. Diberikan jumlahan bilangan asli dan pangkatnya k yaitu, $1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \cdots + n^k = \sum_{r=1}^{n} r^k$.

Dimisalkan, $S_1 = 1^k = 1$

$$S_2 = 1^k + 2^k = S_1 + 2^k$$

$$S_3 = 1^k + 2^k + 3^k = S_2 + 3^k$$

$$\vdots$$

$$S_n = S_{n-1} + n^k$$

Dari persamaan relasi rekurensi orde satu tersebut , akan dicari solusi relasi rekurensi.

$$S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$$

dengan $S_n^{(h)}$ adalah solusi homogen dan $S_n^{(p)}$ adalah solusi partikular.

Kemudian akan dicari solusi homogen terlebih dahulu dari relasi rekurensi, Dimisalkan $S_n - S_{n-1} = 0$ Didapatkan persamaan karateristiknya $r - 1 = 0$

$$r = 1$$

Maka diperoleh solusi homogennya yaitu:

$$S_n^{(h)} = C_1 . r^n = C_1 . 1^n = C_1$$

Selanjutnya akan dicari solusi pertikularnya, Dimisalkan:

$$S_n^{(p)} = n\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, n^i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i+1}$$

Sehingga, $S_{n-1}^{(p)} = \sum_{i=0}^{k} a_i(n-1)^{i+1}$

Maka, $S_n^{(p)} - S_{n-1}^{(p)} = n^k$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i+1} - \sum_{i=0}^{k} a_i(n-1)^{i+1} = n^k$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} a_i \left(n^{i+1} + \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^{i+2-j} \binom{i+1}{j} n^j \right) = n^k$$

Untuk $i = 0$

$$a_0 \left(n^{0+1} + \sum_{j=0}^{0+1} (-1)^{0+2-j} \binom{0+1}{j} n^j \right)$$

$$= a_0 \left(n^1 + \sum_{j=0}^{1} (-1)^{2-j} \binom{1}{j} n^j \right)$$

$$= a_0 n^1 + a_0 \binom{1}{0} n^0 - a_0 \binom{1}{1} n^1$$

Untuk $i = 1$

$$a_1 \left(n^{1+1} + \sum_{j=0}^{1+1} (-1)^{1+2-j} \binom{1+1}{j} n^j \right)$$

$$= a_1 \left(n^2 + \sum_{j=0}^{2} (-1)^{3-j} \binom{2}{j} n^j \right)$$

$$= a_1 n^2 - a_1 \binom{2}{0} n^0 + a_1 \binom{2}{1} n^1 - a_1 \binom{2}{2} n^2$$

Untuk $i = 2$

$$a_2 \left(n^{2+1} + \sum_{j=0}^{2+1} (-1)^{2+2-j} \binom{2+1}{j} n^j \right)$$

$$= a_2 \left(n^3 + \sum_{j=0}^{3} (-1)^{4-j} \binom{3}{j} n^j \right)$$

$$= a_2 n^3 + a_2 \binom{3}{0} n^0 - a_2 \binom{3}{1} n^1 + a_2 \binom{3}{2} n^2 - a_2 \binom{3}{3} n^3$$

Untuk i=3

$$a_3 \left(n^{3+1} + \sum_{j=0}^{3+1} (-1)^{3+2-j} \binom{3+1}{j} n^j \right)$$

$$= a_3 \left(n^4 + \sum_{j=0}^{4} (-1)^{5-j} \binom{4}{j} n^j \right)$$

$$= a_3 n^4 - a_3 \binom{4}{0} n^0 + a_3 \binom{4}{1} n^1 - a_3 \binom{4}{2} n^2 + a_3 \binom{4}{3} n^3 - a_3 \binom{4}{4} n^4$$

$\vdots$

Untuk $i = k$

$$a_k\left(n^{k+1} + \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{k+2-j}\binom{k+1}{j}n^j\right)$$

$$= a_k\left(n^{k+1} + (-1)^{k+2-0}\binom{k+1}{0}n^0 + (-1)^{k+2-1}\binom{k+1}{1}n^1 + (-1)^{k+2-2}\binom{k+1}{2}n^2\right.$$
$$\left. + (-1)^{k+2-3}\binom{k+1}{3}n^3 + (-1)^{k+2-4}\binom{k+1}{4}n^4 + \cdots + (-1)^{k+2-k}\binom{k+1}{k+1}\right)$$

Kemudian dikelompokkan

$$a_0\binom{1}{0}n^0 - a_1\binom{2}{0}n^0 + a_2\binom{3}{0}n^0 - a_3\binom{4}{0} + \cdots + (-1)^{k+2}a_k\binom{k+1}{0}n^0$$
$$+a_0n^1 - a_0\binom{1}{1}n^1 + a_1\binom{2}{1}n^1 - a_2\binom{3}{1}n^1 + a_3\binom{4}{1}n^1 + \cdots + (-1)^{k+1}a_k\binom{k+1}{1}n^1$$
$$+a_1n^2 - a_1\binom{2}{2}n^2 + a_2\binom{3}{2}n^2 - a_3\binom{3}{2}n^2 + \cdots + (-1)^k a_k\binom{k+1}{2}n^2$$
$$+a_1n^2 - a_1\binom{2}{2}n^2 + a_2\binom{3}{2}n^2 - a_3\binom{3}{2}n^2 + \cdots + (-1)^k a_k\binom{k+1}{2}n^2$$
$$+a_2n^3 - a_2\binom{3}{3}n^3 + a_3\binom{4}{3}n^3 - a_4\binom{5}{3}n^3 + \cdots + (-1)^{k-1}a_k\binom{k+1}{3}n^3$$
$$+a_3n^4 - a_3\binom{4}{4}n^4 + a_4\binom{5}{4}n^4 - a_5\binom{6}{4}n^4 + \cdots + (-1)^{k-2}a_k\binom{k+1}{4}n^4$$
$$\vdots$$
$$a_{k-1}n^k - a_{k-1}\binom{k}{k}n^k + a_k\binom{k+1}{k}n^k$$
$$a_kn^{k+1} - a_k\binom{k+1}{k+1}n^{k+1} = n^k$$

$$a_0\binom{1}{0}n^0 - a_1\binom{2}{0}n^0 + a_2\binom{3}{0}n^0 - a_3\binom{4}{0} + \cdots + (-1)^{k+2}a_k\binom{k+1}{0}n^0$$
$$+a_1\binom{2}{1}n^1 - a_2\binom{3}{1}n^1 + a_3\binom{4}{1}n^1 + \cdots + (-1)^{k+1}a_k\binom{k+1}{1}n^1$$
$$+a_2\binom{3}{2}n^2 - a_3\binom{4}{2}n^2 + \cdots + (-1)^k a_k\binom{k+1}{2}n^2$$
$$+a_3\binom{4}{3}n^3 + \cdots + (-1)^{k-1}a_k\binom{k+1}{3}n^3$$
$$\vdots$$
$$a_k\binom{k+1}{k}n^k = n^k$$

Sehingga dapat direpresentasikan ke bentuk matriks:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \binom{1}{0} & -\binom{2}{0} & \binom{3}{0} & -\binom{4}{0} & \cdots & \left((-1)^{k+2}\binom{k+1}{0}\right) \\ 0 & \binom{2}{1} & -\binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \left((-1)^{k+1}\binom{k+1}{1}\right) \\ 0 & 0 & \binom{3}{2} & -\binom{4}{2} & \cdots & \left((-1)^{k}\binom{k+1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \binom{4}{3} & \cdots & \left((-1)^{k-1}\binom{k+1}{3}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\binom{k+1}{k}\right) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}}$$

Matriks A yang diperoleh merupakan matriks segitiga atas, dengan entri-entri diagonal yang tidak nol. Akibatnya matriks $\boldsymbol{A}$ mempunyai invers, solusi sistem persamaan liniaer $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ dapat diperoleh, menggunakan $\boldsymbol{a} = A^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{b}$. Nilai entri dari vektor $\boldsymbol{a}$ yaitu $a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots a_k$ adalah $\boldsymbol{a}$, selanjutnya disubstitusikan ke $S_n^{(p)} = \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i+1}$.

Diketahui , $S_1 = 1$

Akan disubstitusikan ke persamaan $S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$

$$S_1 = C_1 + \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i+1}$$

$$S_1 = C_1 + \sum_{i=0}^{k} a_i 1^{i+1}$$

$$1 = C_1 + \sum_{i=0}^{k} a_i$$

$$1 = C_1 + 1$$

$$C_1 = 0.$$

Sehungga, $S_n = S_n^{(h)} + S_n^{(p)}$

$= \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i+1}$

Jadi dapat disimpulkan bahwa setiap jumlahan bilangan asli dengan pangkat bilangan asli menggunakan relasi rekurensi $S_n - S_{n-1} = n^k$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ diperoleh solusi homogennya adalah $C_1 = 0$ dan solusi partikularnya sama dengan S_n. Berikut ditunjukkan bahwa $S_n = \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i+1}$ merupakan solusi dari relasi rekurensi $S_n = S_{n-1} + n^k$.

Diketahui $S_n = \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i+1}$, sehingga:

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i (n^{i+1} - (n-1)^{i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i \left(n^{i+1} - \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} n^j (-1)^{i+1-j} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i \left(n^{i+1} + \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^{i+2-j} \binom{i+1}{j} n^j \right)$$

$$= a_k \binom{k+1}{k} n^k$$
$$= 1 \cdot n^k$$
$$= n^k$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, kesimpulan yang didapat untuk menentukan jumlahan bilangan asli dan pangkatnya dengan menggunakan relasi rekurensi diberikan bilangan asli berpangkat satu $(1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 \ldots \ldots + n^1) = \sum_{r=1}^{n} r$, yang akan di kontruksikan menjadi relasi rekurensi dan diperoleh hasil $S_n = \frac{n}{2}(n+1)$. Selanjutnya jumlahan bilangan asli pertama dengan pangkatnya yaitu pangkat dua, yang akan dikontruksikan menjadi bentuk relasi rekurensi. Diberikan bilangan asli pertama dengan pangkat dua, $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2) = \sum_{r=1}^{n} r^2$, diperoleh hasil $S_n = \frac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^2)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa setiap jumlahan bilangan asli dengan pangkat bilangan asli menggunakan relasi rekururensi $S_n - S_{n-1} = n^k$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ bahwa solusi homogennya adalah $C_1 = 0$ dan solusi partikularnya sama dengan $S_n = \sum_{i=0}^{k} a_i n^{i+1}$.

REFERENSI

[1] Elaydi S. *An Intruduction to Difference Equations.* Springer Science+Bussines Media, Inc., USA. 2005.

[2] Essi, D. I. *Sum of the First Natural Number and Their Power.* IOSR jurnal of Mathematics. 2020.

[3] Fraleigh,J.B. *A First Course is Abstarct Algebra,* 5^{th} *Edition*. Addison-Wesley Pubhlising Company, United States of Amerika. 1994.

[4] Lipschutz, dan, dkk. *Matematika Diskret*. Jakarta. 2008.

[5] Muliati, B. *Historisitas Matematika Sistem Penulisan Bilangan, el MUBTADA: J. of Elem. Isl. Edu.* 2020.

[6] Penna, M. *Differential vs. Differential Equations,* Brooks/Cole: A division of Thomson Learning, Inc., India. 2005.

[7] Rosen, H. K. *Discreate Mathematics and its Applications, Sixth Edition*. New York. 2007.

Rais Iskandar : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
raisiskandar@student.untan.ac.id

Fransiskus Fran : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
fransiskusfran@math.untan.ac.id

Yudhi : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
yudhi@math.untan.ac.id