

INVERSE PROBLEM PADA PRINSIP BERNOULLI TORRICELLI

Renisa Auditaputri, Evi Noviani, Yudhi

INTISARI

Inverse problem merupakan permasalahan matematika dari memodelkan beberapa bidang fisik, proses, atau fenomena-fenomena alam, dan solusinya adalah solusi yang ill-posed. Dalam penelitian ini diselesaikan permasalahan prinsip Bernoulli Torricelli. Prinsip Bernoulli Torricelli merupakan asas/hukum pada ilmu fisika yang menyatakan kecepatan fluida yang menyembur keluar dari sebuah lubang pada bejana memiliki kecepatan yang sama dengan kecepatan yang diperoleh sebuah benda yang terjatuh bebas namun memiliki momen inersia. Inverse problems yang bersesuaian adalah masalah jangkauan semburan, B , dengan bejana kerucut dan masalah ketinggian air, $h(t)$ dengan bejana silinder. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji bentuk model direct problem dan inverse problem, dan menganalisis perbandingan serta sifat dari solusinya. Hasil pemodelan masalah bejana kerucut pada direct problem memiliki solusi jari-jari air pada lubang, r yang tunggal, sedangkan model pada inverse problem memiliki r lebih dari satu. Hasil pemodelan pada bejana silinder menggunakan luas permukaan tak beraturan, $A^e(t)$ memiliki solusi ketinggian air, $h(t)$, yang lebih tinggi $\pm 0,01$ m dibanding dengan $h(t)$ yang menggunakan luas permukaan tetap, A . Begitu juga dengan kecepatan airnya, $v(t)$, pada inverse problem memiliki semburan yang lebih cepat $\pm 0,5$ s dibanding dengan direct problem. Kestabilan solusi dari inverse problem ditentukan oleh konstanta ϵ (keberaturan) dan konstanta G (ketidakberaturan).

Kata Kunci : *direct problem, pemodelan fluida, persamaan diferensial*

PENDAHULUAN

Pada zaman sains modern dan teknologi, matematika memiliki peranan penting sebagai alat bantu umat manusia untuk memecahkan permasalahan-permasalahan dalam berbagai disiplin ilmu. Penggunaan matematika dalam mengungkapkan suatu kejadian fisika dan menyajikannya dalam lambang-lambang matematika dinamakan pembentukan model matematis [1]. Persamaan diferensial biasanya digunakan untuk membentuk model matematis yang menjabarkan perubahan laju sesaat dalam fisika. Pemodelan fluida merupakan model matematis hasil penerapan persamaan diferensial pada ilmu fisika, salah satunya yang di dalamnya terkandung hukum Torricelli [2].

Hukum Torricelli ditemukan oleh Evangelista Torricelli (1608-1647), merupakan salah satu hukum/asas pada mekanika fluida yang menyatakan kecepatan air yang menyembur keluar dari lubang pada sebuah bejana, memiliki kecepatan yang sama dengan benda yang terjatuh bebas (hanya oleh gravitasi). Oleh karena itu, kecepatan terbesar diperoleh saat ketinggian benda berada pada titik asal atau ketinggian air pada mula-mula.

Namun, kecepatan semburan Torricelli berkontradiksi dengan momen inersia (Hukum Newton I). Menurut Torricelli semburan dimulai dengan kecepatan tertinggi secara spontan sedangkan menurut momen inersia, setiap benda cenderung mempertahankan keadaannya. Hingga pada tahun 1738, Daniel Bernoulli pada bukunya *Hydrodynamic* adalah ilmuwan pertama yang memberikan parameter pada hukum Torricelli. Lewat prinsip Bernoulli, ia menetapkan bahwa kecepatan semburan sebenarnya dimulai dari keadaan diam $v_0 = 0$ dan baru mencapai kecepatan Torricelli selang beberapa waktu [3]. Dengan memodelkan permasalahan-permasalahan prinsip Bernoulli Torricelli dalam skala kecil, pemodelan tersebut dapat menjadi patokan untuk berbagai masalah di dunia nyata dengan skala besar namun serupa.

Dalam masalah matematika fisika, *direct problem* pada umumnya merupakan masalah pemodelan suatu fungsi yang dapat menggambarkan fenomena atau proses dari titik manapun dari domain tertentu pada waktu tertentu [4]. *Direct problem* adalah pencarian solusi bagi sebuah permasalahan yang telah memiliki sebab (*cause*) dan K merupakan prosesnya (*model*), kemudian dicari v yang merupakan akibat (*effect*) sehingga diperoleh solusi tunggal dari permasalahan tersebut [5].

Pada kasus prinsip Bernoulli Torricelli, berapakah kecepatan semburan air dari sebuah lubang pada bejana berisi air? Permasalahan ini akan direpresentasikan melalui model yang dibentuk dari *direct problem*. Namun pada *direct problem*, beberapa bentuk fisis serta faktor alam yang memengaruhi tak selalu disertakan dalam proses pembentukan model, agar dapat memperoleh model yang memiliki solusi *well-posed*. Solusi matematika yang *well-posed* yaitu yang memiliki *existence* (keberadaan), *uniqueness* (keunikan/ketunggalan), dan *stability* (kestabilan) [5]. Padahal di kehidupan nyata banyak masalah-masalah alam memiliki solusi yang tidak *well-posed*.

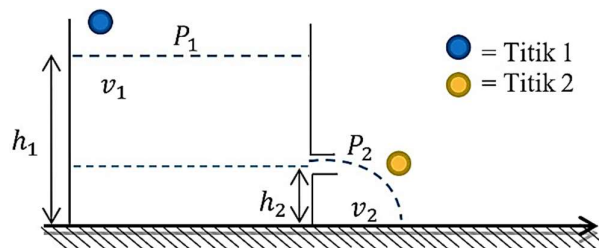
Adanya ketidak'sempurnaan' atau *ill-posedness* inilah yang mendukung keterlibatan *inverse problem* pada penelitian ini. *Inverse problem* memiliki solusi yang tidak tunggal, dan/atau tidak stabil [6]. *Inverse problem* merupakan keterbalikan dari *direct problem*. *Direct problem* memiliki dua *inverse problem* yaitu *causation problem* dan *model identification problem*. *Causation problem* menentukan jari-jari air pada lubang, r (sebab) dengan memodelkan vektor posisi pada saat setiap t , $b(t)$ (model) dan mencari jarak semburan airnya, B (akibat), dan *model identification problem* menentukan model luas penampang tak beraturan $A^E(t)$, dengan mengetahui laju perubahan volume air, $\frac{dV}{dt}$, dan ketinggian airnya, $h(t)$. Penelitian ini bertujuan untuk menyajikan model matematika dari *direct problem* dan *inverse problem* selanjutnya membandingkan solusinya. Kemudian, menganalisis sifat ketunggalan, kestabilan, dan eksistensi dari solusi tersebut.

PRINSIP BERNOULLI TORRICELLI

Hukum Torricelli menyatakan kecepatan semburan air v sebanding dengan kecepatan air terjatuh bebas dari ketinggian awal h , karena air pada bejana semula diam lalu terjatuh bebas [6]. Hukum Torricelli menurut Daniel Bernoulli merupakan kasus khusus dari prinsip Bernoulli, yang diperoleh ketika momen inersia diabaikan dan luas penampang lubang (*leakage*) lebih kecil dibandingkan dengan luas penampang bejana [7]. Prinsip Bernoulli merupakan hukum yang mengatur hubungan antara tekanan P , energi potensial E_p , dan energi kinetik E_k dalam aliran fluida. Dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_1 V + E_{p_1} + E_{k_1} &= P_2 V + E_{p_2} + E_{k_2} \\ P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 &= P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Sebuah bejana yang besar mempunyai lubang yang kecil pada jarak h_2 di bawah permukaan air, kemudian terapkan persamaan Bernoulli pada titik 1 dan 2. Karena diameter lubang jauh lebih kecil daripada diameter bejana, dapat diabaikan kecepatan air di atas (titik 1) [6].



Gambar 1. Ilustrasi Bejana Berlubang

Asumsikan bahwa lubang memiliki ukuran yang jauh lebih kecil dari bibir bejana, hal itu menyebabkan v_1 memiliki kecepatan yang sangat kecil atau mendekati nol ($v_1 \rightarrow 0$) dan v_2 memiliki kecepatan yang lebih besar daripada v_1 . Substitusikan $v_1 \rightarrow 0$ ke Persamaan (1), diperoleh:

$$P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (2)$$

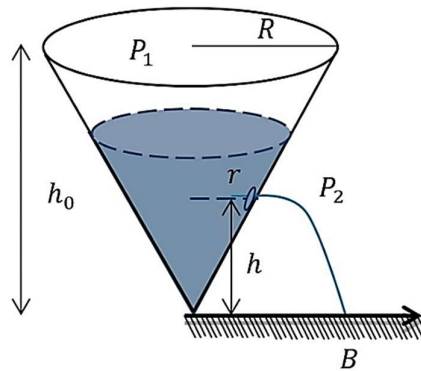
Karena titik 1 dan 2 berhubungan dengan atmosfer, tekanan pada bibir bejana, P_1 dan tekanan pada lubang, P_2 adalah sama dengan tekanan atmosfer [6]. Oleh karena itu, tekanan pada kedua bagian tersebut merupakan tekanan udara P_0 sebesar 1 atm, diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho gh_1 - \rho gh_2 &= \frac{1}{2} v_2^2 \\ \Leftrightarrow v_2 &= \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \\ \Leftrightarrow v_2 &= \sqrt{2g(\Delta h)} \end{aligned} \quad (3)$$

Pada Gambar 1, air muncul dari lubang dengan kecepatan yang sama dengan kecepatan yang diperoleh jika air itu jatuh bebas dengan ketinggian h . Persamaan (3) dikenal sebagai hukum Torricelli [6].

MASALAH JANGKAUAN SEMBURAN

Pada penelitian ini akan dimodelkan permasalahan jangkauan semburan, dengan jari-jari awal air pada bejana R , ketinggian air awal h_0 , dan ketinggian air pada lubang bejana h . Berikut ini disajikan bejana kerucut dengan lubang pada sisinya:



Gambar 2. Bejana Kerucut dengan Lubang pada Sisi Bejana

Tahap awal dalam mencari jangkauan semburan ialah mengidentifikasi prinsip Bernoulli Torricelli, dimana kecepatan air yang menyembur dari lubang sama dengan kecepatan air yang berkurang dari ketinggian awalnya. Sehingga, berlaku hukum Gallileo, *falling body* $h = \frac{1}{2} gt^2$. Dari hukum tersebut, dapat diperoleh waktu tempuh air, t , sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} gt^2 \\ \frac{2h}{g} &= t^2 \\ t &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{aligned}$$

Pada saat air menyembur keluar berlaku kecepatan horizontal air menurut prinsip Bernoulli Torricelli, $v = \sqrt{2g(\Delta h)} = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$, dalam hal ini h_1 merupakan h_0 dan h_2 merupakan h , namun tidak terdapat kecepatan vertikal atau $y = 0$.

Vektor posisi semburan air pada saat t , $b(t)$, dapat diperoleh dari komponen gerak horizontal, $x = vt$. Substitusikan v , dan t pada vektor posisi pada saat t , $b(t)$:

$$\begin{aligned} b(t) &= vt \\ &= \sqrt{2g(h_0 - h)} \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{aligned} \quad (4)$$

Sehingga diketahui vektor posisi semburan air pada saat t , $b(t)$, dipengaruhi oleh ketinggian air dan gravitasi-nya. Namun, pada bejana berbentuk kerucut apabila ketinggian air berubah maka jari-jari airnya juga akan berubah. Hubungan antara jari-jari air pada bejana dan ketinggian airnya dapat diperoleh dari kesebangunan segitiga dimana r tegak lurus terhadap h , dan sudut θ terbentuk dari sisi pelukis s yang berhimpitan dengan ketinggian air pada bejana h sehingga diperoleh:

$$\tan\theta = \frac{r}{h} \quad (5)$$

dari Persamaan (5), diperoleh h sebagai berikut:

$$h = r \cotan\theta \quad (6)$$

dengan cara yang analog, h_0 dipengaruhi oleh R dan besar sudut θ yakni:

$$h_0 = R \cotan\theta \quad (7)$$

substitusikan Persamaan (6), dan Persamaan (7), ke Persamaan (4) diperoleh:

$$B = 2 \cotan\theta \sqrt{r(R - r)} \quad (8)$$

dengan $0 < r < R$

Inverse problem yang bersesuaian untuk kasus ini adalah *causation problem*, bagaimana menentukan nilai r apabila B dan R diketahui. Apabila pada *direct problem* r telah diketahui, sebaliknya pada *inverse problem* jari-jari air pada lubang, r , belum diketahui. Bagaimana memodelkan dan menganalisis sifat solusinya, jika yang diketahui terlebih dahulu adalah vektor posisi pada saat t , $b(t)$, dan jangkauan semburannya yaitu B . Untuk menganalisis sifat solusi *inverse problem*-nya, Persamaan (8) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{B}{2 \cotan\theta} &= \sqrt{r(R - r)} \\ \Leftrightarrow r^2 - Rr + \frac{B^2}{4 \cotan^2\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

dari Persamaan (9), solusi untuk r ialah:

$$r = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - B^2 \tan^2\theta}}{2} \quad (10)$$

Model dari r memiliki solusi yang tunggal jika hanya jika $R = B \tan\theta$. Namun, untuk menghasilkan jangkauan semburan yang sama, dapat diperoleh dari dua jari-jari air pada lubang, r , yang berbeda. Ketidak'tunggalan' ini tidak perlu disingkirkan melainkan keberadaannya dapat menjelaskan peristiwa lainnya, yaitu ketika nilai r bernilai besar maka semburannya memiliki waktu tempuh yang lama untuk mencapai titik B , dan kecepatan semburannya juga kecil. Berbanding terbalik ketika nilai r bernilai kecil maka semburannya memiliki waktu tempuh yang lebih cepat untuk mencapai titik B , dan kecepatan semburannya besar.

MASALAH KETINGGIAN AIR

Untuk permasalahan yang kedua, sebuah bejana berisi air terdapat lubang pada bagian bawah bejana (air terjatuh secara vertikal), bejana tersebut berbentuk silinder. Diasumsikan bejana tersebut beraturan dan akan dianalisis perubahan volume air pada bejana $\frac{dV}{dt}$, kemudian diketahui luas penampang beraturan $A(t)$, akan dicari ketinggian air beserta kecepatan air-nya.

Amati lubang pada bagian bawah bejana, misalkan ketinggian air di luar lubang saat t adalah $y(t)$, dimana percepatannya $a(t)$ adalah percepatan gravitasi g (jatuh ke bumi) dan kecepatan pada saat t , $v(t)$, adalah gt . Sehingga, diperoleh $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (Hukum Gallileo, *falling body*). Apabila $y(t) = h$, maka t dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

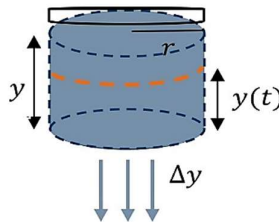
Apabila $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ diperoleh $v(t)$:

$$v(t) = \sqrt{2gh}$$

Kemudian volume awal dari bejana adalah $V_{bejana} = \pi R^2 h_0$. Jika volume air pada bejana berubah terhadap waktu, menyebabkan ketinggian air pada bejana berubah terhadap waktu maka:

$$\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dh}{dt} \quad (11)$$

Berikutnya volume aliran air pada lubang bejana V_{lubang} , volume air yang keluar diperoleh dari rumus debit yaitu $V = avt$. Berikut ini disajikan gambar lubang pada penampang alas bejana, dan ilustrasi perubahan volumenya:



Gambar 3.4 Laju Aliran Air di Luar Lubang

substitusikan $a = \pi r^2$ diperoleh:

$$V_{lubang} = \pi r^2 vt \quad (12)$$

Air yang keluar dari lubang pada bagian bawah bejana menyebabkan perubahan ketinggian air di dalam bejana yang dinotasikan dengan Δy . Apabila terdapat perubahan pada ketinggian air maka volume aliran air juga akan mengalami perubahan. Karena perubahan volume air mengalami penurunan bukan penambahan maka perubahan volumenya dapat dinyatakan pada Persamaan (13):

$$\Delta V_{lubang} = -\pi r^2 \Delta y \quad (13)$$

Berdasarkan hukum Torricelli, perubahan ketinggian air y dipengaruhi oleh kecepatan cairan keluar dari lubang dan perubahan waktu t , diperoleh $\Delta y = v\Delta t$, sehingga Persamaan (13) menghasilkan perubahan volume air terhadap waktu, untuk memperoleh hasil yang lebih akurat dapat disubstitusikan koefisien alir air $\gamma = 0,6$ sebagai berikut:

$$\Delta V_{lubang} = -\gamma \pi r^2 v \Delta t$$

$$\frac{\Delta V_{lubang}}{\Delta t} = -\gamma\pi r^2 v \quad (14)$$

Berdasarkan Persamaan (14), diketahui $\frac{\Delta V_{lubang}}{\Delta t}$ merupakan perubahan volume air terhadap waktu. Apabila $\Delta t \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{lubang}}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \gamma\pi r^2 v \quad (15)$$

Persamaan (15) kemudian dinyatakan dalam persamaan diferensial, sehingga diperoleh:

$$\frac{dV_{lubang}}{dt} = -\gamma\pi r^2 v \quad (16)$$

Kemudian substitusikan hukum Torricelli, $v = \sqrt{2gh}$, dan luas penampang lubang yaitu a adalah πr^2 , sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{dV_{lubang}}{dt} = -\gamma a \sqrt{2gh} \quad (17)$$

Berdasarkan Persamaan (11), dan Persamaan (17), dan luas penampang bejana A adalah πR^2 , laju perubahan volume air terhadap waktu pada bejana yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{bejana}}{dt} &= \frac{dV_{lubang}}{dt} \\ \Leftrightarrow \pi R^2 \frac{dh}{dt} &= -\gamma a \sqrt{2gh} \\ \Leftrightarrow A \frac{dh}{dt} &= -\gamma a \sqrt{2gh} \\ \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} &= -\frac{\gamma a \sqrt{2gh}}{A} \end{aligned} \quad (18)$$

Misalkan $\frac{\gamma a \sqrt{2g}}{A}$ adalah ℓ , diperoleh:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\ell dt \quad (19)$$

Selanjutnya dengan mengintegrasikan Persamaan (19), diperoleh persamaan ketinggian air pada saat t sebagai berikut:

$$\sqrt{h} = -\frac{\ell}{2}t + c \quad (20)$$

dengan $c \geq \frac{\ell}{2}t$. Jadi,

$$h(t) = \left(-\frac{\ell}{2}t + c\right)^2 \quad (21)$$

Persamaan (21) menjadi:

$$h(t) = \left(-\frac{\ell}{2}t + \sqrt{h_0}\right)^2 \quad (22)$$

dengan $0 \leq t \leq \frac{2}{\ell}\sqrt{h_0}$.

Dari Persamaan (3), dan Persamaan (22), besar kecepatan air dan ketinggian air pada bejana dipengaruhi oleh luas penampang bejana.

Inverse problem yang bersesuaian adalah *model identification problem*, dengan *inverse problem* luas permukaan bejana, $A(t)$, menggunakan bejana dengan bentuk fisis bejana-bejana yang biasa digunakan pada kehidupan sehari-hari seperti: galon, gelas beer, dll yang memiliki dinding yang tidak beraturan.

Untuk melihat kestabilan solusi *inverse problem* yang dimaksud dapat melihat Persamaan (22), misalkan jari-jari dari bejana tersebut tetap sehingga luas penampangnya $A(h)$ akan tetap pula. Kemudian, pada saat $h(t) = 0$, maka diperoleh waktu bejana kosong, t :

$$t = \frac{2}{\ell} \sqrt{h_0} \quad (23)$$

dengan $0 \leq t \leq \frac{2}{\ell} \sqrt{h_0}$.

Perubahan ketinggian air terhadap waktu $\frac{dh}{dt}$, yang dapat didefinisikan sebagai turunan dari Persamaan (22) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 - \ell \sqrt{h_0} t + \frac{\ell^2}{4} t^2 \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{2} \ell^2 t - \ell \sqrt{h_0} \end{aligned} \quad (24)$$

Untuk menentukan sebarang luas penampang sebuah bejana, yang belum diketahui bentuknya dimisalkan ε adalah suatu bilangan positif yang kecil, berbanding dengan suatu bilangan positif yang besar G . Sehingga t memiliki anggota baru, yaitu $\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\ell} \sqrt{h_0} \pm \frac{\varepsilon}{G} \right) = \frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} \pm \frac{\varepsilon}{2G}$.

Untuk meneliti bentuk bejana tersebut maka dibuat suatu fungsi baru yang kontinu bagian demi bagian (*piecewise*) yaitu $\eta(t)$ yang didefinisikan sebagai:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \left[0, \frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} - \frac{\varepsilon}{2G} \right] \\ G \left(t - \left(\frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} - \frac{\varepsilon}{2G} \right) \right) & , t \in \left(\frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} - \frac{\varepsilon}{2G}, \frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} + \frac{\varepsilon}{2G} \right) \\ \varepsilon & , t \in \left[\frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} + \frac{\varepsilon}{2G}, \frac{2}{\ell} \sqrt{h_0} \right] \end{cases}$$

Berdasarkan *piecewise* tersebut, η mempunyai gradien sebesar G pada $\left(\frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} - \frac{\varepsilon}{2G}, \frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} + \frac{\varepsilon}{2G} \right)$ dan memenuhi $0 \leq \eta(t) \leq \varepsilon$. Kesalahan (galat) dalam pengamatan dapat dipertimbangkan dalam fungsi perturbasi berikut:

$$h^\varepsilon(t) = h(t) + \eta(t)$$

Substitusikan fungsi perturbasi tersebut kedalam Persamaan (24), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} A(h^\varepsilon) \frac{dh}{dt} &= -\gamma a \sqrt{2gh} \\ A(h^\varepsilon) \left(\frac{1}{2} \ell^2 t - \ell \sqrt{h_0} + \eta'(t) \right) &= -\gamma a \sqrt{2g \left(\left(\sqrt{h_0} - \frac{\ell}{2} t \right)^2 + \eta(t) \right)} \end{aligned} \quad (25)$$

Pada $\left(\frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} - \frac{\varepsilon}{2G}, \frac{1}{\ell} \sqrt{h_0} + \frac{\varepsilon}{2G} \right)$ dengan $\eta'(t) = G$. Karena pada saat $t = \frac{1}{\ell} \sqrt{h_0}$, $\eta(t) = \frac{\varepsilon}{2}$ maka Persamaan (25) menjadi:

$$A(h^\varepsilon) = - \frac{\gamma a \sqrt{2g \left(\left(\sqrt{h_0} - \frac{\ell}{2} t \right)^2 + \eta(t) \right)}}{\frac{1}{2} \ell^2 t - \ell \sqrt{h_0} + \eta'(t)}$$

Substitusikan $\eta(t)$, dan $\eta'(t)$ diperoleh:

$$A(h^\varepsilon) = -\frac{\gamma a \sqrt{2g\left(\left(\sqrt{h_0} - \frac{\ell}{2}t\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}}{\frac{1}{2}\ell^2 t - \ell\sqrt{h_0} + G}$$

Substitusikan $t = \frac{1}{\ell}\sqrt{h_0}$

$$A(h^\varepsilon) = -\frac{\gamma a \sqrt{2g\left(\frac{1}{4}h_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}}{-\frac{\ell}{2}\sqrt{h_0} + G} \tag{26}$$

Persamaan (26) merupakan luas penampang pada saat h^ε – merupakan ketinggian air yang diperoleh dari menambahkan fungsi galat $\eta(t)$ ke dalam ketinggian pada saat t , fungsi teori (aproksimasi) $h(t)$. Dengan memilih G yang cukup besar pula $A(h^\varepsilon)$ menjadi sangat kecil mendekati nol padahal luas daerah penampang silinder adalah tetap (stabil). Dengan kata lain gangguan sedikit pada h menghasilkan perubahan yang besar terhadap $A(h)$, konsekuensinya solusi dari kasus ini adalah solusi yang tidak stabil.

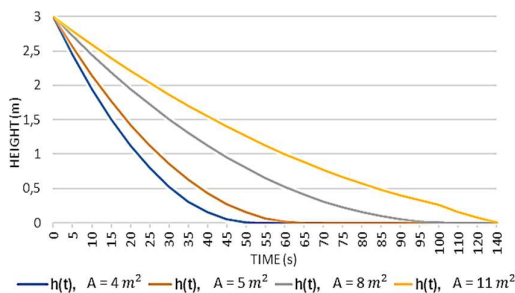
PERBANDINGAN SOLUSI INVERSE PROBLEM DAN DIRECT PROBLEM

1. Masalah Jangkauan Semburan

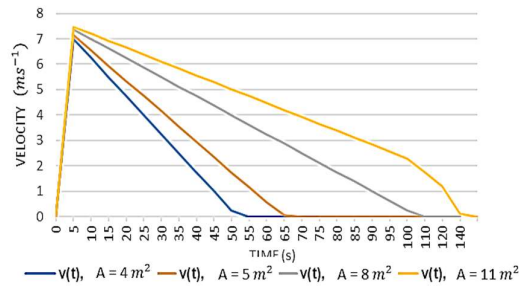
Jangkauan semburan pada *direct problem* memiliki satu jari-jari air pada lubang, r , untuk setiap jangkauan semburan, B , yang dihasilkannya. Namun pada *inverse problem* jangkauan semburan memiliki lebih dari satu r , solusi yang tidak tunggal ini menjelaskan lebih banyak peristiwa lain dari masalah jangkauan semburan yaitu masalah waktu jangkauan semburan. Apabila pada *direct problem*, hanya ada satu waktu dimana air dapat mencapai jangkauan semburannya maka pada *inverse problem* terdapat variasi waktu yang berbeda untuk jangkauan semburan yang sama. Waktu tersebut bervariasi dikarenakan jari-jari air pada lubang tak tunggal, sehingga waktu yang diperlukan air dalam mencapai jangkauan semburan juga akan berbeda.

2. Masalah Ketinggian Air

Hasil simulasi untuk mengetahui pengaruh luas penampang *direct problem* terhadap ketinggian air dan kecepatan air adalah sebagai berikut:



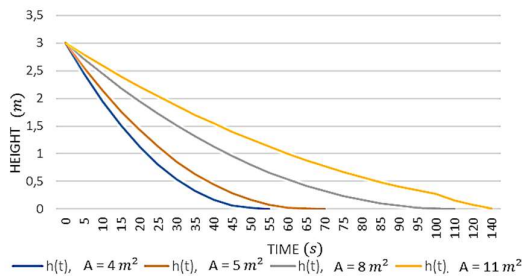
Gambar 1. Hubungan Luas Penampang Air dan Ketinggian Air



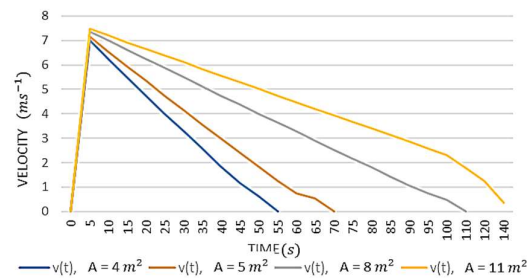
Gambar 2. Hubungan Luas Penampang Air dan Kecepatan Air

Sedangkan untuk simulasi hubungan luas penampang *inverse problem* terhadap ketinggian air dan kecepatan air karena dipengaruhi juga oleh konstanta ε dan konstanta G . Konstanta tersebut merupakan gangguan yang menjelaskan ketidakberaturan dari A .

Sehingga grafik luas penampang *inverse problem* terhadap ketinggian air dan kecepatan air adalah sebagai berikut:

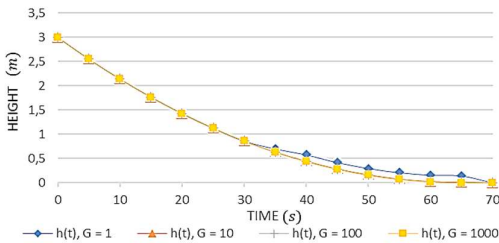


Gambar 3. Hubungan Luas Penampang Tidak Beraturan dan Ketinggian Air

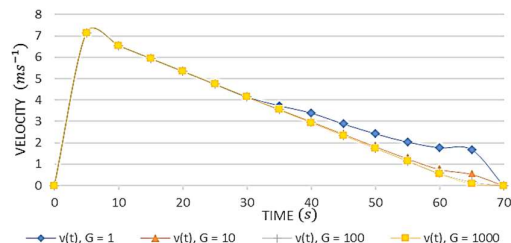


Gambar 4. Hubungan Luas Penampang Tidak Beraturan dan Kecepatan Air

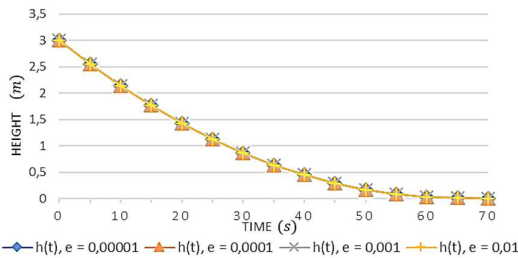
Kemudian, berikut merupakan grafik simulasi hubungan konstanta ε dan konstanta G terhadap ketinggian air dan kecepatan air:



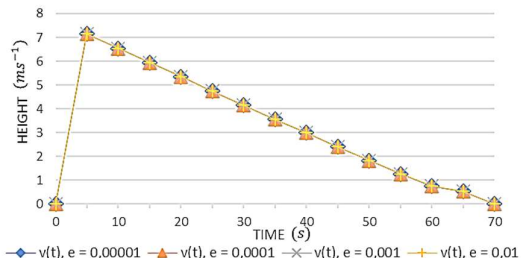
Gambar 5. Hubungan Konstanta ε dan Ketinggian Air



Gambar 6. Hubungan Konstanta ε dan Kecepatan Air



Gambar 7. Hubungan Konstanta G dan Ketinggian Air



Gambar 8. Hubungan Konstanta G dan Kecepatan Air

Perbandingan solusi antara $h(t)$ dan $v(t)$ menggunakan luas penampang bejana tetap, A , yang merupakan solusi dari *direct problem*, dan $h(t)$ dan $v(t)$ menggunakan luas penampang bejana tidak beraturan, A^ε , yang merupakan solusi dari *inverse problem*. Berdasarkan Gambar 1 dan Gambar 3, diperoleh $h(t)$ menggunakan luas permukaan tak beraturan, $A^\varepsilon(t)$, memiliki ketinggian air yang lebih tinggi $\pm 0,01$ m dibanding dengan $h(t)$ yang menggunakan luas permukaan tetap, A . Begitu juga dengan kecepatan airnya, $v(t)$, pada Gambar 2 dan Gambar 4, menggunakan *inverse problem* memiliki semburan yang lebih cepat $\pm 0,5$ s dibanding dengan $v(t)$ yang menggunakan *direct problem*.

Sehingga dapat diinterpretasikan, apabila kecepatan pengosongan air semakin cepat selaras dengan penurunan ketinggian airnya tiap detik, maka waktu yang dibutuhkan untuk mengosongkan bejana juga akan semakin berkurang (cepat).

PENUTUP

Berdasarkan hasil yang telah dipaparkan pada pemodelan kasus prinsip Bernoulli Torricelli, diperoleh model *direct problem* pada masalah jangkauan semburan adalah $B = 2 \cotan \theta \sqrt{r(R-r)}$ dan model *direct problem* pada masalah ketinggian air adalah $h(t) = \left(-\frac{\ell}{2}t + \sqrt{h_0}\right)^2$. *Inverse problem* yang ada pada masalah jangkauan semburan adalah *causation problem*, dimana model r diperoleh $r = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - B^2 \tan^2 \theta}}{2}$ dan *inverse problem* pada masalah ketinggian air adalah *model identification problem*,

dimana model $A(h^\varepsilon)$ diperoleh $A(h^\varepsilon) = -\frac{\gamma a \sqrt{2g\left(\frac{1}{4}h_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}}{-\frac{\ell}{2}\sqrt{h_0} + G}$.

Model jangkauan semburan, B dari *direct problem* memiliki solusi tunggal dimana hanya terdapat satu jari-jari air pada lubang, r , yang memiliki jangkauan semburan, B . Namun, pada *inverse problem* jangkauan semburan B memiliki r lebih dari satu. Sehingga, ketika air berada di lubang pancuran dengan jari-jari air yang berbeda, jangkauan semburan yang dihasilkan dapat sama. Hanya saja memerlukan waktu yang berbeda untuk mencapai jangkauan tersebut.

Ketinggian air, $h(t)$ dan kecepatan air, $v(t)$ menggunakan *direct problem* dengan A yang diasumsikan mulus/beraturan memiliki ketinggian air lebih rendah $\pm 0,01$ m, dan kecepatan air lebih lambat $\pm 0,5$ s dibanding $h(t)$ dan $v(t)$ menggunakan *inverse problem* dengan A^ε . Nilai $h(t)$ dan $v(t)$ bervariasi sesuai dengan konstanta G dan ε -nya. Apabila G semakin mendekati nol maka akan semakin besar pula ketidakberaturan A^ε , tetapi apabila ε semakin mendekati nol maka A^ε akan semakin mulus atau mendekati luas permukaan bejana, A , pada *direct problem*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Prayudi. *Matematika Teknik Edisi Pertama*. Yogyakarta: Graha Ilmu; 2006.
- [2]. Chusni MM, Nisa K, Haidir M, & Fitriyani R. Persamaan Diferensial untuk Mengukur Laju Perubahan Volume Air Galon. *JIPFRI: Jurnal Inovasi Pendidikan Fisika dan Riset Ilmiah*. 2018; 2(1):8-13.
- [3]. Malcherek A. *History of The Torricelli Principle and a New Outflow Theory*. *Journal of Hydraulic Engineering*. 2016; 142(11).
- [4]. Kabanikhin SI. *Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications*. Germany: Walter de Gruyter GmbH; 2012.
- [5]. Groetsch CW. *Inverse Problem: Activities for Undergraduates*. United States of America: The Mathematical Association Of America; 1999.
- [6]. Groetsch CW. *Inverse Problems and Torricelli's Law*. *The College Mathematics Journal*. 1993; 24(2):210-217.
- [7]. Tipler PA. *PHYSICS for Scientists and Engineers*. California: Worth Publisher, Inc; 1991.

RENISA AUDITAPUTRI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak
renisaaudita@student.untan.ac.id

EVI NOVIANI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak
evi_noviani@math.untan.ac.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak
yudhi@math.untan.ac.id
