Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 12, No. 6 (2023), hal 561 – 568.

SPEKTRUM *DETOUR* PADA GRAF HELM TERTUTUP

Karmilawati

INTISARI

Matriks detour dari graf G merupakan matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan $DD(G)$ dengan entri ke- ij (baris ke- i dan kolom ke- j) adalah panjang lintasan terpanjang anatara titik i dan j. Spektrum detour merupakan sebuah matriks yang memiliki 2 baris dan m kolom dengan entrinya berisi nilai eigen (baris pertama) dan multiplisitas dari nilai eigen (baris ke dua) dari matriks detour. Spektrum detour dari G dinotasikan $spec_{DD}(G)$. Pada penelitian ini dibahas tentang penentuan spektrum detour dari graf helm tertutup. Graf helm tertutup mempunyai banyaknya titik $2n+1$ dan banyaknya sisi $4n$ untuk nilai $n \geq 3$. Langkah-langkah untuk menentukan spektrum detour graf helm tertutup yaitu menentukan matriks detour dari graf helm tertutup, kemudian menentukan nilai eigen dan multiplisitas dari nilai eigen pada pada matriks detour yang diperoleh. Sepktrum detour dari graf helm yang diperoleh adalah matriks berukuran 2×2, yang berarti terdapat 2 nilai eigen berbeda dari matriks detour graf helm.

Kata Kunci : *spektrum, matriks detour, graf helm tertutup*.

PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika yang bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Pada tahun 1736, seorang matematikawan asal Swiss bernama Euler pertama kali memecahkan masalah jembatan Konigsberg dengan mempresentasikan dan memodelkan masalah ini ke dalam bentuk graf. Daratan atau titik yang dihubungkan oleh jemabatan dapat dinyatakan sebagai simpul dan jembatannya dapat dinyatakan sebagai sisi [1]. Teori graf dapat dikaji melalui sifat-sifat aljabar yaitu dari representasi graf dalam suatu matriks.Beberapa representasi graf dalam bentuk matriks, diantaranya matriks *adjacency*, matriks bersisian, matriks *Laplacian* dan matriks *detour*.

Berdasarkan matriks-matriks hasil representasi dari suatu graf, matriks *adjacency*, matriks *Laplacian* dan matriks *detour* merupakan matriks persegi. Secara khusus, berdasarkan konsep pada aljabar linear, pada matriks persegi dapat ditentukan determinan dan nilai eigennya. Konsep nilai eigen ini menghasilkan matriks baru yang disebut spektrum graf. Pada penelitian ini dibahas spektrum graf untuk matriks detour yang selanjutnya disebut sebagai spektrum *detour*.

Misalkan G adalah graf sederhana dean tak berarah, berdasarkan graf ini dapat dibentuk matriks *adjacency* dengan entri-entri ke-*ij* bernilai satu jika titik *i* dan *j* bertetangga, selain itu entrinya bernilai nol. Matriks ini merupakan matriks simetris. Kemudian matriks tersebut diubah menjadi matriks *detour* dengan mengganti entri ke-*ij* menjadi panjang lintasan terpanjang dari titik i ke titik j [2]. Pada artikel ini dibahas secara khusus terkait spektrum *detour* pada graf helm tertutup (CH_n) dengan $n \geq 3$ yang memiliki $2n+1$ titik dan $4n$ sisi.

Adapun langkah untuk menentukan spektrum *detour* dari graf helm tertutup yaitu dengan menentukan $DD(CH_n)$ dari graf. Selanjutnya dicari nilai eigen dari multiplisitas nilai eigen. Kemudian dirumuskan spektrum pada masing-masing graf menjadi sebuah teorema dan dibuktikan kebenarannya.

SPEKTRUM GRAF

Diberikan graf sederhana dan tak berarah G dengan n titik. Bardasarkan matriks ini, dapat dibentuk matriks *adjacency* dengan ukuran $n \times n$ dinotasikan dengan $A(G)$. Berdasarkan matriks ini, dapat dibentuk suatu matriks baru yang disebut spektrum dari graf sesuai Definisi 1.

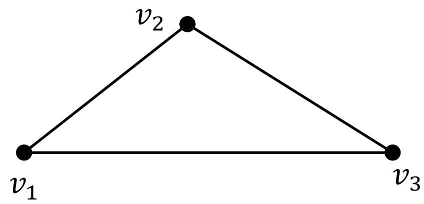
Definisi 1 [2] *Spektrum dari suatu graf G adalah matriks yang berukuran $2 \times s$ dengan a_{1s} menyatakan nilai eigen λ_s dan a_{2s} menyatakan multiplisitas dari nilai eigen λ_s dinotasikan dengan $m(\lambda_s)$. Spektrum dari suatu graf G dapat dinyatakan sebagai berikut:*

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

Definisi 2 [3] *Jika λ adalah nilai eigen dari $A(G)$, maka multiplisitas aljabar $m_a(\lambda)$ dari λ didefinisikan sebagai banyaknya λ sebagai akar dari persamaan karakteristik matriks $A(G)$. Sedangkan multiplisitas geometri $m_g(\lambda)$ didefinisikan sebagai dimensi dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.*

Berdasarkan definisinya, untuk graf tak berarah maka matriks *adjacency* yang diperoleh adalah matriks simetris. Berdasarkan sifat-sifat matriks simetris, salah satunya menyatakan bahwa matriks simetris dapat didiagonalisasi, yang berarti multiplisitas aljabar dan multiplisitas geometri masing-masing nilai eigen adalah sama. Oleh karena itu pada artikel ini digunakan istilah multiplisitas untuk mewakili multiplisitas aljabar atau multiplisitas geometri. Pada Contoh 3 digunakan multiplisitas aljabar pada sepktrum *adjacency* dan untuk sepktrum *detour* digunakan multiplisitas geometri.

Contoh 3 Misal diberikan sebuah graf K_3 yang merupakan graf lengkap dengan 3 titik seperti yang disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf K_3

Berdasarkan Gambar 1, diperoleh matriks *adjacency*

$$A(K_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya nilai-nilai eigen dari A didapat dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik matriks $A(K_3)$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A(K_3)) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 3\lambda - 2 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

Nilai eigen yang diperoleh dari graf $A(K_3)$ adalah $\lambda_1 = 2$ dengan $m(\lambda_1) = 1$ dan $\lambda_2 = -1$ dengan $m(\lambda_2) = 2$, sehingga didapat spektrum dari K_3 adalah

$$Spec\ K_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Spektrum detour

Diberikan graf sederhana dan tak berarah G, untuk dua titik berbeda di G dapat ditentukan jarak antar dua titik tersebut. Untuk mendefinisikan jarak, terlebih dahulu diberikan definisi lintasan pada graf G. **Lintasan** yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di graf G ialah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0v_1),\ e_2 = (v_1v_2) =, \dots, e_n = (v_{n-1}v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G. Lintasan dengan titik awal u dan titik akhir v dapat ditulis sebagai lintasan $u - v$ (bisa mempunyai lebih dari satu lintasan). Misalkan $i, j \in V(G)$ dengan $i \neq j$, jarak titik i dan j pada graf G merupakan lintasan terpendek dari i ke j dinotasikan dengan $d(i,j)$. Berdasarkan konsep jarak ini, dapat didefinisikan suatu matriks persegi dari suatu graf yang disebut matriks detour, seperti yang dinyatakan pada Definisi 4.

Definisi 4 [4] *Matriks detour didefinisikan $DD = DD(G)$ dari G dengan entri ke-ij adalah panjang lintasan terpanjang antara titik i dan j.*

Sama seperti matriks matriks *adjacency*, matriks *detour* merupakan matriks persegi dan simetris (untuk graf tak berarah). Berdasarkan nilai eigen dari $DD(G)$ dapat spektrum *detour* dari G, yang dinotasikan dengan $spec_{DD}(G)$. Oleh karena matriks *detour* simetris, semua nilai $\lambda_i, i = 1,2, \dots, n$ adalah real dan dapat diberi label $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Jika $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks *detour*, maka spektrum *detour* dapat ditulis sebagai

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_g \\ m_1 & m_2 & \dots & m_g \end{bmatrix}$$

dengan m_j menunjukkan multiplisitas dalam λ_g dan tentunya $m_1 + m_2 + \cdots + m_g = n$.

Dari Contoh 3, graf lengkap memiliki n titik dan $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi sehingga menghasilkan matriks *detour* sebagai berikut:

$$DD(K_3) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh matriks *detour* maka dapat dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$|\lambda I - DD(K_3)| = \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari matriks *detour* adalah

$$\lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0$$

Oleh karena itu, nilai eigen dari matriks *detour* adalah $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -2$.

Selanjutnya mencari multiplisitas dari nilai eigen

$$\big(\lambda I - DD(K_3)\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, substitusikan nilai eigen $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -2$.

Untuk $\lambda_1 = 4$ diperoleh

$$(4I - DD(K_3)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

Misal $x_1 = t$ maka $x_2 = t$, $x_3 = t$ diperoleh solusi umum bagi $\big(4I - DD(K_3)\big)\boldsymbol{x} = 0$ adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Oleh karena itu diperoleh multiplisitas dari nilai eigen $\lambda_1 = 4$ adalah 1.
Untuk $\lambda_2 = -2$ diperoleh

$$\big((-2)I - DD(K_3)\big)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{2x_2 + 2x_3}{-2}$$

$$x_1 = x_2 - x_3$$

Misal $x_2 = r$, $x_3 = s$ maka solusi umum dari $\big((-2)I - DD(K_3)\big)\boldsymbol{x} = 0$ adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -r - s \\ r \\ s \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r, s \in \mathbb{R}.$$

Jadi diperoleh multiplisitas dari nilai eigen $\lambda_2 = -2$ adalah 2.
Berdasarkan nilai eigen dan masing-masing multiplisitasnya, maka spektrum *detour* graf K_3 adalah

$$spec_{DD}(K_3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

SPEKTRUM *DETOUR* DARI GRAF HELM TERTUTUP

Graf helm tertutup merupakan graf yang dikembangkan dari graf sikel, graf roda, dan graf helm. Graf sikel merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berdarajat 2 dan dinotasikan dengan C_n. Graf C_n mempunyai n titik dan n sisi. Dari graf C_n dapat dibentuk menjadi roda, yaitu graf yang mempunyai satu sikel dan tiap titik sikel terhubung langsung dengan titik pusatnya. Graf roda dinotasikan dengan W_n, mempunyai $n + 1$ titik dan $2n$ sisi. Selanjutnya, berdasarkan graf W_n dapat dibentuk graf helm yang dinotasikan H_n dengan cara menambah sisi anting pada tiap titik di sikel. Graf H_n mempunyai $2n + 1$ titik dan $3n$ sisi. Kemudian, berdasarkan graf H_n dapat dibentuk menjadi graf helm tertutup seperti yang diberikan pada Definisi 5.

Definisi 5 [4] *Graf helm tertutup merupakan graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan titik untuk membentuk sikel yang baru.*

Teorema 6 *Misal $DD(CH_n)$ adalah graf helm tertutup, makaspektrum graf helm tertutup CH_n adalah*

$$specc_{DD}(CH_n) = \begin{bmatrix} (2n)^2 & -2n \\ 1 & 2n \end{bmatrix}$$

Bukti: Misalkan $DD(CH_n)$ adalah matriks *detour* dari CH_n, maka

$$DD(CH_n) = \begin{bmatrix} 0 & 2n & 2n & 2n & 2n & \dots & 2n \\ 2n & 0 & 2n & 2n & 2n & \dots & 2n \\ 2n & 2n & 0 & 2n & 2n & \dots & 2n \\ 2n & 2n & 2n & 0 & 2n & \dots & 2n \\ 2n & 2n & 2n & 2n & 0 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & 2n & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks *detour* dari graf helm tertutup (CH_n) diperoleh dengan cara

$$|\lambda I - DD(CH_n)| = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&\dots&0\\0&1&0&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&0&\dots&0\\0&0&0&1&0&\dots&0\\0&0&0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2n&2n&2n&2n&\dots&2n\\2n&0&2n&2n&2n&\dots&2n\\2n&2n&0&2n&2n&\dots&2n\\2n&2n&2n&0&2n&\dots&2n\\2n&2n&2n&2n&0&\dots&2n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2n&2n&2n&2n&2n&\dots&0\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda&-2n&-2n&-2n&-2n&\dots&-2n\\-2n&\lambda&-2n&-2n&-2n&\dots&-2n\\-2n&-2n&\lambda&-2n&-2n&\dots&-2n\\-2n&-2n&-2n&\lambda&-2n&\dots&-2n\\-2n&-2n&-2n&-2n&\lambda&\dots&-2n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-2n&-2n&-2n&-2n&-2n&\dots&\lambda\end{vmatrix}=0$$

Melalui operasi baris elementer, diperoleh

$$\begin{vmatrix}\lambda&-2n&-2n&-2n&-2n&\dots&-2n\\0&\frac{-4n^2+\lambda^2}{\lambda}&\frac{-4n^2-2n\lambda}{\lambda}&\frac{-4n^2-2n\lambda}{\lambda}&\frac{4n^2-2n\lambda}{\lambda}&\dots&\frac{-4n^2-2n\lambda}{\lambda}\\0&0&\frac{8n^2-\lambda^2+2n\lambda}{2n-\lambda}&\frac{4n^2+2n\lambda}{2n-\lambda}&\frac{4n^2+2n\lambda}{2n-\lambda}&\dots&\frac{4n^2+2n\lambda}{2n-\lambda}\\0&0&0&\frac{12n^2-\lambda^2+4n\lambda}{4n-\lambda}&\frac{4n^2+2n\lambda}{4n-\lambda}&\dots&\frac{4n^2+2n\lambda}{4n-\lambda}\\0&0&0&0&\frac{16n^2-\lambda^2+6n\lambda}{6n-\lambda}&\dots&\frac{4n^2+2n\lambda}{6n-\lambda}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0&\dots&\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\end{vmatrix}=0$$

Sehingga diperoleh

$\lambda\left(\frac{-4n^2+\lambda^2}{\lambda}\right)A=0$, dimana $A=\left(\frac{8n^2-\lambda^2+2n\lambda}{2n-\lambda}\right)\left(\frac{12n^2-\lambda^2+4n\lambda}{4n-\lambda}\right)\left(\frac{16n^2-\lambda^2+6n\lambda}{6n-\lambda}\right)\dots\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)$

$-(4n^2-\lambda^2)A=0$

$$-((2n-\lambda)(2n+\lambda))\left(\frac{8n^2-\lambda^2+2n\lambda}{2n-\lambda}\right)\left(\frac{12n^2-\lambda^2+4n\lambda}{4n-\lambda}\right)\left(\frac{16n^2-\lambda^2+6n\lambda}{6n-\lambda}\right)\dots\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)=0$$

$-(2n+\lambda)(8n^2-\lambda^2+2n\lambda)B=0$, dengan $B=\left(\frac{12n^2-\lambda^2+4n\lambda}{4n-\lambda}\right)\left(\frac{16n^2-\lambda^2+6n\lambda}{6n-\lambda}\right)\dots\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)$

$-(2n+\lambda)(4n-\lambda)(2n+\lambda)B=0$

$$-(2n+\lambda)(4n-\lambda)(2n+\lambda)\left(\frac{12n^2-\lambda^2+4n\lambda}{4n-\lambda}\right)\left(\frac{16n^2-\lambda^2+6n\lambda}{6n-\lambda}\right)\dots\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)=0$$

$$-(2n+\lambda)(2n+\lambda)(12n^2-\lambda^2+4n\lambda)\left(\frac{16n^2-\lambda^2+6n\lambda}{6n-\lambda}\right)\dots\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)=0$$

$$-(2n+\lambda)(2n+\lambda)(6n-\lambda)(2n+\lambda)\left(\frac{16n^2-\lambda^2+6n\lambda}{6n-\lambda}\right)\dots\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)=0$$

$$-(2n+\lambda)(2n+\lambda)(2n+\lambda)\left(\frac{16n^2-\lambda^2+6n\lambda}{6n-\lambda}\right)\dots\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)=0$$

$$-(2n+\lambda)(2n+\lambda)(2n+\lambda)(8n-\lambda)(2n+\lambda)\dots\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)=0$$

$$-(2n+\lambda)(2n+\lambda)(2n+\lambda)(2n+\lambda)\dots((2n-2)n-\lambda)((2n+\lambda)\left(\frac{(4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda}{(2n-2)n-\lambda}\right)=0$$

$$-(2n+\lambda)(2n+\lambda)(2n+\lambda)\dots(2n+\lambda)\big((4n)n^2-\lambda^2+(2n-2)n\lambda\big)=0$$

$$-(2n+\lambda)(2n+\lambda)(2n+\lambda)(2n+\lambda)\dots(2n+\lambda)((2n)^2-\lambda)(2n+\lambda)=0$$

$$-((2n)^2-\lambda)(2n+\lambda)^n=0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks $DD(CH_n)$ adalah $\lambda_1=(2n)^2$ dan $\lambda_2=-2n$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa multiplisitas dari $\lambda_1 = (2n)^2$ adalah 1.

Solusi non trivial $\left(\lambda I - DD(CH_n)\right)\boldsymbol{x} = 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} (2n)^2 & -2n & -2n & -2n & -2n & \cdots & -2n \\ 0 & \frac{-4n^2+(2n)^4}{(2n)^2} & \frac{-4n^2-4n^3}{2n^2} & \frac{-4n^2-4n^3}{2n^2} & \frac{-4n^2-4n^3}{2n^2} & \cdots & \frac{-4n^2-4n^3}{2n^2} \\ 0 & 0 & \frac{8n^2-2n^4+4n^3}{2n-2n^2} & \frac{4n^2+4n^3}{2n-2n^2} & \frac{4n^2+4n^3}{2n-2n^2} & \cdots & \frac{4n^2+4n^3}{2n-2n^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12n^2-2n^4+8n^3}{4n-2n^2} & \frac{4n^2+4n^3}{4n-2n^2} & \cdots & \frac{4n^2+4n^3}{4n-2n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16n^2-2n^4+12n^3}{6n-2n^2} & \cdots & \frac{4n^2+4n^3}{6n-2n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(4n)n^2-2n^4+(2n-2)2n^2}{(2n-2)n-2n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (2n)^2 & -2n & -2n & -2n & -2n & \cdots & -2n \\ 0 & \frac{-4n^2+(2n)^4}{(2n)^2} & \frac{-4n^2-4n^3}{2n^2} & \frac{-4n^2-4n^3}{2n^2} & \frac{-4n^2-4n^3}{2n^2} & \cdots & \frac{-4n^2-4n^3}{2n^2} \\ 0 & 0 & \frac{8n^2-2n^4+4n^3}{2n-2n^2} & \frac{4n^2+4n^3}{2n-2n^2} & \frac{4n^2+4n^3}{2n-2n^2} & \cdots & \frac{4n^2+4n^3}{2n-2n^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12n^2-2n^4+8n^3}{4n-2n^2} & \frac{4n^2+4n^3}{4n-2n^2} & \cdots & \frac{4n^2+4n^3}{4n-2n^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16n^2-2n^4+12n^3}{6n-2n^2} & \cdots & \frac{4n^2+4n^3}{6n-2n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n^2-4n+2}{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2n)^2x_1 - (2n)x_2 - (2n)x_3 - (2n)x_4 + \cdots - (2n)x_{2n} - (2n)x_{2n+1} = 0$$

$$-(2+n^2)x_2 - (2+2n)x_3 - (2+2n)x_4 + \cdots - (2+2n)x_{2n} - (2+2n)x_{2n+1} = 0$$

$$\left(-\frac{n(n^2-2n-4)}{1-n}\right)x^3 + \left(\frac{4n}{1-n}\right)x_4 + \cdots + \left(\frac{4n}{1-n}\right)x_5 + \left(\frac{4n}{1-n}\right)x_{2n+1} = 0$$

$$\left(-\frac{n(n^2-4n-46)}{2-n}\right)x_4 + \cdots + \left(\frac{2n(1+n)}{2-n}\right)x_{2n} + \frac{2n(1+n)}{2-n}x_{2n+1} = 0$$

$$\left(-\frac{n(n^2-6n-8)}{3-n}\right)x_5 + \cdots + \left(\frac{2n(1+n)}{3-n}\right)x_{2n+1} = 0$$

$$-\left(\frac{n^2-4n+2}{n-2}\right)x_{2n+1} = 0$$

Maka $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \cdots = x_{2n} = x_{2n+1}$

Misal $x_1 = s$ maka $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \cdots = x_{2n} = x_{2n+1} = s$

Sehingga diperoleh vektor eigennya yaitu

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Sehingga multiplisitas dari $\lambda_1 = (2n)^2$ adalah 1.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa multiplisitas dari $\lambda_2 = -2n$ adalah $2n$.

Solusi non trivial $\left(\lambda I - DD(CH_n)\right)\boldsymbol{x} = 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} -2n & -2n & -2n & -2n & -2n & \cdots & -2n \\ 0 & \frac{-4n^2+(-2n)^2}{2n} & \frac{-4n^2-2n(-2n)}{2n} & \frac{-4n^2-2n(-2n)}{2n} & \frac{-4n^2-2n(-2n)}{2n} & \cdots & \frac{-4n^2-2n(-2n)}{2n} \\ 0 & 0 & \frac{8n^2-(-2n)^2+2n(-2n)}{2n-(-2n)} & \frac{4n^2+2n(-2n)}{2n-(-2n)} & \frac{4n^2+2n(-2n)}{2n-(-2n)} & \cdots & \frac{4n^2+2n(-2n)}{2n-(-2n)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12n^2-(-2n)^2+6n(-2n)}{4n-(-2n)} & \frac{4n^2+2n(-2n)}{4n-(-2n)} & \cdots & \frac{4n^2+2n(-2n)}{4n-(-2n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16n^2-(-2n)^2+12n^3}{6n-(-2n)} & \cdots & \frac{4n^2+2n(-2n)}{6n-(2n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(4n)n^2-(2n)^2+(2n-2)n(-2n)}{(2n-2)n-(-2n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2nx_1 - 2nx_2 - 2nx_3 - 2nx_4 + \cdots - 2nx_{2n} - 2nx_{2n+1} = 0$$
$$-2n(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{2n} + x_{2n+1}) = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{2n} + x_{2n+1} = 0$$
$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - \cdots - x_{2n} - x_{2n+1}$$

Sehingga vektor eigennya adalah

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_1 - t_2 - t_3 - \cdots - t_{2n-1} - t_{2n} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \vdots \\ t_{2n-1} \\ t_{2n} \end{bmatrix}$$

$$= t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + t_{2n-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_{2n} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, , t_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\ldots,2n$$

Maka multiplisitas dari $\lambda_2 = -2n$ adalah $2n$.

Sehingga berdasarkan pembahasan tersebut, untuk $\lambda_1 = 2n^2$ multiplisitasnya adalah 1 dan untuk $\lambda_2 = -2n$ multiplisitasnya adalah $2n$. Oleh karena itu diperoleh spektrum *detour* graf helm tertutup yaitu

$$specc_{DD}(CH_n) = \begin{bmatrix} (2n)^2 & -2n \\ 1 & 2n \end{bmatrix}.$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai spektrum *detour* pada graf helm tertutup (CH_n). Diperoleh matriks *detour* dari graf helm tertutup (CH_n),

$$DD(CH_n) = \begin{bmatrix} 0 & 2n & 2n & 2n & 2n & \ldots & 2n \\ 2n & 0 & 2n & 2n & 2n & \ldots & 2n \\ 2n & 2n & 0 & 2n & 2n & \ldots & 2n \\ 2n & 2n & 2n & 0 & 2n & \ldots & 2n \\ 2n & 2n & 2n & 2n & 0 & \ldots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & 2n & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

dan spektrum *detour* dari graf helm tertutup (CH_n),

$$specc_{DD}(CH_n) = \begin{bmatrix} (2n)^2 & -2n \\ 1 & 2n \end{bmatrix}.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir, R.Matematika Diskrit Edisi ke-3. Informatika Bandung. 2010.

[2] Kolman, B.Elementery Linear Algebra and Its Applications Ninth Edition. *Published by Pearson*. 2007.

[2] Darmajid, dkk. Teori Graf Aljabar. *ITB: Bandung*. 2011.

[3] Ayyaswami dan Balachandran.On Detour Spectra of Some Graphs. *World Academy of Science. Enginering and Technology*. 2010.

[4] Gallian, J., A. Dynamic Survey DS6: Graph Labelling. *Electronic J. Combinatorics.* 2007.

Karmilawati : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak
karmilawati@student.untan.ac.id