

授業を補助するプログラム (5)

— 投票ルール —

社会情報学科 行方常幸

目次

| | |
|-----------------|----|
| 1. はじめに | 71 |
| 2. 種々の投票ルール | 72 |
| 3. 「投票ルール」プログラム | 75 |
| 4. 定義 | 85 |
| 5. おわりに | 87 |
| 参考文献 | 87 |

1. はじめに

私が担当する数理的な科目（例えば「意思決定論」等）においては、その内容を理解するために、多くの数値例を自分で解くことが必要である。しかしながら、人間の手計算で解ける問題は、小規模のものに限られる。また、手計算で解ける問題でも、自分で求めた答えが正解であるかをチェックすることも容易ではない。多くの人が、正解が不明なため、演習を途中であきらめた経験を持つと思われる。これに対処するために「投票ルール」における解を計算するプログラムを作成したので本稿で紹介する。中規模以下の問題のデータを入力し、該当するタブを表示させれば、種々の投票ルールによる解を計算するプログラムである。解を求める際に必要となる表などを表示し、解法の理解が容易になるように工夫した。このプログラムを有効に利用することにより、計算の手間にとらわれず、種々の投票ルールによる解の差に注意の焦点を集めることが可能となる。

2. 種々の投票ルール

本稿で考察する問題とその種々の解を与える投票ルールを、例を利用して、説明する。

n 人の投票者が p 人の候補者に対して選好（好ましさの順位，ランキング）を持つ。この n 人の意見をまとめて， p 人の候補者の中から望ましい（または，望ましくない）1人を選ばなければならない。例えば，20人の投票者が a, b, c, d, e の5人の候補者を表1のように順位付けているとする。すなわち，5人の投票者は abcde と順位を付けており，次の2人の投票者は bedca と順位を付けており，次の5人の投票者は adbce と順位を付けており，最後の8人の投票者は ecdba と順位を付けている。このような状況においてどの候補者を選ぶか？ が問題である。望ましい候補者が勝者であり，望ましくない候補者が敗者である。

表1 候補者の順位表

| | 5人 | 2人 | 5人 | 8人 |
|------|----|----|----|----|
| 第1順位 | a | b | a | e |
| 第2順位 | b | e | d | c |
| 第3順位 | c | d | b | d |
| 第4順位 | d | c | c | b |
| 第5順位 | e | a | e | a |

この問題に対して，本稿では，多数決ルール，Bordaルール，これらの一般化である点数式投票ルール，（弱）Condorcet勝者（敗者），Copelandルール，Simpsonルールを紹介する。

多数決ルールでは，各投票者が第1順位の候補者に投票し，最高の得票数を得た候補者が勝者である。上記の例では a が10票，b が2票，e が8票，その他は0票を得るので，a が，多数決勝者として，選ばれる。各投票者が最下

位の順位の候補者に - 1 点を与え、総得点が最小の候補者が多数決敗者である。a と e が - 10 点を得、他は 0 点なので、a と e が多数決敗者である。

Borda ルールは、最下位の候補者には 0 点、4 位の候補者には 1 点、3 位の候補者には 2 点、2 位の候補者には 3 点、1 位の候補者には 4 点を与え、最大の得点を取った候補者が Borda 勝者として、最少

の得点を取った候補者が Borda 敗者として、選ばれる。上の例では表 2 のように各候補者は点を得るので、b と c が Borda 勝者であり e が Borda 敗者である。結果は同じであるが、Borda 勝者 (敗者) は表 3 の投票行列の「和」の列を最大 (最小) にする行の候補者と解釈することが出来る。

点数式投票ルールは上記 2 つの方法

の一般化で、数列 $(s_k)_{k=1, \dots, p}$ ($s_1 \geq \dots \geq s_p, s_1 > s_p$) が与えられ、第 k 位の候補者には得点 s_k が与えられ、最大の得点を取った候補者が勝者として、最小の得点を取った候補者が敗者として、選ばれる。多数決ルールは $s_1 = 1, s_k = 0$ ($k \neq 1$) の場合であり、Borda ルールは $s_k = p - k$ の場合である。

(弱) Condorcet 勝者とは、他のどの候補者との一対比較においても過半数 (同数も含む) の支持を得たものが存在すればその候補者である。(弱) Condorcet 敗者とは、他のどの候補者との一対比較においても過半数 (同数も含む) の支持を得なかったものが存在すればその候補者である。上の例では、Condorcet 勝者は存在しないが、弱 Condorcet 勝者は存在し、候補者 a である。Condorcet 敗者は存在しないが、弱 Condorcet 敗者は存在し、候補者 a と e である。これらは表 4 を参考にして求めることが出来る。「最小」の列に 1 があれば、その行の候補者が Condorcet 勝者であり、「最小」の列に 0 以上の要

表 2 Borda ルール

| 候補者 | 総得点 |
|-----|-----|
| a | 40 |
| b | 41 |
| c | 41 |
| d | 40 |
| e | 38 |

表 3 投票行列

| | a | b | c | d | e | 和 | 最小 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|
| a | - | 10 | 10 | 10 | 10 | 40 | 10 |
| b | 10 | - | 12 | 7 | 12 | 41 | 7 |
| c | 10 | 8 | - | 13 | 10 | 41 | 8 |
| d | 10 | 13 | 7 | - | 10 | 40 | 7 |
| e | 10 | 8 | 10 | 10 | - | 38 | 8 |

例えば、b 行 c 列は b を c より上位にランク付けている投票者の人数 12 が記入されている。

素があれば、その行の候補者が弱 Condorcet 勝者である。「最大」の列に -1 があれば、その行の候補者が Condorcet 敗者であり、「最大」の列に 0 以下の要素があれば、その行の候補者が弱 Condorcet 敗者である。このように、(弱) Condorcet 勝者や敗者は必ず存在するわけではない。この弱点を修正したものが、次の、Copeland ルー

表4 過半数行列

| | a | b | c | d | e | 和 | 最小 | 最大 |
|---|---|----|----|----|---|----|----|----|
| a | - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| b | 0 | - | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| c | 0 | -1 | - | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| d | 0 | 1 | -1 | - | 0 | 0 | -1 | 1 |
| e | 0 | -1 | 0 | 0 | - | -1 | -1 | 0 |

例えば、b行c列の1は過半数の投票者にbがcより上位にランク付けされていることを示す。 -1 は過半数にcがbより上位にランク付けされていることを示し、 0 は同数であることを示す。

ルと Simpson ルールであり、Condorcet 勝者が存在すれば、この勝者が各々の勝者となり、Condorcet 敗者が存在すれば、この敗者が各々の敗者となる。

Copeland 勝者と敗者は表4を利用して求めることが出来る。「和」の列の最大値を与える行の候補者が Copeland 勝者であり、最小値を与える行の候補者が Copeland 敗者である。すなわち、より多くの他の候補者に対して過半数の支持を得ている候補者が Copeland 勝者であり、より多くの他の候補者に対して過半数の支持を得ていない候補者が Copeland 敗者である。上記の例では b が Copeland 勝者であり、e が Copeland 敗者である。

Simpson 勝者と敗者は表3を利用して求めることが出来る。「最小」の列の最大値を与える行の候補者が Simpson 勝者であり、最小値を与える行の候補者が Simpson 敗者である。すなわち、他の候補者との支持者数の比較において、最悪でもなるべく多くの投票者に支持されている候補者が Simpson 勝者であり、他の候補者との支持者数の比較において、最善でもなるべく少ない投票者にしか支持されていない候補者が Simpson 敗者である。上記の例では a が Simpson 勝者であり、b と d が Simpson 敗者である。

3. 「投票ルール」プログラム

前節で紹介した投票ルールの勝者と敗者を計算するプログラムが「投票ルール」プログラムである。図1がこのプログラムを起動したところである。この「Input」タブに表1のデータを入力する。まず、候補者の人数を既定値の3人から5人へ変更する。「Number of Candidates:」の右にあるコンボボックスで5を選び「Change」ボタンを押す(図2参照)。次に、投票者の人数(No. of Voters:)を5,2,5,8に変更する(図3参照)。次に、投票者の各タイプ毎に候補者の順位を入力する。入力の方法は3種類準備した。1つ目の方法は、図4のように「Type?」の部分ダブルクリックし、現れるウィンドウに順位を直接入力する。2つ目の方法は、図5のように「Type?」の部分右クリックし、現れたポップアップメニューから目的の順位を選ぶ。ただし、このポップアップメニューによる方法は候補者の人数が6人以上の場合は実装していない。3つ目は、「Type?」と書かれているの部分の下にある「a」から「e」と書かれた部分を直接またはコンボボックスを利用して修正する方法である(図6参照)。

以上で、「Input」タブでの作業が終わった。図7がデータの入力が終わったところである。

次に、「Solutions」タブを押し、解を求める。「Vote Matrix」タブに表3の投票行列と表4の過半数行列が表示される(図8参照)。

「Plurality」タブから「Simpson」タブには勝者と敗者を求める際に利用するデータが各候補者毎に表示される(図9から図15参照)。

「Summary」タブにはそれぞれのルールによる勝者と敗者がまとめられている(図16参照)。

本稿で扱った例には出てこなかったが、点数式投票ルールで点数を指定する場合は一番左の列の該当する部分に直接入力する、または、ダブルクリックして点数を入力する。例えば、第2順位の候補者の点数を修正しようとしているのが、図17である。

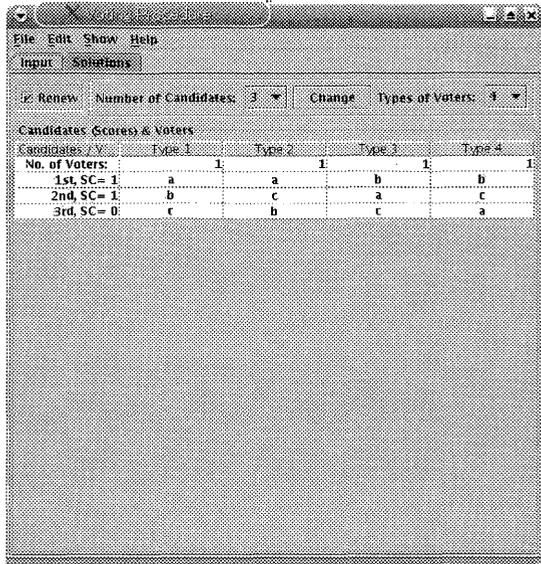


図1 起動したところ

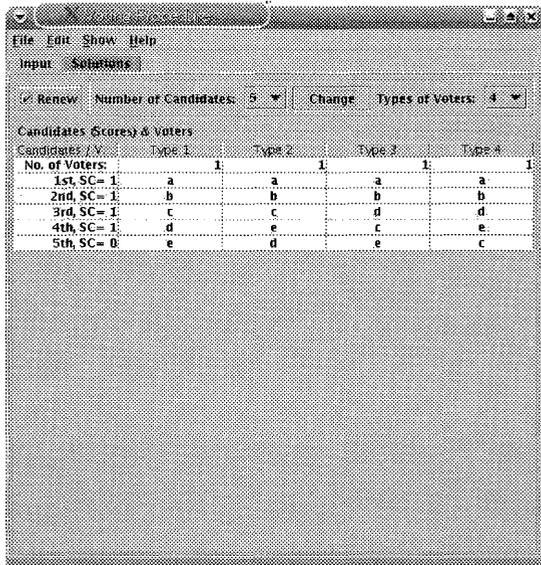


図2 候補者の人数を変更

File Edit Show Help

Input Solutions

Refresh Number of Candidates: 5 Change Types of Voters: 4

Candidates (Scores) & Voters

| Candidate / V | Type 1 | Type 2 | Type 3 | Type 4 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|
| No. of Voters: | 5 | 2 | 5 | 8 |
| 1st, SC= 1: | a | a | a | a |
| 2nd, SC= 1: | b | b | b | b |
| 3rd, SC= 1: | c | c | d | d |
| 4th, SC= 1: | d | e | e | e |
| 5th, SC= 0: | e | d | e | c |

図3 投票者の人数の変更

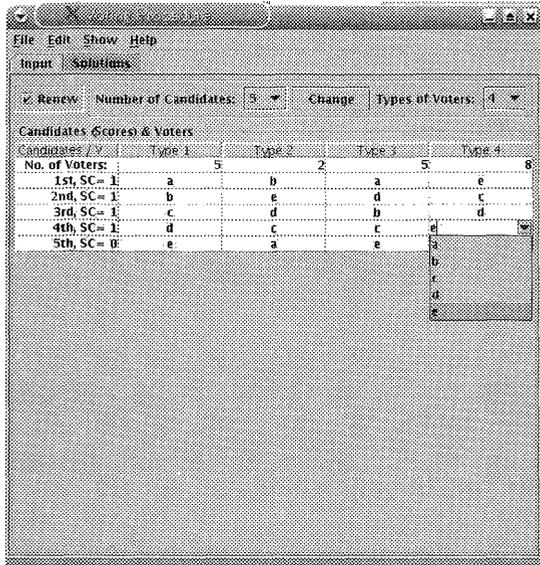


図 6 候補者の順位の入力 (続き)

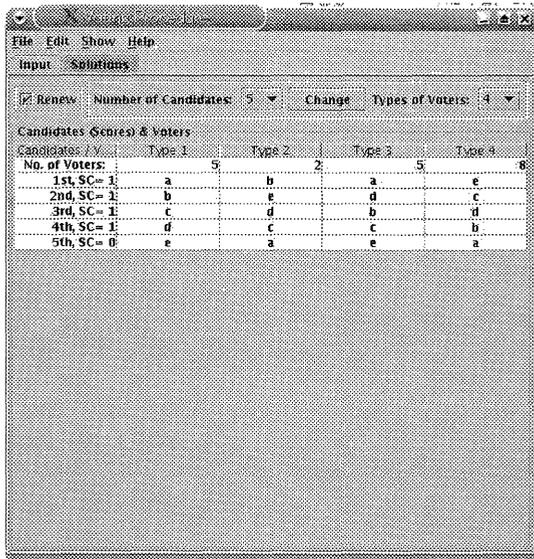


図 7 データの入力が終わったところ

The screenshot shows a software window with a menu bar (File, Edit, Help) and a sidebar with options: Input, Solutions, Vote Matrix, Plurality, Borda, Scoring voting rule, (a) Condorcet, (b) Condorcet, Copeland, Simpson, and Summary. The main area displays two tables.

| Cand. | a | b | c | d | e | sum | min | max |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| a | --- | 10 | 10 | 10 | 10 | 40 | 10 | |
| b | 10 | --- | 12 | 7 | 12 | 41 | 7 | |
| c | 10 | 8 | --- | 13 | 10 | 41 | 8 | |
| d | 10 | 13 | 7 | --- | 10 | 40 | 7 | |
| e | 10 | 8 | 10 | 10 | --- | 38 | 8 | |

| cand. | a | b | c | d | e | sum | min | max |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| a | --- | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| b | 0 | --- | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| c | 0 | -1 | --- | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| d | 0 | 1 | -1 | --- | 0 | 0 | 1 | -1 |
| e | 0 | -1 | 0 | 0 | --- | -1 | -1 | 0 |

図8 投票行列と過半数行列

The screenshot shows the same software window with the 'Summary' option selected in the sidebar. The main area displays a table with the following data:

| Candidate | Score (Winner) | Score (Loser) |
|-----------|----------------|---------------|
| a | 10 | -10 |
| b | 2 | 0 |
| c | 0 | 0 |
| d | 0 | 0 |
| e | 8 | -10 |

図9 多数決ルール

| | Candidate | Score |
|---------------------|-----------|-------|
| Vote Matrix | a | 40 |
| Plurality | b | 41 |
| Borda | c | 41 |
| Scoring voting rule | d | 40 |
| (*) Condorcet | e | 38 |
| (*) Condorcet | | |
| Copeland | | |
| Simpson | | |
| Summary | | |

図10 Borda ルール

| | Candidate | Score |
|---------------------|-----------|-------|
| Vote Matrix | a | 10 |
| Plurality | b | 20 |
| Borda | c | 20 |
| Scoring voting rule | d | 20 |
| (*) Condorcet | e | 10 |
| (*) Condorcet | | |
| Copeland | | |
| Simpson | | |
| Summary | | |

図11 点数式投票ルール

| Candidate | Score (Winner) | Score (Loser) |
|-----------|----------------|---------------|
| a | 0 | 0 |
| b | -1 | 1 |
| c | -1 | 1 |
| d | -1 | 1 |
| e | -1 | 0 |

図12 Condorcet 勝者と敗者

| Candidate | Score (Winner) | Score (Loser) |
|-----------|----------------|---------------|
| a | 0 | 0 |
| b | -1 | 1 |
| c | -1 | 1 |
| d | -1 | 1 |
| e | -1 | 0 |

図13 弱 Condorcet 勝者と敗者

| Candidate | Score |
|-----------|-------|
| a | 0 |
| b | 1 |
| c | 0 |
| d | 0 |
| e | -1 |

図14 Copeland ルール

| Candidate | Score |
|-----------|-------|
| a | 10 |
| b | 7 |
| c | 8 |
| d | 7 |
| e | 8 |

図15 Simpson ルール

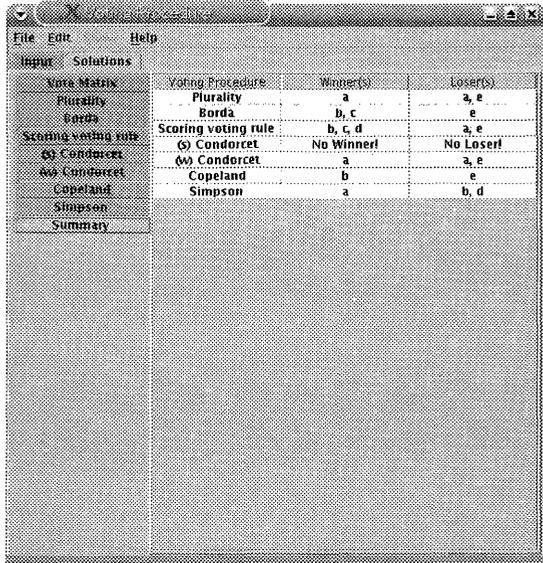


図16 まとめ

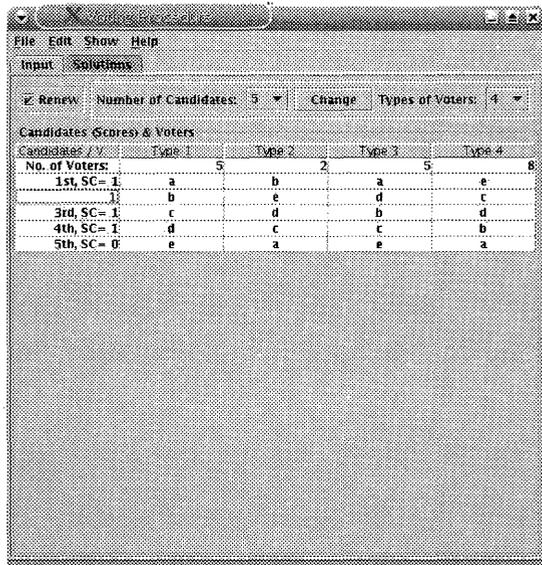


図17 点数の入力

4. 定 義

この節で、本稿で紹介した投票ルールの定義をまとめておく。まず、投票者の集合を $N := \{1, \dots, n\}$ 、候補者の集合を $A := \{1, \dots, p\}$ 、投票者の候補者に対する順位付けを $u := (u_1, \dots, u_n)$ とする。ただし、 $u_j : A \rightarrow \mathcal{R}$ は投票者 j の候補者に対する順位付けで、 $u_j(x) > u_j(y)$ ($x, y \in A, x \neq y$) は投票者 j が y よりも x を望ましいと判断していることを表す。投票行列 VM と過半数行列 MM は次のように定義される：

$$VM(u) := (VM_{xy}(u)), VM_{xy}(u) := |\{j \in N \mid u_j(x) > u_j(y)\}| \quad (x, y \in A, x \neq y)$$

$$MM(u) := (MM_{xy}(u)), MM_{xy}(u) := \begin{cases} 1 & VM_{xy}(u) > VM_{yx}(u) \\ 0 & VM_{xy}(u) = VM_{yx}(u) \quad (x, y \in A, x \neq y) \\ -1 & VM_{xy}(u) < VM_{yx}(u) \end{cases}$$

$VM_{xy}(u)$ は y よりも x を好ましいと順位を付けている投票者の人数であり、 $MM_{xy}(u)$ は y よりも x を好ましいと順位を付けている投票者の人数が半数を超えれば 1、ちょうど半数ならば 0、半数未満であれば -1 である。以上の準備の元に各ルールの勝者と敗者の定義を列挙する。

多数決ルール：

多数決勝者は、下記の点数式投票ルールにおいて、 $s_1 = 1, s_k = 0$ ($k = 2, \dots, p$) とした時の点数式投票ルールの勝者、多数決敗者は $s_k = 0$ ($k = 1, \dots, p-1$)、 $s_p = -1$ とした時の点数式投票ルールの敗者である。

Borda ルール：

下記の点数式投票ルールにおいて、 $s_k = p - k$ ($k = 1, \dots, p$) としたものの。

点数式投票ルール：

各順位の候補者に与える点数 $s := (s_k)_{k=1, \dots, p}$ ($s_1 \geq \dots \geq s_p, s_1 > s_p$) が与えられているとする。 $x \in A$ の得点を $\text{Score}^s(u; x) := \sum_{k=1}^p \text{rank}_k(u; x) s_k$ と定義する。ただし、 $\text{rank}_k(u; x)$ は x を第 k 番目に順位付ける投票者の人数である。点数式投票ルールにおける勝者 SVRW と敗者 SVRL は次のように定義される：

$$\text{SVRW}^s(u) := \{a \in A \mid \text{Score}^s(u; a) \geq \text{Score}^s(u; x) \ (\forall x \in A)\}$$

$$\text{SVRL}^s(u) := \{a \in A \mid \text{Score}^s(u; a) \leq \text{Score}^s(u; x) \ (\forall x \in A)\}$$

Condorcet 勝者，敗者：

Condorcet 勝者 sCondorcetW と敗者 sCondorcetL，弱 condorcet 勝者 wCondorcetW と敗者 wCondorcetL は次のように定義される：

$$\text{sCondorcetW}(u) := \{a \in A \mid \min_{x \neq a} \text{MM}_{ax}(u) = 1\}$$

$$\text{sCondorcetL}(u) := \{a \in A \mid \max_{x \neq a} \text{MM}_{ax}(u) = -1\}$$

$$\text{wCondorcetW}(u) := \{a \in A \mid \min_{x \neq a} \text{MM}_{ax}(u) \geq 0\}$$

$$\text{wCondorcetL}(u) := \{a \in A \mid \max_{x \neq a} \text{MM}_{ax}(u) \leq 0\}$$

Copeland ルール：

Copeland 勝者 CopelandW と敗者 CopelandL は次のように定義される：

$$\text{CopelandW}(u) := \{a \in A \mid \sum_{y \neq a} \text{MM}_{ay}(u) \geq \sum_{y \neq x} \text{MM}_{xy}(u) \ (\forall x \in A)\}$$

$$\text{CopelandL}(u) := \{a \in A \mid \sum_{y \neq a} \text{MM}_{ay}(u) \leq \sum_{y \neq x} \text{MM}_{xy}(u) \ (\forall x \in A)\}$$

Simpson ルール：

Simpson 勝者 SimpsonW と敗者 SimpsonL は次のように定義される：

$$\text{SimpsonW}(u) := \{a \in A \mid \min_{y \neq a} \text{VM}_{ay}(u) \geq \min_{y \neq x} \text{VM}_{xy}(u) \ (\forall x \in A)\}$$

$$\text{SimpsonL}(u) := \{a \in A \mid \min_{y \neq a} \text{VM}_{ay}(u) \leq \min_{y \neq x} \text{VM}_{xy}(u) \ (\forall x \in A)\}$$

5. おわりに

本稿では投票者が候補者に順位を付けている状況において、候補者の中から望ましい（または、望ましくない）1人を選ぶルールとして知られている多数決ルール、Bordaルール、Condorcet勝者等と、その解を計算するプログラムを紹介した。

このプログラムを利用することにより、細かな計算は計算機にまかすことにより、ルールの相違に注意の焦点を集めることが可能となる。

参考文献

- Young, H.P.: Equity - In Theory and Practice, Princeton University Press, 1995.
Moulin, H.: Axioms of Cooperative Decision Making, Cambridge University Press, 1988.