# 団結値（提携形ゲームの解）の縮小ゲームによる一貫性について

社会情報学科　行　方　常　幸

目　次



## 1．はじめに

提携形ゲームとは複数人が集まって得た利益を，その部分提携の評価値を考慮して，公平に分けるにはどうすべきか？の問に答えようとしたものである。得られた利益の分け方（解）として，種々の観点から様々な解が提唱されている。その中に団結値と呼ばれる解がある。この解に関する縮小ゲームによる一貫性について考察する。新しい縮小ゲームを提出し，この縮小ゲームにより一貫性を満たすことを示す。この縮小ゲームは3つの項の凸結合であり，従って，確率的解釈が可能となる。

## 2．団　結　値

複数の参加者が集まって利益を生む状況を想定する。参加者（プレイヤーと呼ぶ）の集合を $N:=\{1,\dots,n\}$ とおく。$N$の部分集合を提携と呼ぶ。提携 $S\,(\subset N)$

のメンバーが集まって得ることができる利益を $v(S)$ で表し，提携 $S$ の提携値と呼ぶ。$N$ の部分集合から実数へのこの関数 $v: 2^N \to \Re$ を特性関数と呼ぶ。ただし，$v(\emptyset)=0$ とする。プレイヤーの集合 $N$ と特性関数 $v$ の組 $(N,v)$ を提携形ゲーム[1)]と呼ぶ。全体提携 $N$ によって得られる利益 $v(N)$ を，部分提携 $S$ の提携値 $\{v(S) | S \subset N\}$ を利用して，$N$ のメンバーになるべく公平に分けることが，提携形ゲーム $(N,v)$ の1つの目的である。

提携形ゲームの1点解とは提携形ゲームの集合からプレイヤーへの分け方への関数 $f$ で次の条件を満たすものである：

$$f(N,v) = \left(f_1(N,v), \ldots, f_n(N,v)\right)$$
$$\sum_{j \in N} f_j(N,v) = v(N)$$

1点解は値とも呼ばれる。よく知られているシャープレイ値Shと本稿の主題である団結値Solは以下のように定義される。

シャープレイ値（Shapley value）：

$$\mathrm{Sh}_j(N,v) := \sum_{T: j \in T \subset N} \frac{(n-t)!\,(t-1)!}{n!} \left[v(T) - v(T - \{j\})\right] \quad (j \in N)$$

団結値（Solidarity value）：

$$\mathrm{Sol}_j(N,v) := \sum_{T: j \in T \subset N} \frac{(n-t)!\,(t-1)!}{n!} \frac{1}{t} \sum_{k \in T} \left[v(T) - v(T - \{k\})\right] \quad (j \in N)$$

この定義式による各値の確率的解釈は次の通りである：プレイヤーがランダムに順列を形成する。プレイヤー（$j$ とする）が到着した時にできる提携を $T$ とした時，限界提携値 $v(T) - v(T - \{j\})$（下図参照）を受け取る場合，その期待値がシャープレイ値であり，限界提携値ではなく，提携 $T$ のメンバー

---

1）譲渡可能効用を扱うので，正確には，譲渡可能効用を持つ提携形ゲームと呼ばれる。

の限界提携値を平均した平均限界提携値 $\frac{1}{t}\sum_{k \in T}\left[v(T)-v(T-\{k\})\right]$ を受け取る場合[2]，その期待値が団結値である。

$$\boxed{\quad T-\{j\} \quad} \; j$$

プレイヤー $j$ の限界提携値： $v(T)-v(T-\{j\})$

## 3．縮小ゲームによる一貫性

元のゲーム $(N,v)$ $(|N|\geq 3)$ と利得ベクトル $x \in \Re^n$ が与えられた時，縮小ゲーム $(N-\{i\},v^x)$ $(v^x : 2^{N-\{i\}} \to \Re)$ を定義する。ただし，

$v^x(\emptyset)=0, v^x(N-\{i\})=v(N)-x_i$ である。

解 $f$ に対して，縮小ゲームの部分提携の提携値 $v^x(S)$ $(S \subset N-\{i\}, S \neq \emptyset, N-\{i\})$ を適切に定義して，

$$f_j(N,v)=f_j(N-\{i\},v^{f(N,v)}) \; (\forall j \in N-\{i\})$$

となるようにしたい。すなわち，元のゲーム $(N,v)$ において解 $f$ により配分された利得 $f_i(N,v)$ を持って１人のプレイヤー $i$ が退出し，縮小ゲーム $(N-\{i\},v^{f(N,v)})$ ができる。退出しなかったプレイヤー $j$ が，解 $f$ により配分される元のゲームにおける利得 $f_j(N,v)$ が縮小ゲームにおける利得 $f_j(N-\{i\},v^{f(N,v)})$ と一致することを要求するのが，縮小ゲームによる一貫性である。

縮小ゲームによる一貫性を満たせば，部分と全体を同じように扱うことを意味するので，望ましい解と解釈される。また，解の差異を縮小ゲームの違いで表す試みである。

シャープレイ値と団結値に対して，次のように縮小ゲームを定義する。

---

２）$t$ は提携 $T$ のメンバーの総人数である。

シャープレイ値：

$$v^x(S)=\frac{n-s-1}{n-1}v(S)+\frac{s}{n-1}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right] \tag{Sh}$$

団結値：

$$v^x(S)=\frac{n-s-1}{n-1}v(S)+\frac{n-s-1}{n(n-1)}\sum_{l\in S}\left[v(S\cup\{i\}-\{l\})-x_i\right]+\frac{s(s+1)}{n(n-1)}\left[v(S\cup\{i\})-x_i\right] \tag{Sol}$$

さらに，2人ゲームにおける $\alpha$－標準性を次のように定義する：2人ゲーム（$\{i,j\},v$）に対して

$$f(\{i,j\},v)=\left(\frac{1}{2}v(ij)+\alpha(v(i)-v(j)),\frac{1}{2}v(ij)+\alpha(v(j)-v(i))\right)$$

が成り立つ時「解 $f$ は2人ゲームにおける $\alpha$－標準性を満たす」[3)] という。ただし，$0\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$ である。

このように定義することにより，次の定理が成り立つ：

定理：（証明は補遺を参照。）

(1) シャープレイ値は2人ゲームにおける標準性を満たし，（Sh）で与えられた縮小ゲームに対して縮小ゲームによる一貫性を満たす唯一の解である。

(2) 団結値は2人ゲームにおける $\frac{1}{4}$－標準性を満たし，（Sol）で与えられた縮小ゲームに対して縮小ゲームによる一貫性を満たす唯一の解である。

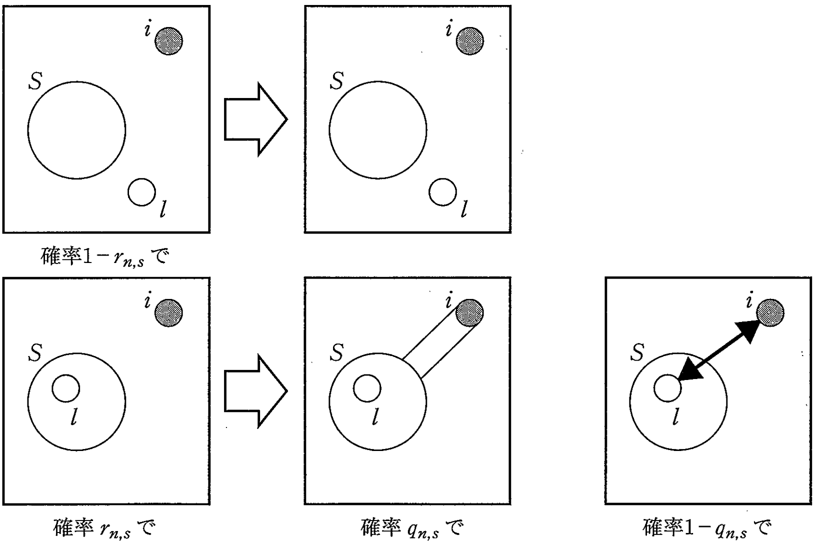
（Sh）と（Sol）で与えられた縮小ゲームの意味を検討する。縮小ゲーム

---

3）$\alpha=\frac{1}{2}$ の時，いわゆる，「2人ゲームにおける標準性」となる。

$(N-\{i\}, v^x)$ において提携 $S \subset N-\{i\}$ は次のように提携値を見積もる：プレイヤー $i$ に利得 $x_i$ を与える代償として，ゲームに留まってもらいたい。留まってもらうことに（確率 $1-r_{n,s}$ で）成功しなければ，提携 $S$ の利得は $v(S)$ のままである。（確率 $r_{n,s}$ で）成功すれば，更に２つの可能性がある：（確率 $q_{n,s}$ で）提携 $S \cup \{i\}$ を形成することができ，その結果として提携 $S$ に $v(S \cup \{i\})-x_i$ の利得が残る。または，（確率 $1-q_{n,s}$ で）提携の規模を大きくすることが不可能なため $S$ のメンバーから無作為に１人選び（選ばれたプレイヤーを $l$ とする）提携 $S \cup \{i\}-\{l\}$ を形成し，その結果として提携 $S$ に $v(S \cup \{i\}-\{l\})-x_i$ の利得が残る。これを式で書けば次のようになる（下図参照）。

$$v^x(S) = (1-r_{n,s})\,v(S) + r_{n,s}\,q_{n,s}\left[v(S \cup \{i\}) - x_i\right]$$
$$+ \frac{r_{n,s}}{s}(1-q_{n,s})\sum_{l \in S}\left[v(S \cup \{i\}-\{l\}) - x_i\right]$$




各解における具体的な確率の値とその（１つの）解釈は以下の通りである：

| 解 | $r$ と $q$ の値 |
|---|---|
| シャープレイ値 | $r_{n,s}=\dfrac{s}{n-1}, q_{n,s}=1$ |
| 団　結　値 | $r_{n,s}=\dfrac{s}{n-1}, q_{n,s}=\dfrac{s+1}{n}$ |

シャープレイ値：

プレイヤー $i$ をゲームに留まるように説得する使者が $N-\{i\}$ からランダムに選ばれる。選ばれた使者が $S$ に属すれば，積極的に試みるため説得が成功し，$S$ に属さなければ説得が不成功に終わる。

団結値：

まず，シャープレイ値と同様に，プレイヤー $i$ をゲームに留まるように説得する使者が $N-\{i\}$ からランダムに選ばれる。選ばれた使者が $S$ に属すれば，積極的に試みるため説得が成功し，$S$ に属さなければ説得が不成功に終わる。さらに，成功した場合，提携の規模を1人増やせるか否かを決めるために，$N$ から1人のプレイヤーがランダムに選ばれる。選ばれたプレイヤーが $i$ 自身か $S$ に属せば，1人増やすことができるが，$S$ に属さなければ，元の規模を維持しなければならない。

## 4. 終わりに

本稿では譲渡可能効用を持つ提携形ゲームの1点解である団結値に対して新たな縮小ゲームを提出し，「団結値はその縮小ゲームによる一貫性を満たし，2人ゲームにおける $\frac{1}{4}$ －標準性を満たす唯一の解である」ことを示した。この縮小ゲームは3つの項の凸結合であり確率的解釈が可能であり，よく知られているシャープレイ値の縮小ゲームと類似した解釈であった。

## 5．補　　遺

定理の(2)のみの証明を示す。Namekata & Driessen の Lemma 7, 8, 9 より，

$$m_{n,s}=\frac{1}{(s+1)(n-s)}\begin{pmatrix}n-1\\s-1\end{pmatrix}^{-1}\ (n=2,\ldots;\ s=1,\ldots,n-1)$$

$$a_{n,s}=1-r_{n,s}=\frac{n-s-1}{n-1},\ b_{n,s}=r_{n,s}\,q_{n,s}=\frac{s(s+1)}{n(n-1)},$$

$$c_{n,s}=\frac{r_{n,s}}{s}(1-q_{n,s})=\frac{n-s-1}{n(n-1)},\ d_{n,s}=0$$

とおいた時，

$$\begin{cases}m_{n-1,1}\,a_{n,1}=m_{n,1}\\ m_{n-1,n-2}\,b_{n,n-2}=m_{n,n-1}\\ m_{n-1,s}\,a_{n,s}+(s-1)\,m_{n-1,s-1}\,d_{s-1}=m_{n,s}\ (s=2,\ldots,n-2)\\ (n-s-1)\,m_{n-1,s}\,c_{n,s}+m_{n-1,s-1}\,b_{n,s-1}=m_{n,s}\ (s=2,\ldots,n-2)\end{cases}$$

が成り立つことを示せばよい。代入して左辺を計算すると，

$$m_{n-1,1}\,a_{n,1}=\frac{1}{2(n-2)}\,\frac{n-2}{n-1}=\frac{1}{2(n-1)}=m_{n,1}$$

$$m_{n-1,n-2}\,b_{n,n-2}=\frac{1}{(n-1)}\begin{pmatrix}n-2\\n-3\end{pmatrix}^{-1}\frac{(n-2)(n-1)}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}=m_{n,n-1}$$

$$m_{n-1,s}\,a_{n,s}=\frac{1}{(s+1)(n-s-1)}\begin{pmatrix}n-2\\s-1\end{pmatrix}^{-1}\frac{n-s-1}{n-1}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(n-s)}\begin{pmatrix}n-1\\s-1\end{pmatrix}^{-1}=m_{n,s}$$

$$(n-s-1)\,m_{n-1,s}\,c_{n,s}+m_{n-1,s-1}\,b_{n,s-1}$$

$$=(n-s-1)\frac{1}{(s+1)(n-s-1)}\begin{pmatrix}n-2\\s-1\end{pmatrix}^{-1}\frac{n-s-1}{n(n-1)}$$

$$
+\frac{1}{s(n-s)}\binom{n-2}{s-2}^{-1}\frac{(s-1)s}{n(n-1)}
$$

$$
=\binom{n-1}{s-1}^{-1}\left[\frac{n-s-1}{n(s+1)(n-s)}+\frac{1}{n(n-s)}\right]
$$

$$
=\frac{1}{(s+1)(n-s)}\binom{n-1}{s-1}^{-1}=m_{n,s}
$$

となり，証明された。

## 参考文献


Namekata, T. and Driessen, T. S. H. : Reduced Game Property of Linear Values with Equal Treatment Property. In "Operations Research/Management Science At Work", Kluwer Academic Publishers 2002; 317–332

Nowak, A. S. and Radzik, T. : A Solidarity Value for $n$-Person Transferable Utility Games. International Journal of Game Theory 1994; 23: 43–48

Ruiz, L. M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J. M. : The Least Square Prenucleolus and the Least Square Nucleolus. Two Values for TU Games Based on the Excess Vector. International Journal of Game Theory 1996; 25: 113–134

Ruiz, L. M., Valenciano, F. and Zarzuelo, J. M. : The Family of Least Square Values for Transferable Utility Games. Games and Economic Behavior 1998; 24: 109–130