

Rep. Fac. Sci. Engrg.
Saga Univ
32-2 (2003),

Reports of the Faculty of Science and Engineering,
Saga University, Vol. 32, No.2, 2003

Mellin 変換を用いた DGLAP 方程式の数値解析

永井崇寛・熊野俊三

Numerical analysis of DGLAP equations by using Mellin transformation

By

Takahiro NAGAI and Shunzo KUMANO

Abstract: We investigate numerical solution for the DGLAP Q^2 evolution equations by using the Mellin transformation. The evolution equations are complicated integrodifferential equations, which are often used in analyzing high-energy hadron scattering data. The numerical solution is discussed in comparison with the solution by a “brute-force” method. We find that the Mellin-transformation method could be an accurate and fast one, although we should be careful about the accuracy in the small- and large- x regions.

Key words: Parton, Quark, Gluon, Q^2 evolution, QCD, Nucleon

1 序論

核子の内部構造を調べる手段の一つとして高エネルギーレプトン・核子散乱の実験研究が行われてきた。その散乱断面積を測定することにより、核子の構造関数が求められる。一般的に、構造関数は2つの変数 x と Q^2 の関数として表される。これらの変数は運動量移行 q と核子運動量 p を用いて $Q^2 = -q^2$, $x = Q^2/(2p \cdot q)$ と定義される。実験で測定された構造関数を解析することにより、核子内のパートン分布が定まる。

構造関数とパートン分布の Q^2 依存性はスケールリングの破れとして知られており、この現象は DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi) Q^2 発展方程式によって記述される。実験値は様々な Q^2 の値で求まっており、これらを解析するには Q^2 の違いを考慮する必要がある。この様な高エネルギー反応の解析に Q^2 発展方程式は頻繁に用いられるため、その正確な解を求めることは応用上重要な課題である。しかし、DGLAP 方程式は摂動高次項を含めると複雑な微積分方程式となっており、容易に数値解を求めることができない。

我々の研究室では過去に Q^2 発展方程式を “Brute-force” の方法 [1] や Laguerre 多項式の方法 [2] で解く

研究をした。しかし、小さい x において精度が落ちる問題や計算時間が長いなどの問題があった。そこで、本研究では Mellin 変換を利用した数値解法 [3] を研究し、文献 [1] の方法を用いた結果と比較した。

本論文は以下の様に構成されている。第2章で Q^2 発展方程式を示し、数値解法として Brute-force の方法と Mellin 変換の方法を説明する。第3章で Mellin 変換法の結果を説明し、2つの方法の結果を比較検討する。第4章に研究成果をまとめる。

2 DGLAP 方程式の数値解法

2.1 Q^2 発展方程式

Q^2 発展方程式は分岐関数 (P) とパートン分布 (q_i, g) で記述される。分岐関数は摂動論的量子色力学を用いて計算でき、パートン分布は様々な高エネルギー散乱の実験データを解析して得られる。まず、発展方程式を簡略化するために変数 Q^2 を次の変数

$$t = -\frac{2}{\beta_0} \ln \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right] \quad (1)$$

に変換する。ここで β_0 は

$$\beta_0 = \frac{11}{3}C_G - \frac{4}{3}T_R N_f, \quad C_G = N_c, \quad T_R = \frac{1}{2} \quad (2)$$

で定義され、 N_c と N_f は色数とフレーバー数である。摂動の最低次においては実効結合定数は

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (3)$$

であり、 Λ は量子色力学のスケール・パラメータである。

変数 x と t を用いて、フレーバー i の非 1 重項分布 $q_{NS} = q_i - \bar{q}_i$ に対する DGLAP 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{NS}(x, t) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) q_{NS}(y, t) \quad (4)$$

となる。これは特に価クォーク分布の Q^2 発展に使用される。クォーク分布と反クォーク分布との総和で表されるフレーバー 1 重項分布 $q_S = \sum_i (q_i + \bar{q}_i)$ はグルーオン分布 g と結びついた微積分方程式として表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q_S(x, t) \\ g(x, t) \end{pmatrix} \\ &= \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} P_{qq}(x/y) & N_f P_{qg}(x/y) \\ P_{gq}(x/y) & P_{gg}(x/y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_S(y, t) \\ g(y, t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

これは連立方程式になっているので、フレーバー非 1 重項の式 (4) と比べると多少複雑である。しかし、基本的な解き方は非 1 重項の場合と同様であるため、以下には非 1 重項の数値解法のみを説明する。

2.2 Brute force

Brute-force の方法とは x および t を N_x, N_t 個の小さいステップにそれぞれ分割して単純に微分と積分を行う方法である。この方法は数値積分法としては簡単すぎるように考えられるが、単純であるがゆえの利点がある。例えば、 Q^2 発展に高次ツイストの効果を含んだ方程式は、Mellin 変換の方法では解くことができず、また直交多項式で展開する方法でも解くことができない。そのような方程式の数値解は Brute-force 法によって容易に求めることができる。また、数値計算のプログラムを作成する場合、単純であるがゆえに誤りをする可能性が小さく、新しい数値解法を研究する場合の確認プログラムとして使用できる利点もある。

この方法では t の微分、及び x の積分を

$$\frac{df(x, t)}{dt} \Rightarrow \frac{f(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_j)}{\Delta t_j} \quad (6)$$

$$\int dx f(x, t) \Rightarrow \sum_{k=1}^{N_x} \Delta x_k f(x_k, t_j) \quad (7)$$

の様に近似して数値計算を行う。ただし、 $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ である。よって、非 1 重項分布の t_j から t_{j+1} への Q^2 発展は単に

$$\begin{aligned} q_{NS}(x_i, t_{j+1}) &= q_{NS}(x_i, t_j) \\ &+ \Delta t_j \sum_{k=i}^{N_x} \frac{\Delta x_k}{x_k} P_{qq}\left(\frac{x_i}{x_k}\right) q_{NS}(x_k, t_j) \end{aligned} \quad (8)$$

の計算となる。初期 $t_1 = 0$ におけるパートン分布が与えられれば、 Δt_1 後の t_2 におけるパートン分布が求まる。このステップを $N_t - 1$ 回繰り返すと最終的な t_{N_t} の分布が決まる。これは簡単な方法だが、十分正確な数値解を求めるためには N_x と N_t を大きく取らなければならない。しかし、構造関数はゆるやかに変数 t に依存しているため、 N_t は N_x と比較して大きく取る必要はない。

2.3 Mellin 変換

Q^2 発展方程式 (4) の右辺は畳み込み積分で表されており、この部分の取り扱いが発展方程式を解くためには重要である。一般的にこの様な積分は Mellin 変換を使用すれば、変換された関数の単なる積となることが知られている。従って、面倒な積分を単純な積にすることが可能で、数値解を求めるために非常に有用であることが予想できる。一般的な分布関数 $f(x)$ の Mellin 変換は

$$\hat{f}(s) = \int_0^1 x^{s-1} f(x) dx \quad (9)$$

で定義される。ここで分布関数は $f(x \geq 1) = 0$ であるため、積分の上限は 1 とした。この $\hat{f}(s)$ を関数 $f(x)$ のモーメントと呼ぶ。

Q^2 発展方程式 (4) の Mellin 変換を取ると、左辺は非 1 重項分布のモーメントの微分となり、右辺は非 1 重項分布と分岐関数のモーメントの積となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{q}_{NS}(s, t) = \hat{P}_{qq}(s) \hat{q}_{NS}(s, t) \quad (10)$$

これは単純な微分方程式で、解は

$$\hat{q}_{NS}(s, t) = \exp[\hat{P}_{qq}(s)t] \hat{q}_{NS}(s, t=0) \quad (11)$$

となる。従って、モーメントの Q^2 発展は初期分布と分岐関数のモーメントがわかれば、簡単に計算することができる。しかし、実験結果との比較や理論の模型計算をする場合は、 x で表された分布関数で示さなければならない。そのためには逆 Mellin 変換

$$q_{NS}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds x^{-s} \hat{q}_{NS}(s, t) \quad (12)$$

を計算する必要がある。ここで c は実定数であるが $f(x)x^{c-1}$ が絶対積分可能である必要がある。更に ϕ を実定数として、変数 s を $s = c + ze^{i\phi}$ とおくことにより s から実変数 z に積分変数を変換する。これは積分経路を図 1 の様にするに相当し、逆変換は

$$q_{NS}(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \operatorname{Im} \left[\exp(i\phi) x^{-c-ze^{i\phi}} \times \exp(\hat{P}_{qq}(s)t) \hat{q}_{NS}(s, t=0) \right] \quad (13)$$

となる。

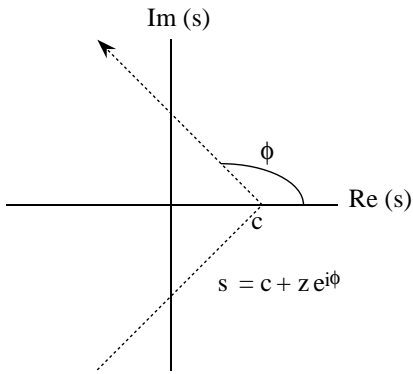


Fig. 1: Integration contour of the Mellin inversion

積分路は図の定数 c と角度 ϕ によって特定される。積分は基本的には c や ϕ に依存しないため、式 (13) を数値積分しやすいように設定すれば良い。特に、 ϕ の値を調整して、被積分関数の値を z が大きくなるにつれて急速に小さくなるように設定すれば、積分の上限をある有限値 z_{max} で打ち切ることができる。そこで、被積分関数の中にある

$$x^{-c-ze^{i\phi}} = \exp\left(c \log \frac{1}{x}\right) \exp\left(z \cos \phi \log \frac{1}{x}\right) \times \exp\left(i \sin \phi \log \frac{1}{x}\right) \quad (14)$$

に着目する。変数 x は $0 < x < 1$ の範囲内であるため、 z が大きくなるにつれて因子 $\exp(z \cos \phi \log \frac{1}{x})$ が急激に小さくなるためには $90^\circ < \phi < 180^\circ$ の範囲内で ϕ を取れば良いことがわかる。ただし、 90° の場合には $\cos \phi = 0$ となり、上記因子が 1 となり被積分関数が大きい z で収束しないため注意する必要がある。 $90^\circ < \phi < 180^\circ$ の範囲内で ϕ を変えて数値計算を行った結果、 90° と 180° 付近を除けば ϕ を変えても数値解に影響しないことを確かめた。従って、以後は $\phi = 135^\circ$ と固定して結果を示す。また、 c の取り方による依存性を調べるために、その値を 1 から 5 まで変えてみた結果、 c が 3 を超えると精度に問題が生じることがわかった。この様な検討から $c = 1.1$ と固定することにした。

方程式 (13) は実関数の積分であり、この積分を Gauss-Legendre 求積法を用いて数値計算をする。定数を $c = 1.1$, $\phi = 135^\circ$ と固定し、 x を 10^{-5} から 0.9 まで変化させた場合、被積分関数の絶対値は $z = 30$ で 10^{-5} 以下となり十分小さいと判断できるため、積分の上限値を $z_{max} = 30$ とした。この様にして、Mellin 変換を用いた数値解析で、最終的に計算精度を決定する要因は Gauss-Legendre 積分のポイント数 N_{GL} である。この N_{GL} 依存性を次章の結果に示す。

3 結果

今回の報告では摂動最低次の Q^2 発展方程式を用いた解析結果を示す。ここでは積分のポイント数 N_{GL} を変化させ、精度がどのように変わるかを調べた。結果の比較検討をするために、 $Q^2=1 \text{ GeV}^2$ で与えられる MRST02 [4] の初期分布を $Q^2=100 \text{ GeV}^2$ まで発展させて数値解を比較した。スケール・パラメータは MRST02 解析で得られた $\Lambda=0.220 \text{ GeV}$ を使用した。

Brute-force の方法において $N_t=200$, $N_x=4000$ の分割を使用すれば、精度が 1% 以内であることが文献 [1] の研究により判明しているため、それを基準として Mellin 変換法による数値解の精度を評価する。つまり、Mellin 変換で求めた $Q^2=100 \text{ GeV}^2$ における分布と Brute-force で求めた分布の比として結果を図を表す。非 1 重項分布の Q^2 発展結果を Fig. 2 に、1 重項分布の結果を Fig. 3 に、グルーオン分布の結果を Fig. 4 に示す。

これらの図より Gauss-Legendre 積分のポイント数 N_{GL} が少ない場合、つまり 10 や 20 ポイントでは十分な精度が得られないことがわかる。特に、その傾向は小さい x や大きい x 領域で明らかである。50 ポイントから 80 ポイント取れば、 $10^{-5} < x < 0.5$ の領域で正確な数値計算となっていることがわかる。しかし $x = 1$ に近い、大きい x 領域では正確な数値計算となっていない。この原因は $x \rightarrow 1$ の場合、式 (14) において $\log(1/x)$ が 0 となり、 z が大きくなって

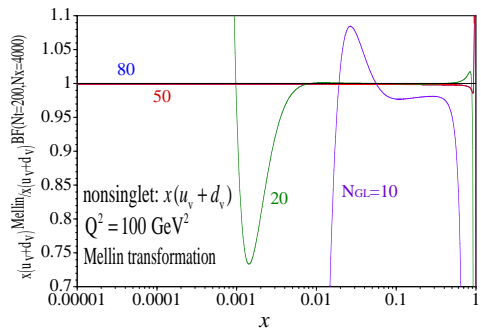
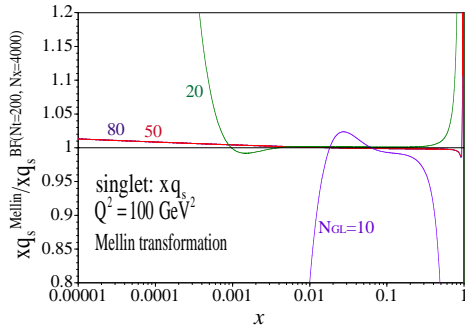
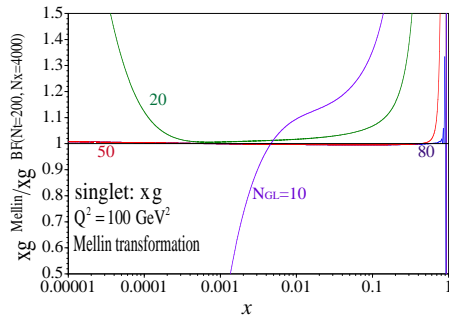


Fig. 2: Accuracy for the Q^2 evolution of xq_{NS}


 Fig. 3: Accuracy for the Q^2 evolution of xq_s

 Fig. 4: Accuracy for the Q^2 evolution of xg

も被積分関数が収束しないことが原因と考えられる。この様に小さい x や大きい x 領域で多少精度に問題はあがるが、 N_{GL} を 50 以上にとることにより精度良い数値計算法として採用できる。また、計算時間を短縮できる利点があることもわかった。Brute-force 法と比較すると、 $N_{GL}=50$ を取った場合に計算時間は約半分となる。従って、積分の上限 z_{max} を工夫して N_{GL} を小さく取れる様にすれば、更に効率よい計算方法になると考えられる。

最後に、小さい x や大きい x 領域での問題点を明示するために、(13) 式の被積分関数を図 5 に示す。小さい x では ($x = 10^{-3}, 10^{-5}$) 関数が急激に振動しているため、正確に数値積分をするためにはポイント数 N_{GL} を多く取らなければいけないことがわかる。

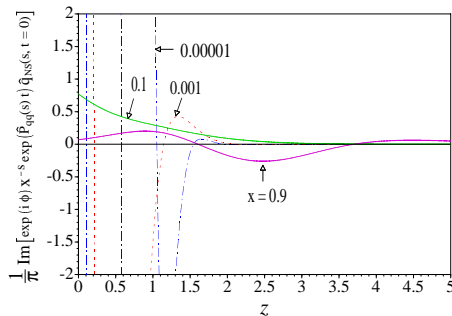


Fig. 5: Integrand of Eq. (13)

大きい x においては z が増しても関数が小さくならない特徴があり、 z_{max} を更に大きく取る必要性が出てくる。また、 $x = 0.9$ の曲線からわかるように、正の分布と負の分布の積分がほぼ同じで打ち消し合っている。これは数値計算において桁落ちを意味し、精度が悪くなる原因となっている。

4 まとめ

Mellin 変換を用いて Q^2 発展方程式の数値解を研究した。Mellin 変換により分布関数のモーメントの Q^2 変化を容易に計算することができる。このモーメントを x の分布に戻すために逆 Mellin 変換をするが、この部分に Gauss-Legendre 求積法を用いた。複素平面内の積分経路を工夫することにより、正確な数値解が求まることがわかった。特に、Brute-force の数値解法と比較して数値解の精度を示した。Gauss-Legendre 積分のポイント数 N_{GL} としては 50 程度取れば十分良い精度となることが判明した。ただし、小さい x と大きい x 領域で多少精度が落ちる問題があり、数値解法に関して更なる工夫が必要である。

参考文献

- [1] M. Miyama and S. Kumano, Comput. Phys. Commun. 94 (1996) 185.
- [2] S. Kumano and J. T. Londergan, Comput. Phys. Commun. 69 (1992) 373.
- [3] M. Glück, E. Reya, and A. Vogt, Z. Phys. C48 (1990) 471; D. Graudenz *et. al.*, Z. Phys. C70 (1996) 77; S. Kumano and T.-H. Nagai, research in progress.
- [4] A. D. Martin, R. G. Roberts, W. J. Stirling, and R. S. Thorne, Phys. Lett. B531 (2002) 216.