Rep. Fac. Sci. Engrg.
Saga Univ.
33-1 (2004)

Reports of the Faculty of Science and Engineering,
Saga University, Vol. 33, No.1, 2004

無損失無限伝送線路の等価損失

遠藤　隆*，森　健一**，高松　力**，豊島耕一*，平良　豊*

Effective Loss in Infinite Lossless Transmission Lines

By
Takasi ENDO, Ken'ichi MORI, Chikara TAKAMATSU, Kouichi TOYOSHIMA, Yutaka HIRAYOSHI

Abstract: An infinitely long LC transmission line appears to have an ohmic resistance in spite that it consists of lossless circuit elements. We show that infinitely small resistance in the elements gives finite effective loss to the line in terms of distributions or hyperfunctions.

Key words: transmission line, open system, hyperfunction

1．は　じ　め　に

無損失の要素から成る無限に長い伝送線路が損失，すなわち抵抗成分を示すことはよく知られている。特に分布定数伝送線路の場合，交流信号に対しては純抵抗とみなすことができる。これは，一見パラドックスのようであるが，入力信号の反射波が戻ってこないため，入力信号源から供給されるエネルギーが散逸し，実質的にエネルギー損失があるとみなせることで理解できる。しかし，厳密に言えば，供給されたエネルギーは伝送線路中に蓄積されており，散逸があるわけではない。

最近，KrivineらはLC伝送線路において無限小の抵抗成分を考慮することで伝送線路に抵抗成分が生じることを計算によって示した[1)]。特に微小抵抗を 0 にする極限操作と回路の段数を無限大にする極限操作の順番が交換できないことを指摘している。

我々は，同様のモデルで超関数を用いた解析を行い，スペクトルに無数の特異点が稠密に生じ，それが超関数の意味で抵抗成分に一致することを見出した。この場合、極限操作の順番には依存しない。

平成 16 年 5 月 1 日受理
*理工学部物理科学科
**工学系研究科物理科学専攻

2．直　列　共　振　回　路

図 1 のような直列共振回路を考える。簡単のため，インダクタンスは 1H，容量は 1F とした。（適当な単位系を選んで規格化したと考えてもよい。）この回路には無限小の抵抗 ε があるとし，角周波数 ω の交流信号源 $V(\omega)$ が接続されているとする。

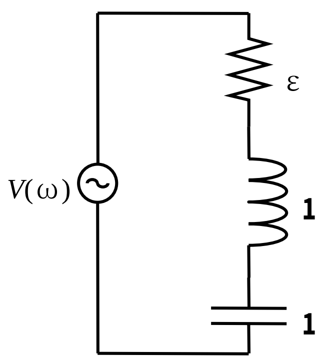

Fig.1　Resonant Circuit

この回路のアドミタンス $Y(\omega)$ は，

$$Y(\omega) = \frac{1}{i(\omega - \omega^{-1}) + \varepsilon} \tag{1}$$

となる。正の周波数範囲では，

$$Y(\omega)=\frac{\omega}{\mathrm{i}(\omega^2-1)+\varepsilon\omega} \tag{2}$$

となる。共振点（$\omega=1$）付近では，

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\mathrm{i}(\omega-1)+\varepsilon} \tag{3}$$

と表すことができる。これを

$$Y(\omega)=G(\omega)+\mathrm{i}B(\omega) \tag{4}$$

と実部のコンダクタンスと虚部のサセプタンスに分けると，

$$G(\omega)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{(\omega-1)^2+(\varepsilon/2)^2}\frac{(\varepsilon/2)}{\pi} \tag{5}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{2}\frac{(\omega-1)}{(\omega-1)^2+(\varepsilon/2)^2} \tag{6}$$

となる。

　このコンダクタンスの様子を図２に示す。ε が+0 になる極限では，デルタ関数になることが知られている。これは超関数であって，積分することで，被積分関数 $f(\omega)$ が $\omega=1$ 付近で連続であれば $\omega=1$ のときの被積分関数の値 $f(1)$ を与える。

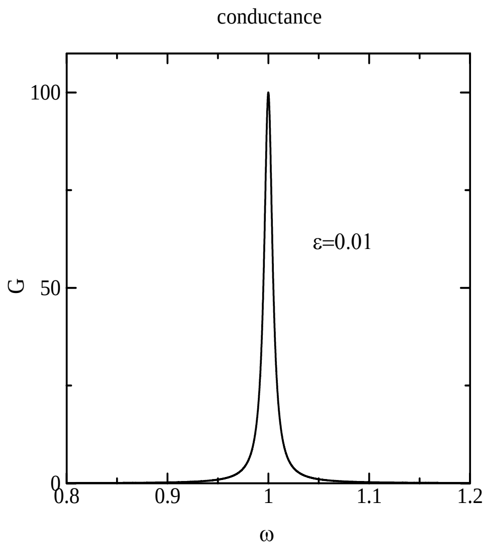

Fig.2　Conductance of a resonant circuit

　同様に，サセプタンスの様子を図３に示す。これは $\omega=1$ を中心とする奇関数であるから，被積分関数が $\omega=1$ 付近で連続であれば積分すると 0 を掛けるのと同じ演算となる。

　これは次のような一般的な公式の一例である[2]。

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x-\mathrm{i}\varepsilon}=P\left[\frac{1}{x}\right]+\mathrm{i}\pi\delta(x) \tag{7}$$

となる。

　以上のことから，アドミタンスが何らかの連続なスペクトルを持つ入力信号を被積分関数とする超関数であると解釈するならば，実部がデルタ関数となり，虚部が 0 となる。

　共振点での応答を考えると，有限の時間で測定する限り，信号源の周波数には測定時間の逆数程度の幅が存在するので，その幅にわたって積分する必要がある。したがって，インピーダンスあるいはアドミタンスは，有限の測定時間を前提とする限り，共振点では超関数とみなすべきである。その差があるとしても，有限の時間では区別できない。

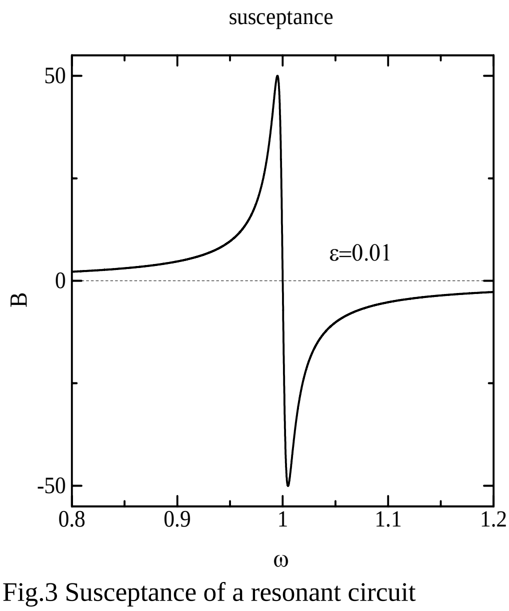

Fig.3 Susceptance of a resonant circuit

　$\omega=1$ 以外の周波数においては，実部のデルタ関数は何の効果ももたらさないので無視することができる。通常，無限小の損失を持つ理想的な LC 回路では虚部，すなわちリアクタンスまたはサセプタンスだけを考えるのは，そのためである。特異点が孤立して単独で存在する場合には，その点を除いて考えることで超関数と考える必要もないであろうが，次に論じるように，特異点がある区間で稠密に存在する場合には除去することが不可能になるので，無視することはできない。そのような場合には，超関数を用いて論じる必要がある。

3. 無　損　失　伝　送　線　路

図４のような損失の無いコイルとコンデンサから成る伝送線路を考える。計算を簡単にするため，インダクタンスと容量はそれぞれ 2H と 2F とする。

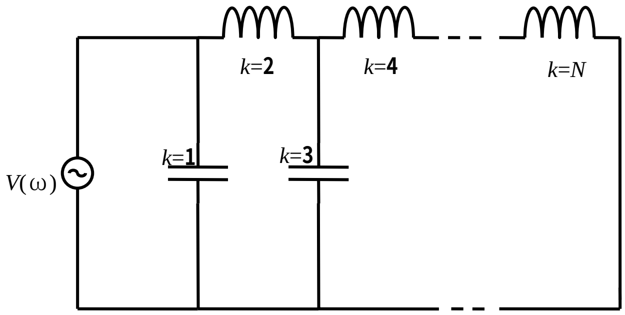

Fig.4　Transmission line

この回路が無限に長いときのアドミタンスを $Y = G + \mathrm{i}B$ とする。もし長さが無限になる極限で一定のアドミタンスに収束するならば（実は通常の関数としては収束しないのであるが），さらに１段追加してもアドミタンスは同じになるであろう。

アドミタンス $Y = G + \mathrm{i}B$ にインダクタンスを直列に接続した場合のインピーダンスは，

$$Z = 2\mathrm{i}\omega + \frac{1}{Y} \tag{8}$$

となる。さらにコンデンサを並列に接続した場合のアドミタンスは，これが Y に等しいと置いて，

$$Y = 2\mathrm{i}\omega + \frac{1}{Z} = 2\mathrm{i}\omega + \cfrac{1}{2\mathrm{i}\omega + \cfrac{1}{Y}} \tag{9}$$

となる。この方程式を実部と虚部に分けると，それぞれ

$$-4\omega GB + 4\omega^2 G = 0 \tag{10.1}$$

$$2\omega\left(G^2 - B^2\right) + 4\omega^2 B - 2\omega = 0 \tag{10.2}$$

となる。実部の方程式から，$0 < \omega$ とすると，

$$B = \omega \tag{11}$$

となることがわかる。これを虚部の方程式に代入すると，$0 < G$ を仮定して

$$G = \sqrt{1 - \omega^2} \tag{12}$$

となることがわかる。したがって，もし収束するならばアドミタンスは，

$$Y = \sqrt{1 - \omega^2} + \mathrm{i}\omega \tag{13}$$

となる。

しかし，この結論は一種のパラドックスを含む。すべての回路要素の損失が０であるならば，有限の伝送線路ではリアクタンスのみ，あるいはサセプタンスのみが存在するのであって，抵抗やコンダクタンスは存在しないはずである。すなわちアドミタンスは常に純虚数のはずである。それにもかかわらず収束値は実部を持つ。

このパラドックスを解決するために，まず有限の微小損失を持つ伝送線路を考え，段数を無限にしたときの極限を考えることにする。

図４の回路の入力側から見た駆動点サセプタンスは N によって異なる。最初のいくつかを求めると，

$$B_1 = 2\omega \tag{14.1}$$

$$B_2 = 2\omega + \frac{-1}{2\omega} \tag{14.2}$$

$$B_3 = 2\omega + \cfrac{-1}{2\omega + \cfrac{-1}{2\omega}} \tag{14.3}$$

$$B_4 = 2\omega + \cfrac{-1}{2\omega + \cfrac{-1}{2\omega + \cfrac{-1}{2\omega}}} \tag{14.4}$$

などとなる。一般には，

$$B_N = 2\omega + \overbrace{\frac{-1|}{|2\omega} + \frac{-1|}{|2\omega} + \frac{-1|}{|2\omega} + \cdots \frac{-1|}{|2\omega}}^{N-1} \tag{15}$$

と連分数を用いて表すことができる。

一般に，連分数

$$b = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \tag{16}$$

は次のような漸化式で求めることができる。

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \tag{17.1}$$
$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \tag{17.2}$$
$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} \tag{17.3}$$

ただし初期値として

$$P_{-1} = 1 \tag{18.1}$$
$$Q_{-1} = 0 \tag{18.2}$$

と置いて，$n = 1$から漸化式を適用する。
今考えている連分数の場合，

$$b_n = 2\omega \tag{19.1}$$
$$a_n = -1 \tag{19.2}$$

であるから，

$$P_n = 2\omega P_{n-1} - P_{n-2} \tag{20.1}$$
$$Q_n = P_{n-1} \tag{20.2}$$
$$B_n = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \tag{20.3}$$

と簡単になる。
この極限を求めるためには，P_n の一般式がわかればよい。これは、

$$\begin{aligned} &P_n = 2\omega P_{n-1} - P_{n-2} \\ &(P_0 = 2\omega,\quad P_{-1} = 1) \end{aligned} \tag{21}$$

という漸化式によって求めることができる。
この漸化式は、第 2 種チェビシェフ多項式の漸化式に一致している。したがって、第 2 種チェビシェフ多項式

$$U_N = \frac{\sin\left((N+1)\cos^{-1}\omega\right)}{\sin\left(\cos^{-1}\omega\right)} \tag{22}$$

を用いて

$$B_N = \frac{U_N}{U_{N-1}} \tag{23}$$

と表すことができる。すなわち，

$$B_N = \cos\theta - \sin\theta \cdot \cot N\theta \tag{24}$$

となる。ただし

$$\theta = \cos^{-1}\omega \tag{25}$$

と置いた。ωで表すと，

$$B_N = \omega - \sqrt{1-\omega^2}\cot N\left(\cos^{-1}\omega\right) \tag{26}$$

となる。
この場合，任意の N に対して B_N は実数である。すなわち，無損失伝送線路はサセプタンスのみで表され, コンダクタンスは 0 であるということになる。実際には，無限に長い場合には有限のコンダクタンスが発生するはずであるが、それは次に示すように無限小の損失の効果を考慮する必要がある。

4. 無　限　小　損　失　伝　送　線　路

次に，コイルとコンデンサに無限小の損失が存在する場合を考える。
図 4 の回路で，コイルには直列に2εの抵抗，コンデンサには並列に$1/2\varepsilon$の抵抗が接続されていると考える。コイルのインピーダンスは

$$Z_L = 2\varepsilon + 2i\omega \tag{27}$$

となる。これは，

$$Z_L = i2(\omega - i\varepsilon) \tag{28}$$

と書き直すことができる。またコンデンサのアドミタンスは

$$Y_C = 2\varepsilon + i2\omega \tag{29}$$

となり，

$$Y_L = i2(\omega - i\varepsilon) \tag{30}$$

と書き直すことができる。いずれにしても無損失の場合に対して，

$$\omega \to \omega - i\varepsilon \tag{31}$$

という置換を行えば，損失のある場合のインピーダンスやアドミタンスを求めることができる。

したがって，このような損失がある場合の伝送線路のサセプタンスも $\omega \to \omega - \mathrm{i}\varepsilon$ という置換を行えば，$B_N = \cos\theta - \sin\theta \cdot \cot N\theta$ によって計算することができる。ただし，$\theta = \cos^{-1}(\omega - \mathrm{i}\varepsilon)$ は複素数になるので，その実部と虚部を求めておく。

$\theta = \alpha + \mathrm{i}\beta$ と置くと，$\varepsilon \to +0$ のときには，

$$\cos\theta = \cos\alpha - \mathrm{i}\beta\sin\alpha \tag{32}$$

となり，これが

$$\cos\theta = \omega - \mathrm{i}\varepsilon \tag{33}$$

と一致しなければならないので，

$$\alpha = \cos^{-1}\omega \tag{34.1}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\omega^2}} \tag{34.2}$$

となる。したがって

$$\theta = \cos^{-1}\omega + \mathrm{i}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\omega^2}} \tag{35}$$

である。

次に $B_N = \cos\theta - \sin\theta \cdot \cot N\theta$ を求めるために，$\cot N\theta$ を計算する。$\cot N\theta$ は，$\theta > 0$ に対して次のように展開することができる。

$$\cot N\theta = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\theta - \pi\frac{k}{N}} \tag{36}$$

θ には無限小の虚数が含まれているので，

$$\frac{1}{\theta - \pi\frac{k}{N}} = \left[\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\omega}\right]^{-1}_{\omega=\omega_k}\left\{P\left[\frac{1}{\omega-\omega_k}\right] - \mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_k)\right\} \tag{37}$$

となる。ここで ω_k は k 番目の共振周波数

$$\omega_k = \cos\pi\frac{k}{N} \tag{38}$$

である。

主値の項は超関数としては 0 に等しいので，

$$\cot N\theta = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sqrt{1-\omega^2}\,\mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_k) \tag{39}$$

となる。周波数を $0 < \omega < 1$ の範囲に限定すると，ω_k もこの範囲のものだけを考えればよいので，$0 < k < N/2$ の範囲で総和を求めればよい。したがって，

$$\cot N\theta = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N/2-1}\sqrt{1-\omega^2}\,\mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_k) \tag{40}$$

となる。

デルタ関数列の間隔を求めると，

$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \cos\pi\frac{k+1}{N} - \cos\pi\frac{k}{N} \tag{41}$$

となる。ここで $N >> 1$ とすると，

$$\Delta\omega_k = -\frac{\pi}{N}\sqrt{1-{\omega_k}^2} \tag{42}$$

となる。

$0 < \omega < 1$ でのみ 0 とならない連続関数 $f(\omega)$ に対して，

$$f(\omega)\cot N\theta = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N/2-1}\sqrt{1-\omega^2}\,\mathrm{i}\pi\delta(\omega-\omega_k)f(\omega) \tag{43}$$

を計算してみる。右辺は，ω で積分すると

$$\mathrm{i}\pi\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N/2-1}\sqrt{1-{\omega_k}^2}\,f(\omega_k)|\Delta\omega_k|\frac{1}{|\Delta\omega_k|}$$
$$= \mathrm{i}\sum_{k=1}^{N/2-1}f(\omega_k)|\Delta\omega_k| \tag{44}$$

となるが，$\sum_{k=1}^{N/2-1}f(\omega_k)|\Delta\omega_k|$ は $N \to +\infty$ の場合、す

なわち$\Delta\omega_k \to 0$の場合の関数$f(\omega)$のリーマン積分の定義に他ならない。したがって

$$\pi \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} \sqrt{1-{\omega_k}^2}\,\delta(\omega-\omega_k)=1 \tag{45}$$

と置き換えることができる。すなわち，超関数の意味で

$$\lim_{N\to+\infty} \cot N\theta = \mathrm{i} \tag{46}$$

となる。注意すべきことは，この式の左辺は通常の関数としては収束しないので，正しくないことである。しかし，超関数の意味では正しい。

この式は、θの虚部が無限小であっても、Nが無限大になるときは$\cot N\theta$が純虚数になることを示している。その点ではパラドックスであるが、右辺は通常の意味でのiではなく、今までの議論でわかる通り、超関数の意味でiと一致しているのであって、実は稠密なデルタ関数列だったのである。

以上のことから，無限小損失を持つ伝送線路のサセプタンスは，

$$B=\lim_{N\to\infty}\left(\cos\theta-\sin\theta\cot N\theta\right)=\omega-\mathrm{i}\sqrt{1-\omega^2} \tag{47}$$

となる。サセプタンスの虚部は，実はコンダクタンスであるから，この伝送線路は

$$Y=\mathrm{i}\omega+\sqrt{1-\omega^2} \tag{48}$$

というアドミタンスを持つことになる。この式は，まさに無損失無限長伝送線路のアドミタンスと一致する。

なお分布定数伝送線路の場合は、遮断周波数（$\omega=1$）が無限大の場合に相当するので、式(48)で$\omega\to 0$の場合に相当する。この場合もここで示した方法によってアドミタンスのコンダクタンス成分を導出することが可能である。

5. お　わ　り　に

Krivine らは極限操作の非可換性を指摘した。確かに通常の関数としては、

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to+0} Y_{\varepsilon N} \neq \lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{N\to+\infty} Y_{\varepsilon N} \tag{49}$$

である。ここで$Y_{\varepsilon N}$は段数がNで微小損失のパラメータがεの伝送線路のアドミタンスである。段数と微小損失がともに有限である場合には、計算に曖昧さはない。しかし、段数を無限大に、損失を 0 に持って行く極限操作の順番を入れ替えると結果が異なる点は注意しなければならない。

しかし、先に損失を 0 に持って行く場合でも、アドミタンスを超関数として解釈するならば、

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to+0} Y_{\varepsilon N} = \lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{N\to+\infty} Y_{\varepsilon N} \tag{50}$$

と言えるのである。むしろ Krivine らの議論は、損失を 0 にする極限を通常関数とみなした点に問題がある。アドミタンスを通常関数とみなすと、特異点が生じ、その点では回路の応答が定義できないことになる。また無限伝送線路では特異点が稠密に分布し、あらゆる区間で定義できない周波数が存在することになってしまう。むしろ、回路の応答は、連続なスペクトル分布を持つ入力を被積分関数とする超関数とみなすのが自然である。

超関数として扱うことによって、損失が無限小であるという意味で無損失の伝送線路は，長さが無限大になる極限で抵抗成分あるいはコンダクタンス成分を持つことが示された。もともと損失の無い伝送線路ではリアクタンスまたはサセプタンスしか持たないはずであるが，無限長では共振点の分布が稠密なデルタ関数列になり，この稠密なデルタ関数列は超関数の意味で虚数の定数となる。すなわち，有限の時間で稠密なデルタ関数列を観測することは不可能であり，虚数定数として観測されることになるのである。これがこの論文の冒頭に述べたパラドックスを解く鍵である。

同様の現象は，多数の原子が結合した物質でも見られるであろう。原子間の相互作用に損失がなくても, 多数の原子が結合する極限では損失が発生する。その場合も，原子間の相互作用に無限小の損失が存在すると仮定して原子数を無限大にすれば，やはり超関数の意味で損失が現れるはずである。

ここで示した超関数を用いた議論は，無限自由度の可逆系が示す様々な非可逆性を考察する際に有用であろう。

参　考　文　献

(1) H.Krivine, A.Lesne, Am. J. Phys. 71(2003)31-33.

(2) P. R. Fontana, “*Atomic Radiative Processes*”,(Academic Press, 1982) Appendix D.