

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

GIOVANNI PEROTTO DE MORAIS

ESTUDO DAS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO EM UM TOKAMAK COM  
DIVERTOR

CURITIBA

2021

GIOVANNI PEROTTO DE MORAIS

ESTUDO DAS LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO EM UM TOKAMAK COM  
DIVERTOR

Trabalho apresentado como requisito parcial  
para a obtenção do título de Licenciado em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana  
Coorientadora: Dr<sup>a</sup>. Amanda Carolina Mathias  
Simentkowski

CURITIBA

2021



## UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

INFORMAÇÃO N° 258/2021/UFPR/R/ET/DFIS

### **ATA DA APRESENTAÇÃO E ARGUIÇÃO ORAL DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

Aos 13 dias do mês de agosto de 2021, as 14 horas, reuniram-se remotamente usando a Plataforma Google Meet, o acadêmico **Giovanni Perotto de Moraes**, aluno do Curso de Licenciatura em Física do Setor de Exatas da Universidade Federal do Paraná, para fazer a apresentação e arguição oral relativa ao seu **Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)**, intitulado “**Estudo das linhas de campo magnético em um Tokamak com divertor**”, orientado pelo Professor Dr. Ricardo Luiz Viana, perante a banca examinadora, que foi assim constituída: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana, como Presidente da Banca, a Dr<sup>a</sup>. Amanda Mathias Siementkowski, coorientadora e como 1º Membro da Banca e o Prof. Dr. Carlos Adalberto Schnaider Batista (UFPR-Pontal do Sul), como 2º Membro da Banca. Após assistirem a exposição da acadêmica, acima nomeada, e arguirem-na sobre diferentes aspectos do TCC apresentado, os membros da banca reuniram-se para atribuição da nota final, a qual foi **100 (CEM)**, de acordo com o **Relatório de Avaliação de TCC**, que acompanha esta Ata, estando o acadêmico aprovado na disciplina TCCB, com a recomendação de que todas as sugestões de correções indicadas pela Banca sejam atendidas e que a versão definitiva do TCC seja entregue conforme as regras estabelecidas pelo Colegiado de Curso e no prazo fixado. A nota final foi comunicada ao acadêmico. Nada mais havendo a ser tratado, o Presidente da Banca declarou encerrada a seção e todos os membros da Banca assinaram eletronicamente a presente Ata.

Curitiba, 11 de agosto de 2021.

---



Documento assinado eletronicamente por **RICARDO LUIZ VIANA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 13/08/2021, às 15:11, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

---



Documento assinado eletronicamente por **Amanda Carolina Mathias Siementkowski, Usuário Externo**, em 13/08/2021, às 16:17, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

---



Documento assinado eletronicamente por **CARLOS ADALBERTO SCHNAIDER BATISTA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 16/08/2021, às 10:02, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

---



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **3713760** e o código CRC **9565B54E**.

---

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer a todos que sempre me incentivaram.

Agradeço especialmente,

Ao meu orientador Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana pela paciência e incentivo durante toda a minha graduação.

À minha coorientadora Dra. Amanda Carolina Mathias Siementkowski eu agradeço imensamente por acreditar em minha capacidade, pela paciência, pelos incentivos e principalmente por todos os conhecimentos transmitidos nos últimos anos.

À minha família que sempre fez de tudo para apoiar meus sonhos. Obrigado Roseley, Evair, Naiade e Giancarlo.

Ao meu grande amigo Anderson Alberto Ribeiro Junior que me ensinou como a vida e a Física podem ser mais legais.

Em especial à Marília Yukiko Yamassaki que sempre esteve ao meu lado e por vezes me impediu de desistir.

Ao meu amigo Rafael Rezende dos Santos pelas incontáveis ajudas e revisões nos códigos usados.

Aos amigos da graduação por todas as brincadeiras, risadas, jogos e dias de estudos.

*“The study of plasma is under serious investigations:  
To develop cleaner and more efficient industry applications,  
To understand the universe of plasma situations,  
And to obtain fusion energy for the future generations.”  
(The Fourth State of Matter , Plasma 12)*

## RESUMO

A deposição de linhas de campo magnético de um tokamak com divertor pode ser representado por um sistema dinâmico físico, neste caso, um sistema hamiltoniano aberto, que tem como característica o surgimento frequente de estruturas fractais. Neste trabalho usamos um mapa simples para investigar os padrões de deposição nas placas de um tokamak com divertor. Mostramos que o padrão das pegadas magnéticas nas placas do divertor (padrões de deposição) próximas às órbitas caóticas envolvem estruturas fractais relacionadas à existência de um conjunto de selas caóticas.

**Palavras-chaves:** Divertor. Mapa simples. Estruturas fractais.

## **ABSTRACT**

The deposition of magnetic field lines of a tokamak with divertor can be represented by a physical dynamic system, in this case, an open Hamiltonian system, which is characterized by the frequent appearance of fractal structures. In this work we use a simple map to investigate deposition patterns on the plates of a divertor tokamak. We show that the pattern of magnetic footprints on the divertor plates (deposition patterns) close to the chaotic orbits involve fractal structures related to the existence of a set of chaotic saddles.

**Key-words:** Divertor. Simple map. Fractal structures.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – TOKAMAK TOROIDAL . . . . .	8
FIGURA 2 – CÂMERA DE VÁCUO ITER - O DIVERTOR . . . . .	9
FIGURA 3 – ESPAÇOS DE FASE DEMONSTRATIVO . . . . .	15
FIGURA 4 – ESPAÇOS DE FASE - MAPA DIVERTOR . . . . .	16
FIGURA 5 – SELAS - MAPA DIVERTOR . . . . .	17
FIGURA 6 – PEGADAS MAGNÉTICAS . . . . .	19
FIGURA 7 – MÉTODO DA INCERTEZA . . . . .	20

## SUMÁRIO

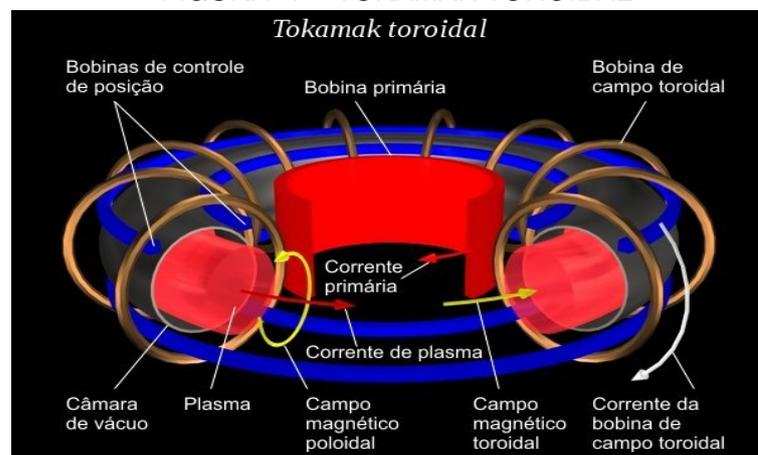
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1	Contexto . . . . .	8
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1	Fundamentação teórica . . . . .	11
2.2	Definições e conceitos . . . . .	12
<b>3</b>	<b>MÉTODOS</b> . . . . .	<b>14</b>
3.1	Mapa do divertor . . . . .	14
3.2	Pegadas magnéticas . . . . .	17
3.3	Dimensão fractal - em andamento . . . . .	18
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>22</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>23</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTO

O estudo em física de plasmas - gases altamente ionizados que apresentam propriedades elétricas e comportamento coletivo - é incentivado por vários motivos, em especial por ser o método mais promissor até o momento para obtenção de energia por meio da fusão termonuclear controlada (WESSON, 2004; HORTON, 2012). Utilizando reatores nucleares com confinamento magnético de plasma os processos de fusão nuclear produzem energia elétrica através do calor gerado pelas colisões altamente energéticas de íons que causam a fusão. Um dos projetos que visa este tipo de confinamento magnético de plasma é o tokamak, um dispositivo onde as linhas de campo magnético possuem simetria toroidal. A fig. 1, representa os principais componentes de um tokamak. O confinamento do plasma em um tokamak é obtido através da combinação dos campos magnéticos poloidal e toroidal. O campo magnético toroidal é produzido por correntes elétricas que passam por bobinas situadas ao redor da câmara de vácuo, e o campo magnético poloidal é gerado pela corrente elétrica que flui através do plasma. Essa corrente que flui no plasma, serve para aquecer o plasma e foi induzida por uma corrente elétrica transitória que circula na bobina primária do tokamak. Dessa forma, o anel de plasma constitui o circuito secundário de um grande transformador ôhmico. Além do mais, existem outras bobinas que são posicionadas paralelamente acima e abaixo da câmara toroidal que geram campos magnéticos auxiliares para o controle e o formato da coluna de plasma.

FIGURA 1 – TOKAMAK TOROIDAL



Fonte: (SIEMENTKOWSKI, 2017).

Legenda: Principais componentes de um tokamak.

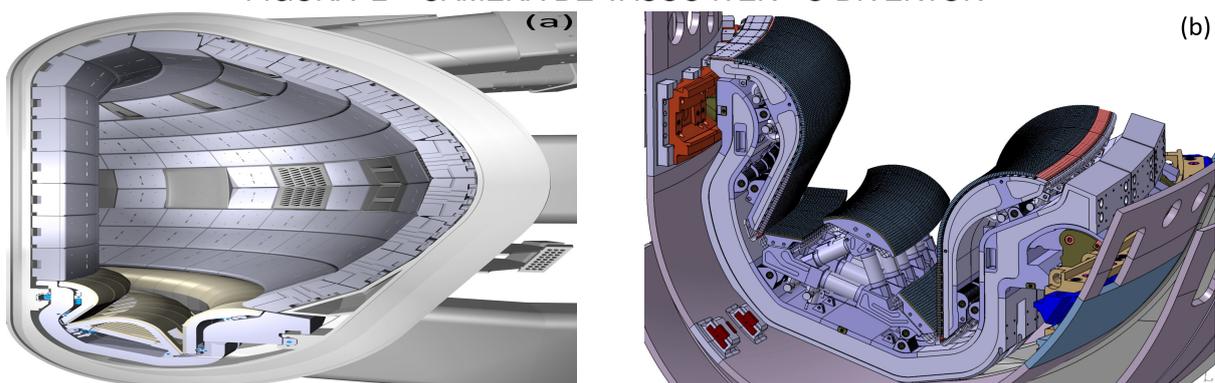
O primeiro tokamak foi idealizado, projetado e construído na Rússia na década de 50, tendo como finalidade estudar o confinamento de plasma. Posteriormente, vá-

rios outros tokamaks foram construídos ao redor do mundo - três deles situados no Brasil -, almejando o entendimento das propriedades do plasma, objetivando estes conhecimentos para construção de um reator de fusão termonuclear controlada que fosse realmente viável. Para demonstrar a viabilidade deste projeto juntamente com os avanços das pesquisas das últimas décadas deu-se início à construção com colaboração internacional do tokamak *International Thermonuclear Experimental Reactor* - ITER (FUSION, 1999), localizado na França.

Mesmo o ITER sendo o mais novo tokamak em construção, este ainda possui certas limitações que precisam ser superadas quanto ao tempo em que é possível realizar as reações, estando fortemente atrelado ao confinamento de plasma. Tal degradação no confinamento do plasma resulta em um acúmulo no número de partículas extremamente quentes que entram em contato com as paredes internas do reator, tendo como consequência final a poluição, mudança de densidade e resfriamento do núcleo do plasma quando estes realizam o retorno (POST; BEHRISCH, 1986).

Existe uma estrutura integrada a câmara principal do reator que foi projetada com o propósito de auxiliar no processo de não degradação do confinamento. Defletor, ou divertor, é o equipamento situado no fundo do recipiente a vácuo, que visa extrair o calor e as cinzas produzidas pela reação de fusão, minimizando a contaminação do plasma e protegendo as paredes internas do tokamak (figura 2). O divertor tem três componentes voltados para o plasma: os alvos verticais internos, alvos verticais externos e a cúpula. O divertor também hospeda vários componentes de diagnóstico (sensores) para controle, avaliação e otimização da física do plasma.

FIGURA 2 – CÂMERA DE VÁCUO ITER - O DIVERTOR



Fonte: ITER (2013).

Legenda: (a) Um corte do recipiente de vácuo ITER mostrando os módulos de manta fixados em sua parede interna e o divertor na parte inferior. (b) O divertor.

Os componentes voltados para o plasma do divertor ITER serão expostos a uma carga de calor dez vezes maior do que a de uma espaçonave que entra na atmosfera terrestre ( $\approx 10MWm^2$ )(PITTS et al., 2009). Mesmo já estando garantida sua funcionalidade em tais condições, as pesquisas que descrevem o transporte das partículas que lá colidirão ainda não conseguiram elaborar uma teoria completa que

explique todos os resultados obtidos experimentalmente. É de interesse investigar os padrões de deposição de calor na placa do divertor que advém de propriedades de sistemas hamiltonianos, tentando assim mostrar que seus padrões apresentam-se na forma de estruturas fractais e que estas tem influência na vida útil deste equipamento. Neste caso, as simulações e análises numéricas tornam possível visualizar e entender os padrões para prever certos comportamentos que prejudicam o confinamento.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A revisão bibliográfica deu-se início com a tese (SIEMENTKOWSKI, 2017), em que foi investigado algumas propriedades do transporte de partículas em sistemas dinâmicos caóticos a partir de um modelo de ondas de deriva e pelo mapa de Martin-Taylor. Desta tese sairão os métodos utilizados nas análises das bacias de escape e a quantificação de fractalidade das fronteiras da bacia que serão apresentados no capítulo 3.

Neste trabalho, investigaremos o padrão fractal de deposição de linhas de campo magnético na placa do divertor causado por perturbações magnéticas, usando um mapeamento de preservação de área simples proposto por Punjabi, Verma e Boozer (PUNJABI et al., 1996), presente no capítulo 3.

Uma das questões críticas da física do tokamak é a previsão e o controle da densidade do fluxo de calor que atinge a placa do divertor.

Em um cenário ideal de perfeita simetria toroidal, as boas superfícies magnéticas fechadas em um tokamak divertor são delimitadas por uma nítida separatriz, conjunto de variedades instáveis e estáveis. A região ao redor da separatriz se torna caótica se existe uma camada de linhas de campo estocásticas entre a última superfície fechada e as linhas de campo abertas. Essa região é chamada de camada de raspagem estocástica, do inglês (*stochastic scrape-off layer*). Esta parte assimétrica do campo magnético pode surgir dos desvios na localização das bobinas do campo magnético da simetria axial, perturbações magnéticas das instabilidades do plasma ou efeitos das bobinas propositadamente colocadas para controlar a largura da camada estocástica. O efeito da camada estocástica é reduzir a quantidade de fluxo magnético contido dentro da última superfície fechada para um nível mais baixo do que quando a separatriz não é perturbada.

É possível ampliar a região onde o plasma deposita calor na placa de desvio aplicando perturbações magnéticas assimétricas para crescer a camada estocástica. Uma camada estocástica relativamente ampla também pode proteger o plasma principal contra impurezas. Para ambas as questões, é essencial ter um entendimento detalhado do comportamento das trajetórias das linhas de campo na camada estocástica e das propriedades da pegada magnética das linhas de campo na placa de desvio.

O período de tempo em que as linhas de campo permanecem na região estocástica tem uma influência importante na questão da proteção do plasma principal

contra impurezas. Isso, combinado com a espessura da camada estocástica e sua dependência do fator de segurança da aresta, pode ser crucial para a realização efetiva do conceito de desvio de radiação. Os números de amplitude e modo de perturbações magnéticas assimétricas determinam quanto tempo as linhas de campo residem na camada e a largura da camada.

## 2.2 DEFINIÇÕES E CONCEITOS

A evolução de um sistema dinâmico pode ser descrita por uma das duas principais categorias: equações diferenciais ou mapas (STROGATZ, 2000). Nas equações diferenciais o tempo é como variável contínua. Nos mapas, ou equações a diferenças, o tempo é uma variável discreta, ou seja, só assume valores inteiros  $n = 0, 1, 2, \dots$ . A forma geral para um mapa  $N$ -dimensional é

$$\begin{aligned} x_{1_{n+1}} &= f_1(x_{1_n}, \dots, x_{N_n}) \\ &\vdots \\ x_{N_{n+1}} &= f_N(x_{1_n}, \dots, x_{N_n}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde os valores de  $x_n$ , a partir da condição inicial  $x_0$ , são chamados de iteração do mapa. A sequência de iteradas sucessivas do mapa,  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , é denominada de órbita gerada pelo mapa  $f_N(x)$ .

As órbitas são chamadas de regulares se apresentam um padrão bem definido, através do qual se pode prever, com relativa precisão e olhando apenas para seu aspecto gráfico, por quais pontos do espaço de fase a órbita passa. Uma órbita não-regular é chamada de órbita caótica. Estas órbitas percorrem o espaço de fase de modo que não é possível inferir um padrão, qualquer que seja o número de iterações do mapa. Órbitas caóticas também são sensíveis a pequenas variações nas condições iniciais, que evoluem de forma distinta, cuja distância varia exponencialmente com o número de iterações.

Além da regularidade da órbita, também é possível inferir sobre sua periodicidade. Órbitas regulares podem apresentar órbita periódica ou quase-periódica. Se após um número finito de iterações a órbita retornar ao mesmo ponto, significa que é periódica. Para uma condição inicial  $x_0$ , temos que  $x_0 = f^q(x_0)$ , onde  $q$  é o número mínimo de iterações para completar o ciclo. Se  $q = 1$ ,  $x_0$  é chamado de ponto fixo de  $f$ .

Uma órbita regular quase-periódica ocorre quando dado uma condição inicial  $x_0$ , as iterações passam suficientemente próximas ao ponto  $x_0$ . Estas órbitas apresentam uma grande densidade de pontos, para um número suficientemente grande de iterações, fazendo com que graficamente estas órbitas se assemelhem a curvas contínuas e fechadas no espaço de fase.

Curvas invariantes são órbitas que giram em torno de pontos elípticos, gerando assim estruturas chamadas de ilhas. Em mapas bi-dimensionais as curvas invariantes formam barreiras de transporte (FONSECA, 2011).

### 3 MÉTODOS

#### 3.1 MAPA DO DIVERTOR

É possível iniciar o entendimento deste sistema construindo mapas de preservação de área (PUNJABI et al., 1992b) com coordenadas retangulares  $x$  e  $y$  a partir da seção de Poincaré, fig. 3. Mapas estes que carregam um parâmetro  $k$  que determina a intensidade de perturbações não integráveis que causa a região caótica próximo da separatriz do sistema.

O mapa de divertor simples/único foi apresentado como o modelo mais simples para o estudo das linhas de campo caóticas e pegadas magnéticas nas placas de divertor de um tokamak (PUNJABI et al., 1992a). O mapa é definido como:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - ky_n(1 - y_n), \\y_{n+1} &= y_n + kx_{n+1},\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $(x_n, y_n)$  são as coordenadas retangulares na superfície poloidal da seção.

Partículas com velocidade paralela negativa seguem o mapa para trás. O reverso do mapa simples é

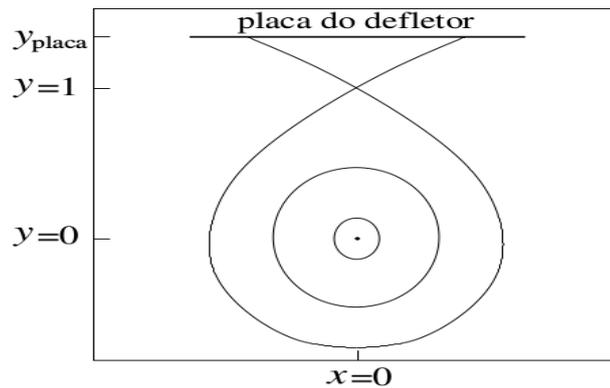
$$\begin{aligned}y_0 &= y_1 - kx_1, \\x_0 &= x_1 + ky_0(1 - y_0).\end{aligned}\tag{3.2}$$

O mapa tem um ponto fixo estável em  $(0,0)$  e um ponto fixo instável em  $X = (0,1)$ . A fig. 3 mostra o espaço de fase do mapa do divertor (3.1). Na figura podemos ver que, dentro da separatriz, as trajetórias formam superfícies fechadas em torno do ponto estável  $(0,0)$  para  $k = 0,4$ . As linhas invariantes fechadas são separadas das linhas abertas (não mostradas) pela separatriz.

Para pequenos valores do parâmetro de controle  $k$ , mostramos através de uma visão ampliada na fig. 4 a formação de uma fina camada caótica na região da separatriz próxima ao ponto  $X$  para  $k = 0,4$  (b),  $0,6$  (d) e  $0,8$  (f). As órbitas caóticas eventualmente alcançam as placas, que são definidas nas simulações numéricas em  $y_{plate} = 1,0$ . Nota-se facilmente na fig.4 (a), (c) e (e) que o mapa não é simétrico em torno do eixo  $y$ . Quanto menor for  $k$ , mais perto do ponto  $X$  passa a última superfície magnética. Na fig. 4 (b), (d) e (f), é possível observar dentro da camada caótica ilhas magnéticas. Simultaneamente, observamos o efeito de assimetria das linhas de campo ao redor da última cadeia de ilhas devido à alta concentração de pontos nesses locais.

Notamos que a área ocupada pelas ilhas diminuiu enquanto a área ocupada pelas trajetórias caóticas aumentaram consideravelmente, significando que partículas

FIGURA 3 – ESPAÇOS DE FASE DEMONSTRATIVO



Fonte: (PORTELA, 2008).

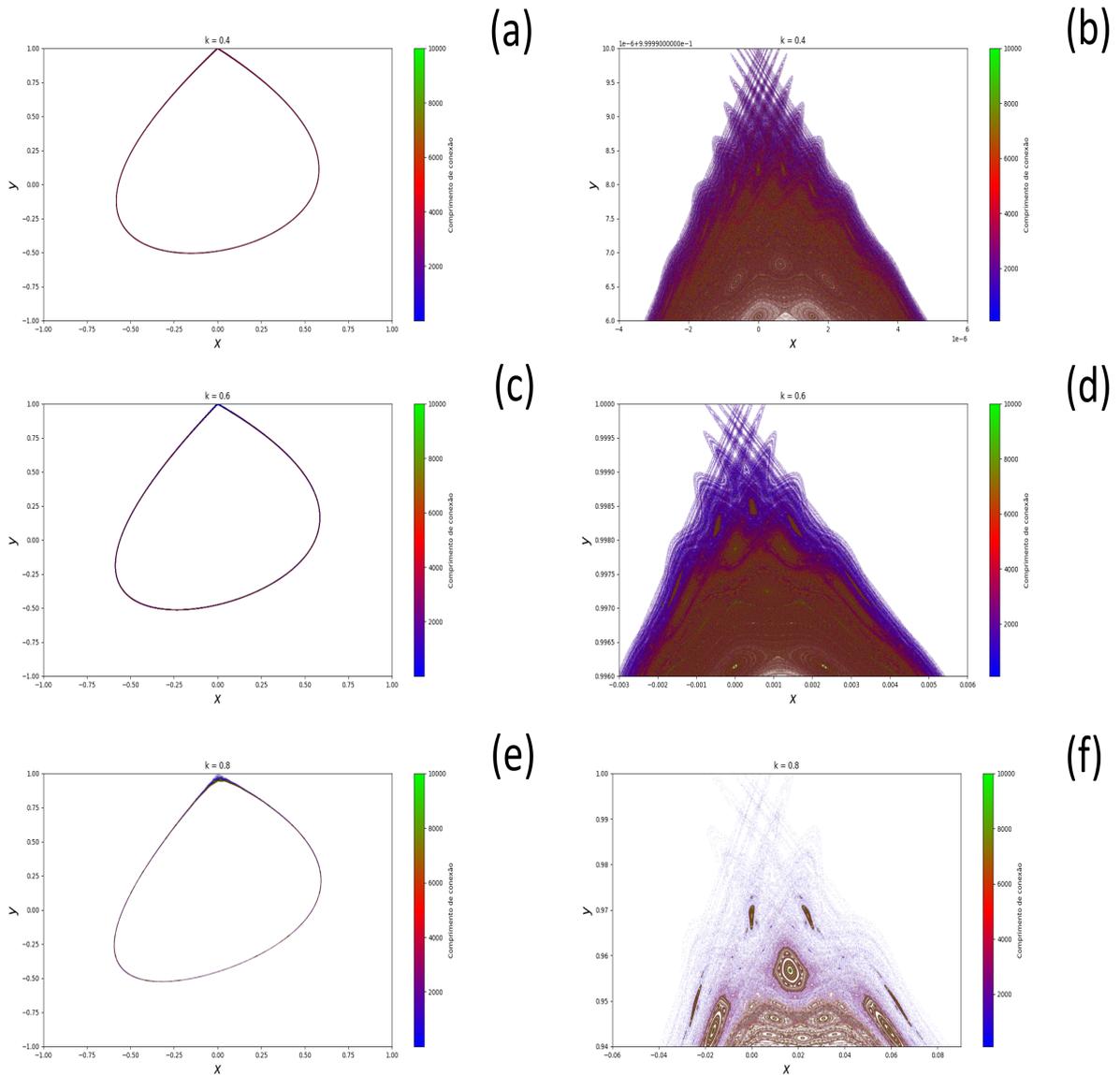
Legenda: Espaço de fase para um mapa simples com  $k=0.4$ , tendo ponto fixo estável em  $(0,0)$  e algumas curvas invariantes. A separatriz é o que separa as linhas fechadas das abertas, incluso ponto hiperbólico  $(0,1)$ .

que antes estavam confinadas nessas ilhas, em movimentos periódicos ou quase periódicos, agora estão livres para percorrer todo o espaço de fase (SIEMENTKOWSKI, 2017).

A estrutura matemática próxima à região caótica observado na fig. 4 é um emaranhado extremamente complexo composto de interseções entre variedades invariantes de órbitas instáveis embutidas na região caótica (SILVA et al., 2002). Para ser compreendida, as estruturas das linhas de campo que cruzam as placas do diverter devem ser analisadas considerando os conjuntos caóticos invariantes próximos à região caótica no espaço de fase próxima a separatriz. As variedades são conjuntos de pontos que seguem uma órbita periódica com iterações para frente e para trás do mapa. Se entre as trajetórias existe uma, com condições iniciais que iterando para frente permanece por um longo período de tempo presa no sistema, dá-se o nome de variedade instável. Caso a trajetória fique presa no mapa reverso, dá-se o nome de variedade estável. A intersecção das variedades estável e instável de um número infinito de órbitas periódicas instáveis, é chamada de sela caótica, que é um conjunto caótico invariante não atraente com uma órbita extremamente caótica densa (PÉNTEK et al., 1995).

Os resultados mostrados na fig. 4 podem ser explicados pela estrutura de órbita periódica próxima às órbitas caóticas dos sistemas hamiltonianos. Considere uma órbita periódica instável imersa na região caótica de qualquer um dos retratos de fase representados na fig. 4. A variedade estável (instável) neste ponto é o conjunto de pontos que assíntota para a órbita periódica sob as iterações para a frente (para trás) do mapa (3.1) - (3.2) à medida que o  $n$  vai para o infinito. Os conjuntos são invariáveis para as iterações do mapa de pontos pertencentes a essas variedades e permanecem lá por todas as iterações. Uma sela caótica é um conjunto invariante caótico não atraente formado pela intersecção das variedades estáveis e instáveis de

FIGURA 4 – ESPAÇOS DE FASE - MAPA DIVERTOR



Fonte: O autor (2021).

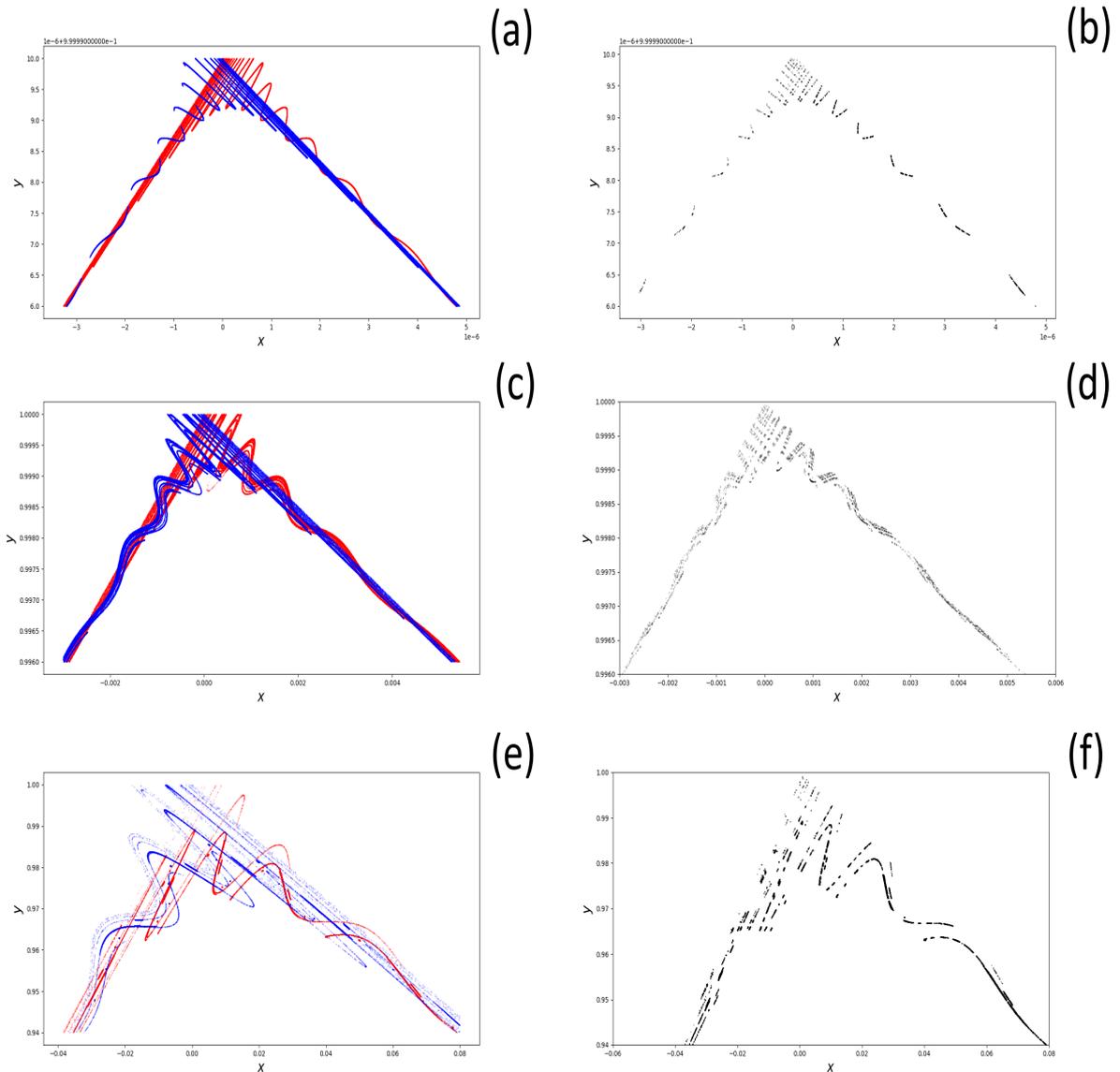
Legenda: Espaço de fase do mapa de divertor simples para (a)  $k = 0.4$ , (c)  $k = 0.6$  e (e)  $k = 0.8$ . Visão ampliada da região caótica perto do ponto  $X$  para (b)  $k = 0.4$ , (d)  $k = 0.6$  e (f)  $k = 0.8$ . Pequenas perturbações levam à formação de uma fina camada caótica na região separatriz, cujas órbitas caóticas acabam atingindo as placas, que são definidas nas simulações numéricas em  $y_{plate} = 1, 0$ . Comprimento de conexão é o número de voltas toroidais (iterações) realizadas por uma linha de campo até atingir a placa.

pontos de sela instáveis, e também contém uma órbita densa (PÉNTEK et al., 1995).

Para encontrarmos as aproximações dessas variedades, utilizamos uma técnica conhecida como "gota"(PÉNTEK et al., 1995), que consiste em iterarmos para frente um círculo de condições iniciais com raio  $\varepsilon$  próximos ao ponto hiperbólico, resultando em condições que tendem a deixar o círculo de condições iniciais e seguir a variedade instável, e iterarmos para trás para obtermos a variedade estável. Esse método não é exato, mas fornece uma aproximação do conjunto invariante. A fig. 5 mostra as

aproximações numéricas das variedade estáveis em (a), as variedades instáveis em (b) e as selas caóticas em (c) para  $k = 0,6$ . Podemos ver que os ramos das variedades atuam como canais de escape, através dos quais as linhas do campo magnético são direcionadas para a placa do divertor em  $y = 1,0$ .

FIGURA 5 – SELAS - MAPA DIVERTOR



Fonte: O autor (2021).

Legenda: Variedades estáveis (vermelho) e instáveis (azul) para (a)  $k = 0,4$ , (c)  $k = 0,6$  e (e)  $k = 0,8$ . Sela caótica para órbita caótica do mapa divertor para (b)  $k = 0,4$ , (d)  $k = 0,6$  e (f)  $k = 0,8$ .

### 3.2 PEGADAS MAGNÉTICAS

Pegadas magnéticas é o nome dado aos pontos de colisão das linhas de campo magnético nas placas do divertor, as quais desejamos analisar. Para plotar a interseção das trajetórias com as placas do divertor, exigimos a localização das trajetórias em localizações toroidais arbitrárias, e não apenas nos planos principais do mapa discreto.

Isso pode ser feito construindo o análogo contínuo do mapa simples (PUNJABI et al., 1996). As pegadas magnéticas são dadas por:

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= x_n - k\varphi y_n(1 - y_n), \\y(\varphi) &= y_n + k\varphi x(\varphi),\end{aligned}\tag{3.3}$$

em que  $\varphi \equiv N_{map}\phi/2\pi$  que atua como peso linear do parâmetro  $k$ , assim  $(x(0), y(0)) = (x_n, y_n)$  e  $(x(1), y(1)) = (x_{n+1}, y_{n+1})$ .

A colisão com a placa do divertor geralmente ocorre entre duas iterações sucessivas do mapa, apenas se  $y_n \leq 1 \leq y_{n+1}$ . A coordenada toroidal do ponto de colisão  $\varphi$  é determinada usando a seguinte equação:

$$y_{placa} = y_n + k\varphi\{x_n - k\varphi(1 - y_n)\},$$

e a coordenada  $x$  no ponto de colisão, denominada  $x_p$  é:

$$x_p = x(\varphi) = x_n - ky_n(1 - y_n)\varphi.$$

É necessário supor que as partículas seguem quase fielmente as linhas de campo como guias, assim, é intuitivo assumir que o padrão de deposição de partículas na placa do divertor se mostra na forma do padrão de escape das linhas do campo magnético, fig. 6. Para avaliar o escape da linha do campo magnético, calculamos o comprimento da conexão, que é o número de voltas toroidais realizadas por uma linha de campo até atingir a placa. Assim, iteramos a linha de campo para um conjunto de condições iniciais na região da separatriz até atingir a placa localizada em  $y_{placa} = 1, 0$ . Associamos uma cor a cada valor de comprimento de conexão.

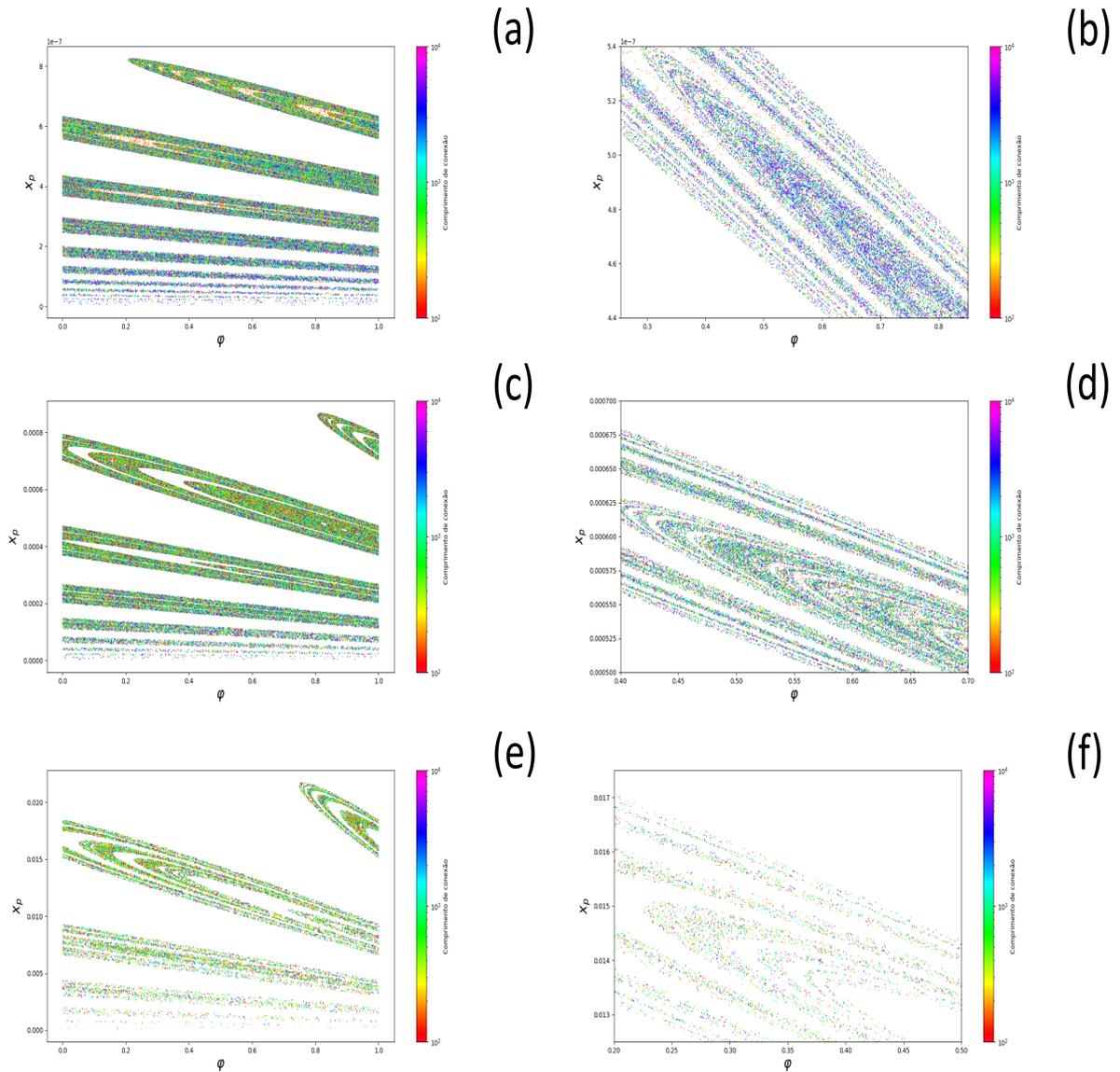
A fig. 6 (a), (c) e (e) mostram as pegadas magnéticas na placa do divertor e o comprimento da conexão de cada linha de campo para  $k = 0,4$ ,  $k = 0,6$  e  $k = 0,8$ , respectivamente. As pegadas na figura consistem em listras/tiras helicoidais que vão longitudinalmente ao redor da placa. À medida que o parâmetro de perturbação aumenta, a largura da pegada também aumenta, mas a estrutura e a forma da pegada permanecem inalteradas conforme  $k$  muda. As fig. 6 (b), (d) e (f) são ampliações da caixa em (a), (c) e (e), respectivamente.

### 3.3 DIMENSÃO FRACTAL - EM ANDAMENTO

Esta capítulo está em andamento sendo destinado aos trabalhos futuros.

A bacia de escape é formada por uma região do espaço de fase definida pelo conjunto de condições iniciais que escapam, ou deixam, determinada região do espaço de fase. Em modelos para tokamaks, a parede da câmara de confinamento é uma saída do espaço de fase para órbitas da borda do plasma (SIEMENTKOWSKI, 2017).

FIGURA 6 – PEGADAS MAGNÉTICAS



Fonte: O autor (2021).

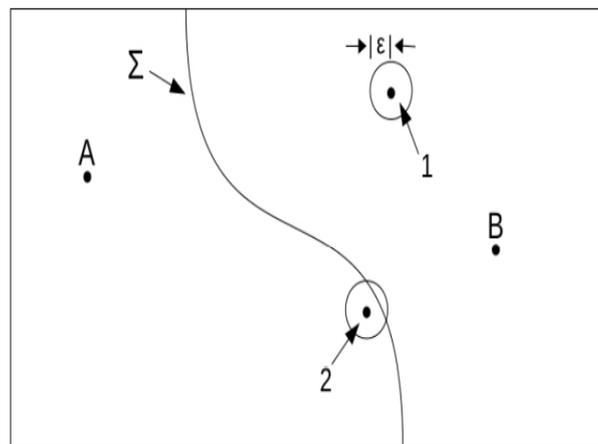
Legenda: Pegadas magnéticas de linhas de campo na placa do divertor ( $y_{placa} = 1$ ) para (a)  $k = 0.4$ , (c)  $k = 0.6$  e (e)  $k = 0.8$ . (b), (d) e (f) representam ampliação de (a), (c) e (e). Regiões deixadas em branco são equivalente a comprimentos de conexão menores que 100, pontos coloridos representam comprimentos de conexão entre 100 e 10000.

Neste caso estamos interessados nas condições iniciais que escapam pelo divertor. Uma forma de quantificarmos a complexidade das fronteiras é realizando a medida da dimensão fractal da fronteira entre as duas bacias de escape, para isso utilizamos o método da incerteza (MCDONALD et al., 1985).

Consideramos uma região do espaço de fase, tal que, existam duas bacias de escape próximas ao ponto  $X = (0, 1)$ , que denotaremos por bacia A (escapa em  $y_{placa} = 1$ ) e bacia B (não escapa em  $y_{placa} = 1$ ). A fronteira entre as bacias é representada por  $\Sigma$ . Tomemos duas condições iniciais aleatórias nesta região, 1 e 2, que serão utilizadas nas equações 3.1 por um tempo longo ( $n = 10^6$ ) ambas com uma

incerteza denotada por  $\varepsilon$ , mostrado na figura 7. A condição 1 irá escapar por B e a condição 2 poderá escapar pelas duas bacias, devido à incerteza. Para cada uma das condições iniciais, consideramos outras duas condições aleatórias, separadas por um raio fixo  $\varepsilon$  da condição inicial. Essas três trajetórias são calculadas e verificamos, ao final, qual é a saída de cada uma delas. Se uma das duas órbitas (escolhidas no raio  $\varepsilon$ ) tiver estado final diferente da condição inicial, a condição inicial é considerada incerta para a incerteza  $\varepsilon$ . A partir disso, contamos, entre  $10^5$  condições iniciais, o número de incertas, de onde é obtido  $f(\varepsilon)$ , a fração de condições incertas para o raio de incerteza  $\varepsilon$ . Este procedimento é, então, repetido para diferentes valores de  $\varepsilon$  de  $10^{-1}$  até  $10^{-10}$ , e para calcularmos o erro de  $f(\varepsilon)$  repetimos o procedimento 10 vezes.

FIGURA 7 – MÉTODO DA INCERTEZA



Fonte: A. C. M. Siementkowski, 2017.

Legenda: Região do espaço de fase limitado pela fronteira de bacia  $\Sigma$  que divide as bacias de escape A (condições que escapam para  $y_{placa} = 1$ ) e B (qualquer outro lugar). Os pontos 1 e 2 representam condições iniciais com uma incerteza  $\varepsilon$ .

Para fronteiras fractais da bacia de escape, a fração de condições iniciais incertas escala com:

$$f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha, \quad (3.4)$$

onde  $\varepsilon$  é a incerteza e  $\alpha$  é o expoente de incerteza, que se relaciona com a dimensão fractal da fronteira entre duas bacias  $d$ , por (MCDONALD et al., 1985):

$$\alpha = D - d, \quad (3.5)$$

onde  $D$  é a dimensão do espaço de fase.

Para encontrar o valor de  $d$  utilizamos a técnica de dimensão de contagem de caixa (STROGATZ, 2000). Seja  $N(\delta)$  o número mínimo de quadrados de comprimento  $\delta$  necessárias para cobrir a fronteira ( $\Sigma$ ) das pegadas magnéticas. A dimensão da contagem de caixas  $d$  pode ser dada por:

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)}. \quad (3.6)$$

A equação 3.6, mostra a escala de  $N(\delta)$  com o tamanho da caixa quando  $\delta$  decresce, assim, é possível escrever uma lei de potência que satisfaça a equação 3.6 é dada por:

$$N(\delta) \sim \delta^{-d}. \quad (3.7)$$

Se considerarmos o tamanho da caixa  $\delta$  igual ao raio de incerteza  $\varepsilon$ , o volume da região incerta do espaço de fase é da ordem do volume total  $N(\varepsilon)$  de todas as caixas de tamanho  $\varepsilon$  que cobrem a fronteira. O volume de apenas uma caixa que cobre a fronteira é  $\varepsilon^D$ , então o volume da incerteza será  $\varepsilon^D N(\varepsilon)$ . Pela equação 3.7, pode-se estimar que o volume do espaço de fase incerto é algo na forma de:

$$\varepsilon^D N(\delta) \sim \varepsilon^{D-d}. \quad (3.8)$$

Assim, a fração de condições iniciais incertas de uma região do espaço de fase de dimensão  $D$  associada com o raio de incerteza  $\varepsilon$  é (SIEMENTKOWSKI, 2017):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow zero} \frac{\ln f(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \alpha, \quad (3.9)$$

apenas se a fronteira da bacia tem dimensão de capacidade  $d = D - \alpha$ . Para o nosso caso temos  $D = 2$ , então  $\alpha = 2 - d$ .

Para bacias com fronteiras suaves o expoente de incerteza é  $\alpha = 1$ . Fronteiras de bacias fractais são caracterizadas por  $\alpha < 1$  (MCDONALD et al., 1985). Assim, a incerteza da dimensão  $d$  magnifica a incerteza do estado final dos pontos ao longo da fronteira da bacia das pegadas magnéticas.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo sobre os padrões de deposição das linhas de campo magnético em um tokamak com divertor. Estes divertores criam canais de escape para as partículas em confinamento, que causam os padrões de deposição das partículas que escapam na placa do divertor, chamados de pegadas magnéticas. Por conta das linhas de campo magnético caóticas, as pegadas magnéticas geralmente exibem uma estrutura fractal, que tem um padrão de distribuição não uniforme.

A base utilizada no estudo foi o modelo proposto por (PUNJABI et al., 1996). O modelo consiste em um espaço de fase do mapa simples é caracterizado pela existência de dois pontos fixos, um estável e outro instável. A combinação de ambos cria uma separatriz que divide as linhas de campo de escape das confinadas.

Para os parâmetros escolhidos, mostramos uma camada caótica e ilhas magnéticas que surgem próximas a separatriz. Calculamos numericamente através do método da gota as variedades estáveis e instáveis da sela caótica para este cenário e mostramos como elas esboçam os canais de escape para a placa dos divertores.

Neste trabalho, mostramos o padrão de deposição das linhas do campo magnético na placa do divertor é causado por perturbações magnéticas. Porém, tal distribuição das linhas de campo resultou em algumas regiões concentrações de linhas de campo com número de iteração alto, que fisicamente denota alta densidade do fluxo de calor em uma área pequena. Seria de interesse que estas áreas fossem maiores e que estes padrões fossem distribuídos de forma mais uniforme.

Por fim, posteriormente gostaríamos de caracterizar quantitativamente a estrutura fractal através do método da incerteza, afim de encontrar os valores da dimensão fractal para todos os valores do parâmetro de perturbação testados. Tal dimensão fractal indicaria que as pegadas magnéticas estão altamente entrelaçadas, associadas a um elevado grau de incerteza.

## REFERÊNCIAS

- FONSECA, J. C. D. da. **Barreiras de transporte em plasmas e mapas simpléticos não-twist**. 2011. Diss. (Mestrado) – Instituto de Física e Universidade de São Paulo. DOI: [10.11606/D.43.2011.tde-11052012-184108](https://doi.org/10.11606/D.43.2011.tde-11052012-184108). Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-11052012-184108/en.php>. Citado 1 vez na página 13.
- FUSION, N. **Iter physics basis**. v. 12. [S.l.: s.n.], 1999. Citado 1 vez na página 9.
- HORTON, W. **Turbulent transport in magnetized plasmas**. First. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, out. 2012. ISBN 978-981-4383-53-0. Citado 1 vez na página 8.
- MCDONALD, S. W.; GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Fractal basin boundaries. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 17, n. 2, p. 125–153, 1985. ISSN 0167-2789. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90001-6](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90001-6). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278985900016>. Citado 3 vezes nas páginas 19–21.
- PÉNTEK, Á.; TOROCZKAI, Z.; TÉL, T.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: Signatures of chaotic saddles. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 51, p. 4076–4088, 5 mai. 1995. DOI: [10.1103/PhysRevE.51.4076](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.4076). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.51.4076>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16.
- PITTS, R. A.; KUKUSHKIN, A.; LOARTE, A.; MARTIN, A.; MEROLA, M.; KESSEL, C. E.; KOMAROV, V.; SHIMADA, M. Status and physics basis of the ITER divertor. **Physica Scripta**, IOP Publishing, T138, p. 014001, dez. 2009. DOI: [10.1088/0031-8949/2009/t138/014001](https://doi.org/10.1088/0031-8949/2009/t138/014001). Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2009/t138/014001>. Citado 1 vez na página 9.
- PORTELA, J. S. E. **Descrição dos campos magnéticos em tokamaks por mapas hamiltonianos**. 2008. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. DOI: [10.11606/T.43.2008.tde-19052008-124857](https://doi.org/10.11606/T.43.2008.tde-19052008-124857). Disponível em: [https://teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-19052008-124857/publico/teseJSEP\\_Final.pdf](https://teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-19052008-124857/publico/teseJSEP_Final.pdf). Citado 0 vez na página 15.
- POST, D. E.; BEHRISCH, R. **Physics of plasma-wall interactions in controlled fusion**. [S.l.]: Springer, mar. 1986. ISBN 978-0-306-42097-9. Citado 1 vez na página 9.

PUNJABI, A.; VERMA, A.; BOOZER, A. Stochastic broadening of the separatrix of a tokamak divertor. **PHYSICAL REVIEW LETTERS**, 1992. DOI:

[10.1103/PhysRevLett.69.3322](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.3322). Citado 1 vez na página 14.

PUNJABI, A.; VERMA, A.; BOOZER, A. Tokamak divertor maps. **Journal of Plasma Physics**, 1992. DOI: [10.1017/S0022377800017797](https://doi.org/10.1017/S0022377800017797). Citado 1 vez na página 14.

PUNJABI, A.; VERMA, A.; BOOZER, A. The simple map for a single-null divertor tokamak. **Journal of Plasma Physics**, v. 56, p. 569–603, dez. 1996. DOI:

[10.1017/S0022377800019474](https://doi.org/10.1017/S0022377800019474). Citado 3 vezes nas páginas 11, 18, 22.

SIEMENTKOWSKI, A. C. M. **ESTRUTURAS FRACTAIS EM SISTEMAS HAMILTONIANOS CAÓTICOS COMAPLICAÇÕES EM FÍSICA DE PLASMAS**.

[S.l.: s.n.], 2017. UFPR. Disponível em: <https://hdl.handle.net/1884/49455>. Citado 4 vezes nas páginas 8, 11, 15, 18, 21.

SILVA, E. C. da; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; SANJUAN, M. A. F. Escape patterns, magnetic footprints, and homoclinic tangles due to ergodic magnetic limiters. **Physics of Plasmas**, v. 9, n. 12, p. 4917–4928, dez. 2002. DOI: [10.1063/1.1518681](https://doi.org/10.1063/1.1518681). Citado 1 vez na página 15.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering**. [S.l.]: Westview Press, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 12, 20.

WESSON, J. **Tokamaks**. Third. [S.l.]: Oxford University Press, dez. 2004. ISBN 0198509227. Citado 1 vez na página 8.