

Trabajo Fin de Máster
Ingeniería Aeronáutica

ANÁLISIS COMPARATIVO DE TEORÍAS PARA ROTORES EN VUELO AXIAL ASCENDENTE

Autor: José Francisco Torres Capel

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

**Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de
Fluidos**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2023



Proyecto Fin de Máster
Ingeniería Aeronáutica

ANÁLISIS COMPARATIVO DE TEORÍAS PARA ROTORES EN VUELO AXIAL ASCENDENTE

Autor:

José Francisco Torres Capel

Tutor:

Alfonso Valenzuela Romero
Profesor Titular de Universidad

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2023

Proyecto Fin de Carrera: ANÁLISIS COMPARATIVO DE TEORÍAS PARA ROTORES EN VUELO
AXIAL ASCENDENTE

Autor: José Francisco Torres Capel

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2023

El Secretario del Tribunal

A mi familia y amigos

A mis profesores

Agradecimientos

Todavía me recuerdo cursando la asignatura de helicópteros durante el segundo cuatrimestre del primer curso del máster. En aquel entonces, descubrí cómo me apasionaba ese mundo desconocido de las aeronaves de ala giratoria, y deseaba aprender más sobre él con cada lección que completábamos. Este fue el punto de partida de lo que hoy día es mi trabajo fin de máster, un análisis comparativo de teorías para el análisis de rotores en vuelo axial ascendente.

Son muchas las personas que han contribuido directa e indirectamente en este camino, tanto en el ámbito educativo como en el personal, y es por ello por lo que merecen ser nombradas y agradecidas en la presente sección.

Gracias a Alfonso y Antonio por tanto carisma e ilusión regalado durante las clases del máster, los cuales fueron de gran ayuda para poder seguir la asignatura con facilidad y despertar el interés que a día de hoy tengo en este campo de la ingeniería aeroespacial. Además, he de agradecer a mi tutor, Alfonso, por los consejos y pautas realizadas durante todo el desarrollo del trabajo y por todo el tiempo dedicado.

Gracias a mis padres. Vuestra dedicación y ejemplo han sido una inspiración constante en mi vida. A través de vuestro esfuerzo y perseverancia, me habéis enseñado que la clave para alcanzar mis sueños es nunca rendirse, sino luchar por lo que deseo. Cada día, valoro enormemente el amor y el apoyo incondicional que me brindáis. Gracias por proporcionarme todas las facilidades y oportunidades para que mis objetivos siempre sean una prioridad en mi camino. Vuestra presencia y guía son un regalo inestimable que atesoro profundamente. ¡Os quiero muchísimo!

Querida hermana, muchas gracias por todo. Tu cariño sincero y desinteresado ha llenado mi vida y mi camino de momentos inolvidables. No encuentro las palabras adecuadas para agradecerte esos viajes espontáneos a Sevilla y todos esos ratitos al otro lado del teléfono que tanto reconfortan. Cada gesto de amor y mimo que me has brindado ha sido un regalo precioso en mi vida. Tu presencia ha sido una fuente constante de apoyo y felicidad, y valoro enormemente tener a una hermana como tú a mi lado. ¡Te quiero muchísimo!

Amigos, muchas gracias. Con muchos de vosotros he compartido la infancia y otros habéis llegado con mi formación universitaria. A todos os he de agradecer todos esos recuerdos que hemos creado juntos y tantos momentos graciosos que llenan a uno de vida.

Ale, muchas gracias. Tu paciencia y ánimo durante todo el desarrollo del TFM han sido una pieza clave para mí. Agradezco tu apoyo constante y comprensión en cada momento. Juntos hemos logrado superar desafíos. Tu apoyo incondicional es invaluable. ¡Mil gracias, te adoro!

Mi más sincero agradecimiento al personal docente que me ha acompañado a lo largo de toda mi etapa educativa. Profesionales como vosotros son los que hacen brillar a numerosos alumnos y enriquecen nuestro sistema educativo. Vuestra dedicación y pasión por enseñar han dejado una huella imborrable en mi vida y en la de muchos otros. Gracias por inspirarnos, por transmitir conocimientos y valores, y por apoyarnos en nuestro crecimiento académico y personal. Vuestra labor es inestimable, y estoy profundamente agradecido por todo lo que habéis hecho por mí y por tantos estudiantes.

Finalmente, agradecer también a todos aquellos, que no menciono, pero de una forma u otra pero que habéis

estado ahí durante mi vida, contribuyendo no solo a mi formación educativa, sino también a mi formación personal. ¡Muchísimas gracias!

Y es que como ya decía un sabio:

“El agradecimiento es la memoria del corazón”

José Francisco Torres Capel

Sevilla, 2023

Resumen

En el estudio de las actuaciones de rotores en vuelo axial son muchas las teorías utilizadas para modelar el comportamiento de estos. Así, el presente trabajo se enfoca en el estudio del vuelo axial ascensional de un rotor de helicóptero, considerando diversas teorías que van desde las más sencillas a las más complejas.

El desarrollo de las teorías se realizará de forma incremental en complejidad, comenzando con teorías muy básicas las cuales permiten comprender ideas generales del comportamiento del rotor. Estas teorías serán cruciales para etapas iniciales del desarrollo de un proyecto de diseño, donde únicamente valores rápidos y estimados son requeridos.

A medida que se avanza en el desarrollo, se introducirán teorías más complejas, las cuales permiten un modelado local del problema, modelando fenomenología compleja y permitiendo valores de las variables de interés mucho más cercanos a los esperados en la realidad. Estos valores son necesarios cuando la precisión toma mayor importancia, especialmente en etapas más avanzadas del proceso de diseño.

El aspecto clave de todo este desarrollo reside en la comparativa de las diferentes teorías a estudiar, identificando puntos fuertes y débiles de cada una de ellas, regímenes de aplicación, etc. De esta forma, dada la necesidad de realizar un dimensionado de un rotor en una situación particular, se tengan las herramientas necesarias para poder saber qué metodología ofrece mejores resultados, en precisión y tiempo de cálculo.

Finalmente, se pretende realizar un estudio de detalle de la distribución de fuerzas generadas en las palas del rotor con la teoría más avanzada a modelar, donde podrán identificarse las zonas de mayor carga aerodinámica, así como la distribución de velocidades en el rotor de forma local.

Abstract

In the study of rotor performances in axial flight, there are many theories used to model their behavior. Thus, this work focuses on the study of the ascending axial flight of a helicopter rotor, considering various theories ranging from the simplest to the most complex.

The development of these theories will be carried out incrementally in complexity, starting with very basic theories that allow for a general understanding of rotor behavior. These theories will be crucial for the initial stages of design projects, where only quick and estimated values are required.

As the development progresses, more complex theories will be introduced, allowing for local modeling of the problem, and capturing intricate phenomena, thereby providing values of variables of interest much closer to real-world expectations. These values are necessary when precision becomes more critical, especially in later stages of the design process.

The key aspect of this entire development lies in the comparison of the different theories under study, identifying their strengths, weaknesses, applicable regimes, etc. Thus, when sizing a rotor for a specific situation, one will have the necessary tools to determine which methodology offers better results in terms of accuracy and calculation time.

Eventually, a detailed study of the distribution of forces generated on the rotor blades will be conducted using the most advanced theory to be modeled. This study will help identify areas of higher aerodynamic load and the local distribution of velocities in the rotor.

Índice

Agradecimientos	9
Resumen	12
Abstract	14
Índice	16
Índice de Tablas	18
Índice de Ilustraciones	20
1 Introducción	25
1.1. <i>Objetivos y Motivación. Alcance del Trabajo</i>	25
1.2. <i>Metodología</i>	26
1.3. <i>Estructura del documento</i>	27
2 Descripción de las Teorías de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala	30
2.1. <i>Teoría de Cantidad de Movimiento</i>	30
2.2. <i>Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida</i>	36
2.3. <i>Teoría de Elemento de Pala</i>	41
2.4. <i>Teoría de Elemento de Pala y Cantidad de Movimiento Combinadas</i>	47
2.5. <i>Solución de Prandtl para las Pérdidas de Punta de Pala. Teoría de Cantidad de Cantidad de Movimiento Combinada</i>	48
3 Descripción de las Teorías de Vórtices. Modelos basados en la Ley de Biot-Savart	52
3.1. <i>Introducción Teórica</i>	52
3.2. <i>Método de la Línea Sustentadora Asumiendo Estela Rígida Helicoidal</i>	67
3.3. <i>Método de la Superficie Sustentadora Asumiendo Estela Rígida Helicoidal</i>	79
4 Caracterización del rotor	88
4.1. <i>Caracterización del Rotor</i>	88
5 Resultados	93
5.1. <i>Variables de Interés. Aplicabilidad</i>	94
5.2. <i>Estudio de Sensibilidad</i>	95
5.3. <i>Análisis Comparativo</i>	101
6 Conclusiones y Trabajos Futuros	131
Anexo I: Interfaz de Usuario	134
Referencias	11

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Especificaciones del rotor principal de helicóptero MMB Bo 105 [10]	89
Tabla 2. Valores de los coeficientes de resistencia y sustentación para el perfil NACA 0012 [11]	90
Tabla 3. Valores de los coeficientes de resistencia y sustentación para el perfil VR-12 [11]	90
Tabla 4. Aplicabilidad de las variables a representar en las teorías bajo estudio	94
Tabla 5. Estudio de sensibilidad para θ_0 considerando las Teorías basadas en el Elemento de Pala	95
Tabla 6. Estudio de sensibilidad para $CPic$ considerando las Teorías basadas en el Elemento de Pala	95
Tabla 7. Estudio de sensibilidad para $CP0$ considerando las Teorías basadas en el Elemento de Pala	96
Tabla 8. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora considerando $L = 2D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$	96
Tabla 9. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora considerando $L = 4D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$	97
Tabla 10. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora considerando $L = 6D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$	97
Tabla 11. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora considerando $L = 10D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$	97
Tabla 12. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora con mallado no uniforme considerando $L = 4D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$	98
Tabla 13. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora con mallado no uniforme y $L = 4D$ y $N1 = 15$ & $N2 = 25$	99
Tabla 14. Valores de los parámetros considerados para el análisis comparativo de la Teoría de la Línea Sustentadora	100
Tabla 15. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Superficie Sustentadora considerando $L = 4D$, $\Phi_{step} = 30^\circ$ y $Nr1 = 15$ & $Nr2 = 25$	100
Tabla 16. Valores de los parámetros considerados para el análisis comparativo de la Teoría de la Superficie Sustentadora	101
Tabla 17. Valores de los ángulos de paso colectivo y potencias para perfil NACA 0012 y $Vc = 10ms$	113
Tabla 18. Valores de los ángulos de paso colectivo y potencias para perfil NACA 0012 y $Vc = 0ms$	121
Tabla 19. Valores de los ángulos de paso colectivo y potencias para perfil VR-12 y $Vc = 10ms$	129

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Volumen de control para la Teoría de Cantidad de Movimiento [2]	31
Ilustración 2. Buje de un rotor de helicóptero [16]	33
Ilustración 3. Coeficiente de potencia frente al coeficiente de tracción para vuelo axial [2]	35
Ilustración 4. Potencia y velocidad inducida con la velocidad de ascenso [6]	36
Ilustración 5. Rotación de la estela en el volumen de control en TCME [1]	37
Ilustración 6. Velocidades inducidas según TCME [1]	40
Ilustración 7. Modelado de la geometría y movimiento del rotor [2]	43
Ilustración 8. Coeficientes de potencia y tracción predichos por la TEP vs experimentos reales para varios valores de la solidez [2]	46
Ilustración 9. Teoría de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala Combinadas [2]	47
Ilustración 10. Velocidad Inducida resultado de la TCMEP [1]	48
Ilustración 11. Modelo de estela de Prandtl [1]	49
Ilustración 12. Modelo de velocidad inducida de la Teoría de Cantidad de Movimiento con Pérdidas de Punta de Pala [6]	50
Ilustración 13. Región de capa límite y exterior [7]	53
Ilustración 14. Relación entre integral de línea y superficie [7]	54
Ilustración 15. Movimiento rotacional e irrotacional del fluido [7]	54
Ilustración 16. Velocidad en un punto P inducida por un segmento de vórticidad [7]	57
Ilustración 17. Velocidad inducida por segmento de torbellino recto [7]	57
Ilustración 18. Ley de Biot-Savart. Desingularizaciones a través de modelos de viscosidad [4]	59
Ilustración 19. Nomenclatura del problema de las pequeñas perturbaciones [7]	59
Ilustración 20. Geometría de una sección de superficie sustentadora [7]	60
Ilustración 21. Descomposición del problema en sustentador y simétrico [7]	62
Ilustración 22. Representación angular de la condición de impenetrabilidad [5]	64
Ilustración 23. Posibles soluciones para el flujo alrededor de un perfil [3]	65
Ilustración 24. Estela bajo el rotor [5]	67
Ilustración 25. Superficie sustentadora y estela para el caso de ala recta [17]	67
Ilustración 26. Geometría de las líneas de vórtices [7]	68
Ilustración 27. Pala y estela para la Teoría de la Línea Sustentadora	69
Ilustración 28. Campo de velocidades no perturbado para un punto sobre la pala	70
Ilustración 29. Cuatro divisiones de la pala en la Teoría de la Línea Sustentadora [13]	70
Ilustración 30. Discretización de pala y estela para la metodología de la Línea Sustentadora [5]	71
Ilustración 31. Sistema de referencia, ángulos, velocidad y vector normal sobre el perfil aerodinámico [6]	73

Ilustración 32. Fuerzas de arrastre y batimiento para una sección de la pala	75
Ilustración 33. Diagrama de flujo para la Teoría de la Línea Sustentadora	78
Ilustración 34. Geometría de la superficie para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]	79
Ilustración 35. Anillos de vórtices sobre la pala para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]	79
Ilustración 36. Geometría de la superficie sustentadora y estela para la Teoría de la Superficie Superficie Sustentadora [4]	80
Ilustración 37. Discretización de pala y estela para la metodología de la Superficie Sustentadora [7]	80
Ilustración 38. Detalle discretización de la superficie de la pala para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]	81
Ilustración 39. Detalle discretización red de vórtices para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]	82
Ilustración 40. Esquemmatización de sistema de referencia, ángulos, velocidad y vector normal sobre el perfil aerodinámico [6]	83
Ilustración 41. Concurrencia de anillos de vórtices en paneles para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]	85
Ilustración 42. Helicóptero MMB Bo 105. Helicóptero de la Guardia Civil Española hasta el año 2001 [9].	88
Ilustración 43. Regresiones lineales y cuadrática para los coeficientes de sustentación y resistencia aerodinámicos (NACA 0012) [11]	90
Ilustración 44. Regresiones lineales y cuadrática para los coeficientes de sustentación y resistencia aerodinámicos (VR-12) [11]	91
Ilustración 45. Geometría de los perfiles a utilizar. VR-12 y NACA 0012 respectivamente [11]	91
Ilustración 46. Estructura del algoritmo de resolución	93
Ilustración 47. Mallado no uniforme en la punta de la pala para la Teoría de la Línea Sustentadora	98
Ilustración 48. Geometría de la Metodología de la Línea Sustentadora	100
Ilustración 49. Geometría de la Metodología de la Superficie Sustentadora	101
Ilustración 50. Relación de entrada de corriente inducida axial y radial para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$	102
Ilustración 51. Ángulo de entrada de corriente para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$	102
Ilustración 52. Ángulo de ataque para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$	103
Ilustración 53. Ejemplificación del rango de validez para aerodinámica lineal con NACA 0012	104
Ilustración 54. Explicación aerodinámica zona de la raíz para Teoría de la Superficie Sustentadora a $V_c = 10 \text{ m/s}$	105
Ilustración 55. Justificación gráfica del signo de velocidad inducida axial en la raíz	105
Ilustración 56. Fuerzas de batimiento y arrastre para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$	106
Ilustración 57. Circulación adimensional para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$	106
Ilustración 58. Circulación adimensional para ala fija considerando $\alpha_{trim} = 2^\circ$, $U_\infty = 100 \text{ m/s}$ & $i = 4^\circ$	107
Ilustración 59. Enrollamiento de la estela en los extremos [18]	107
Ilustración 60. Geometría de la pala y estela para perfil NACA 0012	108
Ilustración 61. Distribución local de circulación para NACA 0012 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K\Gamma = 0.004$	109
Ilustración 62. Distribución local de velocidad inducida para NACA 0012 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado	

$K\lambda = 0.07$	109
Ilustración 63. Distribución local de fuerza de batimiento para NACA 0012 y $Vc = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $KFb = 0.03$	110
Ilustración 64. Distribución local de fuerza de arrastre para NACA 0012 y $Vc = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $KFa = 0.7$	111
Ilustración 65. Cálculo de la distribución de presión a través de la cuerda para perfil NACA 0009. A la izquierda metodología de la superficie sustentadora y a la derecha método de los paneles [3]	111
Ilustración 66. Representación de los coeficientes de presiones para los perfiles simétricos NACA 0006, NACA 0012 y NACA 0024, considerando régimen subsónico a $M = 0.3$ y $Re = 106$ [15]	112
Ilustración 67. Velocidades inducidas axial y radial para NACA 0012 & $Vc = 0 \text{ m/s}$	114
Ilustración 68. Ángulo de entrada de corriente para NACA 0012 & $Vc = 0 \text{ m/s}$	114
Ilustración 69. Ángulo de ataque para NACA 0012 & $Vc = 0 \text{ m/s}$	115
Ilustración 70. Tendencia de la velocidad inducida de la TCM frente a la velocidad ascensional [6]	115
Ilustración 71. Fuerzas de batimiento y arrastre para NACA 0012 & $Vc = 0 \text{ m/s}$	116
Ilustración 72. Circulación adimensional para NACA 0012 & $Vc = 0 \text{ m/s}$	117
Ilustración 73. Distribución de circulación para rotor en <i>hover</i> [1]	118
Ilustración 74. Distribución local de circulación para NACA 0012 y $Vc = 0 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K\Gamma = 0.004$	118
Ilustración 75. Distribución local de velocidad inducida para NACA 0012 y $Vc = 0 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K\lambda_i = 0.07$	119
Ilustración 76. Distribución local de fuerza de batimiento para NACA 0012 y $Vc = 0 \text{ m/s}$. Factor de escalado $KFb = 0.03$	120
Ilustración 77. Distribución local de fuerza de arrastre para NACA 0012 y $Vc = 0 \text{ m/s}$. Factor de escalado $KFa = 0.7$	120
Ilustración 78. Velocidad inducida axial y radial para VR-12 y $Vc = 10 \text{ m/s}$	122
Ilustración 79. Ángulo de entrada de corriente para VR-12 y $Vc = 10 \text{ m/s}$	122
Ilustración 80. Ángulo de ataque para VR-12 y $Vc = 10 \text{ m/s}$	123
Ilustración 81. Discretización de la geometría según la Teoría de la Línea Sustentadora	123
Ilustración 82. Fuerzas de batimiento y arrastre para VR-12 & $Vc = 10 \text{ m/s}$	124
Ilustración 83. Circulación adimensional para VR-12 & $Vc = 10 \text{ m/s}$	124
Ilustración 84. Geometría de la pala y estela para perfil VR-12	125
Ilustración 85. Distribución local de circulación para VR-12 y $Vc = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K\Gamma = 0.004$	125
Ilustración 86. Distribución local de velocidad inducida para VR-12 y $Vc = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K\lambda = 0.007$	126
Ilustración 87. Distribución local de fuerza de batimiento para VR-12 y $Vc = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $KFb = 0.03$	127
Ilustración 88. Distribución local de fuerza de arrastre para VR-12 y $Vc = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $KFa = 0.7$	128
Ilustración 89. Posibles errores en el campo Velocidad ascensional	134
Ilustración 90. Descripción de la interfaz de usuario	135
Ilustración 91. Parámetros personalizados del rotor	136

Ilustración 92. Error mostrado para Radio inicial mayor que Radio final	137
Ilustración 93. Módulo Parámetros de Discretización condicionado a LS y SS	138
Ilustración 94. Errores para número de divisiones longitudinales y según cuerda	139
Ilustración 95. Resultados para ángulo de paso y coeficientes de potencia para las teorías seleccionadas	140
Ilustración 96. Ejemplo de resultado gráfico generado	140

1 INTRODUCCIÓN

Si el principio es difícil es porque vas por el buen camino

- Anónimo -

En el análisis de rotores en vuelo axial surgen infinidad de teorías aplicables para el cálculo de las variables de interés que definen la actuación de estos. Cada una de estas teorías se distingue por sus hipótesis particulares, lo que las hace más adecuadas para abordar ciertas condiciones de funcionamiento del rotor o satisfacer requisitos específicos, como la precisión en los resultados o la eficiencia en los tiempos de cálculo. Como ejemplo, considérese las primeras fases de diseño de una aeronave de alas rotatorias, en las que meramente se necesitarán valores estimatorios de la potencia a consumir y la tracción a proporcionar, por lo que cálculos sencillos pueden ser de gran valor. Sin embargo, para fases más maduras del proceso de diseño, modelos más complejos son contemplados, ya que el diseño se hace más inflexible y la necesidad de precisión en los cálculos es crucial.

En el presente trabajo fin de máster, se presenta el análisis de la actuación de vuelo axial ascendente para un rotor dado, entendiendo el vuelo a punto fijo como un caso particular de este, desvinculando al propio helicóptero del cálculo y exponiendo las teorías de menor a mayor grado de complejidad y coste computacional. De esta forma, los puntos fuertes y débiles de cada una de ellas pueden ser identificados, así como los regímenes de aplicación más adecuados. Al final del trabajo, se pretende contemplar una serie de teorías que, dependiendo de su modelado, serán capaces de proporcionar valores más o menos precisos, y modelar fenomenología propia de la actuación de rotores en vuelo axial de ascenso.

1.1. Objetivos y Motivación. Alcance del Trabajo

Son muchas las teorías existentes para el modelado de la actuación de rotores en vuelo axial ascendente. Sin embargo, es complicado encontrar comparativas entre todas estas teorías en las que los puntos fuertes y débiles de cada una de estas puedan ser identificados. Así, surge la motivación de este proyecto fin de máster, de la necesidad de investigar dentro de un espectro de teorías ampliamente utilizadas en el análisis de rotores, determinando regímenes más apropiados de aplicación y variables de interés de cada una de ellas, para poder así tener información suficiente a la hora de analizar rotores de helicóptero, dependiendo de la precisión y tiempo y complejidad requeridos.

De esta forma, el objetivo principal del proyecto es el de realizar una comparación entre teorías para el análisis de rotores en vuelo axial ascendente. Dentro de los objetivos secundarios destacan:

- Obtener un espectro más amplio de las diferentes teorías existentes para el análisis de rotores en vuelo axial, incluyendo entre estas algunas teorías más complejas no tan extendidas.
- Lograr un mayor entendimiento de los puntos fuertes y débiles de cada una de las teorías, identificando los regímenes más y menos adecuados de aplicación.
- Identificar, a través de los resultados proporcionados por cada una de las teorías y la comparativa resultante, la influencia del modelado de los diferentes fenómenos que caracterizan la operación del rotor (rotación de estela, resistencia de los perfiles, fenómenos de pérdida de punta de pala, etc.).

- Abordar el análisis de la actuación de rotor haciendo uso de teorías más complejas que van más allá de las abordadas en la asignatura de Helicópteros, como son las Teorías de Vórtices.
- Realizar un estudio tridimensional con la última y más avanzada de las teorías a analizar, para completar el análisis y mejorar el entendimiento de la fenomenología aerodinámica que rodea al rotor de forma más local.

Finalmente, en cuanto al alcance del proyecto, este se limita al análisis de rotores en vuelo axial ascendente; el vuelo axial de descenso se deja a un lado dado la irregularidad del flujo para muchos regímenes de funcionamiento y la complejidad en el análisis de este. En cuando al vuelo de avance, este se decide de igual forma dejar a un lado, dadas las limitaciones en extensión y tiempo del presente trabajo. Como puntos fuertes a modelar, se presentan las Teorías de Vórtices, en las que cuatro modelos diferentes serán tratados, modelando el comportamiento de la estela aguas abajo del rotor; el fenómeno de rotación de estela a través de la Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida será también contemplado, entendiendo como este afecta a las distribuciones de velocidades y potencia en el rotor.

1.2. Metodología

El trabajo expuesto en el presente documento se basa en diversas teorías de análisis de la actuación de rotores en vuelo axial ascendente, contenidas todas ellas (en mayor o menor grado de detalle) en el libros *Helicopter Theory* de Wayne Johnson [1], *Principles of Helicopter Aerodynamics* de J.Gordon Leishman [2] y *Low Speed Aerodynamics* de Joseph Katz y Allen Plotkin [3]. Además, se utilizan contenidos e ilustraciones presenten en artículos y trabajos tales como [4] y [5] principalmente.

Así, como se comentó con anterioridad, se pretende realizar un estudio comparativo entre 8 teorías, de las cuales 5 de ellas han sido estudiadas durante la asignatura de Helicópteros del Máster en Ingeniería Aeronáutica impartido en la Universidad de Sevilla. Dos de las tres teorías adicionales se encuentran enmarcadas dentro de las Teorías de Vórtices, las cuales permiten caracterizar la actuación del rotor a través de soluciones elementales (en este caso torbellinos). En el caso de la teoría adicional a estudiar, esta es una extensión de la Teoría de Cantidad de Movimiento que introduce la rotación de la estela en el análisis.

Las Teorías de Vórtices se encuentran sumamente extendidas en el ámbito de las aeronaves de ala fija, existiendo números estudios relacionados con la generación de fuerzas aerodinámicas utilizando estas teorías. En lo que respecta las aeronaves de alas giratoria, estas se encuentran sustancialmente menos extendidas, teniendo una relevancia mayor en el análisis de la actuación de aerogeneradores.

Dentro de las Teorías de Vórtices en el ámbito de superficies sustentadoras giratorias, es muy común utilizar un modelo de estela rígida ya que proporciona unos muy buenos resultados en relación con la complejidad de la metodología. Así, en el presente trabajo se opta por esta primera vertiente, asumiendo una estela rígida helicoidal de acuerdo con lo expresado en la literatura existente [1] [2] [5].

Para el análisis comparativo, se definirán las variables de interés, procurando que la mayoría de las teorías seleccionadas sean capaces de proporcionar dichos datos. Esto permitirá establecer un espectro comparativo amplio y completo. En relación con la última teoría que se analizará, la Teoría de la Superficie Sustentadora, esta ofrece valores en ambas direcciones de la pala, tanto a lo largo de la cuerda como a lo largo de la envergadura. Por lo tanto, será necesario adaptar los resultados para su inclusión en la comparación general. Además, se planea realizar un análisis detallado específico para esta teoría en cada uno de los casos de estudio.

Para el desarrollo del proyecto se ha hecho uso del lenguaje de programación Python. Este es un lenguaje de programación popular y poderoso, conocido por su legibilidad y facilidad de uso. Algunas de las ventajas de Python que justifican su elección para realizar el estudio comparativo podrían ser:

- Gran cantidad de librerías: Python tiene una amplia colección de librerías y módulos que cubren una variedad de áreas, como ciencia de datos, aprendizaje automático, procesamiento de imágenes, desarrollo web y mucho más. En el campo que aplica a este proyecto, se encuentra “pytornado”, una

librería que ofrece la posibilidad de calcular el flujo generado por un segmento de torbellino recto.

- Comunidad activa: Python tiene una comunidad de desarrolladores muy activa y comprometida. Esto significa que siempre hay nuevos módulos y librerías desarrollándose, así como una gran cantidad de documentación y recursos disponibles en línea. Ello permite actualizar el código con nuevas librerías más eficientes.
- Lenguaje de alto nivel: Al tratarse Python de un lenguaje de alto nivel, la sintaxis es muy sencilla y fácil de aprender, facilitando la comprensión del código y el aprendizaje.
- Versatilidad: Python se utiliza en una variedad de áreas, desde desarrollo web hasta análisis de datos y aprendizaje automático, lo que lo convierte en una herramienta versátil para diferentes tipos de proyectos.

En resumen, Python es una elección adecuada para el desarrollo del estudio comparativo debido a su amplia gama de aplicaciones, su simplicidad y la facilidad para acceder a diversas librerías que facilitan el trabajo y el análisis de datos. Además, permite crear interfaces de usuario de forma intuitiva y sencilla partiendo de scripts.

En aras de alcanzar los objetivos mencionados previamente, se ha desarrollado un algoritmo en el que sin más que introducir los valores de los parámetros que caracterizan al rotor en términos de geometría y actuación (altura de operación, tracción a proporcionar, geometría del rotor, etc.), es capaz de proporcionar los valores de las variables de interés que completan la propia actuación del rotor previamente descrito (potencias, campos de velocidades a través del rotor, etc.).

1.3. Estructura del documento

La estructura del documento es muy sencilla, ya que el trabajo puede ser dividido en tres grandes bloques.

El primero de los bloques se corresponde con los capítulos segundo y tercero, donde se desarrolla el fundamento teórico de cada una de las teorías. La secuencia en la que estas están descritas está pensada para que el documento se encuentre estructurado y no se prograse de forma caótica. Así, estas son introducidas de forma progresiva, atendiendo al nivel de dificultad. Se distinguen igualmente tres bloques:

- Primer bloque (capítulo segundo), formado por teorías más simples como son la Teoría de Cantidad de Movimiento y la Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida. Con estas teorías se pretende dar una descripción más cualitativa que cuantitativa de la actuación del rotor. Si bien los números no son en absoluto precisos, las relaciones fundamentales entre las variables de interés pueden ser identificadas. Además, la segunda de estas teorías trata desde un enfoque “simple”, contemplar como la estela aguas debajo de rotor influye a la actuación de este.
- Segundo bloque (capítulo segundo), formado por teorías locales que, utilizando información 2D de los perfiles aerodinámicos conformando las palas, y través de una formulación simple son capaces de representar de forma más precisa la actuación del rotor. Estas teorías se basan en la formulación expuesta en la Teoría del Elemento de Pala, utilizando diferentes modelos de velocidad inducida. La última de estas teorías se corresponde con una aproximación realizada por Prandtl para modelar las pérdidas de punta de pala.
- Tercer bloque (capítulo tercero), basado en las Teorías de Vórtices. En este último bloque se introducen teorías más complejas, cuya intención es la de modelar el campo de velocidades alrededor de la pala, para así poder calcular el resto de las variables de interés. Entre estas teorías, se desarrollan la Teoría de la Línea Sustentadora y la Teoría de la Superficie Sustentadora. En este punto, la descripción de las variables de interés en el rotor se realiza de una forma muy local, entendiendo estas teorías como las que mejor captan la fenomenología real en el rotor.

El segundo bloque se corresponde con la comparativa entre resultados. Así, en el capítulo 5, previo a la definición del rotor y demás *inputs* del problema en el capítulo 4, se presentan los resultados comparativos para dos casos de vuelo diferentes. Además, se contemplan dos perfiles aerodinámicos utilizados en rotores de helicópteros,

uno con geometría simétrica y otro no.

En el capítulo 6, se presentan las conclusiones del trabajo y se describen los trabajos futuros. En él se resumen los resultados obtenidos, proporcionando respuestas a las preguntas planteadas. Además, se exploran las posibilidades de futuras investigaciones, basadas en las conclusiones del estudio y en los aspectos que no se abordaron en profundidad durante el desarrollo de la investigación. Este capítulo es fundamental para cerrar el trabajo y brindar perspectivas de continuidad en la exploración del tema.

Finalmente, se incluye un único anexo en el que se describe la interfaz de usuario desarrollada. Esta interfaz, al enriquecer significativamente el enfoque del proyecto, tiene el potencial de ser una herramienta de gran utilidad. Además, podría servir como fuente de inspiración para investigaciones futuras y para una comprensión más profunda de la fenomenología que rodea a los rotores.

2 DESCRIPCIÓN DE LAS TEORÍAS DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y ELEMENTO DE PALA

Las leyes de la física no son más que la maravillosa adecuación de lenguaje de las matemáticas para modelar aquello que nos inquieta.

- Anónimo -

En este capítulo, el primer bloque de teorías a utilizar para el análisis de la actuación de rotores en vuelo axial ascendente (entendiendo vuelo a punto fijo como un caso particular de este) es desarrollado en aras de proponer las diferentes hipótesis de validez, variables involucradas para cada caso, magnitudes de cálculo y puntos fuertes y débiles de cada una de ellas.

Las teorías por tratar se detallarán de menor a mayor complejidad, finalizando la sección las teorías con la teoría más avanzada dentro del marco de las Teorías de Elemento de Pala. Sin más dilación, se detallan a continuación las teorías a tratar en este primer bloque:

- I. Teoría de Cantidad de Movimiento (TCM).
- II. Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida (TCME).
- III. Teoría del Elemento de Pala (TEP).
- IV. Teoría de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala Combinadas (TCMEP).
- V. Teoría de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala Combinadas considerando Pérdidas de Punta de Pala (TCMEP PPP).

2.1. Teoría de Cantidad de Movimiento

Esta teoría se corresponde con la más simple de las tratadas en este proyecto, proporcionando valores de las variables de interés que describen la actuación de un rotor (principalmente tracción y potencia) con una precisión pobre.

Esta teoría se corresponde con una teoría global pues no se hace un estudio de detalle de cada una de las secciones de las palas de rotor, sino que las variables de interés son calculadas a través de parámetros globales del rotor (áreas de paso, velocidades en las secciones axiales, etc.)

Las hipótesis fundamentales en las que esta teoría está basada pueden resumirse en las siguientes [6]:

- a) El rotor se modela como un disco actuador, en el que la discontinuidad en presiones está permitida, sin embargo, la discontinuidad en velocidades a través de este no se permite.
- b) Movimiento unidimensional. Las variables se consideran con posibilidad de cambio únicamente en coordenada axial (en la dirección del eje de rotación). De esta forma, las variables serán constantes en secciones paralelas al plano de rotación.

- c) Movimiento cuasi-estacionario.
- d) Movimiento incompresible.
- e) Efectos viscosos despreciables.
- f) Fuerzas másicas despreciables.
- g) Movimiento adiabático.

En cuanto a las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema, estas serán las ecuaciones fundamentales de la mecánica de los fluidos en su versión integral:

- a) Ecuación de la Conservación de la Masa.
- b) Ecuación de la Conservación de la Cantidad de Movimiento.
- c) Ecuación del Momento Angular.
- d) Ecuación de la Conservación de la Energía.

En esta sección, se introducirá la ecuación de Conservación del Momento Angular, junto con otras ecuaciones relevantes, para proporcionar una estructura coherente al documento. Es importante tener en cuenta que esta ecuación no se utilizará hasta el desarrollo de la Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida.

Finalmente, el volumen de control sobre el que se aplicarán estas ecuaciones se expone en la ilustración 1.

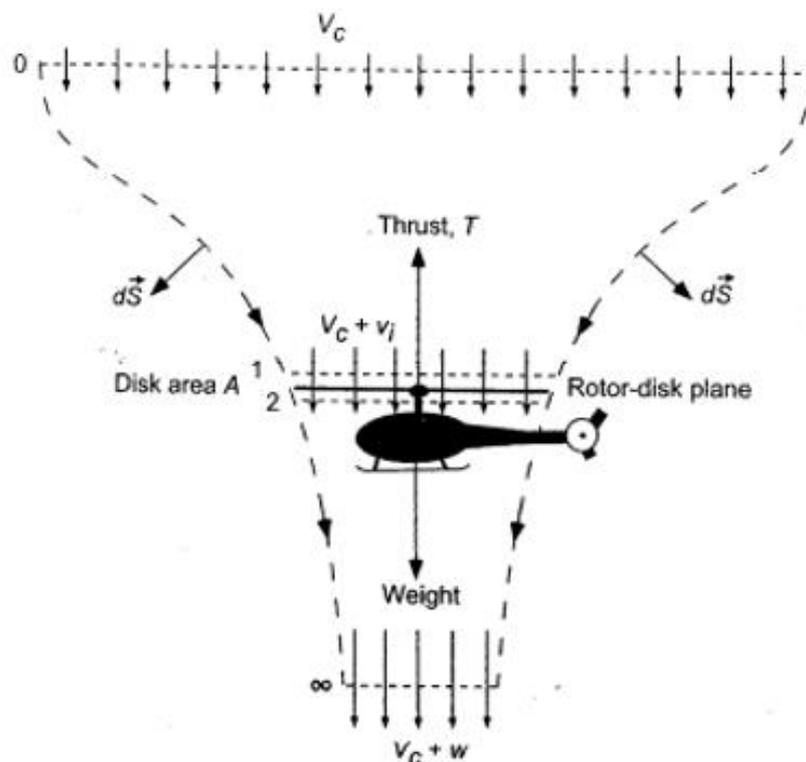


Ilustración 1. Volumen de control para la Teoría de Cantidad de Movimiento [2]

En este volumen de control se distinguen cuatro estaciones:

- Estación 0. Sección ubicada más aguas arriba del rotor. En ella la velocidad se corresponde con la velocidad no perturbada de ascenso del rotor y el área del tubo de corriente es máxima.
- Estación 1. Se corresponde con la estación inmediatamente anterior a la ubicación del rotor. Se asume

que el área de esta es la del rotor y la velocidad es la de la corriente no perturbada más la inducida debido a la existencia de empuje.

- Estación 2. Las condiciones son análogas al caso anterior. En único cambio destacable en esta estación es el aumento de la presión, pues atendiendo a la hipótesis a) se admite una diferencia de presiones en el disco actuador para la producción de tracción.
- Estación ∞ . Se corresponde con la sección más aguas abajo del rotor. En ella, el área se corresponde con su valor mínimo y las velocidades con su valor máximo, dado el carácter incompresible del fluido. Por tanto, se tendrá que cumplir la siguiente condición

$$A_{\infty} < A_1 \cong A_2 < A_0$$

$$w = 2v_i,$$

donde A_i se corresponde con el área del rotor en las diferentes estaciones, v_i con la velocidad inducida en la sección del rotor y w con la velocidad inducida a la salida del tubo de corriente.

Aplicando las cuatro leyes fundamentales de la mecánica de los fluidos (ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento, momento angular y energía) se tiene lo siguiente [6]

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V \rho \mathbf{f}_m dV + \int_S \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{n} dA + \int_S -p \mathbf{n} dA$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV + \int_S (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \mathbf{n} dA \\ = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f}_m dV + \int_S \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{n} dA + \int_S -\mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \\ = \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_m dA \\ + \int_S \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}' \cdot \mathbf{n} dA \\ + \int_S -p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_S K \nabla T \cdot \mathbf{n} dA + \int_V (Q_R + Q_q) dV, \end{aligned}$$

donde ρ representa la densidad, V el volumen de control previamente descrito, \mathbf{v} el vector velocidad, \mathbf{n} el vector normal a la frontera sólida S del volumen de control, A se corresponde con el valor del área para cada una de las fronteras del volumen de control (secciones 0,1,2 e ∞), \mathbf{f}_m representa el vector de fuerzas másicas, $\boldsymbol{\tau}'$ es el tensor de esfuerzos viscosos, p la presión, r el brazo de giro, \mathbf{v}_c la velocidad de desplazamiento del volumen de control, e la energía potencial, $K \nabla T$ representa el calor intercambiado por conducción a través del coeficiente de conductividad térmica K y el gradiente de temperatura ∇T y finalmente Q_R y Q_q representan el calor transferido por radiación y reacción química respectivamente.

Así, los términos resaltados en rojo son anulados atendiendo a las hipótesis en las que esta teoría está basada. Finalmente, haciendo únicamente uso de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, las se tiene que

$$\int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

$$\int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_S -p \mathbf{n} dA$$

$$\frac{1}{2} \int_S \rho (v^2) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_S -p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA,$$

donde una vez estas son aplicadas al volumen de control en cuestión, quedan como un sistema de 3 ecuaciones con 7 variables (ρ, A, v_i, V_c, T, w y A_∞)

$$\rho A_\infty (V_c + w) = \rho A (V_c + v_i)$$

$$\rho A (V_c + v_i) w = T$$

$$-\frac{1}{2} \rho A (V_c + v_i) V_c^2 + \frac{1}{2} \rho A (V_c + v_i) (V_c + w)^2 = T (V_c + v_i),$$

siendo T la tracción proporcionada por el rotor, $T = A(p_2 - p_1)$, V_c es la velocidad de ascenso del rotor, v_i la velocidad inducida axial en la sección del rotor y w la velocidad inducida axial en la sección final ∞ aguas debajo de rotor. Se recuerda que, en el caso de poseer un radio inicial distinto de cero, el área del rotor queda expresada como $A = \pi(R^2 - R_i^2)$, donde R_i y R se corresponden con los radios inicial y final del rotor (ilustración 2).

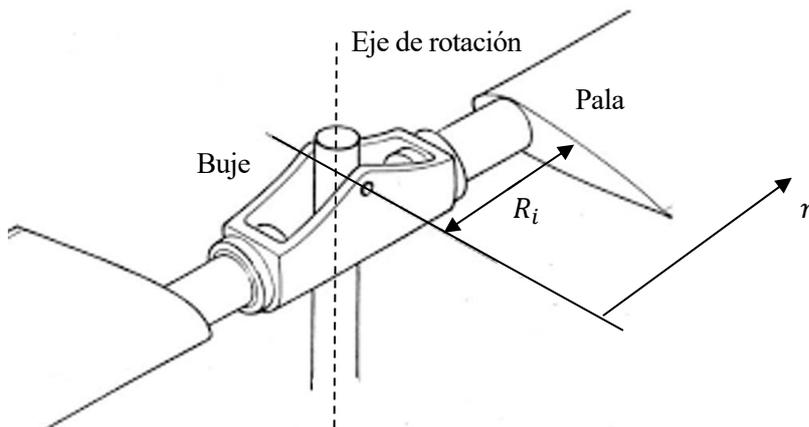


Ilustración 2. Buje de un rotor de helicóptero [16]

Combinando estas tres ecuaciones, las conclusiones que se obtienen se derivan a continuación

$$w = 2v_i$$

$$v_i^2 + V_c v_i = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{T}{A} \right)$$

$$\frac{A_\infty}{A} = \frac{V_c + v_i}{V_c + 2v_i},$$

puediendo calcularse la potencia requerida por el rotor de la siguiente manera

$$P = P_{asc} + P_{ind} = T(V_c + v_i),$$

donde puede verse como la potencia necesaria por el rotor se divide en potencia ascensional (TV_c) necesaria para desplazarse a una velocidad de ascenso V_c , e inducida (Tv_i) necesaria para producir la tracción requerida por la maniobra.

Atendiendo a estas expresiones, dada una cota de vuelo definida para la maniobra (descrita a través de la densidad del aire), un rotor caracterizado por un área y una tracción requerida para una determinada actuación, y una velocidad de ascenso, la velocidad inducida en la sección del rotor puede ser calculada directamente, así como la potencia requerida por el mismo.

Finalmente, para acabar con el análisis de la aplicación de la TCM a rotores en vuelo axial ascendente, se introducirán los coeficientes adimensionales λ , C_T , C_P , los cuales representan la relación de entrada de corriente (inducida y ascensional), el coeficiente de tracción y potencia respectivamente [6]. A su vez, al igual que en el caso anterior, el coeficiente de potencia y la relación de entrada de corriente pueden dividirse en sus componentes ascensional e inducida C_{P_i} , C_{P_c} , λ_i y λ_c

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_i = \frac{V_c}{\Omega R} + \frac{v_i}{\Omega R}$$

$$C_T = \frac{T}{\rho A \Omega^3 R^3}$$

$$C_P = \frac{P}{\rho A \Omega^3 R^3} = C_{P_i} + C_{P_c} = C_T(\lambda_i + \lambda_c),$$

donde Ω representa la velocidad de rotación del rotor y R el radio de este.

2.1.1. Limitaciones de la Teoría de Cantidad de Movimiento

Esta teoría proporciona valores de potencia que son siempre una cota inferior de lo que realmente precisaría un rotor real sujeto a las condiciones de análisis (ver figura 2) [1] [2]. Esto es fundamentalmente debido a que esta teoría tan sencilla deja muchos fenómenos reales sin modelar. Así, a continuación, se detallan los principales fenómenos que contribuyen a la potencia necesaria de la actuación de un rotor en vuelo axial [1]:

- Potencia inducida (necesaria para producir el nivel de empuje necesario sujeto a las condiciones de ensayo). Dependerá fuertemente con la velocidad de ascenso, decreméntándose a medida que esta aumenta. Incluyendo en esta potencia la ascensional, en total representan un 60% de la potencia requerida. En este apartado también se incluya la potencia ascensional.
- Efectos de viscosidad. Las palas de los helicópteros no dejan de ser alas muy esbeltas que por el simple hecho de moverse generan al igual que una fuerza de empuje, una fuerza de arrastre, en sentido contrario al movimiento de estas que penaliza la actuación. Esta potencia se denomina Potencia de Forma del Rotor, y representa el aproximadamente 30% de la potencia necesaria para la actuación del rotor.

- No uniformidad de la velocidad inducida. Representa el 5-7 % de la potencia necesaria.
- Fenómenos de rotacionalidad del flujo a su paso por el rotor (1-2 %).
- Fenómenos de pérdida de punta de pala (2-4 %).

Así, de la lista de fenómenos anteriores, la Teoría de Cantidad de Movimiento únicamente es capaz de modelar el primero, aunque no con total precisión. A menudo esta teoría suele completarse añadiendo un factor de corrección de la potencia inducida κ para reproducir valores de esta más cercanos a la realidad tratando de modelar los fenómenos previamente expuestos

$$C_{Pi} = \kappa \frac{C_T^{3/2}}{\sqrt{2}},$$

cuyo valor suele tomar valores típicamente comprendidos entre $\kappa \in [1, 1.15]$. Este efecto puede verse en la ilustración 3, donde se representa la evolución del Coeficiente de Potencia frente al Coeficiente de Tracción contemplando este coeficiente previamente enunciado.

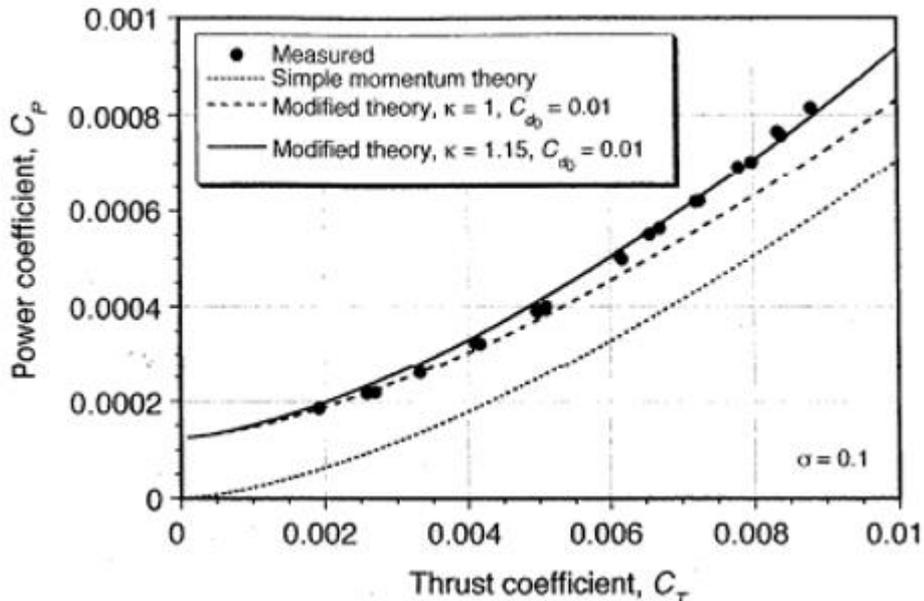


Ilustración 3. Coeficiente de potencia frente al coeficiente de tracción para vuelo axial [2]

Finalmente, a modo de análisis de la dependencia de la velocidad inducida (tracción) y potencia con la velocidad de ascenso se presenta la ilustración 4 donde puede verse como la velocidad inducida disminuye a medida que la ascensional aumenta, haciéndolo así la potencia inducida. Sin embargo, el aumento de la potencia ascensional hace que la tendencia final de la potencia sea creciente con la velocidad ascensional.

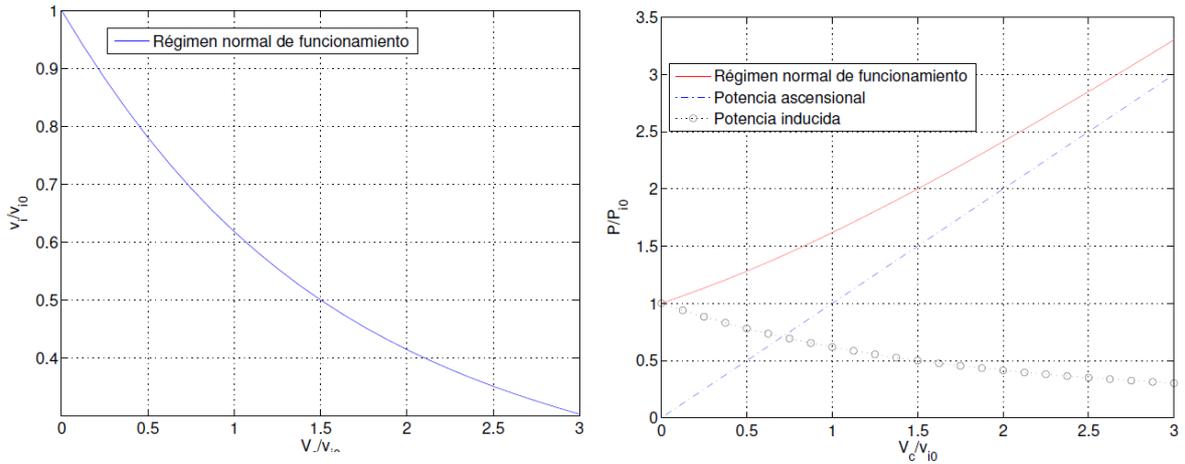


Ilustración 4. Potencia y velocidad inducida con la velocidad de ascenso [6]

A partir de este punto, y considerando las limitaciones de esta teoría, se contemplarán diferentes teorías que modelarán en cierta medida cada una de las limitaciones aquí contempladas.

2.2. Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida

Esta teoría se corresponde con la Teoría de Cantidad de Movimiento en su versión diferencial basada fundamentalmente en las ideas recogidas en el libro Helicopter Theory [1]. A diferencia de la anterior no asume que las variables del problema deban de ser constantes a través de cada una de las secciones, pudiendo admitir cierta variación con la coordenada radial. Para demostrar esto considérese un rotor moviéndose axialmente a velocidad V_c (volumen de control especificado en la ilustración 1), sujeto a una tracción T .

La ecuación de la conservación de la energía que la velocidad en la estación 0 es V_c . Las ecuaciones de conservación de la masa y cantidad de movimiento entonces proporcionan

$$V_c A_0 = \int (V_c + v_i) dA = \int (V_c + w) dA_\infty$$

$$T = \int \Delta p dA = \int \rho (V_c + w) w dA_\infty,$$

donde Δp es la diferencia de presión en el disco actuador.

La ecuación de conservación de la energía igualmente puede expresarse como

$$P = \int \Delta p (V_c + v_i) dA = \int \frac{1}{2} \rho (V_c + w)^3 dA_\infty - 1/2 \rho V_c^3 A_0,$$

la cual introduciendo las expresiones previamente derivadas de la ecuación de conservación de la masa queda como

$$P = \int \Delta p (V_c + v_i) dA = \int \frac{1}{2} \rho (V_c + w)(2V_c w + w^2) dA_\infty.$$

La primera de las expresiones es el trabajo realizado por el rotor al mover el aire a través de él mismo. La segunda de las expresiones se corresponde con la energía cinética añadida al fluido.

Restando a la potencia el término TV_c proporciona $\int v_i dT = \int \frac{1}{2} w dT$. De esta forma, la potencia consumida por el rotor y la tracción han sido expresadas como una función de la velocidad inducida aguas abajo lejos del rotor, la cual en general puede presentar una distribución cualquiera en la sección, $w(r)$.

Considerando ahora el problema de optimización siguiente: encontrar la velocidad inducida $w(r)$ tal que la potencia consumida $P = \int \frac{1}{2} \rho (V_c + w)(2V_c w + w^2) dA_\infty$ para un empuje dado $T = \int \rho (V_c + w) w dA_\infty$ es mínima. Si los integrandos de la potencia y el empuje son independientes de la coordenada radial, entonces el resultado es sencillo, y w resultado del problema de optimización ha de ser constante.

La expresión de Bernoulli aplicada justo encima y debajo del disco actuador se tiene que

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho V_c^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (V_c + v_i)^2$$

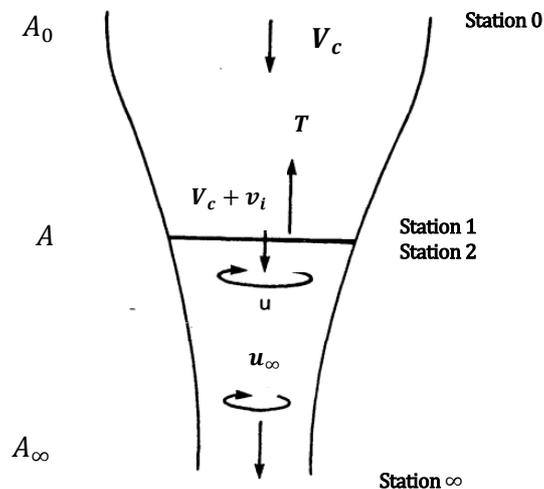
$$p_1 + \Delta p + \frac{1}{2} \rho (V_c + v_i) = p_0 + \frac{1}{2} \rho (V_c + w)^2,$$

las cuales combinadas proporcionan $\Delta p = \frac{1}{2} \rho (2V_c w + w^2)$. Dado que se ha considerado la velocidad inducida en la estela aguas abajo constante, el incremento de presión en el rotor es uniforme. Sin embargo, despejando igualmente se tiene que $p_1 + \frac{1}{2} \rho (V_c + v_i)^2 = \text{constante}$, por lo que la distribución de presión en el rotor y la velocidad inducida no tienen por qué ser constantes. Así, la Teoría de Cantidad de Movimiento no dice nada sobre la distribución de velocidad inducida sobre el rotor, aunque frecuentemente es considerada como constante tratando de simplificar el modelado del problema (como es el caso de la primera de las teorías desarrolladas).

Sin embargo, el aspecto a destacar de esta teoría es la posibilidad de modelar la rotación de la estela aguas abajo del rotor, la cual es fundamentalmente debida al par inducido por el rotor. Para el caso bajo consideración (rotores movidos por un eje), la potencia puede ser relacionada con el par de la siguiente manera $P = \Omega Q$, donde Q representa el par. De esta forma, en este caso el rotor no imprimirá únicamente energía cinética axial al fluido, sino que también lo hará en la coordenada azimutal, proporcionando valores de potencia mayores para un mismo valor de la tracción.

En esta línea, ha de existir una velocidad rotacional $u(r)$ justo debajo del rotor (en la sección infinitesimalmente inferior) y otra velocidad rotacional $u_\infty(r)$ aguas abajo en la estela (al final del tubo de corriente). La aplicación de la conservación del momento angular demuestra que el fluido aguas arriba del rotor ha de ser irrotacional, pues si se considera un volumen de control acabando justamente en la sección infinitesimalmente por encima del propio rotor, no se le imprime ningún par al fluido.

Así, dada la presencia de una velocidad rotacional, el valor de la presión en el final del tubo de corriente no coincidirá con la presión estática p_0 sino que presentará una evolución dada por la siguiente ecuación diferencial



ILUSTRACION 3. ROTOR $V_c + w$ a CASCENAS EN UN TUBO DE CORRIENTE control en rCME [1]

$$\frac{dp_\infty}{dr_\infty} = \frac{\rho u_\infty^2}{r_\infty},$$

alcanzando el valor p_0 únicamente en los extremos del tubo de corriente, para $r = R_\infty$. Así, el gradiente de presión radial proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener el carácter rotacional del fluido aguas abajo del rotor.

La expresión anterior no es más que el término radial de la Ecuación de Euler para un fluido sometido a movimiento puramente rotativo la cual establece la variación de la presión

$$\nabla p = \rho(-g\vec{k} + r\Omega^2\vec{i}_r),$$

donde los vectores \vec{k} e \vec{i}_r representan las componentes unitarias de un sistema de referencia cilíndrico con centro en el eje de rotación, r representa la coordenada radial y g la aceleración de la gravedad.

Aplicando las ecuaciones integrales de conservación de la masa, cantidad de movimiento, momento angular y energía sobre el volumen de control definido en la ilustración 4 se tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} V_c A_0 &= \int (V_c + v_i) dA = \int (V_c + w) dA_\infty \\ T &= \int \Delta p dA = \int \rho(V_c + w)w dA_\infty + \int (p_\infty - p_0) dA_\infty \\ Q &= \int \rho(V_c + v_i)ur dA = \int \rho(V_c + w)u_\infty r_\infty dA_\infty \\ P &= \int \Delta p(V_c + v_i) dA + \int \frac{1}{2}\rho u^2(V_c + v_i) dA = \\ &= \int \frac{1}{2}\rho(2V_c w + w^2 + u_\infty^2)(V_c + w) dA_\infty + \int (p_\infty - p_0)(V_c + w) dA_\infty. \end{aligned}$$

La tracción, potencia y par pueden ser expresadas en función de las velocidades aguas debajo del tubo de corriente u_1 y w únicamente, utilizando la siguiente relación

$$p_\infty - p_0 = - \int_{r_\infty}^{R_\infty} \frac{u_\infty^2}{r} dr,$$

sin más que descomponer el gradiente de presión en la componente de interés, r , y particularizar para el caso de la sección más alejada aguas abajo del rotor se tiene la expresión previamente expresada.

Nótese ahora que $P = \Omega Q$, por lo que la potencia puede expresarse como

$$P = \int \rho(V_c + v_i)ur\Omega dA,$$

pudiendo ser esta igualada a la expresión anterior obtenida para la potencia

$$\int \Delta p(V_c + v_i) dA = \int \rho(V_c + v_i) \left(\Omega r - \frac{1}{2u} \right) u dA.$$

Esta expresión última puede ser entendida como

$$\int (V_c + v_i) dT = \int \left(\Omega r - \frac{1}{2u} \right) u dQ,$$

y haciendo uso de los resultados obtenidos con la TCM se puede establecer que $dT = \Delta p dA \cong \rho(V_c + v_i)2v_i dA$. Así, la tracción puede ser escrita como

$$T = \int 2\rho(V_c + v_i)v_i dA,$$

y la forma diferencial de $P = \Omega Q$ se convierte en

$$2(V_c + v_i)v_i = \left(\Omega r - \frac{1}{2u} \right) u.$$

Así, la TCM teniendo en cuenta la rotación de la estela puede ser formulada como sigue:

“Minimizar la potencia $P = \int \rho(V_c + v_i)u\Omega r dA$ para un empuje dado $T = \int 2\rho(V_c + v_i)v_i dA$, sujeto a la condición $P = \Omega Q$, es decir, $2(V_c + v_i)v_i = \left(\Omega r - \frac{1}{2u} \right) u$.”[1]

Se ha de recordar que la Teoría de Cantidad de Movimiento trata de resolver un problema de variaciones, en el que se busca encontrar unas ciertas funciones sujetos a la condición de minimizar una cierta cantidad. En el primer apartado de esta sección, se resuelve un caso muy simplificado y sencillo de este problema. Así, en este caso, se trata de encontrar una función para la velocidad inducida, $v_i(r)$ que minimice la potencia requerida.

Considerando las expresiones de la potencia y el empuje de la siguiente manera $P = \int F(r, v_i) dA$ y $T = \int G(r, v_i) dA$, donde $dA = 2\pi r dr$ y haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange, se puede establecer la ecuación $I = P - \lambda T$. La solución para $v_i(r)$ para mínima potencia P sujeto al nivel de tracción impuesto T puede establecerse como

$$\delta I = \delta \int (F - \lambda G) dA = \int \left(\frac{\partial F}{\partial v_i} - \lambda \frac{\partial G}{\partial v_i} \right) \delta v_i dA = 0.$$

De esta manera, la solución para la velocidad inducida vendrá dada por $\left(\frac{\partial F}{\partial v_i} - \lambda \frac{\partial G}{\partial v_i} \right) = 0$. En el caso de la TCM, se realiza la hipótesis de independencia de las funciones F y G con la coordenada radial r , lo cual proporciona el resultado $v_i = \text{constante}$.

Finalmente, la resolución del problema de optimización, junto con la restricción impuesta cierran el problema

$$\frac{(V_c + v_i)\Omega r}{\Omega r - u} + \frac{u\Omega r}{2V_c + 4v_i} = C \equiv \text{Constante}$$

$$2(V_c + v_i)v_i = \left(\Omega r - \frac{1}{2u}\right)u.$$

Como una solución aproximada puede considerarse $(V_c + v_i) = (V_c + v_0)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{u}{\Omega r}\right)$, donde v_0 es una constante del problema. Las velocidades v_i y u pueden entonces expresarse como

$$\frac{u}{\Omega r} = \frac{2(V_c + v_0)v_0}{(\Omega r)^2 + (V_c + v_0)^2}$$

$$\frac{v_i}{v_0} = \frac{(\Omega r)^2}{(\Omega r)^2 + (V_c + v_0)^2}.$$

Tras sustituir estas expresiones, la tracción y la potencia pueden ser directamente derivados como sigue

$$T = 2\rho(V_c + v_0)v_0 \int \frac{(\Omega r)^2 [(\Omega r)^2 + (V_c + v_0)V_c]}{[(\Omega r)^2 + (V_c + v_0)^2]^2} dA = \int_{R_i}^R \frac{(\Omega r)^2 [(\Omega r)^2 + (V_c + v_0)V_c]}{[(\Omega r)^2 + (V_c + v_0)^2]^2} 2\pi r dr$$

$$P = T(V_c + v_0).$$

Nótese que la variable v_0 ha de ser ligeramente superior que los resultados arrojados por la TCM para la velocidad inducida en la sección del rotor, ya que la potencia inducida esta expresada directamente en función de esta variable, contemplando el gasto de energía en aceleración del flujo en dirección axial y rotacional.

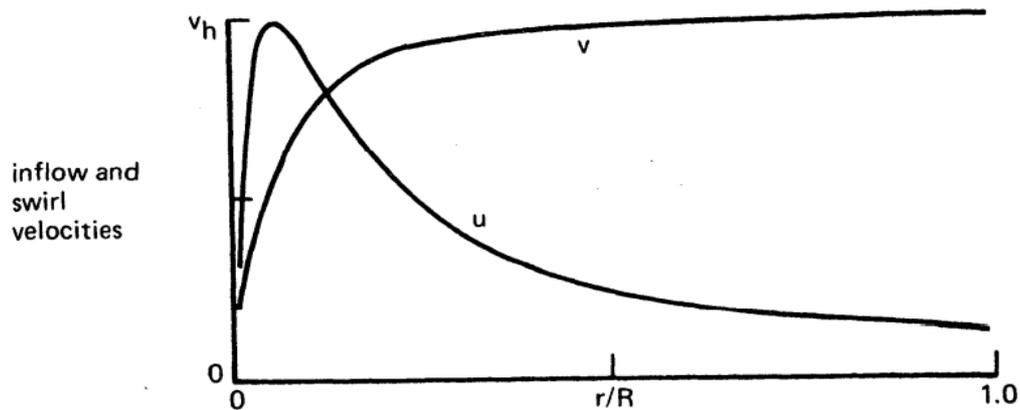


Ilustración 6. Velocidades inducidas según TCME [1]

En la ilustración 6 puede verse las distribuciones de velocidad inducida axial y rotacional en la sección del rotor. En ella pueden distinguirse claramente dos regiones, separadas por una línea vertical entorno al 20% del radio del rotor. En la región más próxima a la raíz, ambas componentes de la velocidad son significativas, siendo la componente rotacional la dominante para las zonas más próximas a la raíz. En la segunda de las regiones la

velocidad inducida axial es claramente dominante, disipándose la componente rotacional a medida que la coordenada radial se acerca a los extremos del rotor. Este comportamiento está estrictamente relacionado con la conservación del momento angular (el cual tiene en cuenta ambos movimientos, el axial y el rotacional).

2.3. Teoría de Elemento de Pala

La Teoría del Elemento de Pala se corresponde con una de las teorías más extendidas para el análisis de actuaciones en rotores y hélices. En este caso, se aborda un análisis local, en el que las palas del rotor son analizadas desde el punto de vista de los perfiles que las conforman. En el análisis que se pretende desarrollar, las variables dependerán de la coordenada radial, proporcionando una descripción mucho más compleja y rigurosa del paso del flujo tras el rotor.

Esta teoría se basa en el análisis de perfiles aerodinámicos que funcionan de manera aislada, es decir, cada perfil contribuye a la actuación del rotor como si este estuviese funcionando de forma independiente (“2D strip theory”), aunque hay factores para corregir este fenómeno., tratando de simular la alta complejidad del flujo 3D que atraviesa el rotor (compresibilidad, pérdida de punta de pala, etc.)

La matemática del desarrollo que sigue se basa en la integración de las variables de interés a lo largo de la coordenada radial.

Se ha de remarcar que esta teoría es únicamente una herramienta de análisis aerodinámico “simple”, por lo que no proporciona un modelo para la velocidad inducida para el rotor. Para poder describir la actuación del rotor utilizando esta teoría se tendrá que acudir a otros modelos de velocidad inducida. Así, esta únicamente representa un modelo de cálculo para la actuación del rotor para una distribución de velocidad inducida dada (no necesariamente uniforme).

De igual forma que en los casos anteriores, se perseguirá un desarrollo asumiendo las siguientes hipótesis [1]:

- a) Fuerzas aerodinámicas obtenidas a través de las curvas de sustentación de los perfiles y la polar del perfil considerado a través de modelos experimentales (aerodinámica 2D). La fenomenología de pérdida de los perfiles no es considerada.
- b) Movimiento cuasi-estacionario.
- c) Movimiento incompresible.

Antes de comenzar a describir el modelo matemático-físico para la descripción de la actuación de vuelo axial ascendente en rotores, se ha de modelar la geometría y movimiento del propio rotor, para lo que se introduce la siguiente ilustración. Así, se considera un rotor de radio inicial y final R_i y R respectivamente, formado por b palas que giran a una velocidad angular constante Ω en vuelo axial ascendente a velocidad V_c . Cada elemento de pala posee una cuerda c y una envergadura dr y está situado a una distancia r del centro del rotor (véase figura 7).

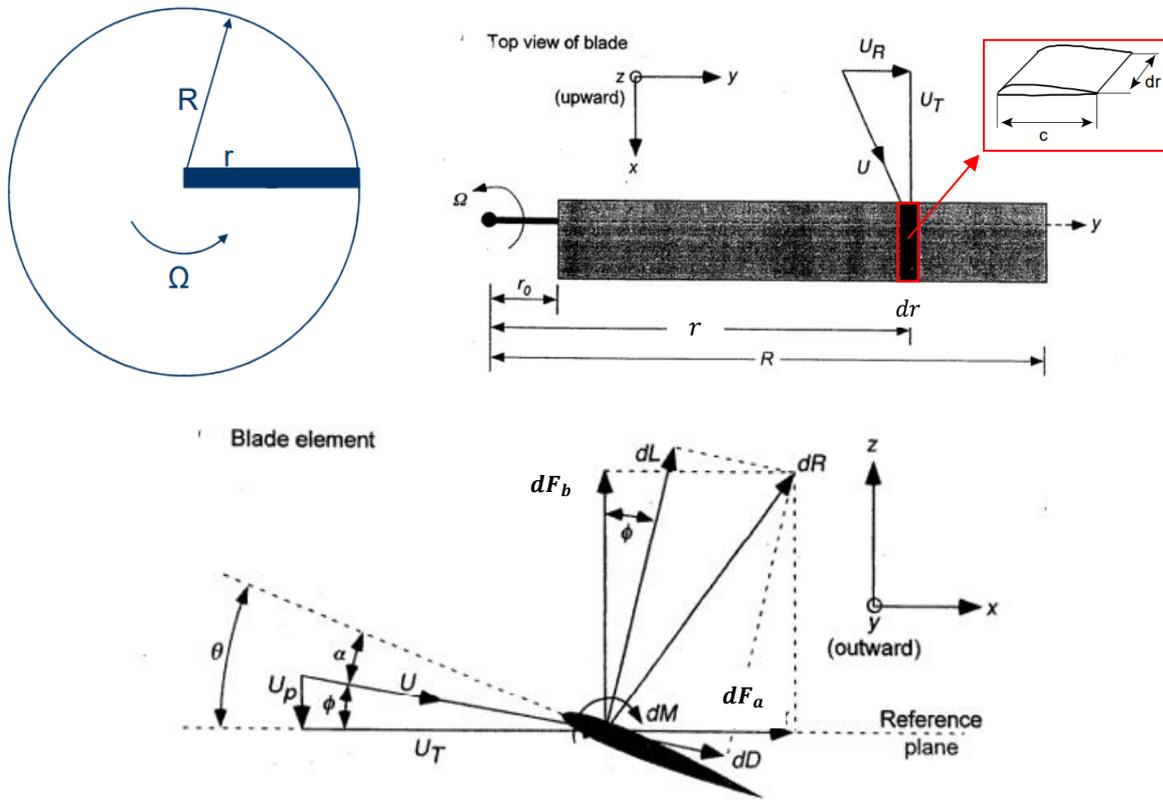


Ilustración 7. Modelado de la geometría y movimiento del rotor [2]

La velocidad que ve cada perfil es suma de 3 componentes [6]:

- Velocidad tangencial, U_T contenida en el plano del rotor. Se corresponde con la velocidad de rotación que ve cada perfil del rotor y únicamente depende de la velocidad de rotación y la distancia al eje de rotación, $U_T = \Omega r$.
- Velocidad perpendicular o axial, U_P . Se corresponde con la componente de la velocidad paralela al eje de rotación del propio rotor. Esta es suma de la velocidad inducida y la velocidad del vuelo de ascenso, $U_P = v_i(r) + V_c$.
- Velocidad radial, U_R . Esta velocidad se produce dado el carácter finito de la propia pala. Posee una magnitud e influencia mucho menor que las anteriores y suele considerarse nula para el cálculo de las variables de interés.

Para el cálculo de la fuerza aerodinámica en los perfiles, se atenderá a la ilustración 6, en el que esta es descompuesta en dos componentes, $dF = dR = \sqrt{dF_a^2 + dF_b^2}$, la fuerza de arrastre y de batimiento respectivamente. La no existencia de la componente radial de la fuerza es debido a que se realiza la hipótesis de aerodinámica 2D en el análisis.

El parámetro ϕ se corresponde con el ángulo de entrada de la corriente y está definido como $\phi = \arctan\left(\frac{U_P}{U_T}\right)$. Así, de igual manera el parámetro θ se corresponde con el ángulo de paso de los perfiles y este puede ser

calculado como $\theta = \alpha + \phi$, donde α es igual al ángulo de ataque que ve el perfil en cuestión. Para el cálculo del ángulo de ataque de los perfiles se ha únicamente que despejar la expresión anterior, resultando en

$$\alpha = \theta - \phi ,$$

donde el ángulo de paso de los perfiles es un dato de la propia actuación pues depende de la propia geometría del rotor y de la acción del piloto, siendo θ_0 el ángulo de paso colectivo y θ_1 el ángulo de torsión lineal [2]

$$\theta = \underbrace{\theta_0}_{\text{Piloto}} + \underbrace{\frac{\theta_1 r}{R}}_{\text{Geometría}}$$

La sustentación y resistencia de los perfiles puede ser obtenida a través de los coeficientes de sustentación y resistencia de estos, es decir, C_l y C_d respectivamente. Nótese que estos coeficientes adimensionales son los de los perfiles asumiendo estos actuando de forma aislada. Asumiendo la teoría 2D para perfiles, estos coeficientes pueden ser expresados en función del ángulo de ataque α , el Número de Reynolds Re y el Número de Mach M , $C_l = C_l(\alpha, Re, M)$ y $C_d = C_d(\alpha, Re, M)$. Sin embargo, estos coeficientes pueden ser expresados únicamente dependiendo del ángulo de ataque, asumiendo fenómenos de compresibilidad despreciables y altos Números de Reynolds [1]. Así, las fuerzas de sustentación y resistencia para cada uno de los perfiles pueden ser expresadas como sigue

$$dL \cong \frac{1}{2} \rho U^2 c C_l(\alpha) dr$$

$$dD \cong \frac{1}{2} \rho U^2 c C_d(\alpha) dr,$$

donde U representa la velocidad total suma de las componentes tangencial y axial de la velocidad, $U = U_T + U_P$.

Las fuerzas de batimiento y arrastre pueden expresarse como

$$dF_b = dL \cos(\phi) - dD \sin(\phi)$$

$$dF_a = dL \sin(\phi) + dD \cos(\phi),$$

pudiendo derivar directamente las expresiones de la tracción y potencia como

$$dT = N_b dF_b$$

$$dP = N_b dF_a \Omega r$$

donde N_b es el número de palas del rotor en cuestión. Así, finalmente las expresiones de la tracción, la potencia requerida por el rotor quedan como [2]

$$dT = N_b (dL \cos(\phi) - dD \sin(\phi))$$

$$dP = N_b(dL\sin(\phi) + dD\cos(\phi))\Omega r.$$

Las siguientes hipótesis pueden realizarse [2]:

- 1) $U \cong U_T$ porque U_P es muy pequeña en comparación (excepto cerca del buje del rotor).
- 2) $\phi \cong \frac{U_P}{U_T}$ asumiendo ángulos pequeños, $\sin(\phi) \cong \phi$ y $\cos(\phi) \cong 1$.
- 3) La contribución de la resistencia aerodinámica a la tracción es de orden inferior a la de la sustentación, por lo que se puede considerar despreciable.

Considerando estas hipótesis, las ecuaciones previas quedan como [1]

$$dT = N_b dL$$

$$dP = N_b \Omega (\phi dL + dD)r.$$

Introduciendo parámetros adimensionales a las expresiones anteriores, estas resultan en las siguientes expresiones

$$dC_T = \frac{N_b dL}{\rho A (\Omega R)^2} = \frac{1}{2} \frac{(N_b c)}{\pi R} C_l x^2 dx = \frac{1}{2} \sigma C_l x^2 dx$$

$$dC_P = dC_Q = \frac{N_b \Omega (\phi dL + dD)r}{\rho A (\Omega R)^3} = \frac{1}{2} \sigma (\phi C_l + C_d) x^3 dx = dC_{P_i} + dC_{P_0}$$

donde $\sigma(r) = \frac{bc(r)}{\pi R}$ se corresponde con la solidez del rotor, $x = \frac{r}{R}$ es la coordenada radial adimensional, C_T es el coeficiente de tracción y C_P y C_Q son el coeficiente de potencia y de par respectivamente. Estas expresiones pueden ser integradas para obtener los valores globales de los coeficientes de tracción, potencia y par del rotor en cuestión [2].

En la expresión anterior del Coeficiente de Potencia pueden distinguirse dos términos claramente diferenciados: El coeficiente de potencia inducida, C_{P_i} debido esencialmente a la existencia de tracción y al ascenso (se incluye la potencia ascensional en él) y el coeficiente de potencia de forma del rotor, C_{P_0} , debido esencialmente a la resistencia aerodinámica generada por los perfiles de las palas.

En la figura 7, los coeficientes de potencia y tracción obtenidos con la TEP considerando el modelo de velocidad inducida proporcionado por la TCM son comparados con los obtenidos de experimentos reales para diferentes valores de la solidez de las palas (todos ellos constantes). En ella puede verse como el coeficiente de tracción posee una evolución creciente con el valor de la solidez, y del ángulo de paso de las palas, debido fundamentalmente al aumento de la superficie mojada de las palas y el aumento del ángulo de ataque de estas (para ángulos de ataque moderados). En el caso del coeficiente de potencia la tendencia es análoga, dado el aumento de la potencia inducida con el aumento del empuje y el aumento de la resistencia de los perfiles con el aumento del ángulo de ataque, y por ende la resistencia de forma de los perfiles.

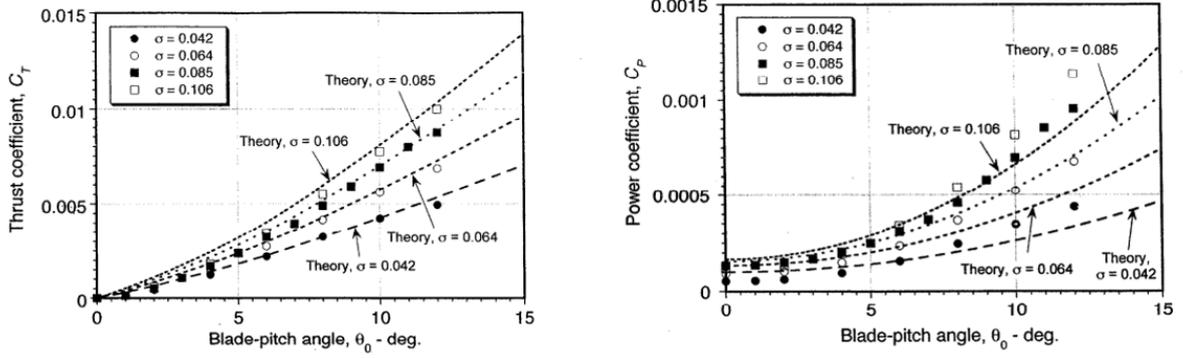


Ilustración 8. Coeficientes de potencia y tracción predichos por la TEP vs experimentos reales para varios valores de la solidez [2]

Así, finalmente estos coeficientes pueden ser integrados para obtener las expresiones finales de las variables de interés del problema [6]

$$C_T = \frac{1}{2} \int_{x_i}^1 \sigma(r) C_l x^2 dx$$

$$C_P = \frac{1}{2} \int_{x_i}^1 \sigma(\phi C_l + C_d) x^3 dx = C_{Pi} + C_{P0},$$

donde $x_i = \frac{R_i}{R}$ se corresponde con la distancia adimensional desde el eje de rotación hasta el comienzo de la pala.

Finalmente, llegados a este punto, aun no se ha comentado nada acerca del perfil de velocidad inducida a utilizar [2], pues esta teoría no proporciona ningún modelo para esta. Para este caso, se utilizarán los modelos proporcionados por las teorías previamente descritas en las secciones 2.1 y 2.2. Así, se tendrán lo siguiente:

1. Modelo de velocidad inducida proporcionado por la Teoría de Cantidad de Movimiento (TEP-TCM)

$$v_i^2 + V_c v_i = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{T}{A} \right) \rightarrow \frac{v_i}{v_{i0}} = -\frac{V_c}{v_{i0}} + \sqrt{-2V_c + 1}, \quad \forall \frac{V_c}{v_{i0}} \geq 0.$$

2. Modelo de velocidad inducida proporcionado por la Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida (TEP-TCME)

$$\frac{v_i}{\Omega r} = \frac{(\Omega r)^2}{(\Omega r)^2 + (V_c + v_0)^2}$$

Para el caso segundo, se ha de considerar un término adicional en la potencia para contemplar la potencia invertida en la rotación del fluido a través del rotor. De esta forma, la expresión para el diferencial potencia queda como sigue

$$dP = N_b(\phi dL + dD)(\Omega r + u(r)),$$

la cual adimensionalizada e integrada sobre la pala resulta

$$C_P = \frac{1}{2} \int_{x_i}^1 \sigma(\phi C_l + C_d) \left(1 + \frac{\lambda_{rot}}{x}\right) x^3 dx,$$

donde $\lambda_{rot} = u(r)/(\Omega R)$ representa la velocidad inducida rotacional adimensional.

2.4. Teoría de Elemento de Pala y Cantidad de Movimiento Combinadas

En línea con la problemática ya evidenciada en el desarrollo de la TEP surge la Teoría de Elemento de Pala Combinada, en la que se trata de dar solución a la siguiente pregunta:

¿Cómo se puede obtener un perfil de velocidad inducida sin necesidad de hacer hipótesis sobre su distribución?

De esta forma, esta teoría está basada en la siguiente hipótesis:

“El empuje diferencial producido por un elemento de pala es igual que el empuje producido por una corona circular de espesor dr situado en la misma coordenada radial que el propio elemento de pala.” [6]

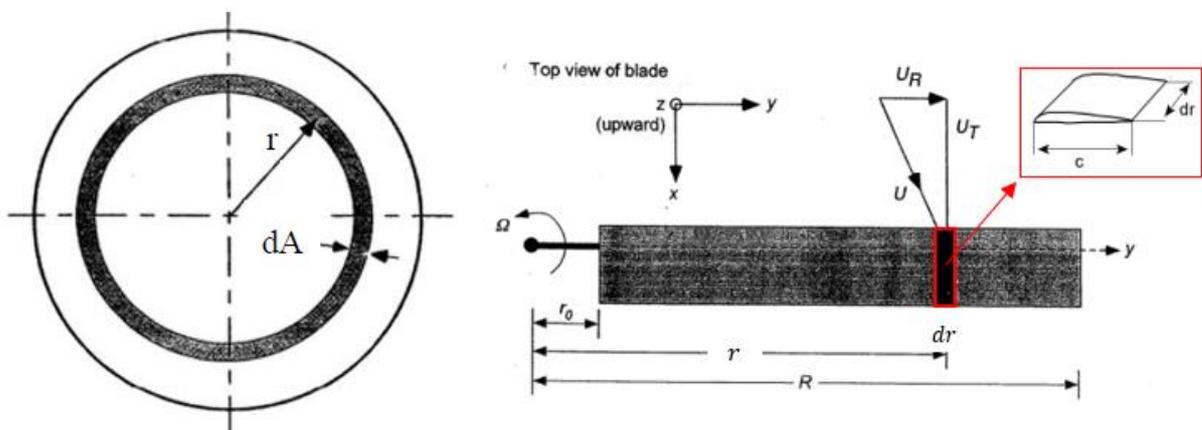


Ilustración 9. Teoría de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala Combinadas [2]

Introduciendo las expresiones provenientes de la Teoría de Cantidad de Movimiento diferencial, se puede establecer la expresión del Coeficiente de Tracción diferencial [6]

$$dm = 2\pi\rho(V_c + v_i)rdr$$

$$dT = 4\pi\rho(V_c + v_i)v_i r dr$$

$$dC_T = 4\lambda\lambda_i x dx$$

Así, introduciendo también la expresión del Coeficiente de Tracción extraída de la Teoría del Elemento de Pala se tiene que [6]

$$dC_T = \frac{1}{2}\sigma C_l x^2 dx = \frac{1}{2}\sigma(C_l(\alpha = 0)x^2 + C_{l_\alpha}(\theta x^2 - \lambda x))dx,$$

y estableciendo la equivalencia entre ambas soluciones, se puede obtener el modelo de velocidad inducida resultante de la Teoría Combinada [6], el cual es igualmente graficado en la ilustración 10.

$$dC_T = 4(\lambda_i + \lambda_c)\lambda_i x dx = \frac{1}{2}\sigma \left(C_l(\alpha = 0) + C_{l_\alpha} \left(\theta - \frac{\lambda}{x} \right) \right) x^2 dx$$

$$\lambda(x, \lambda_c) = \sqrt{\left(\frac{\sigma C_{l_\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2} \right)^2 + \frac{\sigma}{8} (C_{l_0} + C_{l_\alpha} \theta x)} - \left(\frac{\sigma C_{l_\alpha}}{16} - \frac{\lambda_c}{2} \right).$$

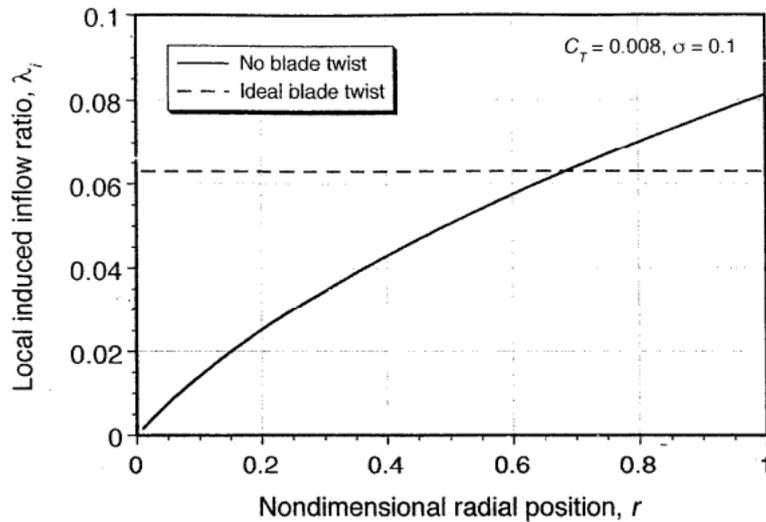


Ilustración 10. Velocidad Inducida resultado de la TCMEP [1]

2.5. Solución de Prandtl para las Pérdidas de Punta de Pala. Teoría de Cantidad de Cantidad de Movimiento Combinada

La tracción y la velocidad inducida pueden ser calculadas considerando la estela convectada aguas abajo del rotor. Así, es un hecho experimental que la existencia de un número finito de palas proporciona una reducción

en la tracción generada en la zona de la punta de estas. En términos del fluido convectado (estela), existe una transferencia de fluido desde la zona inferior a la superior que reduce la cantidad de movimiento de esta.

Prandtl obtuvo una solución aproximada para este problema, utilizando un modelo de estela bidimensional y únicamente válido para rotores de radio grande [6]. Así, en lugar de considerar un modelo de estela helicoidal (considerado en las siguientes secciones), este considera una serie planos de vorticidad semi-infinitos (ilustración 11), el cual reduce considerablemente la complejidad en la resolución de este, permitiendo una solución implícita para la velocidad inducida [1].

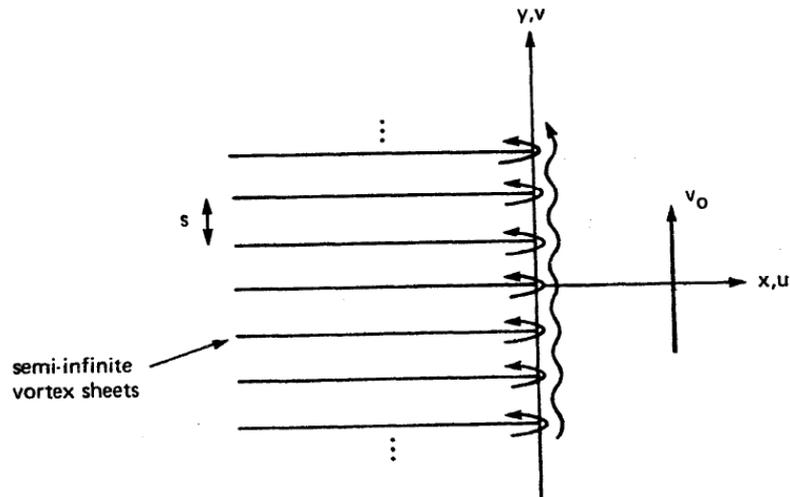


Ilustración 11. Modelo de estela de Prandtl [1]

Considerando la Teoría de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala Combinada, el diferencial de tracción dC_T ha de corregirse por un factor $F(x)$

$$F(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \arccos(e^{-f(x)}),$$

donde f puede expresarse como $f(x) = \frac{b}{2} \left(\frac{x-1}{x\phi(x)}\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{1-x}{\lambda(x)}\right)$.

Así, considerando que el factor F proporciona información tridimensional al diferencial de tracción calculado con la Teoría de Cantidad de Movimiento se tiene que

$$TEP: dC_T = \frac{1}{2} \sigma (C_l(\alpha = 0)x^2 + C_{l_a}(\theta x^2 - \lambda x)) dx$$

$$TCM: dC_T = 4(\lambda - \lambda_c) F(x) \lambda x dx,$$

y finalmente igualando diferenciales de tracción se tiene la expresión implícita para la relación de entrada de corriente [6], la cual deberá de resolverse de forma numérica

$$\lambda(x) = -\left(\frac{\sigma C l_{\alpha}}{16F(x, \lambda)} - \frac{\lambda_c}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma C l_{\alpha}}{16F(x, \lambda)} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma}{8F(x, \lambda)}(C l_0 + C l_{\alpha} \theta x)}.$$

Como puede deducirse de la expresión anterior, la influencia de la punta de la pala es modelada a través del factor F mediante un aumento de la velocidad inducida en la zona de la punta de la pala (véase la siguiente ilustración) [1], el cual reduce el ángulo de ataque local de las secciones y con ello la sustentación generada por las mismas.

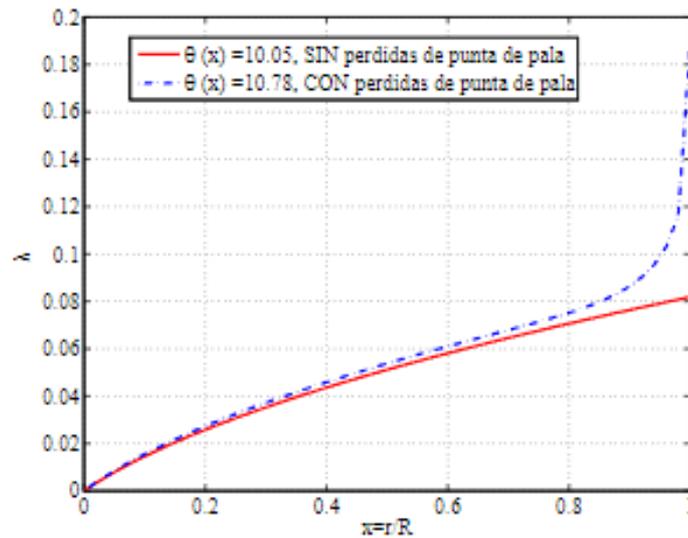


Ilustración 12. Modelo de velocidad inducida de la Teoría de Cantidad de Movimiento con Pérdidas de Punta de Pala [6]

En la ilustración anterior los modelos de velocidad inducida según la Teoría del Elemento de Pala combinada y su versión considerando pérdidas de punta de pala son comparadas. Como puede deducirse claramente, para un mismo nivel de tracción, el ángulo de paso colectivo considerando pérdidas es significativamente mayor, dada la reducción de la capacidad sustentadora en torno a la punta de esta, donde se produce el aumento drástico de velocidad inducida axial.

En lo que sigue, una vez considerado el modelo de velocidad inducida previamente definido, la formulación es idéntica a la formulada para la Teoría del Elemento de Pala.

3 DESCRIPCIÓN DE LAS TEORÍAS DE VÓRTICES. MODELOS BASADOS EN LA LEY DE BIOT- SAVART

La teoría sin práctica es inútil. La práctica sin teoría es ciega.

- Albert Einstein -

En este capítulo se completa el desarrollo teórico de las teorías a abordar en el presente trabajo, presentando las dos últimas y más avanzadas metodologías. Al principio del capítulo se presenta una introducción teórica en la que se definirán las herramientas necesarias para posteriormente poder formular la metodología numérica capaz de dar solución al problema, abarcando la totalidad de la primera de las secciones. En ella se introducirán las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos y otros muchos conceptos como vorticidad, problemas sustentador y de espesor, Ley de Biot-Savart, etc, siendo para ello esencial referencia el libro *Low Speed Aerodynamics (Joseph Katz y Allen Plotkin)* [4]. Finalmente, el capítulo se cierra con los subapartados 3.2 y 3.3 en los que las metodologías a analizar son desarrolladas desde el punto de vista numérico. Para estos desarrollos, las principales fuentes de información son las referencias [4] [5] [6]. Ambas teorías son:

- I. Metodología de la Línea Sustentadora. Modelo de estela helicoidal rígida (LS).
- II. Metodología de la Superficie Sustentadora. Modelo de estela helicoidal rígida (SS).

3.1. Introducción Teórica

Ecuaciones de Navier-Stokes

Previo al desarrollo de estas teorías, se presentan las ecuaciones fundamentales de la mecánica de los fluidos (Ecuaciones de Navier-Stokes) en su expresión diferencial [3].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho q_i) + \nabla \cdot (\rho q_i \mathbf{q}) - \rho f_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

Donde q_i y f_i representan el campo de velocidades y de fuerzas másicas para cada una de las coordenadas

espaciales, \mathbf{q} representa el vector velocidad, τ_{ij} representa el tensor de esfuerzos viscosos, ρ la densidad del fluido y x_j representa las propias coordenadas espaciales.

Estas ecuaciones son muy complejas y únicamente soluciones exactas pueden ser obtenidas para casos muy sencillos y particulares. De esta forma, algunos de los términos pueden ser despreciados en algunas regiones del dominio, dejando únicamente los términos dominantes, obteniendo ecuaciones simplificadas, cuya resolución puede ser abordada desde un punto de vista numérico con mucho menor esfuerzo. En este contexto, en el desarrollo que sigue se considerará un flujo estacionario, incompresible (a bajos Números de Mach), y no viscoso (a altos Números de Reynolds)

$$\frac{\partial q}{\partial t} \approx 0, M = \frac{V}{a} \ll 1 \rightarrow \rho \approx cte, Re = \frac{\rho V L_c}{\mu} \gg 1.$$

En particular, la simplificación de flujo a altos Números de Reynolds (dividiendo en las ecuaciones adimensionales en el término viscoso) divide el dominio en dos regiones claramente diferenciadas: una región exterior donde los efectos viscosos son despreciables y una región interior denominada capa límite, donde los efectos viscosos son considerables y han de ser contemplados en las ecuaciones. Esta división del dominio se muestra en la ilustración 13.

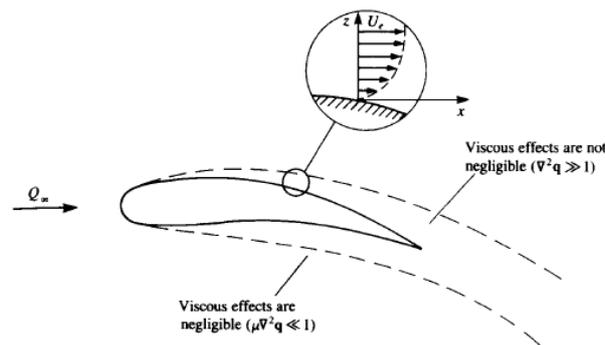


Ilustración 13. Región de capa límite y exterior [7]

De esta forma, en lo que sigue se considerarán las ecuaciones simplificadas, considerando únicamente la región exterior donde los efectos viscosos son despreciables

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho},$$

donde las ecuaciones de contorno necesarias se corresponden con $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_\infty$ para zonas suficientemente alejadas de la superficie del sólido (flujo no perturbado) y $\mathbf{q}_n = 0$ para todo punto en la superficie del sólido. Cabe preguntarse por qué no se considera flujo tangencial igualmente nulo en el contorno del sólido considerado. Sin embargo, debido a que el fluido es considerado no viscoso, no existe razón física para poder considerar esta velocidad nula en las proximidades del sólido, ya que es la propia viscosidad la que fuerza esta condición.

Como puede verse de las ecuaciones anteriores, el problema se encuentra desacoplado, desde el punto de vista de la velocidad y de la presión. De esta forma, dado un sólido sumergido en un fluido cumpliendo las hipótesis anteriores, la obtención de las fuerzas aerodinámicas pasan por derivar el campo de velocidades para después

poder obtener las fuerzas aerodinámicas de presión. Las fuerzas aerodinámicas de fricción (resistencia aerodinámica) deberán ser calculadas reteniendo los términos viscosos en las ecuaciones, por lo que en lo que sigue estos no serán calculados.

El Papel de la Rotación del Fluido. Ecuaciones de Laplace y Bernoulli

Para poder desarrollar expresiones matemáticas con las que resolver las ecuaciones anteriores, es necesario estudiar la rotación del fluido y como esta está relacionada con la viscosidad [3]. El movimiento de un fluido, así como el de un sólido deformable, está compuesto por una translación, rotación y deformación (en general). Así, la velocidad angular en su versión vectorial se define como la mitad del rotacional de la velocidad

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{q},$$

y la vorticidad puede definirse como dos veces la velocidad angular, $\xi = 2\boldsymbol{\omega}$. Considerando ahora una superficie abierta S con una curva cerrada C en su frontera (figura 14). A través del Teorema de Stokes, la vorticidad en la superficie puede ser relacionada con la integral de línea a través de la curva C

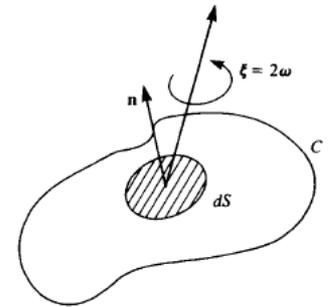


Ilustración 14. Relación entre integral de línea y superficie [7]

$$\int_S \nabla \times \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \xi \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{l},$$

donde \mathbf{n} es normal a la superficie S . La integral de línea sobre la curva cerrada C del término de la derecha es denominada circulación

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{l}.$$

La circulación está entonces, de alguna forma, ligada a la rotación del fluido (véase ilustración 15). De esta forma, casos en los que se tiene $\nabla \times \mathbf{q} = 0$ se consideran irrotacionales (caso (b) en figura) y casos $\nabla \times \mathbf{q} \neq 0$ son rotacionales (caso (a) en figura).

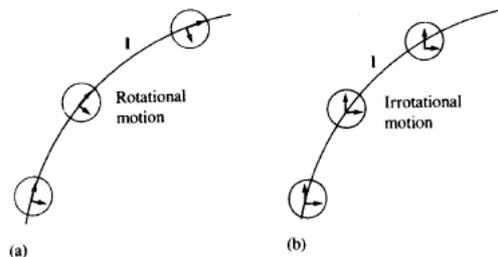


Ilustración 15. Movimiento rotacional e irrotacional del fluido [7]

Sin más que combinar la ecuación de cantidad de movimiento con la definición de vorticidad se puede conseguir fácilmente la ratio de cambio de la vorticidad

$$\frac{D\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \cdot \xi = \xi \cdot \nabla \cdot \mathbf{q} + v\nabla^2\xi.$$

Esta ecuación se parece de manera significativa a la ecuación de cantidad de movimiento, por lo que, para valores muy altos del Número de Reynolds, los efectos de la vorticidad creados en la superficie del propio sólido quedarán confinados cerca de la propia superficie, siendo convectados con la velocidad incidente mucho más rápido de lo que estos pueden propagarse. De esta forma, el fluido bajo estudio en este proyecto puede ser considerado irrotacional. Este efecto puede verse claramente en la ecuación anterior, reduciendo el problema al caso bidimensional (vorticidad apuntando en dirección z) e incompresible, tomando coeficientes adimensionales representados en la misma a través de asteriscos

$$\frac{D\xi^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \xi_z^*,$$

donde el Número de Reynolds Re aparece en la ecuación. De esta forma, el fluido bajo estudio puede ser considerado irrotacional, por lo que el campo de velocidades creado proviene de un potencial, $\mathbf{q} = \nabla\Phi$, independiente del camino de integración y función de la ubicación del punto en cuestión

$$\Phi(x, y, z) = \int_C u dx + v dy + w dz.$$

Sustituyendo la primera de las expresiones en la ecuación de continuidad para flujo estacionario se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = 0,$$

la cual se corresponde con la Ecuación de Laplace, que no es más que la expresión de la ecuación de continuidad para un fluido incompresible e irrotacional expresada en función del potencial de velocidades Φ .

De igual forma, la ecuación de cantidad de movimiento puede ser simplificada. Así, considérese esta expresada en función de la vorticidad

$$\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{q} \times \boldsymbol{\xi} + \frac{\nabla q^2}{2} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho},$$

la cual particularizada para flujo irrotacional y estacionario queda

$$\frac{\nabla q^2}{2} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Finalmente, despreciando las fuerzas de volumen debido a la baja densidad del aire (Número de Froude mucho mayor que la unidad, $Fr = \frac{q}{\sqrt{gL_c}} \gg 1$), se llega a la expresión final de la ecuación de cantidad de movimiento, o también denominada Ecuación de Bernoulli

$$\nabla \left(\frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \rightarrow \left(\frac{q_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} \right) = \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho},$$

donde el campo de presiones p queda expresado únicamente en función de la densidad del fluido (constante) y el campo de velocidades q .

Las ecuaciones del problema, junto con las condiciones de contorno ahora quedan como

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \frac{\nabla q^2}{2} &= \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} \\ \nabla \Phi &\rightarrow \mathbf{q}_\infty \text{ para } r \rightarrow \infty \\ \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \forall P \in \text{Superficie.} \end{aligned}$$

El problema queda entonces reducido a encontrar el potencial de velocidades cumpliendo la Ecuación de Laplace sujeto las condiciones de contorno, para después obtener las fuerzas de presión ejercidas por el fluido sobre el cuerpo.

Ley de Biot-Savart

Llegados a este punto se tiene un fluido incompresible cuya ecuación de continuidad puede expresarse como

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0,$$

donde esta velocidad puede ser expresada como el rotacional de un campo vectorial \mathbf{B} , de forma que

$$\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{B}.$$

Dado que el rotacional de un vector que deriva de un potencial es nulo, \mathbf{B} puede ser elegido de tal forma que cumpla

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

y la vorticidad entonces queda

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{q} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}.$$

Puede demostrarse que la solución de esta ecuación, usando el Teorema de Green es

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} dV,$$

donde \mathbf{r}_0 representa el vector OP y \mathbf{r}_1 el vector OC, siendo P el punto de interés y C el punto sobre el segmento en cuestión.

La solución a este problema, sin más que introducir la expresión del campo de velocidades \mathbf{q} se expresa como sigue

$$\mathbf{q} = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} dV,$$

donde considerando un elemento infinitesimal de filamento de vorticidad asumiendo una sección transversal normal al vector vorticidad (véase la figura 16), se llega a la famosa expresión de la Ley de Biot-Savart [3]

$$d\mathbf{l} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi} dl, \quad \Gamma = \xi dS, \quad dV = dS dl$$

$$\mathbf{q} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

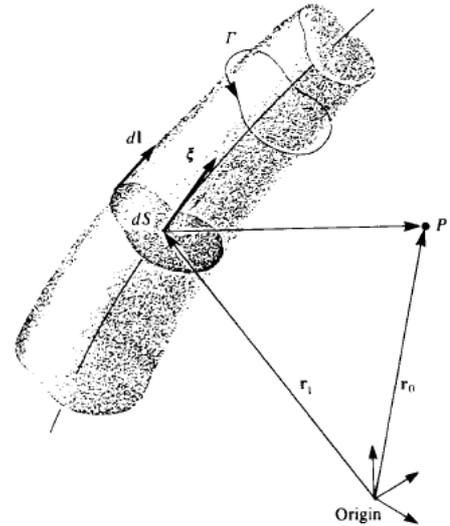


Ilustración 16. Velocidad en un punto P inducida por un segmento de vorticidad [7]

De esta forma, la velocidad generada por un segmento recto de filamento de vórtice puede ser directamente derivada de la expresión de la Ley de Biot-Savart. Así, de acuerdo con el Segundo y Tercer Teorema de Helmholtz, una línea de vórtice no puede terminar en un fluido, sino que debe de extenderse hacia las fronteras del propio fluido o formar un camino cerrado (debido fundamentalmente a la irrotacionalidad del propio fluido). Ello sugiere que la vorticidad deba crearse en los contornos sólidos de los cuerpos, debido principalmente a que los fluidos no son capaces de deslizar sobre ellos. Así, se define un segmento continuo de torbellino de camino cerrado, cuya intensidad es constante (de acuerdo con el Primer Teorema de Helmholtz).

De esta forma, sin más que considerar cuestiones geométricas relacionadas con el propio segmento recto de torbellino y combinarlas con la Ley de Biot-Savart, el campo de velocidades generado por el mismo queda expresado como

$$\mathbf{q}_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{r}_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} \right),$$

donde como puede verse en la figura 17, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son los vectores que van desde el punto de interés hacia el inicio y el final del segmento de torbellino respectivamente, \mathbf{r}_0 es el propio vector que define el segmento de torbellino (no normalizado) y Γ es la intensidad del propio torbellino.

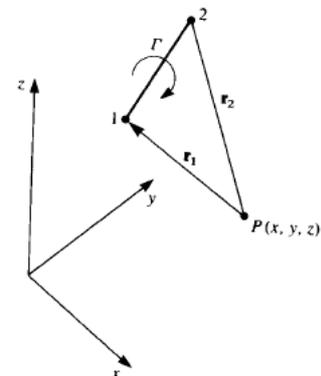


Ilustración 17. Velocidad inducida por segmento de torbellino recto [7]

Sin embargo, esta expresión posee una singularidad [4] cuando el punto P se aproxima al segmento de vorticidad \mathbf{r}_0 , tendiendo las velocidades a infinito cuando el punto se sitúa sobre el propio segmento. Para resolver esta

singularidad se plantean dos posibles soluciones: o bien usar un radio mínimo δ_{min} de aproximación al segmento para evitar tener puntos suficientemente cercanos que induzcan valores excesivamente grandes de velocidad inducida o usar un modelo de viscosidad, en el que un multiplicador en la ecuación eliminará la singularidad en la cercanía a la línea de vórtices.

- Solución de radio límite [4]

$$\vec{V}_{ind} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(r_1 + r_2)(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{(r_1 r_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + (\delta L)^2)}$$

En este caso, L es la longitud de la línea de vorticidad. La principal ventaja es que, de forma simplificada, cuando el punto de evaluación de la velocidad inducida se acerca a la línea en sí, la velocidad tiende a cero. Un valor adecuado del parámetro δ puede encontrarse entre 0 – 0.1.

- Corrección a través de un modelo de viscosidad [4]. Este tipo de correcciones suele realizarse a través de la introducción de un núcleo de vórtice finito, r_c , para el filamento de vórtice. La elección de este modelo de viscosidad deberá de realizarse con especial cuidado ya que el campo de velocidades inducidas tendrá una influencia significativa en la geometría de la estela y en las cargas producidas en las palas. Así, dos modelos principales son utilizados: un radio de núcleo constante (muy simple y altamente utilizado) y el núcleo difusivo viscoso donde el núcleo crece con el tiempo.

Como ejemplo de modelo de viscosidad con radio de vórtice finito, se tiene el propuesto por Vasitas [4]

$$V_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r}{(r_c^{2n} + r^{2n})^{\frac{1}{n}}} \right)$$

Bagai [4] propuso un modelo de viscosidad basado en la ecuación anterior y particularizado para $n = 2$, tomando en consideración un factor K_v como limitador de velocidades

$$\vec{V}_{ind} = K_v \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(r_1 + r_2)(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{(r_1 r_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)(r_1 r_2)}$$

$$K_v = \frac{h^n}{(r_c^{2n} + h^{2n})^{1/n}}$$

siendo h la distancia perpendicular del punto de evaluación a la línea de corriente.

Estos modelos capaces de eliminar la singularidad presente son representados en la ilustración siguiente.

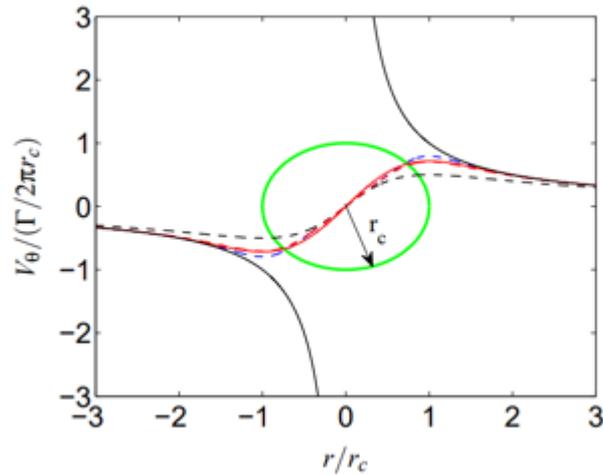


Ilustración 18. Ley de Biot-Savart. Desingularizaciones a través de modelos de viscosidad [4]

En este estudio se utilizará la corrección basada en la elección de un radio límite en el que se considerará la velocidad inducida por el propio segmento de torbellino nula, debido fundamentalmente a la simplicidad del modelo y la menor sensibilidad en los resultados obtenidos en comparación con los casos modelados a través de un modelo de viscosidad. El valor seleccionado para el parámetro *de cut-off* δ generalmente varía entorno a 0 y 0.1, siendo un valor adecuado para este $\delta = 0.001$, de acuerdo a la bibliografía considerada [4].

Problema de las Pequeñas Perturbaciones

Considérese una superficie sustentadora como la representada en la ilustración 19 (por ejemplo, ala, pala de aerogenerador/helicóptero, etc.) moviéndose en el seno de un fluido no perturbado. Un sistema de coordenadas cartesiano se encuentra unido a la propia superficie y las componentes del flujo no perturbado son, esencialmente, U_∞ , V_∞ y W_∞ (según los ejes x , y , z respectivamente) [3].

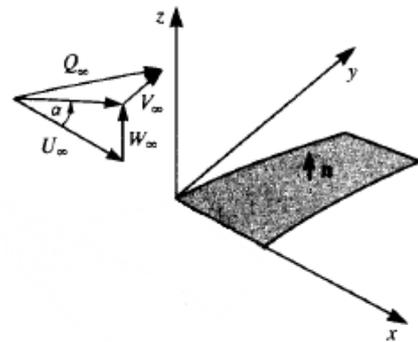


Ilustración 19. Nomenclatura del problema de las pequeñas perturbaciones [7]

El flujo, como ya se comentó en secciones previas se considera irrotacional, no viscoso, estacionario e incompresible, por lo que el campo de velocidades asociado puede obtenerse sin más que obtener la solución a la Ecuación de Laplace sujeta a las condiciones de contorno especificadas. El campo de presiones se encuentra desacoplado en el problema y puede ser calculado a posteriori.

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\nabla \Phi \rightarrow \mathbf{q}_\infty \text{ para } r \rightarrow \infty$$

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \forall P \in \text{Superficie.}$$

La solución analítica a este problema para una geometría arbitraria de superficie sustentadora es compleja debido a la dificultad de especificar la condición de contorno de impenetrabilidad sobre una superficie curva y por la propia forma de la estela. La necesidad de un modelo de estela se hace más notable, ya que, si la superficie sustentadora es considerada como una fuente de vorticidad, es consecuencia directa de los Teoremas de Helmholtz considerar que esta vorticidad es convectada aguas debajo de la propia superficie. Así, algunas simplificaciones serán realizadas sobre esta condición de contorno para poder encontrar soluciones aproximadas al problema.

Las fronteras sólidas de la superficie (ilustración 20) vienen dadas por $z = \eta(x, y)$. Para el caso de superficie con espesor no nulo, las fronteras superiores e inferiores son nombradas como η_u y η_l . Para encontrar el vector normal a la superficie, se considerará la función $F(x, y, z)$ definida como sigue

$$F(x, y, z) = z - \eta(x, y) = 0,$$

y el propio vector normal a la superficie queda entonces

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, -\frac{\partial \eta}{\partial y}, 1 \right).$$

Llegados a este punto, y debido fundamentalmente a la linealidad de la Ecuación de Laplace, el potencial de velocidades puede considerarse como una suma de dos potenciales, el de velocidad no perturbada y el de las pequeñas perturbaciones

$$\Phi = \Phi_\infty + \Phi^*,$$

donde el potencial de velocidad no perturbada se expresa como $\Phi = U_\infty x + V_\infty y + W_\infty z$.

La condición de impenetrabilidad pasa ahora a ser

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + U_\infty, \frac{\partial \Phi}{\partial y} + V_\infty, \frac{\partial \Phi}{\partial z} + W_\infty \right) \cdot \frac{1}{|\nabla F|} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, -\frac{\partial \eta}{\partial y}, 1 \right) = 0,$$

la cual ha de particularizarse para la propia superficie sustentadora (en la cual se ha despreciado la contribución de la velocidad no perturbada en la componente “y”)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(U_\infty + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - W_\infty \quad \forall z = \eta.$$

Ahora bien, como se comentó anteriormente, esta condición de contorno puede expresarse para cualquier geometría y cualesquiera condiciones de flujo no perturbado. Así, algunas simplificaciones serán realizadas. La primera de ellas se corresponde con identificar el problema con uno de pequeñas perturbaciones, es decir, el campo de velocidades perturbación ($\mathbf{q} = \nabla \Phi$) será mucho menor que el no perturbado (Q_∞) resultado de la velocidad ascensional y de rotación

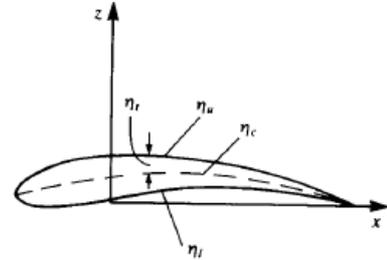


Ilustración 20. Geometría de una sección de superficie sustentadora [7]

$$\frac{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|}{Q_\infty}, \frac{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|}{Q_\infty}, \frac{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|}{Q_\infty} \ll 1.$$

Se ha de remarcar que, si bien esta hipótesis funciona bastante bien para la inmensa mayoría del dominio, en las proximidades de la raíz de la pala, dada la baja velocidad de rotación de esta, esta hipótesis puede no cumplirse, haciendo que los resultados difieran. Para zonas cercanas a la raíz, se ha de recurrir a metodologías más complejas las cuales abordan esta condición de impenetrabilidad en su totalidad, sin simplificaciones (Método de los Paneles [3]).

La segunda de ellas considera los cuerpos a analizar como superficies esbeltas, es decir, la superficie sustentadora tendrá un espesor pequeño en comparación con su cuerda, además de considerar un flujo no perturbado dominante en la dirección “x”

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \eta}{\partial y} \right| \ll 1 \quad \& \quad \frac{W_\infty}{U_\infty} = \tan(\phi_\infty) \approx \phi_\infty \ll 1,$$

donde ϕ_∞ representa el ángulo de entrada de corriente para el campo de velocidades no perturbado. Así, considerando las anteriores hipótesis y recordando que $Q_\infty \approx U_\infty$, la condición de contorno se reduce a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, \eta) = Q_\infty \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \phi_\infty \right) \quad \forall z = \eta,$$

la cual puede ser trasladada al plano $x - z$ a través del Polinomio de Taylor

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z = \eta) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, 0) + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(x, y, 0) + O(\eta^2) \approx \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, 0),$$

por lo que finalmente la condición de contorno a satisfacer se expresa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, 0) = Q_\infty \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \phi_\infty \right).$$

Esta última simplificación de la condición de contorno tiene una fuerte coherencia cuando se tratan superficies sustentadoras esbeltas de pequeño espesor en relación con la cuerda. Además, se ha de remarcar que la zona próxima al borde de ataque de la superficie no será modelada con exactitud dado el incremento de curvatura experimentado.

De esta forma, llegados a este punto, la condición de contorno se encuentra reducida a una ecuación lineal de relativa complejidad, la cual deberá de ser establecida para ambos, el intradós y el extradós del perfil. La forma de la superficie sustentadora es entonces identificada a través de las funciones que definen sus fronteras superior e inferior (η_u y η_l), y a partir de ellas, la cuerda (η_c) y el espesor (η_t) pueden ser fácilmente identificados

$$\begin{aligned} z &= \eta_u(x, y), & z &= \eta_l(x, y) \\ \eta_c &= \frac{1}{2} (\eta_u + \eta_l), & \eta_t &= \frac{1}{2} (\eta_u - \eta_l). \end{aligned}$$

Sin más que manipular las anteriores ecuaciones, las fronteras de la superficie sustentadora pueden ser formuladas de la siguiente manera

$$\eta_u = \eta_c + \eta_t, \quad \eta_l = \eta_c - \eta_t,$$

y consecuentemente la condición de contorno puede dividirse ahora para el intradós y el extradós de la superficie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, 0^+) &= Q_\infty \left(\frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{\partial \eta_t}{\partial x} - \phi_\infty \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, 0^-) &= Q_\infty \left(\frac{\partial \eta_c}{\partial x} - \frac{\partial \eta_t}{\partial x} - \phi_\infty \right). \end{aligned}$$

Finalmente, dado el carácter lineal de la condición de no impenetrabilidad y de la propia Ecuación de Laplace, dos problemas más sencillos:

1. Superficie de perfil simétrico con espesor no nulo a cero ángulos de ataque (Problema simétrico)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_1 &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(x, y, 0^\pm) &= Q_\infty \left(\pm \frac{\partial \eta_t}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

2. Línea de cuerda de espesor nulo a ángulo de ataque (Problema sustentador)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_2 &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x, y, 0^\pm) &= Q_\infty \left(\frac{\partial \eta_c}{\partial x} - \phi_\infty \right). \end{aligned}$$

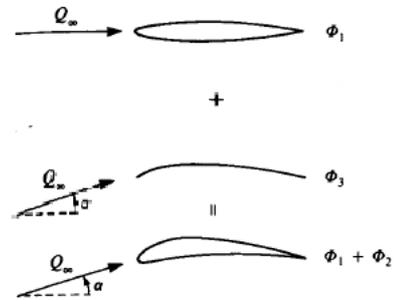


Ilustración 21. Descomposición del problema en sustentador y simétrico [7]

En lo que sigue, el presente documento se centrará en la resolución del problema sustentador, debido fundamentalmente a que está directamente relacionado con la generación de sustentación de los perfiles que componen la superficie. El problema simétrico, en cambio, considera un perfil de velocidad simétrico a ambos lados de los perfiles, produciendo perfiles de velocidades simétrico, y, por ende, distribuciones de presiones igualmente simétrica. Este problema sin embargo se encuentra asociado con la generación de resistencia de fricción, la cual no es abordada a través de una formulación de fluido potencial no viscoso. En apartados futuros, para el cálculo de variables asociadas al fenómeno viscoso, se hará uso de los ángulos de ataque calculados con esta teoría para poder estimarlas a través de información de los perfiles aerodinámicos.

En cuanto al problema sustentador, este es un problema antisimétrico con respecto a la línea $z = 0$, y históricamente puede ser resuelto a través de una distribución de dobletes o vórtices, las cuales son soluciones de la famosa conocida Ley de Biot-Savart y cumplen la condición de contorno en el infinito. En este caso, se considerará una solución basada en torbellinos, puesto que es la más extendida en la literatura dado su simplicidad y calidad en los resultados.

Problema Sustentador

Como se comentó con anterioridad, una distribución de líneas de vórtices se considerará en la pala y la estela consecuentemente [3]. Este modelo resulta muy sencillo de construir, ya que el campo de velocidades generado por un segmento recto de torbellino puede expresarse como

$$\Delta \mathbf{q} = -\frac{\Delta \Gamma \mathbf{r} \times d\mathbf{l}}{4\pi r^3}.$$

Considerando las intensidades de los vórtices distribuidos a lo largo de la dirección y como γ_y , y la de los distribuidos en la dirección x como γ_x , la componente normal de la velocidad inducida a la superficie puede ser expresada como

$$v_{ind_z}(x, y, z) = \int_{superficie+Estela} \frac{\gamma_y(x - x_0) + \gamma_x(y - y_0)}{r^3} dx_0 dy_0.$$

Una puntualización ha de hacerse llegados a este punto, ya que parecen existir dos incógnitas para cada punto (γ_x, γ_y) . Sin embargo, gracias al Teorema de Helmholtz, la intensidad de los vórtices es constante a lo largo de una misma línea, y cualquier cambio en el vórtice ha de realizarse en la dirección, pero no en la intensidad, por lo que se tiene que

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial x},$$

reduciendo el número de constantes a una por punto y, por tanto, teniendo un problema compatible determinado. Esta condición adicionalmente implica que el vector velocidad en la estela ha de ser paralelo a las líneas de vórtices

$$\vec{v} \times \Gamma_{wake} = 0.$$

Sustituyendo en la condición de no impenetrabilidad se tiene la ecuación lineal que permitirá el cálculo de las intensidades de torbellinos, y con ello el campo de velocidades y presiones alrededor de la superficie sustentadora

$$\int_{superficie+Estela} \frac{\gamma_y(x - x_0) + \gamma_x(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dx_0 dy_0 = Q_\infty \left(\frac{\partial \eta_c}{\partial x} - \phi_\infty \right).$$

La ecuación anterior puede reducirse a la siguiente expresión, donde puede verse como el ángulo de ataque efectivo α_{eff} (contribución de la pala en la integral y ángulo que realmente ven cada uno de los perfiles) se corresponde con el ángulo de ataque debido a la corriente no perturbada α menos la componente del ángulo de ataque debido a la velocidad inducida α_i (componente de la estela en la integral, comúnmente conocido como *downwash* para alas). Adicionalmente puede considerarse el ángulo de ataque de sustentación nula del perfil α_{LO}

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i - \alpha_{LO}$$

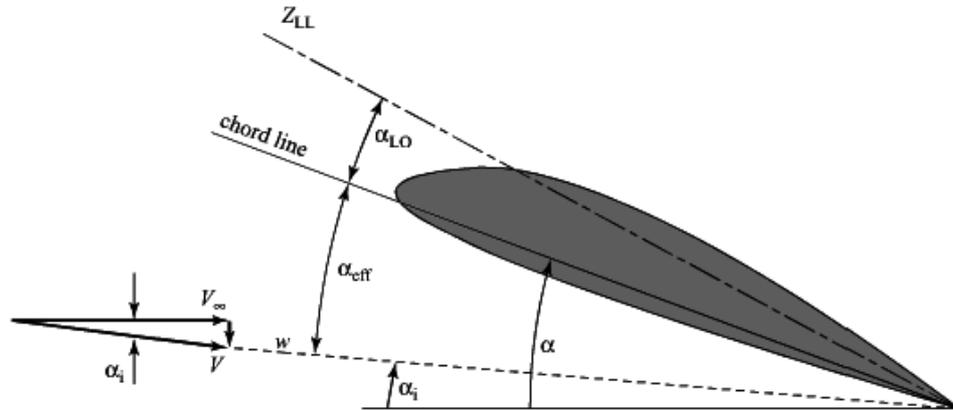


Ilustración 22. Representación angular de la condición de impenetrabilidad [5]

Finalmente, la obtención de las cargas aerodinámicas (Sustentación y Resistencia Inducida) resultan inmediatas tras la obtención del campo de velocidades sobre la superficie sustentadora. De esta forma, el problema sustentador proporciona un campo de velocidades asimétrico con respecto a la línea media del perfil, por lo que las fuerzas generadas estarán debidas a la propia distribución no simétrica de presiones sobre el intradós (0^-) y el extradós (0^+). Sin más que recordar la Ecuación de Bernoulli previamente derivada, la presión puede ser expresada como

$$p_\infty - p = \frac{\rho}{2}(q^2 - Q_\infty^2) = \rho Q_\infty \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

considerando el campo de velocidades $\mathbf{q} = \left(Q_\infty \cos(\phi_\infty) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} + Q_\infty \sin(\phi_\infty) \right)$ y asumiendo ángulos pequeños, $\phi_\infty \ll 1$. El coeficiente de presiones puede ser calculado sin más que sustituir la expresión anterior en la definición de este

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho Q_\infty^2} = -\frac{2}{Q_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Las fuerzas aerodinámicas \mathbf{F} pueden ser entonces calculadas sin más que integrar la presión a lo largo de toda la superficie como

$$\mathbf{F} = - \int_{Sup} \Delta p \mathbf{n} dS$$

$$\Delta p = \rho Q_{\infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, 0^+) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, 0^-) \right).$$

Sin más que particularizar para el caso de una distribución de vórtices en el plano $x - z$, la expresión anterior queda como

$$\Delta p = \rho Q_{\infty} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, 0^+) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, 0^-) \right) = \rho Q_{\infty} \gamma_y(x, y).$$

Finalmente, utilizando el Teorema de Kutta (véase Joseph Katz, pag. 148), puede verse como la fuerza resultante de la integración del campo de presiones es perpendicular a la corriente incidente. Así, las expresiones anteriores pueden ser reducidas a las siguientes

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{Q}_{\infty} \times \Gamma \rightarrow L = \rho Q_{\infty} \Gamma, \quad D = 0.$$

Modelo de Estela

El desarrollo realizado hasta este punto sugiere que la solución a la Ecuación de Laplace puede ser realizada a través de una distribución a priori arbitraria de torbellinos [3] satisfaciendo la condición de impenetrabilidad en la superficie sustentadora. De esta forma, la solución no es única y un valor cualquiera para la circulación puede ser considerado. Para resolver esta problemática considérese los siguientes tres problemas: (a) Circulación igual a cero, (b) Circulación es tal que el flujo en el borde de salida es paralelo a este en el borde y (c) Una circulación mayor que en el caso anterior. En este caso, la opción de circulación correcta es la (b), y la Condición de Kutta establece que el flujo alrededor de un perfil sale a la estela a través del borde de salida (afilado) de una forma suave, sin rebordes, y, por tanto, con velocidades finitas (véase figura 23). Esto es posible debido a que hay un punto de remanso situado en el borde de salida

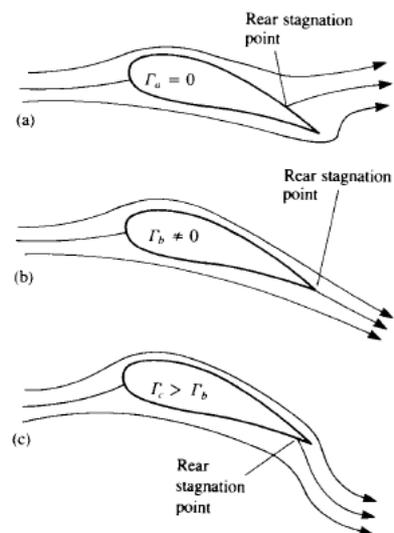


Ilustración 23. Posibles soluciones para el flujo alrededor de un perfil [3]

$$\Delta p_{B.S} = 0 \rightarrow \gamma_{B.S} = 0$$

Por otro lado, de acuerdo con la forma de la estela y la manera de discretizar la geometría del problema, se puede establecer la siguiente clasificación

- 1 **Método de la Línea/Superficie Sustentadora con los siguientes modelos de estela**
 - a. Estela helicoidal preescrita.
 - b. Modelos de estela semi-espéricos (Landgrebe).
 - c. Modelo de estela libre.
- 2 **Método de los paneles**
 - a. Estela helicoidal preescrita.

- b. Modelos de estela semi-espéricos (Landgrebe).
- c. Modelo de estela libre.

En el análisis aerodinámico de las palas de rotor, se utilizan dos enfoques principales: la metodología de la línea sustentadora y la metodología de la superficie sustentadora. La primera simplifica las palas como líneas infinitesimales para estudiar su interacción con el flujo de aire, mientras que la segunda considera la pala como una superficie bidimensional para una mayor precisión. Ambas consideran aproximaciones para describir la geometría de la pala. Además, se emplean modelos de estela para describir cómo se comporta la estela detrás de las palas, desde modelos simples (estela helicoidal) hasta modelos más complejos que consideran fenómenos como la contracción de la estela y las variaciones en la velocidad del aire (modelo de Landgrebe y estela libre). En el presente estudio únicamente se tratará el modelo de estela rígido helicoidal [1] [2].

Pasando a metodologías más avanzadas se encuentra el método de los paneles [3], el cual considera la geometría real de la superficie sustentadora, y no simplificaciones como en el caso anterior. Además, esta metodología es combinable con todos los modelos de estela previamente enunciados.

Consideraciones Asociadas al Propio Rotor

La formulación desarrollada hasta el momento es aplicable para alas (siempre y cuando se den las hipótesis consideradas), sin embargo, la derivación a rotores resulta inmediata sin más que puntualizar lo siguiente [5]:

- 1) La corriente incidente ahora posee dos componentes: una componente paralela al eje de rotación, la cual se corresponde con la velocidad de ascenso V_c y una segunda componente contenida en el plano del rotor y debida a la rotación Ωr , siendo r la distancia desde el centro de rotación al punto en cuestión considerado.
- 2) Cada una de las palas es considerada una superficie sustentadora, por lo que cada una de estas deberá de ser considerada para obtener las magnitudes de interés. Sin embargo, debido a la axilsimetría del problema, los cálculos se limitarán al estudio de una de las palas.

Es muy importante remarcar el hecho de que, si bien no se consideran más palas que una para el análisis, las estelas del resto de palas han de considerarse en el análisis, ya que el campo de velocidades en cada una de las palas estará influenciado por las estelas del resto de palas.

- 3) Se considerará la hipótesis de independencia de los perfiles únicamente para el cálculo de la potencia parásita, debido fundamentalmente a los efectos de viscosidad no modelados en este proyecto. Se realizará una descripción más detallada de este punto en el desarrollo de las teorías.
- 4) La velocidad de rotación ahora posee dos componentes (ambas contenidas en el plano de rotación) por lo que esta deberá de ser descompuesta según x e y como sigue

$$V_{rot_x} = \Omega y, \quad V_{rot_y} = \Omega x, \quad V_{rot} = \Omega \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- 5) Cada una de las palas es considerada como un sólido rígido, cuyo único movimiento es el de rotación. Movimientos de batimiento, arrastre y la propia aeroelasticidad de las palas no son considerados en el análisis.
- 6) La estela es considerada helicoidal y con un movimiento uniforme aguas abajo con la velocidad media en la sección del rotor, $V_{est_z} = V_c + \bar{v}_{ind_z}$. Esta velocidad inducida media será producto de aplicar las relaciones de la TCM a los resultados de esta teoría, $\bar{v}_{ind_z} = \frac{P_{ind-asc}}{T}$, obteniendo una velocidad

inducida promedio en la pala con la que propagar la estela.

A continuación, se exponen las teorías previamente mencionadas con mayor grado de detalle [5].

3.2. Método de la Línea Sustentadora Asumiendo Estela Rígida Helicoidal

La Teoría de la Línea Sustentadora fue originariamente postulada por Prandtl en 1921 y es válida para alas/palas con relación de aspecto mucho mayor que la unidad ($AR > 4$). Es de igual manera válida para alas esbeltas o ligeramente curvadas. Esta teoría sustituye el ala por una línea recta de vórtices de intensidad variable en dirección radial, denominados “bound Vortex” y localizados a $1/4$ de la cuerda del ala desde el borde de ataque. En los puntos de colocación se determinan los valores de la velocidad inducida, la intensidad de los vórtices, la corriente incidente y la velocidad rotacional y se encuentran posicionados a $3/4$ de cuerda de cada sección. En esta aproximación, los vórtices de borde de salida son generados a través de las diferencias de circulación en dirección radial (horseshoe vórtices). Estos son creados por todos los puntos discretos del ala construyendo una estela helicoidal con diámetro y paso constantes. Esta estela helicoidal, induce un campo de velocidades en el rotor que reduce el ángulo de ataque visto por cada una de las secciones, α_{eff} .

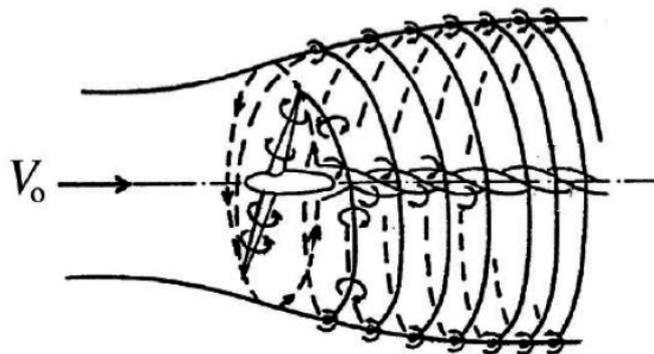


Ilustración 24. Estela bajo el rotor [5]

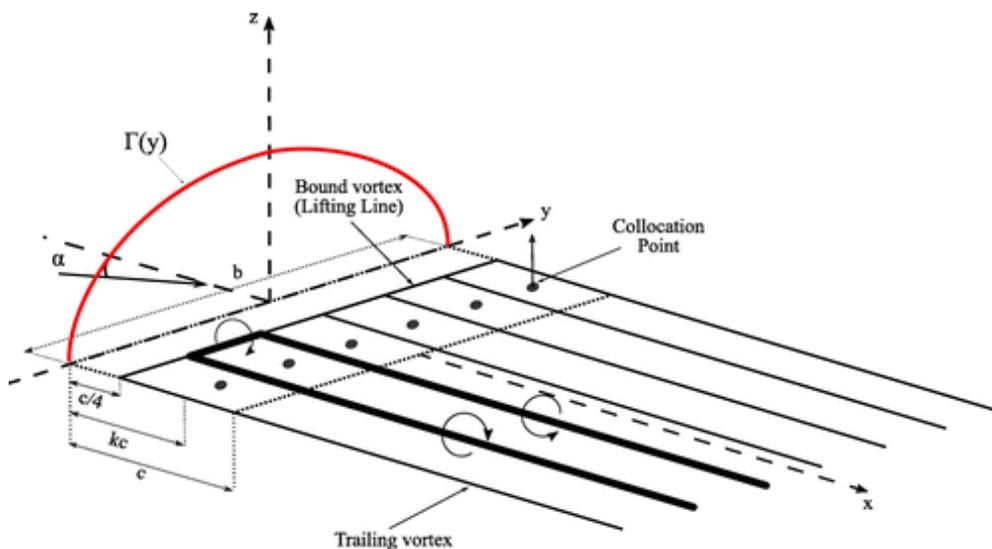


Ilustración 25. Superficie sustentadora y estela para el caso de ala recta [17]

Una solución adecuada para este problema deberá de cumplir la Condición de Kutta alrededor del borde de salida, tal que la componente tangencial de la vorticidad paralela al borde de salida es cero. Esta es la razón por la que la línea de vórtices es colocada a $c/4$ del borde de ataque, tal y como se representa en la ilustración 24. La distribución de circulación $\Gamma(y)$ se establece a través de la envergadura, no proporcionando información sobre distribuciones de esta en la dirección de la cuerda, lo que hace de esta teoría poco adecuada para perfiles con distribución de torsión y cuerda variables.

De acuerdo con el teorema de Helmholtz, una línea de vórtices no puede comenzar o acabar en un fluido, por lo que la solución deberá de cumplir

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial y},$$

donde γ_x y γ_y son las densidades de circulación por unidad de longitud hacia las direcciones x e y respectivamente. De esta forma, si hay un cambio en la línea de corriente deberá de existir ese mismo cambio en la otra dirección, por lo que el segmento no acaba en un punto, sino que cambia de dirección. Este requerimiento se reduce a que el vector velocidad en la estela debe de ser paralelo a las líneas de vórtices. De esta forma, la geometría resultante para el sistema de vórtices (*Horseshoe*) queda representado en la figura 26 y 26, donde el primero de los vórtices (segmento CD) se asume despreciable dado que se encuentra suficientemente lejos como para despreciar su influencia ($Influencia \propto \frac{1}{disntacia^2}$).

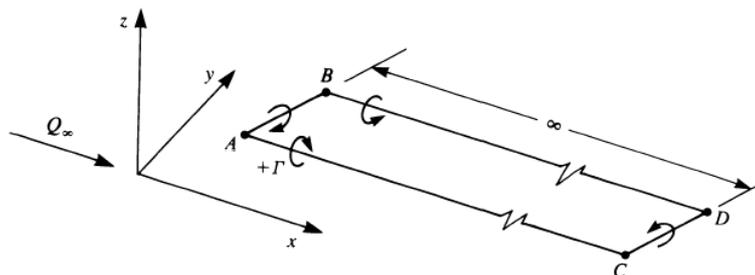


Ilustración 26. Geometría de las líneas de vórtices [7]

Sin embargo, aún no se ha explicado por qué los puntos de colocación se posicionan a $3c/4$. Pues bien, considérese una placa plana, cuya sustentación queda reducida a $c/4$ del borde de ataque (centro de presiones). Si la superficie sustentadora es sustituida por un único vórtice, entonces la condición de impenetrabilidad debe de ser establecida en un único punto, por lo que el problema queda reducido a una ecuación. Tomando de la teoría de Prandtl que la circulación de una placa plana es $\Gamma = \pi c Q_\infty \alpha$, donde c es la cuerda de la placa, Q_∞ la velocidad a la que esta está sometida y α el ángulo de ataque. Así, la condición de contorno puede expresarse como

$$\frac{-\Gamma}{2\pi(kc - c/4)} + Q_\infty \alpha = \frac{-\pi c Q_\infty \alpha}{2\pi(kc - c/4)} + Q_\infty \alpha = 0 \rightarrow k = \frac{3}{4},$$

donde queda cerrada la geometría del problema y la estela.

En la siguiente figura se muestra una representación de la pala y estela para el caso del rotor considerado en el presente trabajo (descrito en la siguiente sección), donde pueden verse los puntos de colocación representados en verde, la línea de vórtices en dirección y en azul y las líneas de vórtices formando la estela representada en

roja. Para la pala se utiliza el color negro. Así, como puede verse, se tiene una estela puramente helicoidal cuyos puntos de comienzo son los asteriscos rojos representados con mayor claridad en la figura de la izquierda. La geometría del problema en mayor detalle será descrita a continuación.

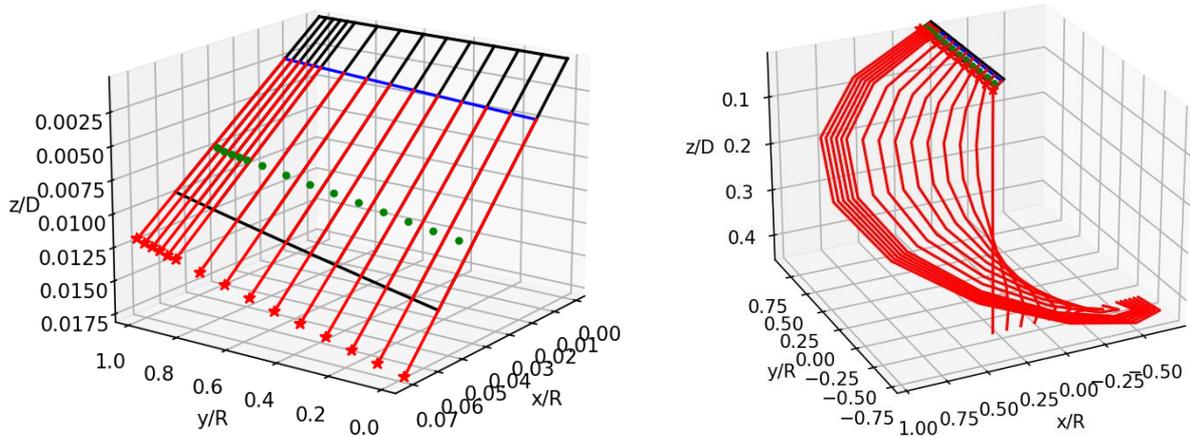


Ilustración 27. Pala y estela para la Teoría de la Línea Sustentadora

Geometría del rotor y sistema de coordenadas

La geometría del rotor será definida a través de 6 variables: cuerda (c), radio interior (R_i), radio exterior (R_{ext}), número de palas (b), ángulo de paso colectivo (θ_0) y ángulo de torsión lineal (θ_1). Se considera un radio interior ya que en la zona de unión de las palas se suele encontrar el buje del rotor, el cual no contribuye a la tracción de este, sino que es una importante fuente de resistencia parásita. Además, todas las palas se consideran idénticas.

En lo referente al sistema de coordenadas, en este caso el eje Y se considera alineado con la línea sustentadora, estando ésta contenida en el propio eje y comenzando en el eje de rotación. El eje Z se ubica en posición axial siendo positivo en el sentido de la corriente incidente (hacia abajo) y el eje X completa el diedro según la regla de la mano derecha.

Corriente incidente

La corriente incidente para el caso de rotores es más compleja que para el caso de alas, ya que la propia velocidad de rotación del rotor es considerada como velocidad no perturbada, además de la velocidad ascensional (ilustración 28). Así, tomando el sistema de referencia previamente definido, la velocidad ascensional sería positiva en la componente Z y la velocidad de rotación sería positiva en la componente X, aunque variable para el avance en Y.

$$\mathbf{q}_\infty = \begin{Bmatrix} \Omega y \\ \Omega x \\ V_c \end{Bmatrix}$$

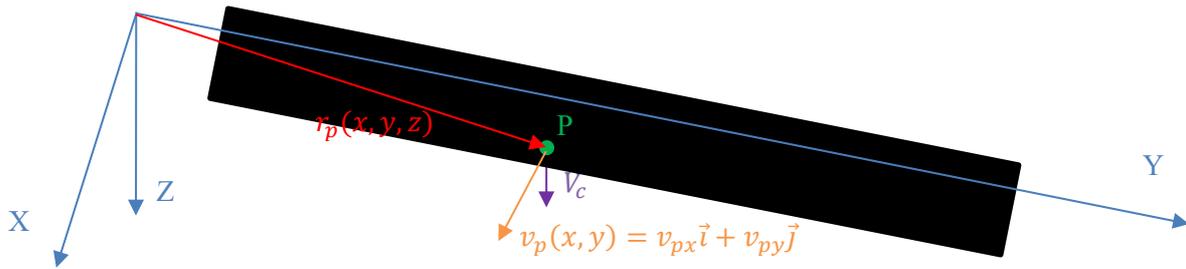


Ilustración 28. Campo de velocidades no perturbado para un punto sobre la pala

Discretización de la pala y estela

Como se comentó al principio de la sección, la pala es considerada una línea sustentadora dividida en secciones de ancho uniforme $(R - Ri)/(N - 1)$, donde N es el número de divisiones de la pala (ilustración 29). Cuantas más divisiones, más precisa será la solución, pero más tiempo de computación conllevará alcanzarla.

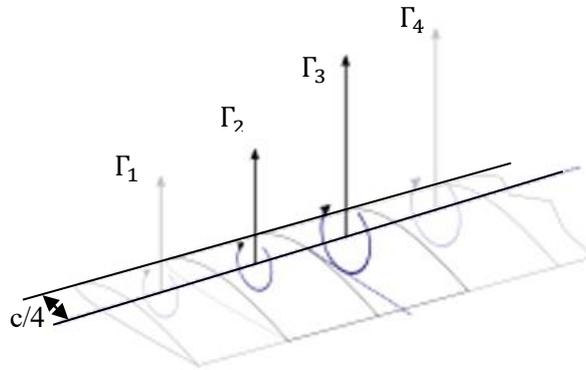


Ilustración 29. Cuatro divisiones de la pala en la Teoría de la Línea Sustentadora [13]

Como podrá verse más adelante, resulta de un alto interés el considerar la zona de la punta más refinada en cuanto a divisiones se refiere, por lo que al final un modelo de discretización de dos zonas resulta más recomendable. Así, la discretización ahora pasaría a tener dos parámetros, N_1 y N_2 los cuales definen las divisiones de cada una de las regiones, además de un punto de división, que se sitúa en torno al 80–90% de la envergadura. De esta forma, la pala quedaría ahora discretizada de la siguiente manera,

$$I = \left[Ri, Ri + \frac{0.85R - Ri}{N_1 - 1}, Ri + 2 \cdot \frac{0.85R - Ri}{N_1 - 1}, \dots, 0.85R \right] U \left[0.85R, 0.85R + \frac{R - 0.85R}{N_2 - 1}, 0.85R + 2 \cdot \frac{R - 0.85R}{N_2 - 1}, \dots, R \right],$$

donde se considera el 85% de la pala como punto de división.

Con motivo de abordar el problema de una forma numérica la estela ha de dividirse de igual manera que se ha realizado con la pala, de forma que la contribución de cada una de las divisiones de esta se corresponderá con la contribución de la estela al completo. En el presente estudio se realiza la hipótesis de segmentos rectos de estela, es decir, no se consideran segmentos helicoidales de estela, sino que se sustituyen estos por segmentos rectos en el espacio 3D. De esta forma, cuanto más pequeño sea el paso de avance sobre la estela, más próxima estará la aproximación a la solución proporcionada por un segmento helicoidal.

El paso de avance en la dirección axial de la estela quedará definido por la siguiente expresión $t_{wake} = \Delta\Phi/\Omega$, donde t_{wake} es el tiempo entre pasos, $\Delta\Phi$ es el avance de la pala y Ω es la propia velocidad angular de la pala. Aquí, el único parámetro a decidir una vez fijado el rotor y sus condiciones de operación es $\Delta\Phi$, cuya reducción aumentará la precisión en los resultados. El valor de este parámetro será discutido más adelante en función de la sensibilidad del método.

Para la discretización de la estela considérese la siguiente ilustración, que si bien representa el caso de alas fijas es suficientemente ilustrativa para el caso de aplicación. El segmento AB se corresponde con un segmento de la pala, donde se encuentran ubicados los denominados “bound vórtices” y los segmentos AC, BD, CD y DF conforman la estela, denominados como “trailing vórtices”. De esta forma, la estela puede ser discretizada como sigue.

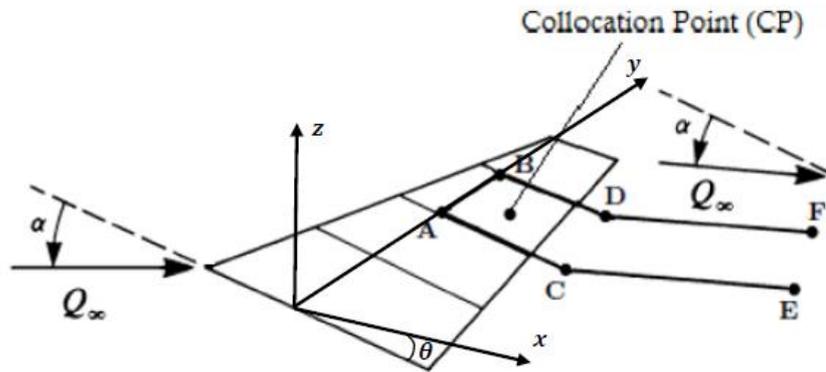


Ilustración 30. Discretización de pala y estela para la metodología de la Línea Sustentadora [5]

$$A_i \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_i + \frac{(R - R_i)}{N}(i - 1) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$B_i \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_i + \frac{(R - R_i)}{N}(i) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$C_i \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c(A_i(y))\cos(\theta(A_i(y))) \\ A_i(y) \\ c(A_i(y))\sin(\theta(A_i(y))) \end{Bmatrix}$$

$$D_i \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c(B_i(y))\cos(\theta(B_i(y))) \\ B_i(y) \\ c(B_i(y))\sin(\theta(B_i(y))) \end{Bmatrix}$$

$$E_i \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_i(x) + A_i(y)\sin(\Omega t_w k) \\ C_i(y) + A_i(y)\cos(\Omega t_w k) \\ C_i(z) + V_z t_w k \end{Bmatrix}$$

$$F_i \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_i(x) + B_i(y) \sin(\Omega t_w k) \\ D_i(y) + B_i(y) \cos(\Omega t_w k) \\ D_i(z) + V_{estz} t_w k \end{Bmatrix}$$

Otro aspecto que considerar es la longitud de la estela. De acuerdo con la literatura [8] todo parece indicar que para longitudes de estela de alrededor de cuatro diámetros las soluciones son bastante precisas. No obstante, al igual que en el caso anterior, se realizará un estudio de sensibilidad para este parámetro en capítulos posteriores. El indicador de avance sobre la estela es definido como sigue

$$k = \frac{i \cdot D}{V_{estz} t_w},$$

donde i es el índice de, D es el diámetro del rotor, V_{estz} es la velocidad de traslación axial de la estela y t_w es el tiempo entre pasos previamente definido. En la sección 4, una vez realizado el estudio de sensibilidad se determinará el valor máximo para i , en función de la convergencia de las soluciones.

Sin embargo, esta formulación únicamente permite calcular la velocidad inducida sobre la pala de referencia producida por su estela. Para completar el desarrollo se han de considerar las estelas de cada una de las palas del rotor. Para ello se introducirá el concepto matriz de rotación, elemento algebraico que permite rotar elementos en el espacio euclídeo. Por lo general, las palas se encuentran equiespaciadas φ grados por lo que se tendrán que definir $b - 1$ matrices de rotación, siendo b el número de palas del rotor considerado

$$\varphi_j = \frac{360}{b} \cdot j, \text{ con } j \in [1, b) \forall b > 1$$

$$M_{rot_j} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_j) & -\sin(\varphi_j) & 0 \\ \sin(\varphi_j) & \cos(\varphi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma, es inmediato el obtener las estelas de cada una de las diferentes palas del rotor a partir de la pala de referencia considerada. Dada la axilsimetría del problema, el estudio de una pala se corresponde con el estudio de todas y cada una de ellas. Así, el problema se encuentra perfectamente definido para proceder al cálculo de la circulación y velocidad inducida sobre la pala.

Circulación y velocidad inducida

Para obtener la velocidad inducida sobre las secciones discretizadas de pala, primero se ha de calcular la distribución de circulación sobre la misma. Para ello un sistema lineal de ecuaciones ha de ser establecido a partir de la condición de contorno previamente mencionada (Condición de impenetrabilidad) establecida para cada punto de colocación en cada uno de los puntos de la pala.

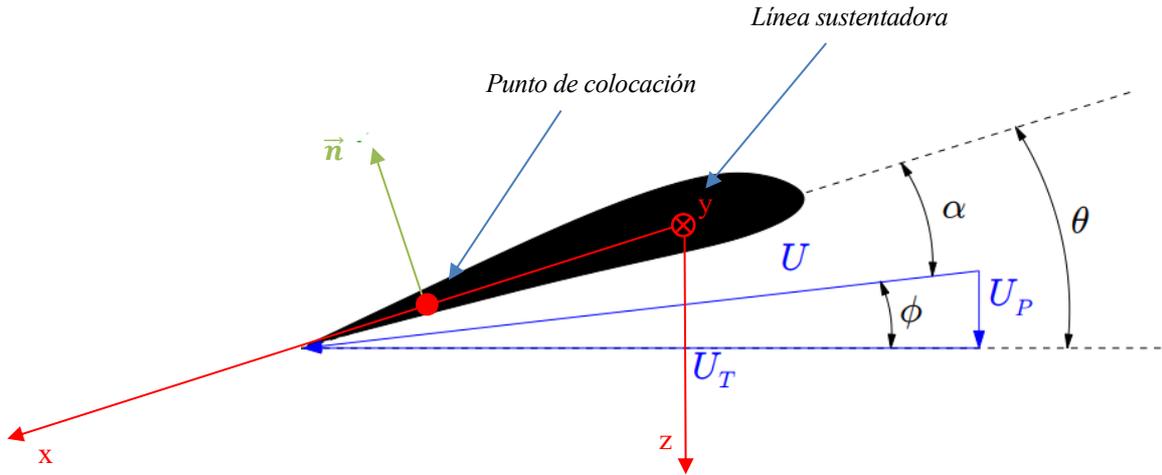


Ilustración 31. Sistema de referencia, ángulos, velocidad y vector normal sobre el perfil aerodinámico [6]

Para poder aplicar esta condición, primeramente, se ha de definir el vector normal a la propia superficie sustentadora. En este caso, el vector normal estará definido sobre el propio punto de colocación y este tendrá la siguiente expresión

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \sin(\theta(PC_i(y))) \\ 0 \\ -\cos(\theta(PC_i(y))) \end{Bmatrix},$$

donde PC_i se corresponde con el punto de colocación de cada una de las secciones, el cual puede ser definido como

$$PC_i = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{c}{2} \cos(\theta((A_i(y) + B_i(y))/2)) \\ (B_i(y) + A_i(y))/2 \\ \frac{c}{2} \sin(\theta((A_i(y) + B_i(y))/2)) \end{Bmatrix}.$$

Nótese que en el vector normal no se considera que tenga componente en y, debido a la simplificación realizada sobre la condición de contorno de impenetrabilidad en apartados anteriores.

Así, el sistema linear de ecuaciones puede ser montado como

$$\begin{aligned} a_{11}\Gamma_1 + a_{12}\Gamma_2 + a_{13}\Gamma_3 + \dots + a_{1N}\Gamma_N &= -\mathbf{Q}_{wind_1} \cdot \overline{\mathbf{n}}_1 \\ a_{21}\Gamma_1 + a_{22}\Gamma_2 + a_{23}\Gamma_3 + \dots + a_{2N}\Gamma_N &= -\mathbf{Q}_{wind_2} \cdot \overline{\mathbf{n}}_2 \\ a_{31}\Gamma_1 + a_{32}\Gamma_2 + a_{33}\Gamma_3 + \dots + a_{3N}\Gamma_N &= -\mathbf{Q}_{wind_3} \cdot \overline{\mathbf{n}}_3, \\ &\vdots \\ a_{N1}\Gamma_1 + a_{N2}\Gamma_2 + a_{N3}\Gamma_3 + \dots + a_{NN}\Gamma_N &= -\mathbf{Q}_{wind_N} \cdot \overline{\mathbf{n}}_N \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_{im} representan la influencia de la sección m sobre la sección i, Γ_m se corresponde con

la circulación de la sección m y el término independiente se corresponde con la proyección de la velocidad no perturbada sobre la normal de cada uno de los puntos de colocación de las secciones i . De esta forma, los coeficientes a_{im} se presenta la siguiente expresión

$$a_{im} = (u, v, w)_{im} \cdot \vec{n}_i,$$

donde \vec{n}_i se corresponde con la normal del punto de colocación i y $(u, v, w)_{im}$ se corresponden con las componentes de la velocidad inducida en las direcciones x, y y z respectivamente de la sección m sobre el punto de colocación i . El sistema de ecuaciones resultante puede ser expresado como

$$A\Gamma = B \rightarrow \Gamma = A^{-1}B,$$

donde la circulación puede ser calculada directamente. Para el cálculo de la velocidad inducida se han de considerar la contribución de todos y cada uno de los segmentos de estela (con circulación ahora conocida) sobre los puntos de colocación, considerando las estelas de cada una de las palas del rotor

$$V_{ind_P_Ci} = \sum_{k=1}^b \sum_{j=1}^{N_r-1} \vec{V}_{ind_ijk},$$

donde \vec{V}_{ind_ij} se corresponde con la velocidad inducida sobre el punto de colocación de la sección i producida por la sección j . Realizando este cálculo para todos los puntos de colocación se tendrá la distribución de velocidad inducida sobre los puntos de colocación sobre la pala.

Cálculo de fuerzas aerodinámicas

Para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas considérese la integral de superficie del campo de presiones sobre la superficie sustentadora

$$\mathbf{F} = b \int_S \Delta p \mathbf{n} dS = \int_S \rho Q_\infty \Gamma (\cos(\phi) \bar{i} + \sin(\phi) \bar{j}) dx dy \approx c \sum_{i=1}^{N-1} \rho Q_\infty \Gamma_i \Delta y_i (\cos(\phi_i) \bar{i} + \sin(\phi_i) \bar{j}),$$

siendo \bar{i} y \bar{j} los vectores directores unitarios según las componentes x e y respectivamente y Δy_i el ancho diferencial de la rebanada i considerada.

Sin más que descomponer en las direcciones espaciales x y z , se tienen las fuerzas de batimiento y arrastre para el rotor completo (véase la figura 32)

$$F_b = F_z = \int_S \rho Q_\infty \Gamma \cos(\phi_i) dx dy \approx \sum_{i=1}^{N-1} \rho Q_\infty \Gamma_i \Delta y_i \cos(\phi_i)$$

$$F_a = F_x = \int_S \rho Q_\infty \Gamma \sin(\phi_i) dx dy \approx \sum_{i=1}^{N-1} \rho Q_\infty \Gamma_i \Delta y_i \sin(\phi_i)$$

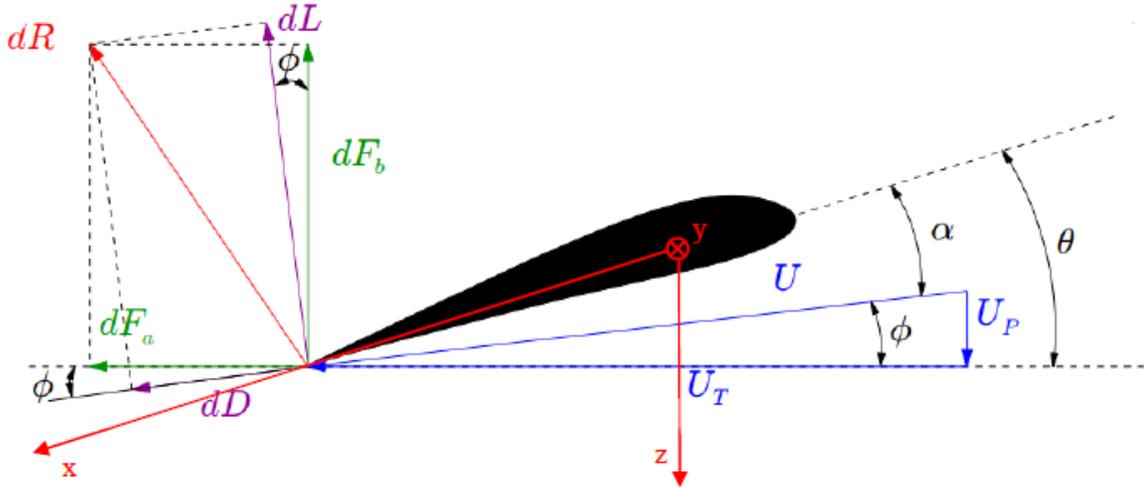


Ilustración 32. Fuerzas de arrastre y batimiento para una sección de la pala

La tracción y la potencia pueden ser calculadas sin más que integrar las contribuciones individuales de cada una de las secciones y considerando todas las palas del rotor

$$T = b \sum_{i=1}^N F_{b_i} = b \sum_{i=1}^N \rho Q_{\infty_i} \Gamma_i \Delta y_i n_{z_i} = b \rho \sum_{i=1}^{N-1} Q_{\infty_i} \Gamma_i \Delta y_i \cos(\phi_i)$$

$$P_{ic} = b \sum_{i=1}^N F_{a_i} \Omega r_i = b \sum_{i=1}^N \rho Q_{\infty_i} \Gamma_i \Delta y_i \Omega y_i n_{x_i} = b \rho \Omega \sum_{i=1}^{N-1} Q_{\infty_i} \Gamma_i \Delta y_i y_i \sin(\phi_i),$$

donde la velocidad aguas arriba se define como

$$Q_{\infty} = \sqrt{(\Omega d)^2 + (V_c + v_i\{z\})^2}, \text{ con } d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La adimensionalización de la tracción y potencia resulta inmediata sin más que considerar las definiciones de los coeficientes de tracción y potencia C_T y C_P respectivamente

$$C_T = \frac{b \rho \sum_{i=1}^N Q_{\infty_i} \Gamma_i \Delta y_i \cos(\phi_i)}{\rho A (\Omega r)^2}$$

$$C_{P_{ic}} = \frac{b \rho \Omega \sum_{i=1}^N Q_{\infty_i} \Gamma_i \Delta y_i y_i \sin(\phi_i)}{\rho A (\Omega r)^3}.$$

Finalmente, para el cálculo de la potencia parásita, al tratarse de una teoría potencial que modela un flujo no viscoso, esta no puede ser calculada de forma directa utilizando esta teoría. Sin embargo, en aras de obtener un valor aproximado con el que poder comparar con el resto de las teorías, el campo de velocidades resultado del problema será utilizado para calcular la distribución de ángulos de ataque a lo largo de la pala y con ello y la información del perfil aerodinámico que será presentado en la siguiente sección, poder calcular el valor de esta

potencia. A continuación, se detalla el proceso de cálculo en mayor detalle

$$\alpha = \theta - \phi = \theta_0 + \frac{\theta_1 y}{R} - \tan^{-1} \left(\frac{V_c + v_i \{z\}}{\Omega y} \right)$$

$$C_{P0} = \frac{1}{2} \sigma \int_{\bar{y}_{ini}}^1 C_d(\alpha) \bar{y}^3 d\bar{y}, \quad \text{con } \bar{y} = \frac{y}{R}.$$

Así, sin más que realizar la integral numérica, la expresión final para la el coeficiente de potencia de forma C_{P0} queda

$$C_{P0} \approx \frac{1}{2} \sigma \sum_{i=1}^{N-1} C_d(\alpha_i) \bar{y}_i^3 \Delta \bar{y}_i,$$

y el valor de la potencia resultaría la suma de las anteriores

$$C_P = C_{P_{ic}} + C_{P_0} = \frac{b \rho \Omega \sum_{i=1}^N Q_{\infty i} \Gamma_i \Delta y_i y_i \sin(\phi_i)}{\rho A (\Omega d)^3} + \frac{1}{2} \sigma \sum_{i=1}^{N-1} C_d(\alpha_i) \bar{y}_i^3 \Delta \bar{y}_i.$$

Metodología

En esta última sección se presenta el diagrama de flujo del método de resolución al completo. Un aspecto de relevancia al que aún no se ha hecho referencia en secciones anteriores es que en este proyecto la tracción a proporcionar por el rotor está impuesta, es decir, se han de calcular el resto de las variables para garantizar una tracción impuesta (problema de actuaciones). Por lo tanto, el ángulo de paso colectivo será una incógnita del problema y deberá de incluirse un bucle para iterar hasta la convergencia del método.

Dado que la tracción está directamente relacionada con este ángulo de paso colectivo a través de la sustentación y resistencia (ángulo de ataque), esta puede ser expresada de la siguiente forma

$$T = f(g, \theta_0, V_c, \dots),$$

donde g representa la geometría del problema de la pala y estela, θ_0 se corresponde con el ángulo de paso colectivo y V_c representa la velocidad ascensional del rotor.

De esta forma, estableciendo el valor de la tracción requerida por el rotor, T_{req} , se puede establecer la ecuación para el cálculo del ángulo de paso en cada iteración

$$T_{req} - T = 0 \rightarrow \theta_0|_{it}.$$

La convergencia será alcanzada cuando la diferencia (ϵ) entre valores del ángulo de paso colectivo entre iteraciones contiguas sea inferior a un valor establecido

$$\epsilon [\%] = \left| \frac{\theta_0|_{it_l} - \theta_0|_{it_{l-1}}}{\theta_0|_{it_l}} \right| \cdot 100,$$

donde l se refiere al número de iteración para la convergencia en θ_0 . Un valor apropiado para épsilon se corresponde con $\epsilon = 0.01$, es decir, errores relativos del orden del 0.01 %, por lo que el criterio de convergencia queda expresado como

$$\epsilon \leq 0.01.$$

Finalmente, de acuerdo con el diagrama de flujo presentado en la página siguiente (ilustración 33), en los dos primeros bloques se introducen los datos del rotor y de la actuación en cuestión, de los cuales beberá el *solver* para proporcionar los resultados. Además, la pala es dividida en las diferentes secciones, dependiendo del parámetro N , pues las secciones serán $N - 1$. Es en este punto donde se definen los puntos de colocación y la línea sustentadora como tal.

El tercero de los bloques no es más que una función, la función que establece la relación entre distancias entre los respectivos segmentos de torbellinos y las secciones de la pala a considerar. Así, dadas estas distancias previamente mencionadas, proporciona la influencia de los diferentes segmentos en las secciones definidas.

En los siguientes dos bloques, las matrices de influencia para el cálculo de la circulación y la velocidad inducida. Estas son matrices auxiliares necesarias para el cálculo de las magnitudes previamente expresadas. Además, las matrices de rotación dependiendo del número de palas son creadas y la tolerancia para el error relativo entre dos iteraciones consecutivas para θ_0 es establecida como $TOL = 10^{-4}$. En el segundo de los bloques, se establece un pequeño bucle para completar la matriz B (matriz de velocidad no perturbada) y al igual que se hizo con la pala, se discretiza la estela, partiendo desde la propia línea sustentadora ya discretizada en el segundo bloque.

Los siguientes bloques enmarcados dentro del rectángulo negro, se corresponden con el grueso del problema y con los cálculos que mayor esfuerzo computacional exigen. En este subproceso se completa la matriz A mientras se avanza a través de todos y cada uno de los puntos en los que la estela ha discretizada, de forma que cuando esta es recorrida por completo se puede calcular la circulación en la pala, y por ende la velocidad inducida. Estableciendo las relaciones para las fuerzas aerodinámicas expresadas con anterioridad se puede obtener el ángulo de paso colectivo requerido para la potencia a desarrollar y con ello, comprobar la convergencia del método. En caso de no conseguirse la convergencia, se actualiza el valor del ángulo de paso y la velocidad de propagación axial de la estela y se vuelve al inicio del subproceso; en caso contrario, la potencia inducida, ascensional y de forma pueden ser calculadas y las consecuentes gráficas pueden ser representadas. Llegados a este punto el método ha convergido y la solución es válida, aunque la precisión dependerá fundamentalmente del refinamiento de la pala y estela.

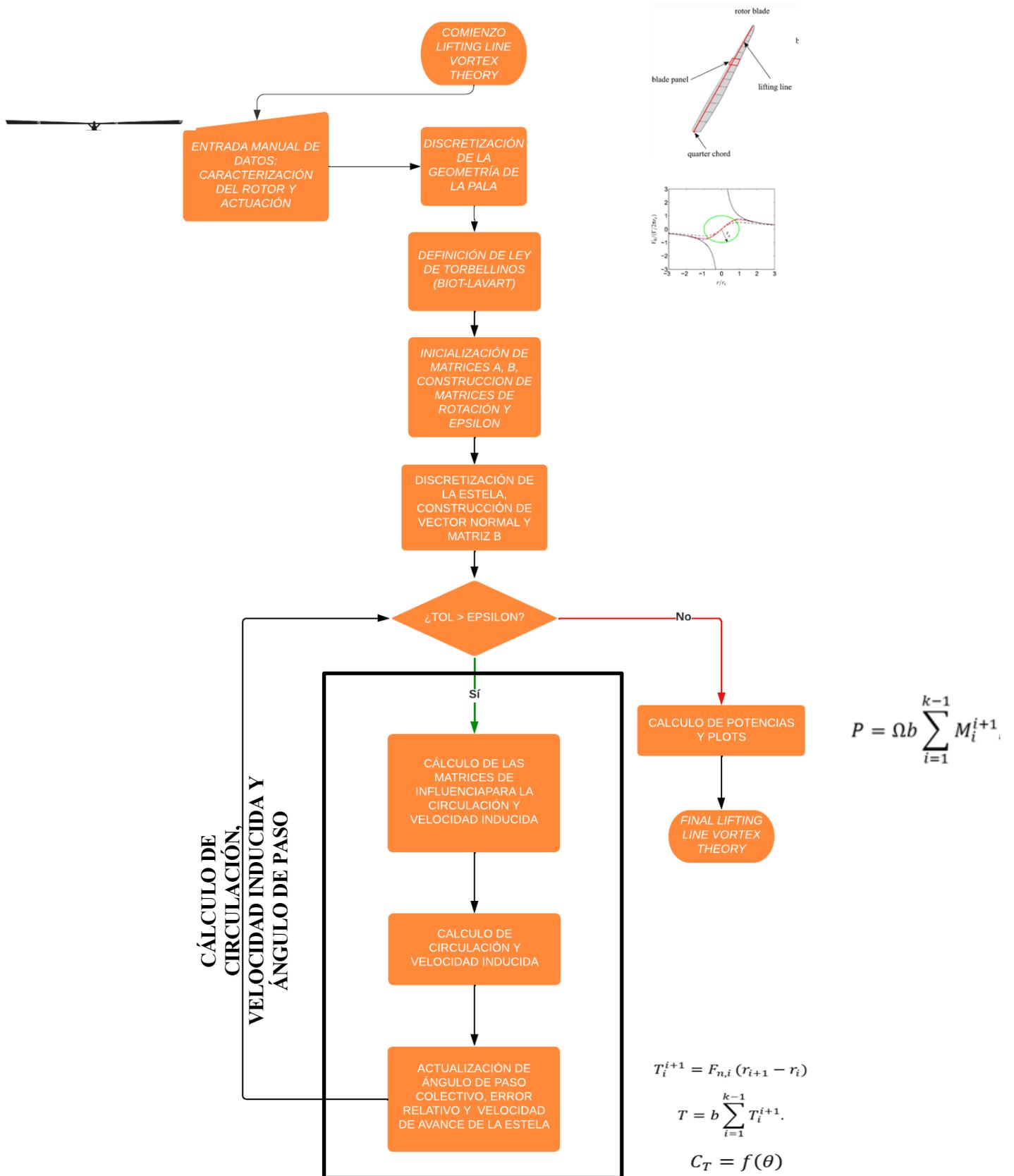


Ilustración 33. Diagrama de flujo para la Teoría de la Línea Sustentadora

3.3. Método de la Superficie Sustentadora Asumiendo Estela Rígida Helicoidal

La metodología de la superficie sustentadora no es más que una extensión de la anterior teoría, en la que la superficie sustentadora se asume como lo que es, una superficie. Así, en lugar de considerar una línea discretizada en secciones, ahora se considerarán diversos paneles (fruto de la discretización a lo largo de la cuerda y de la envergadura). Esta teoría es más adecuada para superficies en las que la cuerda no sea constante y en las que exista curvatura.

Así, tratando de modelar la geometría de la superficie sustentadora (fundamentalmente la curvatura), esta es dividida en paneles, tanto en la dirección de la cuerda (índice “i”) como en la dirección de la envergadura (índice “j”) (véase figura 34). Cada panel contiene un vórtice de intensidad Γ_{ij} constante en cada uno de los paneles a considerar y regida por la regla de la mano derecha. Ahora, cada panel en la superficie tiene asociado un anillo de vórtices de intensidad constante, con la excepción de los paneles más próximos a los bordes de salida. En aras de cumplir la Condición de Kutta-Joukowski, la posición del anillo de vórtices comienza a $\frac{1}{4}$ de la longitud del panel en dirección de la cuerda, y el punto de colocación de cada panel está ubicado a $\frac{3}{4}$ de cada panel, es decir, en la mitad del panel que define el anillo de vórtices (véase la ilustración 35). De forma adicional, para satisfacer la condición de tridimensionalidad en el borde de salida, la intensidad de los vórtices situados en la estela más próximos al borde de salida han de ser iguales que los situados en la última fila de paneles (en dirección de la cuerda) situados en la propia superficie, $\Gamma_{TE} = \Gamma_{Wake}$. Este fenómeno queda representado en la ilustración 36.

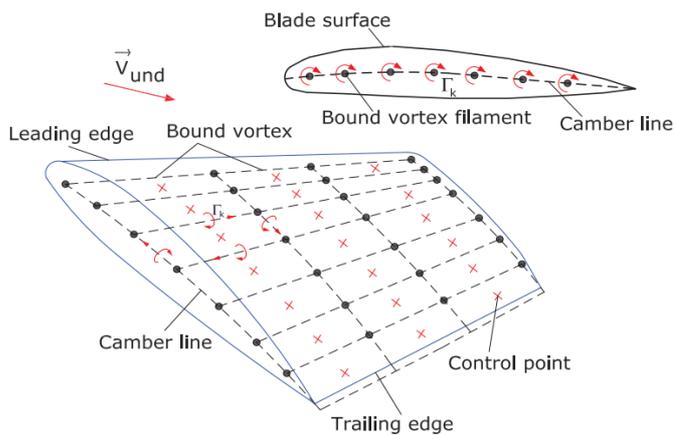


Ilustración 34. Geometría de la superficie para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]

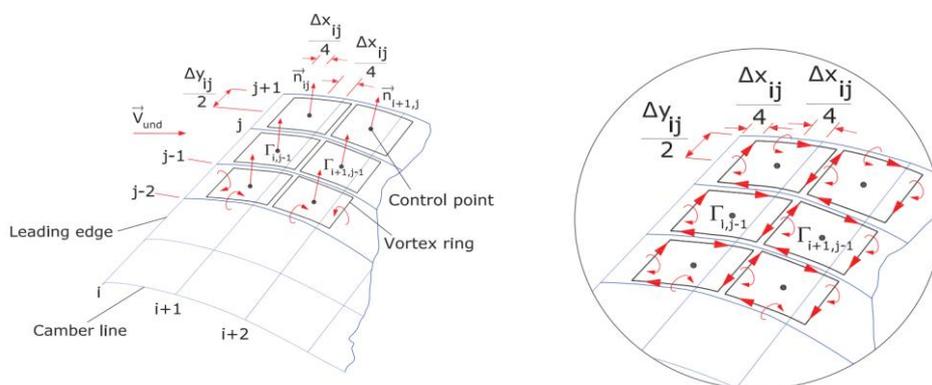


Ilustración 35. Anillos de vórtices sobre la pala para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]

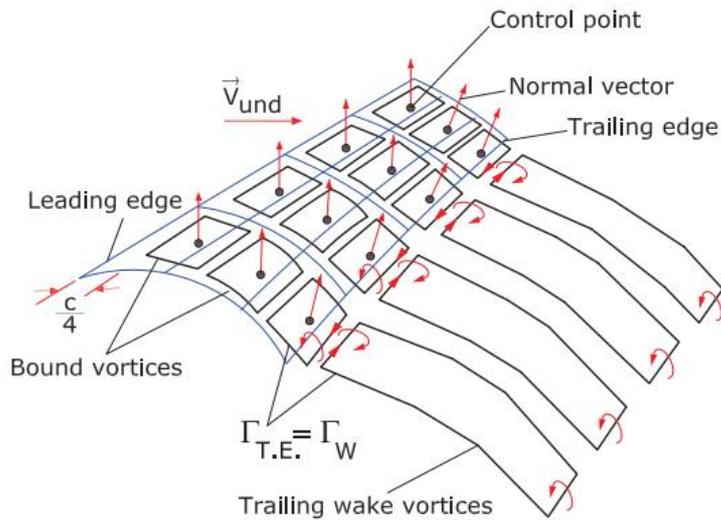


Ilustración 36. Geometría de la superficie sustentadora y estela para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]

Geometría y Sistema de Referencia

Como resulta obvio, la geometría del rotor resulta ser la misma, por lo que en este aspecto no hay cambios con respecto al caso anterior. Sin embargo, ahora no tenemos una única línea sustentadora, sino que habrá tantas líneas sustentadoras como paneles ubicados a lo largo de la cuerda de la superficie, por lo que el sistema de referencia cartesiano a utilizar ahora deberá de ser diferente. Así, tratando de posicionar a este de igual forma independientemente del número de divisiones, este es ubicado en el borde de ataque de la pala, de forma que el eje y coincide con este, el eje z es positivo en la dirección axial de la velocidad ascensional (hacia abajo) y el eje x completa el triedro de acuerdo con la regla de la mano derecha (véase figura 37).

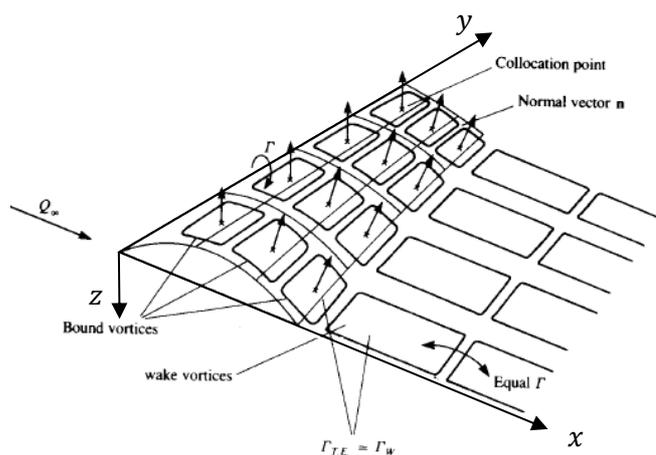


Ilustración 37. Discretización de pala y estela para la metodología de la Superficie Sustentadora [7]

Discretización de la Pala y Estela

En este caso se deberá de prestar más atención, ya que, si bien en el caso de la estela, la discretización se realiza de forma idéntica al caso anterior (ya que esta es asumida igualmente helicoidal y rígida), la superficie ahora es discretizada de forma diferente, ya que tenemos que abordar dos discretizaciones diferentes (aunque no independientes), la de la superficie y la del propio sistema de vórtices.

Ahora, se tendrán dos parámetros diferentes, N_r para la discretización a lo largo de la envergadura y N_c para la discretización a lo largo de la cuerda, de forma que los paneles tendrán un ancho $w_r = \frac{R-R_i}{N_r-1}$ y $w_c = \frac{c}{N_c-1}$, representando el ancho según envergadura y cuerda respectivamente. Así, considérese un panel genérico correspondiente a la superficie, identificado por su nodo en posición más cercana a la raíz y al borde de ataque, de índices (i, j) (véase figura siguiente), los nodos que definen el panel pueden ser expresados como

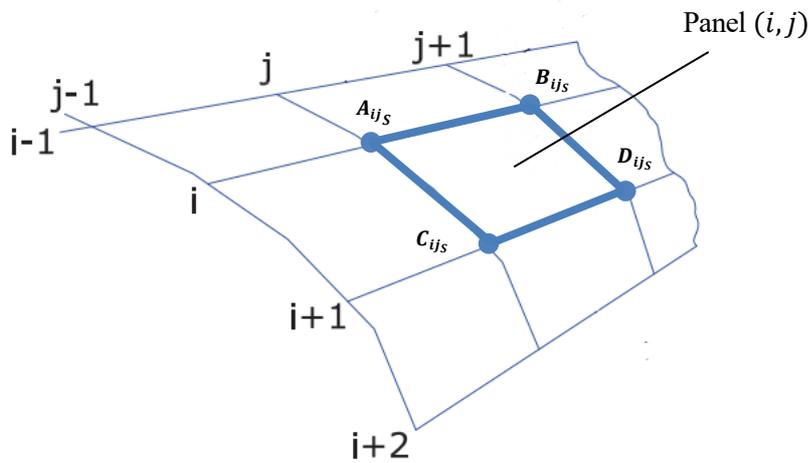


Ilustración 38. Detalle discretización de la superficie de la pala para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]

$$A_{ijs} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = M_{rot_y} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{c}{N_c}(i) \\ R_i + \frac{(R - R_i)}{N}(j) \\ z_c(x) \end{Bmatrix}$$

$$B_{ijs} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = M_{rot_y} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{c}{N_c}(i) \\ R_i + \frac{(R - R_i)}{N}(j + 1) \\ z_c(x) \end{Bmatrix}$$

$$C_{ijs} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = M_{rot_y} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{c}{N_c}(i + 1) \\ R_i + \frac{(R - R_i)}{N}(j) \\ z_c(x) \end{Bmatrix}$$

$$D_{ijs} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = M_{rot_y} \begin{Bmatrix} \frac{c}{N_c}(i+1) \\ R_i + \frac{(R-R_i)}{N}(j+1) \\ z_c(x) \end{Bmatrix}$$

$$M_{rot_y} = \begin{Bmatrix} \cos(-\theta(y)) & 0 & \sin(-\theta(y)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta(y)) & 0 & \cos(-\theta(y)) \end{Bmatrix},$$

donde M_{rot_y} no es más que la matriz de rotación de un ángulo $-\theta$ alrededor del eje y . Este ángulo depende a su vez de la coordenada y y pues la torsión sigue una función lineal con el avance en la envergadura. El subíndice s representa que los puntos se corresponden a la superficie, y no a la red de vórtices, lo cuales serán indicados con el subíndice v .

Cabe destacar que la discretización realizada en este trabajo es puramente lineal, y los segmentos que unen los diferentes nodos de la superficie son líneas rectas. Por otro lado, para la discretización de la red de vórtices y la posición de los puntos de colocación, estos son realizados a partir de la discretización de la superficie sustentadora, como puede verse en la figura 39.

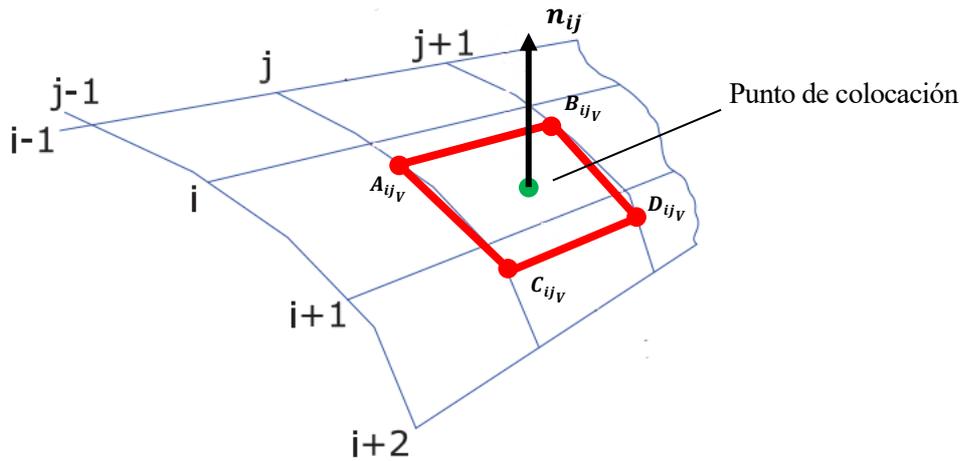


Ilustración 39. Detalle discretización red de vórtices para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]

$$A_{ijv} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{ijs}\{x\} + \frac{C_{ijs}\{x\} - A_{ijs}\{x\}}{4} \\ A_{ijs}\{y\} \\ A_{ijs}\{z\} + \frac{C_{ijs}\{z\} - A_{ijs}\{z\}}{4} \end{Bmatrix}$$

$$B_{ijv} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{ijs}\{x\} + \frac{D_{ijs}\{x\} - B_{ijs}\{x\}}{4} \\ B_{ijs}\{y\} \\ B_{ijs}\{z\} + \frac{D_{ijs}\{z\} - B_{ijs}\{z\}}{4} \end{Bmatrix}$$

$$C_{ijv} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{ijs}\{x\} + \frac{A_{i+1js}\{x\} - C_{ijs}\{x\}}{4} \\ C_{ijs}\{y\} \\ C_{ijs}\{z\} + \frac{A_{i+1js}\{z\} - C_{ijs}\{z\}}{4} \end{Bmatrix}$$

$$D_{ijv} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{ijs}\{x\} + \frac{B_{i+1js}\{x\} - D_{ijs}\{x\}}{4} \\ D_{ijs}\{y\} \\ D_{ijs}\{z\} + \frac{B_{i+1js}\{z\} - D_{ijs}\{z\}}{4} \end{Bmatrix}.$$

Por otro lado, para la discretización de la estela (véase ilustración 32), esta se realiza de la misma manera que en el caso anterior, ya que como se comentó con anterioridad la estela es puramente helicoidal

$$E_j \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{N_cj}\{x\} + A_{N_cj}\{y\}\sin(\Omega t_w k) \\ C_{N_cj}\{y\} + A_{N_cj}\{y\}\cos(\Omega t_w k) \\ C_{N_cj}\{z\} + V_z t_w k \end{Bmatrix}$$

$$F_j \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{N_cj}\{x\} + B_{N_cj}\{y\}\sin(\Omega t_w k) \\ D_{N_cj}\{y\} + B_{N_cj}\{y\}\cos(\Omega t_w k) \\ D_{N_cj}\{z\} + V_z t_w k \end{Bmatrix}.$$

Finalmente, se ha de recordar el hecho de que la influencia de las redes de vórtices de resto de palas han de ser consideradas en el desarrollo, por lo que al igual que en el caso anterior, la matriz de rotación para la red de vórtices ha de ser empleada e incluida en la metodología.

Circulación y velocidad inducida

De forma similar al caso anterior, para calcular la distribución de velocidad inducida, así como las cargas aerodinámicas en la superficie, primero se ha de obtener la distribución de circulación de la red de vórtices considerada. Dado que la pala se encuentra dividida en N_c secciones en dirección de la cuerda y N_r secciones en la dirección de la envergadura, ahora se han de considerar m puntos de colocación, con $m = (N_r - 1) \cdot (N_c - 1)$, donde la ecuación de impenetrabilidad ha de ser particularizada.

El sistema linear de ecuaciones puede ser montado como

$$\begin{aligned}
a_{11}\Gamma_1 + a_{12}\Gamma_2 + a_{13}\Gamma_3 + \cdots + a_{1M}\Gamma_M &= -Q_{wind_1} \cdot \vec{n}_1 \\
a_{21}\Gamma_1 + a_{22}\Gamma_2 + a_{23}\Gamma_3 + \cdots + a_{2M}\Gamma_M &= -Q_{wind_2} \cdot \vec{n}_2 \\
a_{31}\Gamma_1 + a_{32}\Gamma_2 + a_{33}\Gamma_3 + \cdots + a_{3M}\Gamma_M &= -Q_{wind_3} \cdot \vec{n}_3 \\
&\vdots \\
a_{M1}\Gamma_1 + a_{M2}\Gamma_2 + a_{M3}\Gamma_3 + \cdots + a_{MM}\Gamma_M &= -Q_{wind_M} \cdot \vec{n}_M
\end{aligned}$$

donde los vectores normales son expresados de igual forma que en el caso anterior

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} \sin(\theta(PC_i(y))) \\ 0 \\ -\cos(\theta(PC_i(y))) \end{Bmatrix},$$

y los puntos de colocación PC_i de cada una de las secciones, los cuales pueden ser definidos como

$$PC_{ij} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(A_{ij}\{x\} + B_{ij}\{x\})}{4} + \frac{((C_{ij}\{x\} + D_{ij}\{x\}))}{4} \\ \frac{(A_{ij}\{y\} + B_{ij}\{y\})}{2} \\ \frac{(A_{ij}\{z\} + B_{ij}\{z\})}{4} + \frac{((C_{ij}\{z\} + D_{ij}\{z\}))}{4} \end{Bmatrix}.$$

Cabe destacar que la componente y del vector normal dada la simplificación realizada sobre la condición de contorno en la descripción teórica de la metodología. De esta forma, únicamente las componentes x y z son consideradas.

Para el cálculo de la velocidad inducida se han de considerar la contribución de todos y cada uno de los segmentos de estela sobre los puntos de colocación, considerando las estelas de cada una de las palas del rotor

$$V_{ind_{PCij}} = \sum_{l=1}^b \sum_{k=1}^{N_r-1} \vec{V}_{ind_{lk}}.$$

Cálculo de fuerzas aerodinámicas

Para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas, al igual que en el caso anterior, se ha de considerar la integral de superficie del campo de presiones sobre la superficie sustentadora, así como la Ley de Kutta. Sin embargo, ahora, para cada panel, tenemos la influencia de los dos anillos de vórtices contiguos en la dirección de la cuerda (véase la figura 40).

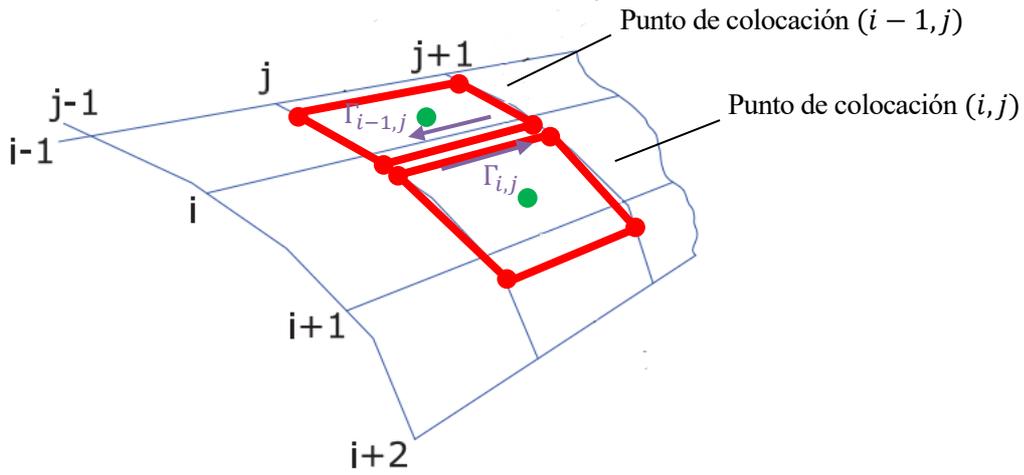


Ilustración 41. Concurrencia de anillos de vórtices en paneles para la Teoría de la Superficie Sustentadora [4]

$$\mathbf{F} = b \int_S \Delta p \mathbf{n} dS = \int_S \rho Q_\infty \Delta \Gamma (\cos(\phi) \bar{i} + \sin(\phi) \bar{j}) dx dy$$

$$\mathbf{F}_{ij} \approx \rho Q_{\infty ij} (\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,j}) (\cos(\phi_{ij}) \bar{i} + \sin(\phi_{ij}) \bar{j}) \Delta y_{ij} \quad \forall i \neq 1$$

$$\mathbf{F}_{1j} \approx Q_{\infty ij} (\Gamma_{1j}) (\cos(\phi_{1j}) \bar{i} + \sin(\phi_{1j}) \bar{j}) \Delta y_{1j} \quad \forall i = 1$$

$$\mathbf{F} \approx \sum_{i=1}^{N_c-1} \sum_{j=1}^{N_r-1} \mathbf{F}_{ij}$$

La expresión de las fuerzas de arrastre y resistencia son obtenidas de forma idéntica al caso anterior.

Como se ha mencionado previamente, esta teoría proporciona distribuciones de variables relevantes tanto en dirección cuerda como en envergadura. Para llevar a cabo una comparación adecuada con las otras teorías abordadas en este estudio, se requiere realizar un ajuste. Como cierre de este capítulo, se presentarán las expresiones necesarias para calcular las variables medias, para el análisis comparativo de la Teoría de la Superficie Sustentadora.

Comenzando por la distribución de circulación media en cada una de las rebanadas, esta puede ser calculada de la fuerza de sustentación de cada una de las rebanadas

$$l_j \approx \sum_{i=1}^{N_c-1} L_{ij} = \rho Q_{\infty ij} \Gamma_{1j} \Delta y_{1j} + \sum_{i=2}^{N_c-1} \rho Q_{\infty ij} (\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,j}) \Delta y_{ij} \rightarrow \bar{\Gamma}_j = \frac{l_j}{\rho \bar{V}_{TOTj}}$$

donde la velocidad media en la sección se asume $\bar{V}_{TOTj} = \sqrt{(\Omega r_j)^2 + (V_c + \bar{V}_{ind})^2}$, donde la velocidad

inducida media se corresponde con la obtenida de la propagación axial de la estela (expresada a continuación).

Para el ángulo de ataque medio, se considera la componente en el plano del rotor de la fuerza aerodinámica previamente calculada. Así, sin más que utilizar la expresión para la velocidad inducida, se tiene que

$$\bar{V}_{indj} = \left(\frac{(\sum_{i=1}^{N_c-1} \mathbf{F}_{ij} \cdot \bar{\mathbf{i}})}{(\sum_{i=1}^{N_c-1} \mathbf{F}_{ij} \cdot \bar{\mathbf{j}})} \right) \cdot \Omega r_j - V_c,$$

y el ángulo de ataque es obtenido sin más que sustituir en la expresión para la velocidad inducida

$$\bar{\alpha}_j = \theta_0 + \theta_1 \cdot \frac{y}{R} - \tan \left(\frac{V_c + \bar{V}_{indj}}{\Omega r_j} \right).$$

Una vez la distribución de ángulo de ataque medio es obtenida a lo largo de la pala (y este es interpolado), la potencia parásita puede ser obtenida sin más que aplicar la formulación siguiente

$$C_{P0} = \frac{1}{2} \sigma \int_{\bar{y}_{ini}}^1 C_d(\bar{\alpha}(y)) \bar{y}^3 d\bar{y}, \quad \text{con } \bar{y} = \frac{y}{R}.$$

Metodología

En cuanto a la metodología, no existe ninguna diferencia con respecto a la metodología anteriormente expuesta, por lo que esta puede tomarse como igualmente propia de esta teoría.

4 CARACTERIZACIÓN DEL ROTOR

El helicóptero, más que aeronave milagro

-Anónimo-

En este capítulo, se presenta el modelo de rotor utilizado en el presente trabajo, introduciendo los valores que caracterizan la geometría de este. Además, se presentan los dos perfiles aerodinámicos a tratar principalmente durante las Teorías de Elemento de Pala.

4.1. Caracterización del Rotor

Para la caracterización del rotor se toma como referencia el helicóptero MMB Bo 105 [9], una aeronave ligera y polivalente desarrollada por el fabricante alemán Bölkow en Stuttgart, Alemania. En el año 1991, este helicóptero pasó a formar parte del grupo Eurocopter (Airbus Helicopters). Airbus continuó la fabricación de esta aeronave hasta el año 2001, año en que esta fue reemplazada por el Eurocopter EC135.

Así, el helicóptero MMB Bo 105 (representado en la ilustración 42) se corresponde con el helicóptero ligero bimotor más pequeño del mundo. Esta cualidad le abrió un nuevo segmento de mercado tras la Segunda Guerra Mundial, buscando comodidad, economía y seguridad. Otro aspecto para destacar de esta aeronave es el hecho de no presentar articulaciones de batimiento en el rotor dada la introducción del material compuesto en la fabricación de las palas (fibra de vidrio). El Bo 105 sería también el primer helicóptero de la historia en realizar looping de 360° [9].



Ilustración 42. Helicóptero MMB Bo 105. Helicóptero de la Guardia Civil Española hasta el año 2001 [9].

Entre las características del rotor principal de esta aeronave, se pueden destacar las siguientes:

ESPECIFICACIÓN	UNIDAD	VALOR
Número de palas (b)	[-]	4
Revoluciones de diseño (Ω)	[Rpm]	424
Diámetro (D)	[m]	9.8
Radio inicio pala (R_i)	[m]	0.01
Cuerda (c)	[m]	0.3

Tabla 1. Especificaciones del rotor principal de helicóptero MMB Bo 105 [10]

El radio inicial de la pala no se indica en las especificaciones del rotor. Este es tomado como 0.01 m para acercarse lo máximo posible a 0 sin incurrir en posibles errores numéricos derivados de los cálculos.

Para obtener la tracción necesaria a proporcionar por el rotor se utilizará el peso máximo operativo de la aeronave, $M_{max} = 2500 \text{ kg}$. De esta forma, asumiendo una aceleración de la gravedad de $g = 10 \text{ m/s}^2$ (únicamente por motivos de simplicidad), se una tracción de

$$T = 25000 \text{ N}.$$

Por otro lado, para la caracterización más local del rotor, se asumirá una distribución de cuerda constante y una distribución de torsión lineal expresada como sigue

$$\theta = \theta_0 + \frac{\theta_1 r}{R} = \left(\theta_0 - \frac{\pi r}{18 R} \right),$$

donde la torsión lineal utilizada es un valor típico empleado en el modelado de rotores en operación de vuelo axial, $\theta_1 = -10^\circ$ [6].

Finalmente, la pala se considerará compuesta íntegramente por perfiles aerodinámicos NACA 0012 y VR-12, cuyas características aerodinámicas principales vienen expresadas en la siguiente tabla y han sido extraídos de [11]. El rango de valores para el ángulo de ataque estará comprendido entre $\alpha \in [1,12]^\circ$ tratando de adaptar las regresiones lo máximo posible a los resultados obtenidos con las diversas teorías.

Ángulo ($^\circ$)	C_l	C_d
0	0	0.00717
2	0.2100	0.00725
4	0.4267	0.00804
6	0.6996	0.00962
8	0.9243	0.01143
10	1.1046	0.01364

12	1.2881	0.01673
-----------	--------	---------

Tabla 2. Valores de los coeficientes de resistencia y sustentación para el perfil NACA 0012 [11]

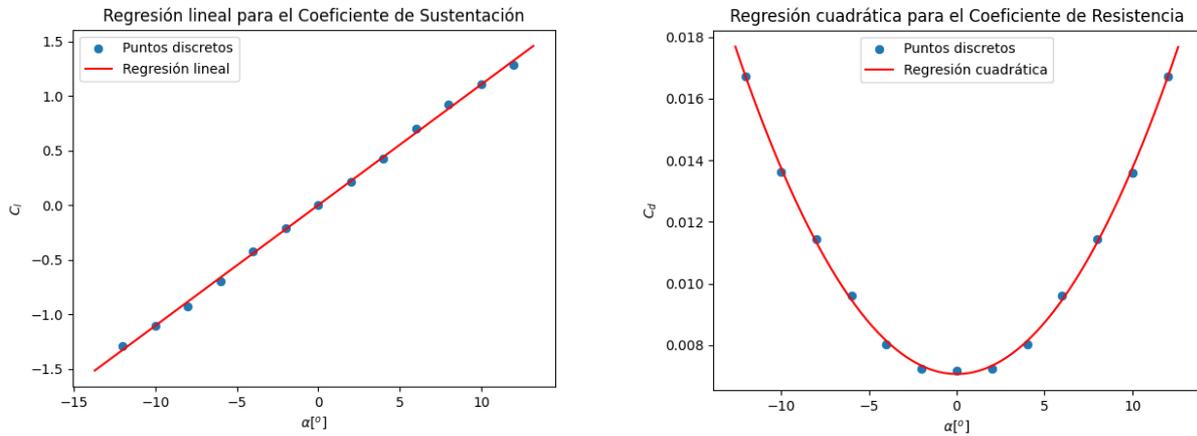


Ilustración 43. Regresiones lineales y cuadrática para los coeficientes de sustentación y resistencia aerodinámicos (NACA 0012) [11]

Ángulo (°)	C_l	C_d
-12	-1.0395	0.03218
-10	-0.9001	0.01886
-8	-0.7247	0.01460
-6	-0.5157	0.01292
-4	-0.2992	0.01111
-2	-0.0837	0.00870
0	0.1270	0.00606
2	0.4449	0.00785
4	0.6860	0.00881
6	0.8882	0.00994
8	1.0805	0.01151
10	1.2626	0.01346
12	1.4196	0.01659

Tabla 3. Valores de los coeficientes de resistencia y sustentación para el perfil VR-12 [11]

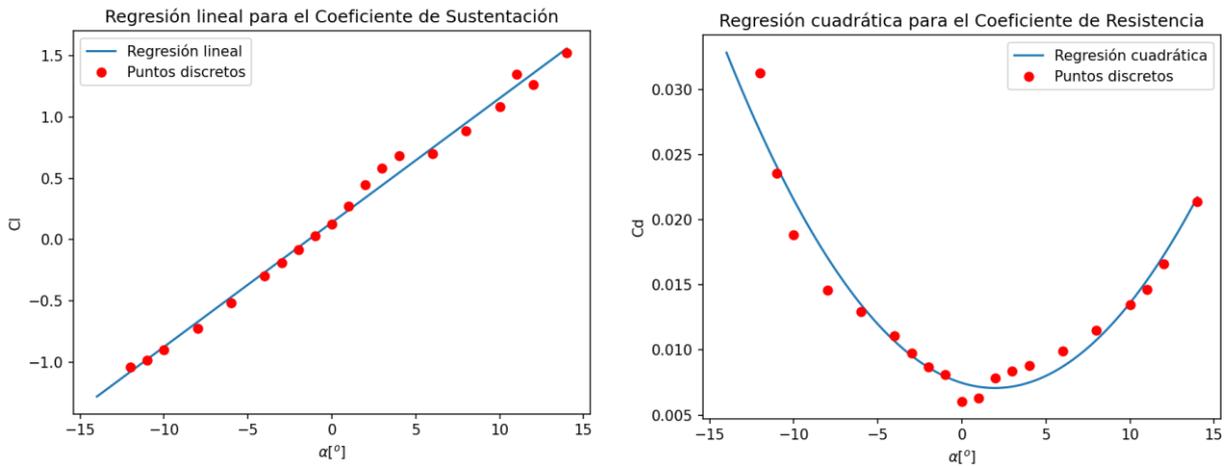


Ilustración 44. Regresiones lineales y cuadrática para los coeficientes de sustentación y resistencia aerodinámicas (VR-12) [11]

Para el estudio que se pretende en este trabajo, se utilizarán regresiones lineales y cuadráticas para los coeficientes de sustentación y resistencia respectivamente (véase las figuras 43 y 44). Cabe notar, que para el caso del NACA 0012 únicamente se proporcionan valores positivos de los ángulos de ataque ya que la parte negativa es igualmente simétrica. Sin embargo, para el caso del VR-12, valores tanto positivos como negativos son incluidos en la regresión, para contemplar la asimetría del perfil. Además, dada la mayor dispersión de los valores para el caso del perfil VR-12 especialmente para el caso del coeficiente de resistencia aerodinámica, se han incluido valores adicionales.

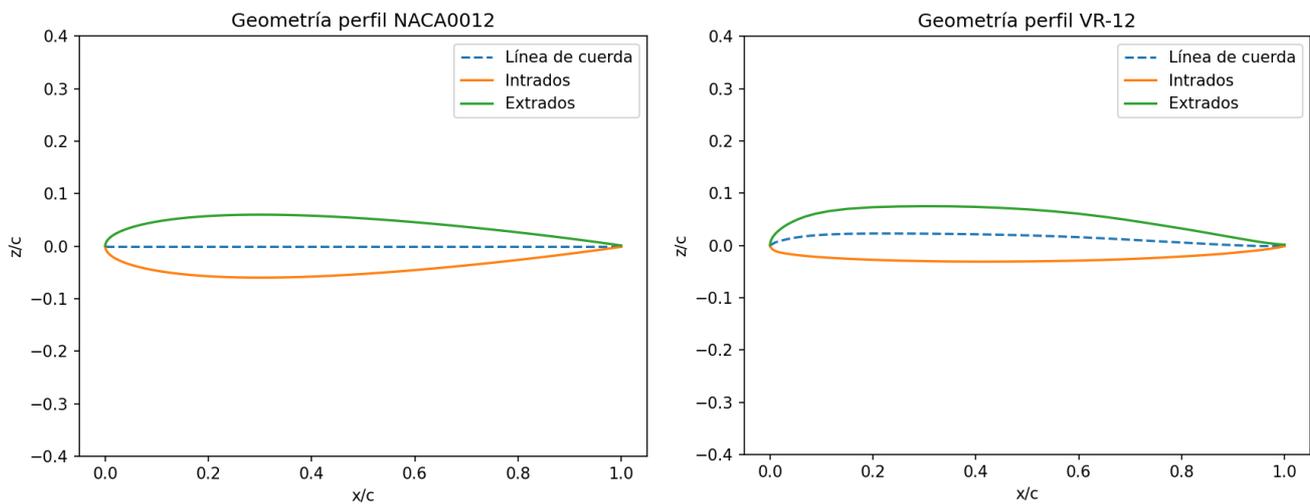


Ilustración 45. Geometría de los perfiles a utilizar. VR-12 y NACA 0012 respectivamente [11]

5 RESULTADOS

Si buscas resultados distintos no hagas siempre lo mismo

-Albert Einstein-

En este capítulo, se expondrán los resultados comparativos de cada una de las teorías, en aras de mostrar puntos fuertes y débiles, fenomenologías capturadas y resultados globales de cada una de las mismas. De esta forma, se tratará de establecer claridad acerca de cuándo usar cada una de las teorías, dependiendo de la rigurosidad en los cálculos requerida versus el tiempo de computación y la complejidad de cálculo. Las variables a ser representadas se encuentran al principio de la sección. Además, dado que ciertas teorías (particularmente las que utilizan un modelo local de la pala) están fuertemente influenciadas por los parámetros de discretización utilizados, se incluirá al principio del capítulo un breve estudio de sensibilidad para acotar estos valores y tener control de los errores cometidos para cada selección.

El algoritmo de resolución se presenta en la siguiente figura. Las diferentes teorías por tratar quedan representadas en color azul. Así, se contemplan 8 teorías: Teoría de Cantidad de Movimiento, Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida, Teoría del Elemento de pala con modelos de velocidad inducida según las dos teorías anteriores, Teoría de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala Combinadas, Teoría de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala combinadas considerando pérdidas de punta de pala, Teoría de la Línea Sustentadora y Teoría de la Superficie Sustentadora. El bloque representado con color naranja se corresponde con un archivo de datos, donde la geometría del rotor, datos sobre los perfiles y la actuación, etc., son almacenados y sirven como input para las diferentes teorías. Finalmente, el bloque EJECUTADOR únicamente actúa como intermediario entre el reservorio de datos y las diferentes teorías para representar los resultados de interés.

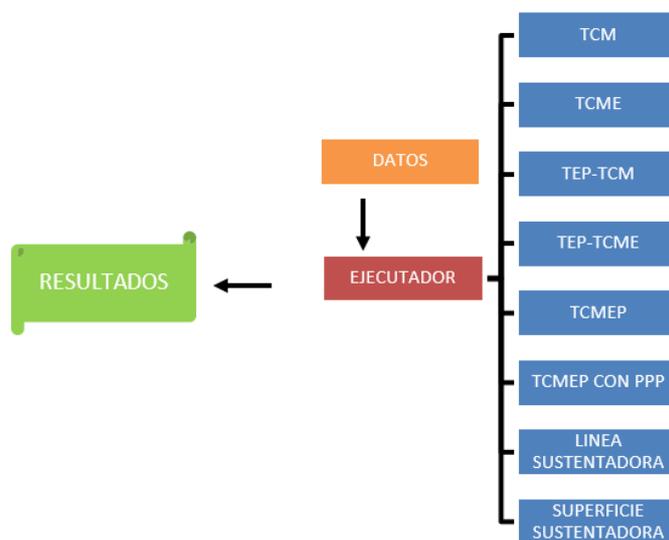


Ilustración 46. Estructura del algoritmo de resolución

5.1. Variables de Interés. Aplicabilidad

En esta primera sección, las diferentes variables de interés a representar serán identificadas con cada una de las teorías en aras de resumir cuales son los límites de aplicabilidad de cada una de las teorías y del detalle que estas pueden prestar. Así, en la siguiente tabla se indica mediante una cruz “X” las teorías en las que las variables indicadas en la columna de la derecha tienen cabida, mientras que se indica con un no aplica “N/A” las variables que no pueden ser obtenidas con la teoría en cuestión. Se ha de remarcar que, en el presente trabajo, la tracción T y la velocidad ascensional V_c se encuentran impuestas por lo que no se identificarán como variables de interés.

TEORÍAS/ VARIABLES	TCM	TCME	TEP - TCM	TEP - TCME	TCMEP	TEORÍAS DE VÓRTICES
C_{Pi}	X	X	X	X	X	X
C_{P0}	N/A	N/A	X	X	X	X
λ_i	X	X	X	X	X	X
λ_{rot}	N/A	X	N/A	X	N/A	N/A
ϕ	N/A	N/A	X	X	X	X
θ	N/A	N/A	X	X	X	X
α	N/A	N/A	X	X	X	X
$\bar{F}_{batimiento}$	N/A	N/A	X	X	X	X
$\bar{F}_{arrastre}$	N/A	N/A	X	X	X	X
$\bar{\Gamma}$	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	X
z_{wake}	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	X

Tabla 4. Aplicabilidad de las variables a representar en las teorías bajo estudio

En la tabla 4, la columna correspondiente a TCMEP contempla los casos con y sin pérdidas de punta de pala. Además, en la columna TEORÍAS DE VÓRTICES se consideran igualmente las dos teorías abordadas, la Teoría de la Línea Sustentadora y la Teoría de la Superficie Sustentadora.

Aunque bien es cierto que las Teorías de Vórtices permiten calcular la velocidad inducida rotacional, esta no será representada en los resultados dadas las simplificaciones realizadas en el modelado del problema, pues se asume la pala completamente contenida en el plano de rotación, teniendo cabida únicamente la componente axial de la velocidad inducida para estas teorías.

Dado que la tracción requerida por el rotor será una entrada para el sistema y dado que se analizan actuaciones a altura constante, el coeficiente de tracción C_T también lo será. Debido a que en las teorías de vórtices se estudia únicamente el caso de estelas predefinidas, las componentes x_{wake} e y_{wake} (coordenadas x e y de las líneas de estela) serán inputs del problema (aunque estas dependerán de los parámetros de discretización utilizadas en

cada caso), mientras que la componente z_{wake} (coordenada z de las líneas de estela) deberá de ser calculada pues dependerá de la velocidad axial en la sección del propio rotor, tanto inducida como ascensional.

El resto de las variables identificadas en la tabla anterior se corresponden con salidas del código, las cuales tendrán cabida o no dependiendo de la teoría de aplicación.

5.2. Estudio de Sensibilidad

Para modelar la geometría de la pala y estela, estas son divididas en secciones, que pueden corresponderse con segmentos de línea o paneles, dependiendo del modelado que ofrezca la teoría. Así, el refinamiento de la malla tendrá una fuerte influencia en la precisión de los resultados. Para analizar la influencia de estos parámetros, a continuación, se presentan tres subapartados, cada uno de ellos enfocados en el análisis de sensibilidad de las teorías que utilizan la metodología del elemento de pala, de la línea sustentadora y finalmente resolución mediante la superficie sustentadora respectivamente.

De forma adicional, se ha de comentar que se han realizado todos los estudios de sensibilidad para una velocidad de ascenso típica de $V_c = 10 \text{ m/s}$ y se utilizará el perfil NACA 0012.

5.2.1. Metodología del Elemento de Pala

Para este caso, en este documento se presentan cuatro teorías diferentes, atendiendo al modelo de velocidad inducida utilizado. En este caso, el estudio de sensibilidad carece de sentido, pues en todos los casos se tiene una función implícita o explícita para la velocidad inducida, pudiendo ser esta expresada en función del resto de parámetros del problema. Así, es por ello por lo que en las siguientes tablas se muestran valores del ángulo de paso, y los coeficientes de potencia total, ascensional e inducida y parásita para cada una de las teorías, sirviendo esto como referencia y punto de partida para el resto de las teorías a tratar. El parámetro número de divisiones (N) se deja libre, $\forall N$, ya que las teorías no presentan sensibilidad en los resultados ante su variación.

TEORÍAS/ NÚMERO DIVISIONES (θ_0 [°])	TEP - TCM	TEP - TCME	TCMEP	TCMEP CON PPP
$\forall N$	18.3949	18.3949	18.3949	18.3949

Tabla 5. Estudio de sensibilidad para θ_0 considerando las Teorías basadas en el Elemento de Pala

TEORÍAS/ POTENCIA TOTAL ($C_{P_{ic}}$)	TEP - TCM	TEP - TCME	TCMEP	TCMEP CON PPP
$\forall N$	$4.6439E - 04$	$4.6882E - 04$	$4.7903E - 04$	$4.9077E - 04$

Tabla 6. Estudio de sensibilidad para $C_{P_{ic}}$ considerando las Teorías basadas en el Elemento de Pala

TEORÍAS/ POTENCIA DE FORMA (C_{P0})	TEP - TCM	TEP - TCME	TCMEP	TCMEP CON PPP
$\forall N$	$8.0724E - 05$	$8.0433E - 05$	$7.89209E - 05$	$7.89263E - 05$

Tabla 7. Estudio de sensibilidad para C_{P0} considerando las Teorías basadas en el Elemento de Pala

Si bien existe la posibilidad de variación en los resultados, esta está influenciada por la precisión empleada en la herramienta de integración numérica. En este contexto, al mantenerse la tolerancia en su configuración predeterminada, no se evidencian diferencias algunas.

De esta forma, y dado que estas teorías apenas requieren tiempo de cálculo (aproximadamente 1 s por teoría), se selecciona $N = 100$ como parámetro de diseño para estas teorías.

5.2.2. Metodología de la Línea Sustentadora

En lo que se refiere a la metodología de la línea sustentadora, se han de discutir tres parámetros:

- N_r → Número de divisiones de la pala en dirección envergadura.
- L → Longitud de desarrollo de la estela.
- Φ_{step} → Ángulo de avance sobre la estela.

La longitud de desarrollo de la estela se corresponde con la distancia axial desde el plano de rotación del rotor hasta el último punto de estela considerado. Por otro lado, el ángulo de avance sobre la estela se corresponde con el ángulo recorrido por las palas entre dos puntos de estela consecutivos de un mismo segmento de torbellino. Este parámetro a medida que se reduce elimina errores al considerar segmentos de torbellinos rectos y no helicoidales, ya que decrece el intervalo de tiempo entre *steps* en la estela.

A continuación, se introducen diferentes tablas donde se presentan los estudios de sensibilidad para los diferentes parámetros de estudio.

N_r	θ_0 [°]	$C_{P_{ind-asc}}$	C_{P0}	$C_{P_{TOT}}$
10	18.0865	$4.6460E - 04$	$7.6767E - 05$	$5.4347E - 04$
20	18.2012	$4.7348E - 04$	$7.8704E - 05$	$5.5219E - 04$
30	18.2541	$4.7592E - 04$	$7.8735E - 05$	$5.5465E - 04$
50	18.3007	$4.7747E - 04$	$7.8795E - 05$	$5.5626E - 04$
70	18.3213	$4.7801E - 04$	$7.8824E - 05$	$5.5683E - 04$

Tabla 8. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora considerando $L = 2D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$

N_r	θ_0 [°]	$C_{P_{ind-asc}}$	C_{P0}	$C_{P_{TOT}}$
10	18.1298	$4.6774E - 04$	$7.8890E - 05$	$5.4662E - 04$

20	18.2436	4.7656E - 04	7.8724E - 05	5.5528E - 04
30	18.2970	4.7904E - 04	7.8755E - 05	5.5779E - 04
50	18.3432	4.8055E - 04	7.8814E - 05	5.5936E - 04
70	18.3636	4.8108E - 04	7.8843E - 05	5.5993E - 04

Tabla 9. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora considerando $L = 4D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$

N_r	θ_0 [°]	$C_{P_{ind-asc}}$	C_{P_0}	$C_{P_{TOT}}$
10	18.1383	4.6835E - 04	7.8894E - 05	5.4724E - 04
20	18.2520	4.7717E - 04	7.8727E - 05	5.5590E - 04
30	18.3055	4.7965E - 04	7.8758E - 05	5.5841E - 04
50	18.3517	4.8117E - 04	7.8817E - 05	5.5998E - 04
70	18.3721	4.8170E - 04	7.8846E - 05	5.6054E - 04

Tabla 10. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora considerando $L = 6D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$

N_r	θ_0 [°]	$C_{P_{ind-asc}}$	C_{P_0}	$C_{P_{TOT}}$
10	18.1428	4.6867E - 04	7.8896E - 05	5.4757E - 04

Tabla 11. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora considerando $L = 10D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$

Como puede verse, la estela se encuentra desarrollada para $L = 4D$, dado que los valores tanto en potencia como en ángulo de paso colectivo son bastante estables comparados con el resto de los análisis, estando además este parámetro reforzado por la literatura existente [10]. Además, el último de los análisis ($L = 10D$) no se continúa para mayor valor de las divisiones en la dirección radial dada la alta estabilidad de los resultados en comparación con el análisis para $L = 4D$, atendiendo a las tendencias de los anteriores resultados

$$\epsilon_{\theta_0} = \frac{|\theta_0|_{L=10D} - \theta_0|_{L=4D}|}{\theta_0|_{L=10D}} \cdot 100 = 0.07\%$$

$$\epsilon_{C_{P_{TOT}}} = \frac{|C_{P_{TOT}}|_{L=10D} - C_{P_{TOT}}|_{L=4D}|}{C_{P_{TOT}}|_{L=10D}} \cdot 100 = 0.17\%.$$

Por otro lado, la convergencia en el número de divisiones no está clara, pues hay que alcanzar valores muy altos de este parámetro para alcanzar una estabilidad en la solución. Para mejorar esta convergencia, se hará uso de un mallado no uniforme a lo largo de la pala, tratando de posicionar más divisiones desde el 85% de la pala

hasta el final de esta, ya que es donde la mayor parte de las fuerzas aerodinámicas son generadas [1] (véase figura 47).

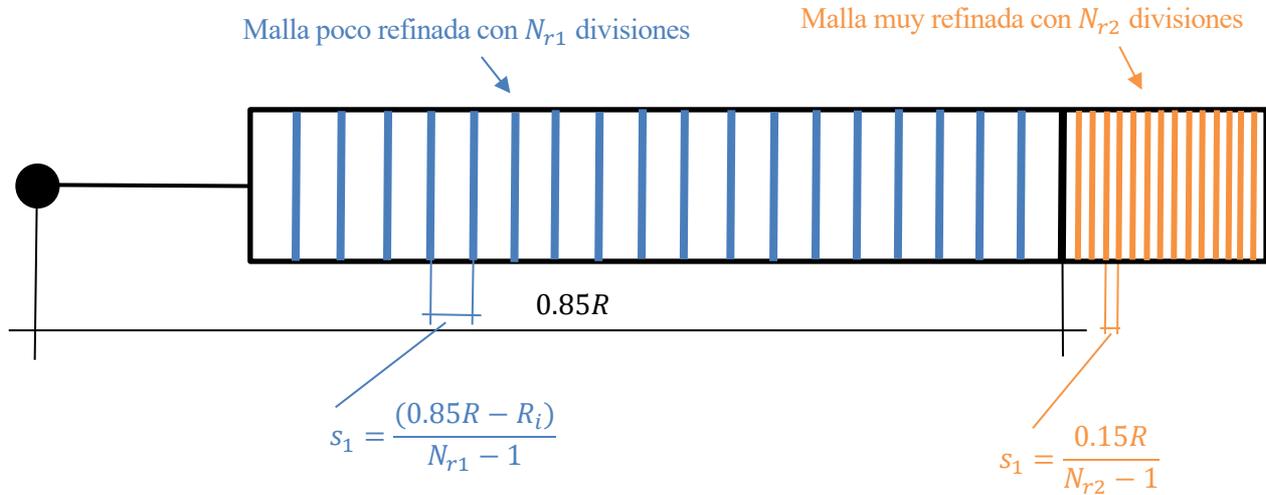


Ilustración 47. Mallado no uniforme en la punta de la pala para la Teoría de la Línea Sustentadora

N_{r1} & N_{r2}	θ_0 [°]	$C_{P_{ind-asc}}$	C_{P_0}	$C_{P_{TOT}}$
$N_{r1} = 5$ $N_{r2} = 10$	18.4094	$4.8171E - 04$	$7.8716E - 05$	$5.6042E - 04$
$N_{r1} = 15$ $N_{r2} = 25$	18.3995	$4.8198E - 04$	$7.8886E - 05$	$5.6087E - 04$
$N_{r1} = 15$ $N_{r2} = 35$	18.4061	$4.8214E - 04$	$7.8897E - 05$	$5.6104E - 04$
$N_{r1} = 25$ $N_{r2} = 45$	18.4081	$4.8227E - 04$	$7.8911E - 05$	$5.6118E - 04$

Tabla 12. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora con mallado no uniforme considerando $L = 4D$ y $\Phi_{step} = 30^\circ$

Del estudio anterior se observa cómo la estabilidad de la solución mejora significativamente al refinar la zona de la punta de la pala. Por lo tanto, la segunda opción ($N_{r1} = 15$ & $N_{r2} = 25$) se considera suficientemente buena, ya que los errores relativos respecto a la opción más refinada ($N_{r1} = 25$ & $N_{r2} = 45$) son mínimos. En cuanto a la primera opción, aunque proporciona valores cercanos a la más precisa, no se considera adecuada debido a que las representaciones gráficas carecerán de suficiente detalle y los resultados podrían no ser lo suficientemente precisos en otros casos de aplicación (por ejemplo, cambios en la velocidad de vuelo, etc.).

$$\epsilon_{\theta_0} = \frac{|\theta_0|_{N_{r1}=25, N_{r2}=45} - \theta_0|_{N_{r1}=15, N_{r2}=25}|}{\theta_0|_{N_{r1}=25, N_{r2}=45}} \cdot 100 = 0.05\%$$

$$\epsilon_{C_{P_{TOT}}} = \frac{|C_{P_{TOT}}|_{N_{r1}=25, N_{r2}=45} - C_{P_{TOT}}|_{N_{r1}=15, N_{r2}=25}|}{C_{P_{TOT}}|_{N_{r1}=25, N_{r2}=45}} \cdot 100 = 0.06\%$$

Por último, el parámetro del ángulo de avance sobre la estela será igualmente objeto de discusión. Se llevará a cabo un análisis de sensibilidad adicional basado en los valores de los demás parámetros ya investigados anteriormente. Así, se considerará una longitud de estela de $L = 4D$ y las divisiones de la pala en dirección radial $N_1 = 15$ & $N_2 = 25$ respectivamente.

En el análisis, se ha identificado que el ángulo de avance sobre la estela tiene una influencia significativa sobre el tiempo de computación. Sin embargo, debido a esta alta sensibilidad, no es posible reducir aún más este parámetro, ya que ello resultaría en un incremento drástico en el tiempo requerido para los cálculos. Como referencia, un análisis para $\Phi_{step} = 1^\circ$, $L = 4D$ y $N_1 = 15$ & $N_2 = 25$ requiere tiempos de cálculo que rondan los 90 minutos. Por lo tanto, se ha determinado que el ángulo de avance sobre la estela proporciona un buen valor para $\Phi_{step} = 5^\circ$, y se centrará la atención en otros parámetros para lograr un equilibrio adecuado entre precisión y eficiencia en el proceso de simulación.

Φ_{step}	θ_0 [°]	$C_{P_{ind-asc}}$	C_{P_0}	$C_{P_{TOT}}$
10°	18.4917	4.8889E - 04	7.8815E - 05	5.6770E - 04
5°	18.5462	4.9292E - 04	7.8793E - 05	5.7172E - 04
2°	18.6046	4.9710E - 04	7.8778E - 05	5.7587E - 04
1°	18.6345	4.9914E - 04	7.8774E - 05	5.7791E - 04

Tabla 13. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Línea Sustentadora con mallado no uniforme y $L = 4D$ y $N_1 = 15$ & $N_2 = 25$

$$\epsilon_{\theta_0} = \frac{|\theta_0|_{\Phi_{step}=5^\circ} - \theta_0|_{\Phi_{step}=1^\circ}|}{\theta_0|_{\Phi_{step}=1^\circ}} \cdot 100 = 0.47\%$$

$$\epsilon_{C_{P_{TOT}}} = \frac{|C_{P_{TOT}}|_{\Phi_{step}=5^\circ} - C_{P_{TOT}}|_{\Phi_{step}=1^\circ}|}{C_{P_{TOT}}} \cdot 100 = 1.07\%$$

A modo resumen, se presenta la siguiente tabla con los valores de los parámetros seleccionados y la geometría del problema.

PARÁMETRO	L	N_{r1}	N_{r2}	Φ_{step} [°]
VALOR	$4D$	15	25	5

Tabla 14. Valores de los parámetros considerados para el análisis comparativo de la Teoría de la Línea Sustentadora

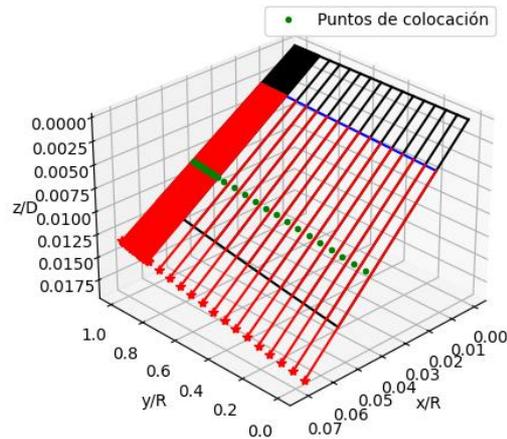


Ilustración 48. Geometría de la Metodología de la Línea Sustentadora

5.2.3. Metodología de la Superficie Sustentadora

Una vez realizado el análisis de sensibilidad de los parámetros que afectan a la teoría de la línea sustentadora, el análisis de la teoría de la superficie sustentadora resulta trivial, pues se llevará a cabo una extensión de los resultados de esta para la discretización en torno a la cuerda.

De esta forma, se considerarán fijos todos los parámetros investigados previamente, quedando sin más por analizar la influencia del número de divisiones a lo largo de la cuerda, N_c .

N_c	θ_0 [°]	$C_{P_{ind-asc}}$	C_{P_0}	$C_{P_{TOT}}$
2	18.1298	$4.6774E - 04$	$7.8890E - 05$	$5.4662E - 04$
3	18.3004	$4.7438E - 04$	$7.8789E - 05$	$5.5316E - 04$
5	18.2744	$4.7101E - 04$	$7.9256E - 05$	$5.5026E - 04$
10	18.2535	$4.6914E - 04$	$7.9009E - 05$	$5.4814E - 04$
20	18.2429	$4.6861E - 04$	$7.8992E - 05$	$5.4760E - 04$

Tabla 15. Estudio sensibilidad de la Teoría de la Superficie Sustentadora considerando $L = 4D$, $\Phi_{step} = 30^\circ$ y $N_{r1} = 15$ & $N_{r2} = 25$

En este caso, $N_c = 10$ resulta adecuado en cuanto a precisión se refiere, mostrando las siguientes diferencias con respecto al caso más refinado estudiado, $N_c = 20$. A diferencia del caso anterior, no se precisa de una malla no uniforme, pues con un número razonable de divisiones se alcanza una solución muy precisa.

$$\epsilon_{\theta_0} = \frac{|\theta_0|_{N_c=10} - \theta_0|_{N_c=20}|}{\theta_0|_{N_c=20}} \cdot 100 = 0.058\%$$

$$\epsilon_{P_{TOT}} = \frac{|C_{P_{TOT}}|_{N_c=10} - C_{P_{TOT}}|_{N_c=20}|}{C_{P_{TOT}}|_{N_c=20}} \cdot 100 = 0.098\%$$

De igual manera que en el caso anterior, se presenta la siguiente tabla con los valores de los parámetros seleccionados y la figura 48 describiendo la geometría del problema.

PARÁMETRO	L	N_{r1}	N_{r2}	N_c	Φ_{step} [°]
VALOR	$4D$	15	25	10	5

Tabla 16. Valores de los parámetros considerados para el análisis comparativo de la Teoría de la Superficie Sustentadora

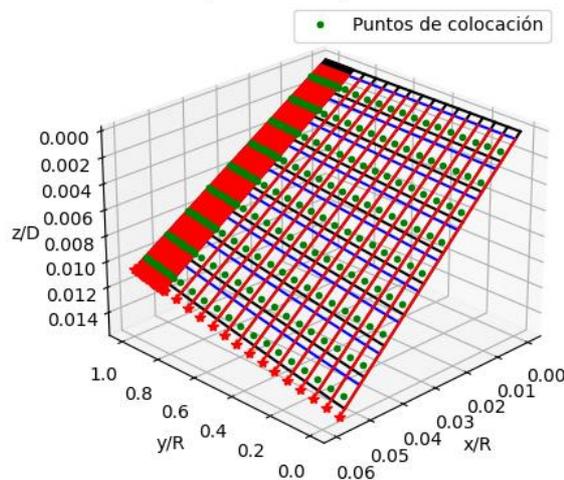


Ilustración 49. Geometría de la Metodología de la Superficie Sustentadora

5.3. Análisis Comparativo

Llegados a este punto, los resultados de las variables de interés presentes en la tabla 4 son representados de forma conjunta para cada una de las teorías, siguiendo la metodología expuesta en las secciones 2 y 3. Se presentan tres análisis comparativos, combinando las dos geometrías de perfil aerodinámico contempladas y dos velocidades de ascenso diferentes, vuelo a punto fijo $V_c = 0 \text{ m/s}$ y vuelo ascensional a $V_c = 10 \text{ m/s}$. Además, se incluye un análisis detallado para cada uno de ellos, utilizando la teoría más completa entre las examinadas: la de la superficie sustentadora.

En cuanto a la estructura, en primer lugar, se presentan los resultados para el perfil NACA 0012 a una velocidad de flujo de $V_c = 10 \text{ m/s}$. A continuación, se continúa con este mismo perfil, pero considerando una velocidad ascendente de $V_c = 0 \text{ m/s}$. Finalmente, se presenta el caso del perfil no simétrico VR-12, también a una velocidad ascendente de $V_c = 10 \text{ m/s}$.

5.3.1. NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

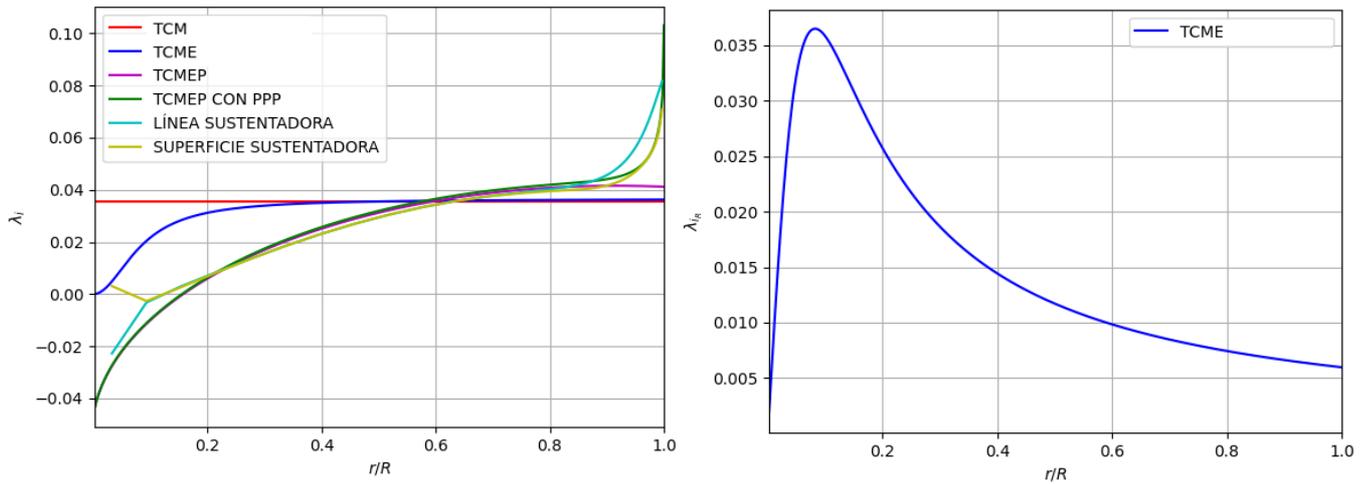


Ilustración 50. Relación de entrada de corriente inducida axial y radial para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

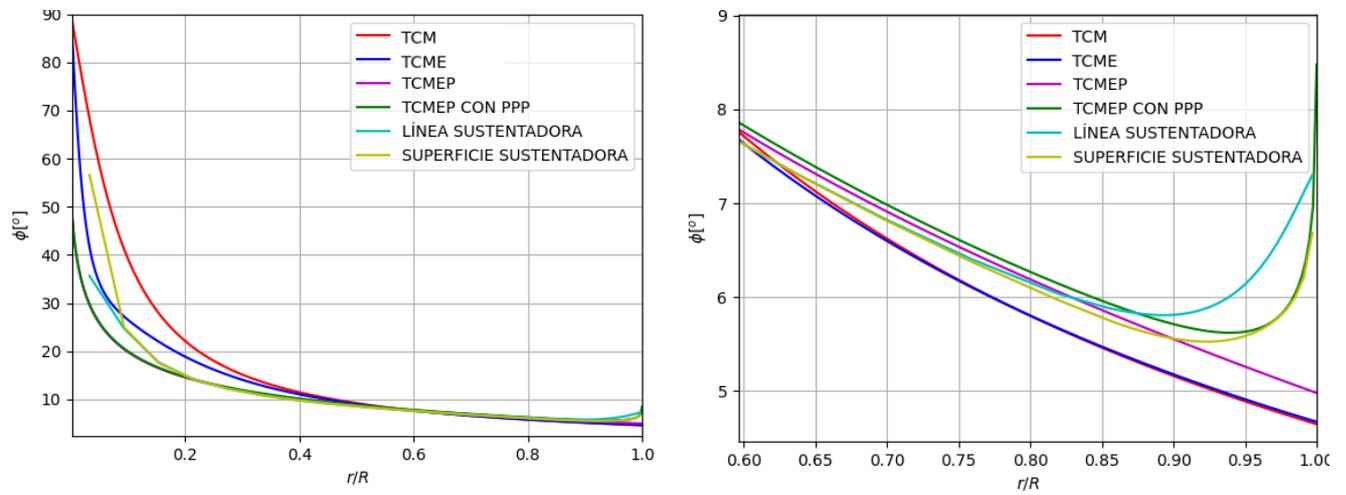


Ilustración 51. Ángulo de entrada de corriente para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

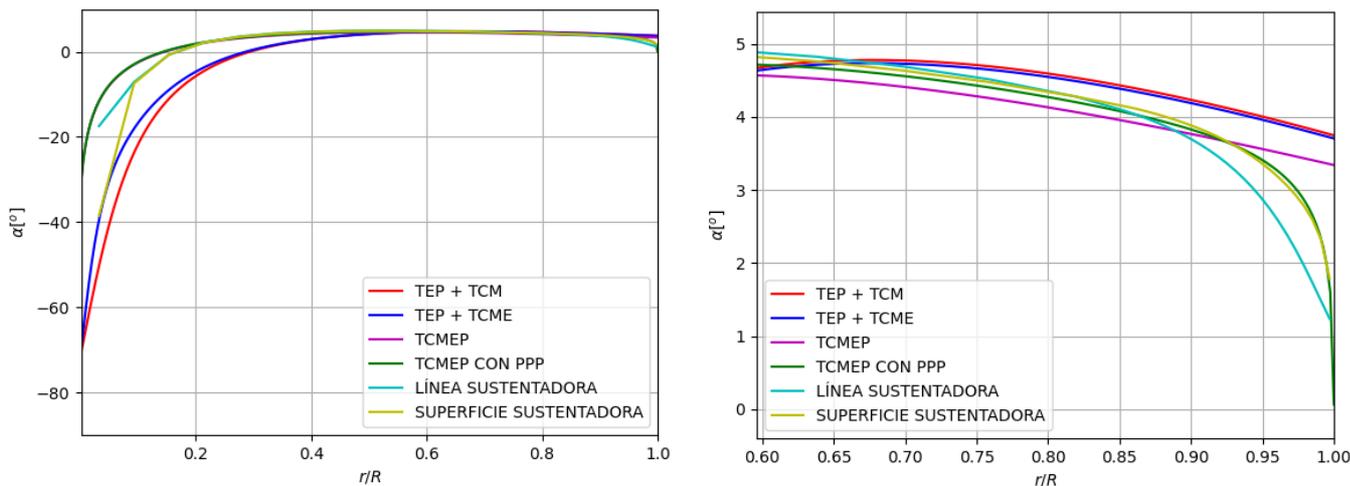


Ilustración 52. Ángulo de ataque para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

Primeramente, se presentan las distribuciones de velocidad inducida en la figura 50, así como los ángulos de entrada de corriente y de ataque en las figuras 51 y 52 respectivamente, derivados directamente de estas. En las gráficas de la velocidad inducida axial pueden distinguirse claramente dos bloques: un primer bloque formado por la Teoría de Cantidad de Movimiento y su versión extendida, que dan una velocidad inducida constante en gran parte de la pala, y un segundo bloque formado por el resto de las teorías que proporciona distribuciones variables de la velocidad inducida a lo largo de toda la pala y similares entre sí.

Dentro del primer bloque puede verse como las distribuciones de velocidad inducida axiales son muy similares a partir del 40% de la envergadura de la pala. Sin embargo, antes de este momento ambas distribuciones difieren sustancialmente, ya que la Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida invierte sus esfuerzos en generar velocidad inducida rotacional, debido al movimiento del propio fluido aguas abajo del rotor. Dado que esta componente es prácticamente despreciable para valores de la coordenada radial suficientemente alejados de la raíz, este fenómeno no suele ser usualmente considerado en el análisis [1]. Véase ilustración 6 para ver las tendencias típicas de la literatura.

Por otro lado, la corriente entra prácticamente perpendicular al plano de rotación en la raíz del rotor, resultado del carácter positivo de la velocidad inducida en estas zonas sumado a la propia velocidad ascensional (véase la figura 50 y 52). Esta gran incidencia desaparece a partir del 20% del radio para decrecer ligeramente dado que las distribuciones de velocidad inducida axial son ambas uniformes suficientemente alejadas de la raíz y al aumento de la velocidad de rotación a medida que se avanza hacia la punta. En lo que respecta al ángulo de ataque, de igual manera se dan valores muy negativos cerca de la raíz, en la que las teorías utilizadas no proporcionan resultados adecuados, pues una hipótesis realizada para las Teorías basadas en el Elemento de Pala es la de aerodinámica lineal 2D (véase figura 52 y 54). Sin embargo, para las variables de interés este fenómeno resulta poco significativo, ya que, en las expresiones de los coeficientes de tracción y potencia, la coordenada radial aparece al cuadrado y al cubo respectivamente, siendo más influyentes los perfiles situados en las proximidades de la punta. El ángulo de ataque parece encontrar un máximo entorno al 70% de la coordenada radial para luego descender ligeramente hacia la punta, manteniendo ángulos de ataque en el entorno de los 4° para prácticamente la totalidad de la pala.

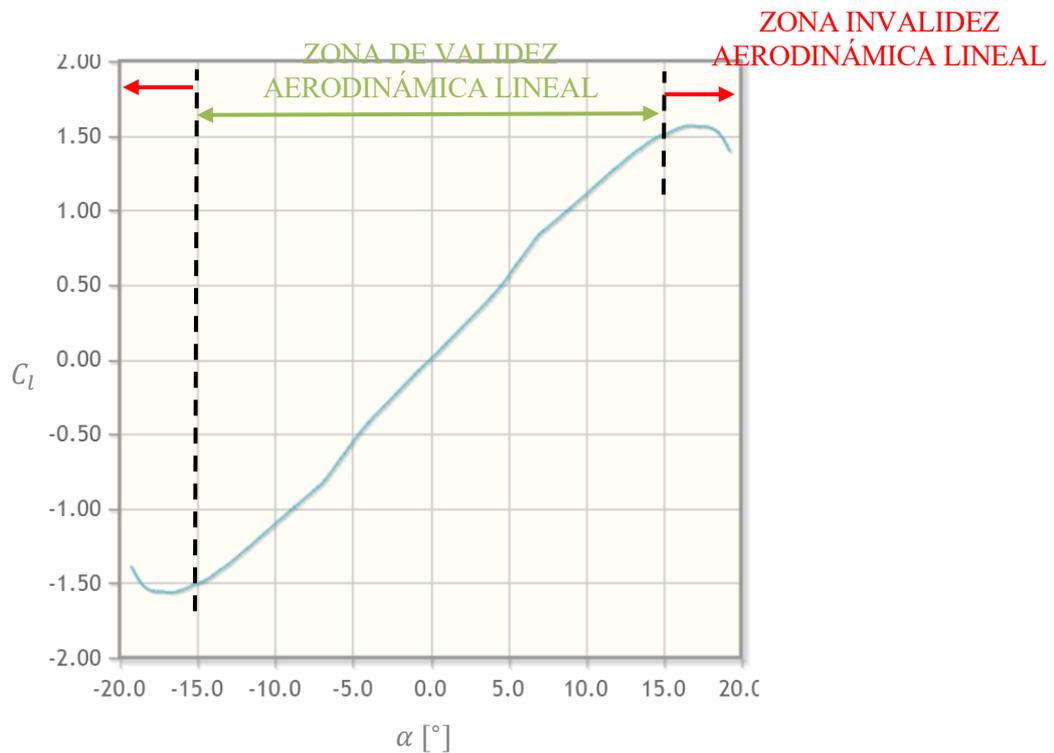


Ilustración 53. Ejemplificación del rango de validez para aerodinámica lineal con NACA 0012

En lo que respecta al segundo bloque, las velocidades inducidas son muy parecidas para la Teoría de Cantidad de Movimiento y Elemento de Pala Combinadas y su versión contemplando pérdidas de punta de pala para casi la totalidad de la pala, exceptuando la punta, donde la última de las teorías experimenta un crecimiento drástico de la velocidad inducida axial, simulando el fenómeno de rebordeo de la corriente en la punta. Este crecimiento de la velocidad inducida se evidencia en el aumento de la incidencia de la corriente en zonas cercanas a la punta, la cual se iguala al valor del ángulo de paso, prediciendo cero ángulos de ataque para la sección situada en la punta. En las zonas cercanas a la raíz, el hecho de proporcionar velocidades inducidas negativas alivia la incidencia de la corriente con respecto a las teorías anteriores, aumentando de igual forma el valor de los ángulos de ataque en estas zonas, que, si bien siguen resultando altos, difieren considerablemente de los casos anteriores.

Las Teorías de Vórtices siguen las tendencias de la Teoría de Cantidad de Movimiento Combinada con pérdidas de punta de pala, aunque se ha de remarcar que la Teoría de la Superficie Sustentadora se ajusta más a esta (exceptuando las zonas de la raíz, las cuales serán comentadas posteriormente). Las distribuciones de velocidad inducida son prácticamente idénticas en la inmensidad de la pala, difiriendo de forma más significativa en zonas cercanas a la raíz y a la punta. En lo que respecta a la Teoría de la Superficie Sustentadora, esta difiere significativamente en zonas cercanas a la raíz, dado que, para su obtención, se ha considerado el sistema de fuerzas resultante generadas. Así, como podrá verse más adelante en el análisis de detalle, en las cercanías de la raíz, esta teoría predice fuerzas de arrastre considerables a favor del movimiento y fuerzas de batimiento ligeramente negativas, lo cual conlleva una componente de la velocidad inducida axial según $z+$ (hacia abajo), incrementando la incidencia local y aumentando (en valor absoluto) el ángulo de ataque (véase ilustración 53). Posteriormente, podrá verse como en el análisis de detalle, en esta zona, las velocidades inducidas axiales siguen esta tendencia, siendo la componente rotacional de la misma la que contribuye a anular la condición de impenetrabilidad. Así, aunque en la mayor parte de los paneles de la raíz la tendencia de la velocidad inducida tiende a ser negativa ($z-$), en términos de cómputo general por fuerzas gana la positiva. Por supuesto, estas tendencias cercanas a la raíz no son congruentes con las hipótesis realizadas y se deberá recurrir a teorías más avanzadas para investigarlas con más precisión. Por otro lado, puede verse una gran variabilidad de la velocidad inducida en la zona de la punta de la pala (especialmente en las Teorías de Vórtices y TCMEP PPP), la cual justifica el hecho de haber incluido un mayor número de divisiones en esta zona para el caso de las Teorías de Vórtices, tratando de captar con suficiente precisión la fenomenología de esta parte de la pala.

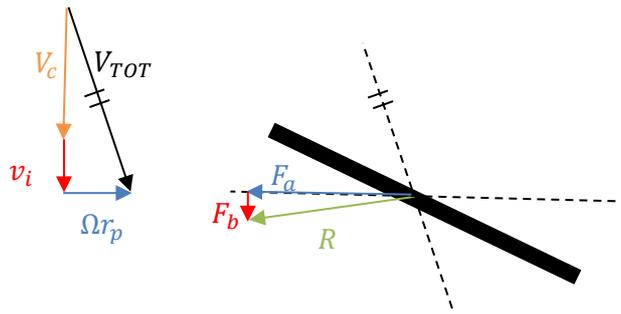


Ilustración 54. Explicación aerodinámica zona de la raíz para Teoría de la Superficie Sustentadora a $V_c = 10 \text{ m/s}$

De forma adicional, dado que en el análisis de sensibilidad se determinó un mallado de $N_{1r} = 15$ para el 85% de la pala, esta zona se encuentra mallada muy pobremente. En cuanto al signo de las velocidades inducidas para la Teoría de la Línea Sustentadora, este se ha de justificar con la condición de impenetrabilidad impuesta en el perfil (véase la ilustración 55), lo que hace generar velocidades negativas en la raíz (dada la fuerte influencia de V_c) y positivas en regiones alejadas de esta, donde la velocidad tangencial debida a la rotación es dominante.

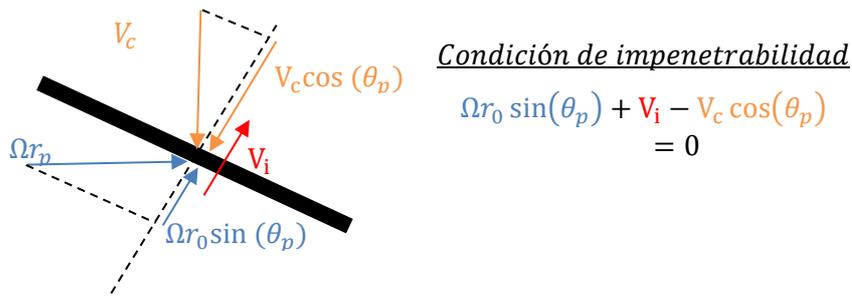


Ilustración 55. Justificación gráfica del signo de velocidad inducida axial en la raíz

En lo que respecta a las fuerzas de batimiento y arrastre estas han sido representadas en la figura 56 en su versión adimensional, siendo divididas por el producto de la presión dinámica y la cuerda

$$\frac{d\bar{F}_b}{dr} = \frac{\frac{dF_b}{dr}}{\left(\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 c\right)} \quad \& \quad \frac{d\bar{F}_a}{dr} = \frac{\frac{dF_a}{dr}}{\left(\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 c\right)}$$

Ambas presentan la misma tendencia previamente comentada, pues se pueden distinguir igualmente los dos bloques previamente comentados. Cabe comentar primeramente que las teorías pertenecientes al primero de los bloques poseen diferenciales de ambas fuerzas distintos de cero para el comienzo de la pala, a diferencia de las teorías del segundo bloque las cuales presentan valores nulos o muy cercanos a este. La razón principal radica en la distribución de velocidad inducida, pues en las teorías globales esta es positiva o nula para toda la pala, haciendo que la velocidad total no se anule y proporcionando valores del ángulo de ataque muy altos para la zona de la raíz

$$V_{TOT} = \sqrt{(\Omega r)^2 + (v_i + V_c)^2} \rightarrow V_{TOT}(r = 0) = v_i + V_c \neq 0.$$

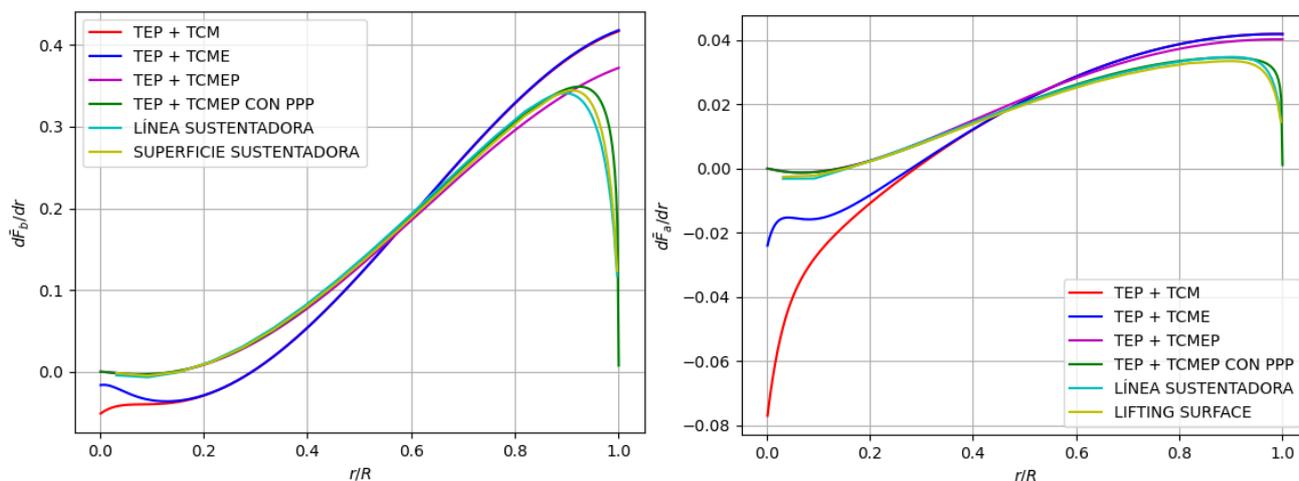


Ilustración 56. Fuerzas de batimiento y arrastre para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

En lo que respecta al resto del dominio para las tres primeras teorías, el carácter es monótono creciente, alcanzándose el máximo en la punta de la pala, siendo esta la sección de la pala más cargada. Sin embargo, como se explicó con anterioridad, la zona cercana a la punta de la pala se ve afectada por los torbellinos generados en esta, disminuyendo el ángulo de ataque local fruto de un incremento de la recirculación en la zona. Es por ello por lo que teorías las tres teorías más avanzadas predicen una caída de las fuerzas aerodinámicas en la zona de la punta, pasando ahora a estar la sección con más carga aerodinámica entorno al 85 – 90% de la envergadura.

Cabe destacar que las teorías del primer bloque predicen un rotor poco eficiente desde el punto de vista de la tracción pues entorno al 30% de la pala proporciona tracción negativa, lo cual precisará de un incremento del ángulo de ataque en las regiones cercanas a la punta para compensar las pérdidas en la raíz (véase ilustración 53). El segundo bloque de teorías sin embargo proporciona un comportamiento del rotor mucho más favorable, siendo únicamente las regiones más cercanas a la raíz las que proporcionan fuerza de batimiento ligeramente negativa.

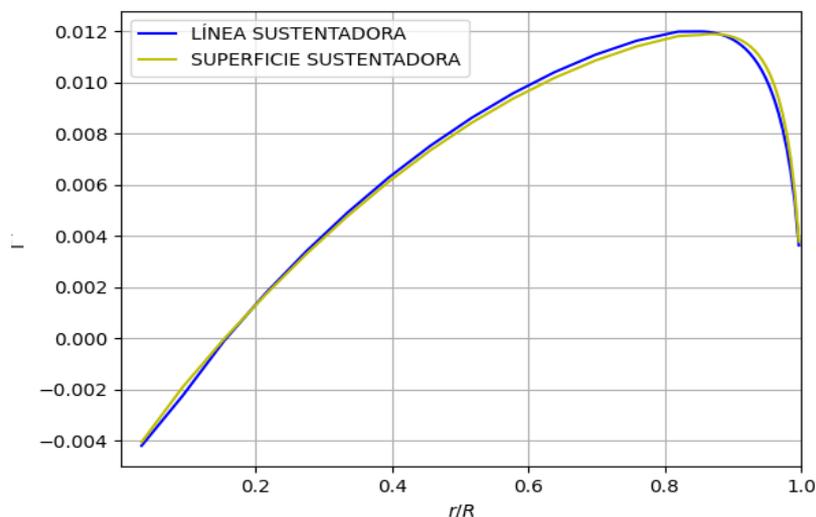


Ilustración 57. Circulación adimensional para NACA 0012 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

La distribución de circulación se ha representado en su forma adimensional, $\Gamma^* = \frac{100\Gamma}{\Omega R^2}$ igualmente en la figura 57. Como puede verse, esta difiere significativamente al caso de una aeronave de ala fija, la cual queda representada en la ilustración de la derecha. En aeronaves de ala fija, dado el perfil “uniforme” de velocidad tangencial en la totalidad de la envergadura, la distribución de circulación tiende a ser plana en la parte central de la superficie sustentadora, para decrecer hacia los extremos (véase la figura 58). Sin embargo, esto no ocurre para el caso de un rotor pues el perfil de velocidad tangencial ahora no es “uniforme”, sino que este se ve incrementado a medida que la coordenada radial asciende hacia la punta, por lo que el perfil de circulación también lo hace, decreciendo en las inmediaciones de la punta debido al fenómeno de los torbellinos de punta de pala (entorno al 85 – 90% [1]).

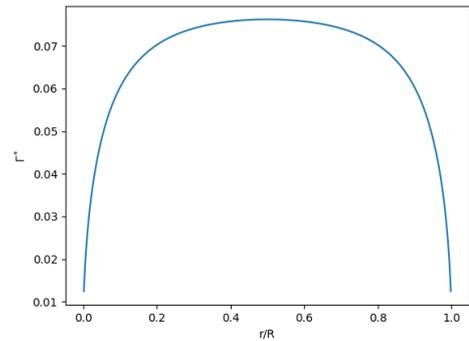


Ilustración 58. Circulación adimensional para ala fija considerando $\alpha_{trim} = 2^\circ$, $U_\infty = 100 \text{ m/s}$ & $i = 4^\circ$

Las dos distribuciones de circulación representadas son prácticamente idénticas, pues ambas han de producir mismos valores de tracción. Además, el hecho de que la circulación decrezca drásticamente en las inmediaciones de la punta de la pala tiene como resultado una alta liberación de vorticidad a la estela, la cual produciría el enrollamiento de la zona más exterior de esta. En la región cercana a la raíz, la fenomenología es similar, por lo que el enrollamiento de la estela deberá de igual manera producirse. Sin embargo, dado que ahora la circulación es de signo contrario, este deberá producirse en sentido contrario y de forma más suave, ya que el gradiente de circulación así lo es. Este caso sencillo de estela (helicoidal prescrita) proporciona distribuciones de circulación que evidencian fenomenologías complejas que ocurren durante la operación real de rotores en vuelo axial ascendente tales como el enroscamiento de la estela en los extremos de la pala (véase la siguiente ilustración).

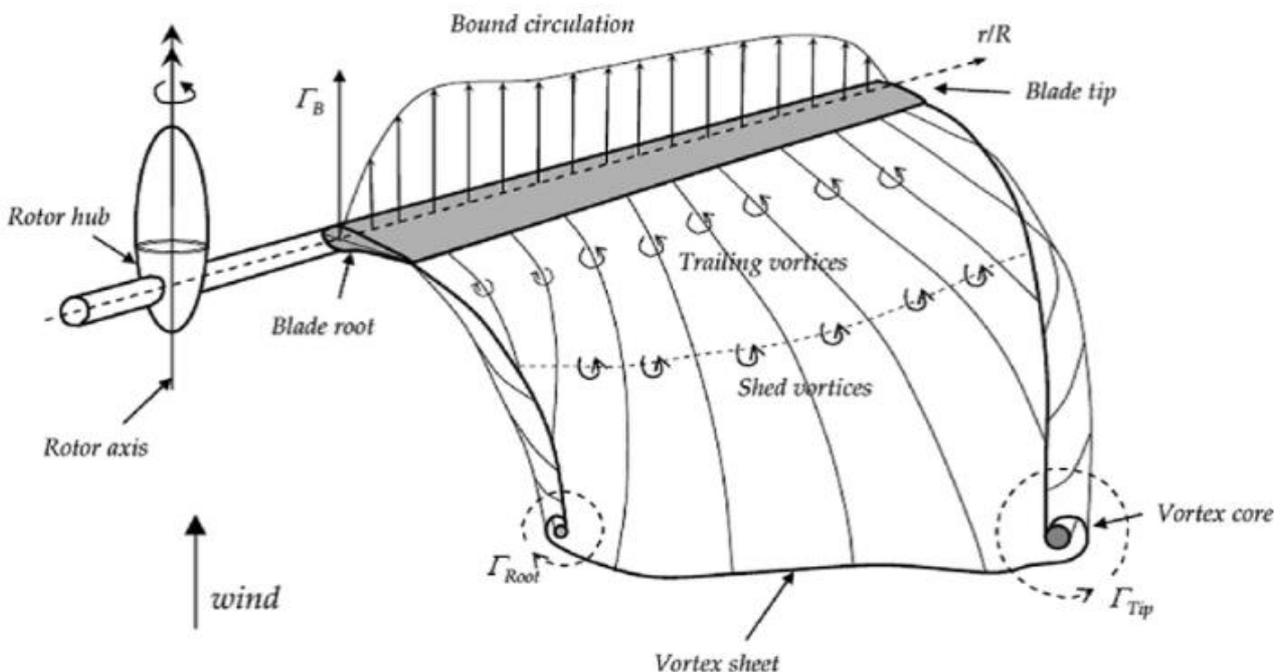


Ilustración 59. Enrollamiento de la estela en los extremos [18]

A continuación, se presenta un análisis detallado realizado con la Teoría de la Superficie Sustentadora, en la que las distribuciones de circulación, velocidad inducida axial y fuerzas aerodinámicas pueden representarse de manera más local en la pala, tanto en envergadura como en cuerda. Para las representaciones que se exponen a continuación, se han utilizado unos factores de escalado para poder encajar las propias variables a representar y la geometría del problema.

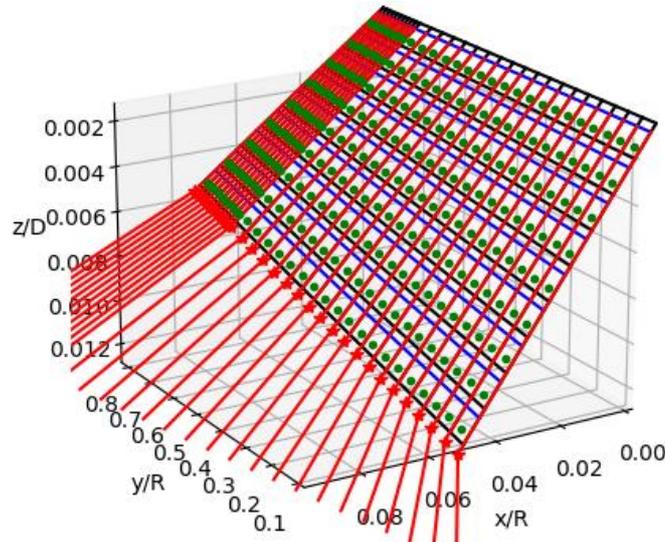
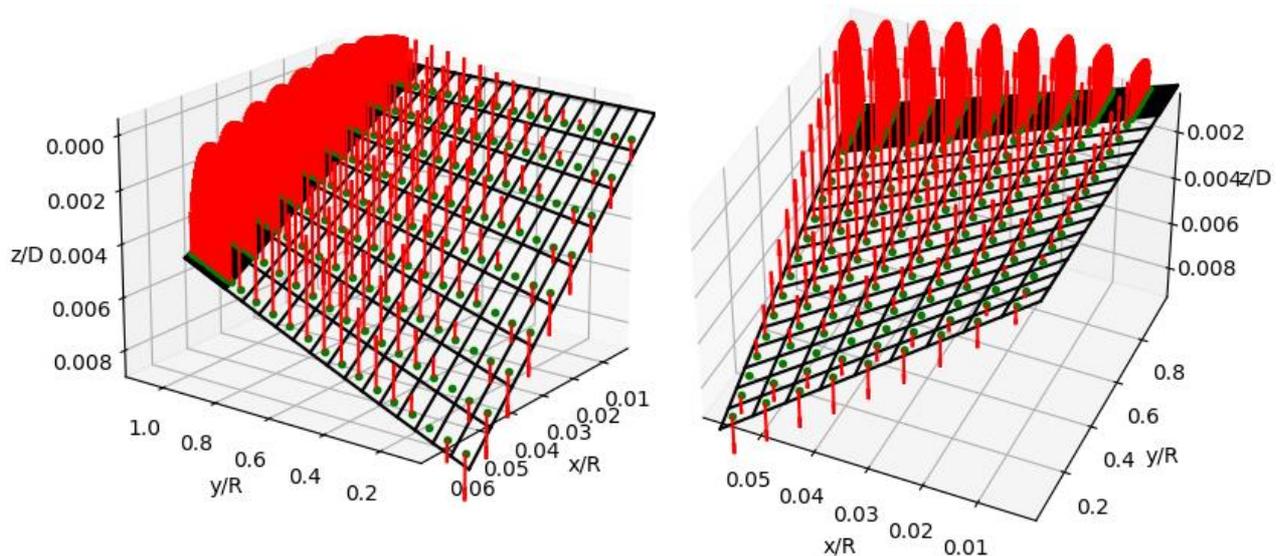


Ilustración 60. Geometría de la pala y estela para perfil NACA 0012

Como puede verse, las distribuciones de circulación presentadas en la ilustración 61 siguen la tendencia expuesta en la ilustración 57, siendo negativas en la raíz y creciendo monótonamente a medida que se avanza hacia la punta. Adicionalmente, las distribuciones de circulación se acentúan a medida que se avanza hacia el borde de salida, donde se produce el máximo para esta, siendo la circulación posteriormente liberada a la estela.

En lo que respecta a la velocidad inducida (véase ilustración 62), esta presenta una distribución igualmente creciente en la zona de la punta y más intensa cerca del borde de salida, asociada a la proximidad a la zona de formación de la estela, donde existe una mayor vorticidad. Además, en paneles cercanos al borde de ataque, lejanos a la estela las distribuciones presentan tendencias más uniformes.

Adicionalmente, puede verse como en la zona de la raíz, los paneles más cercanos al borde de ataque poseen velocidades inducidas según $z -$, tal y como se expuso con anterioridad en el análisis comparativo.



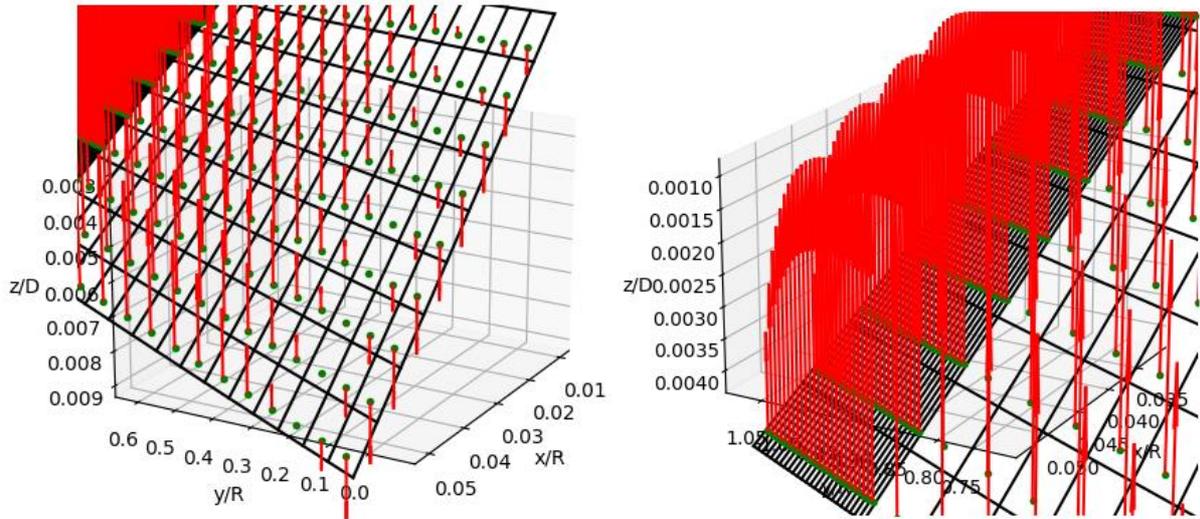


Ilustración 61. Distribución local de circulación para NACA 0012 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_\Gamma = 0.004$

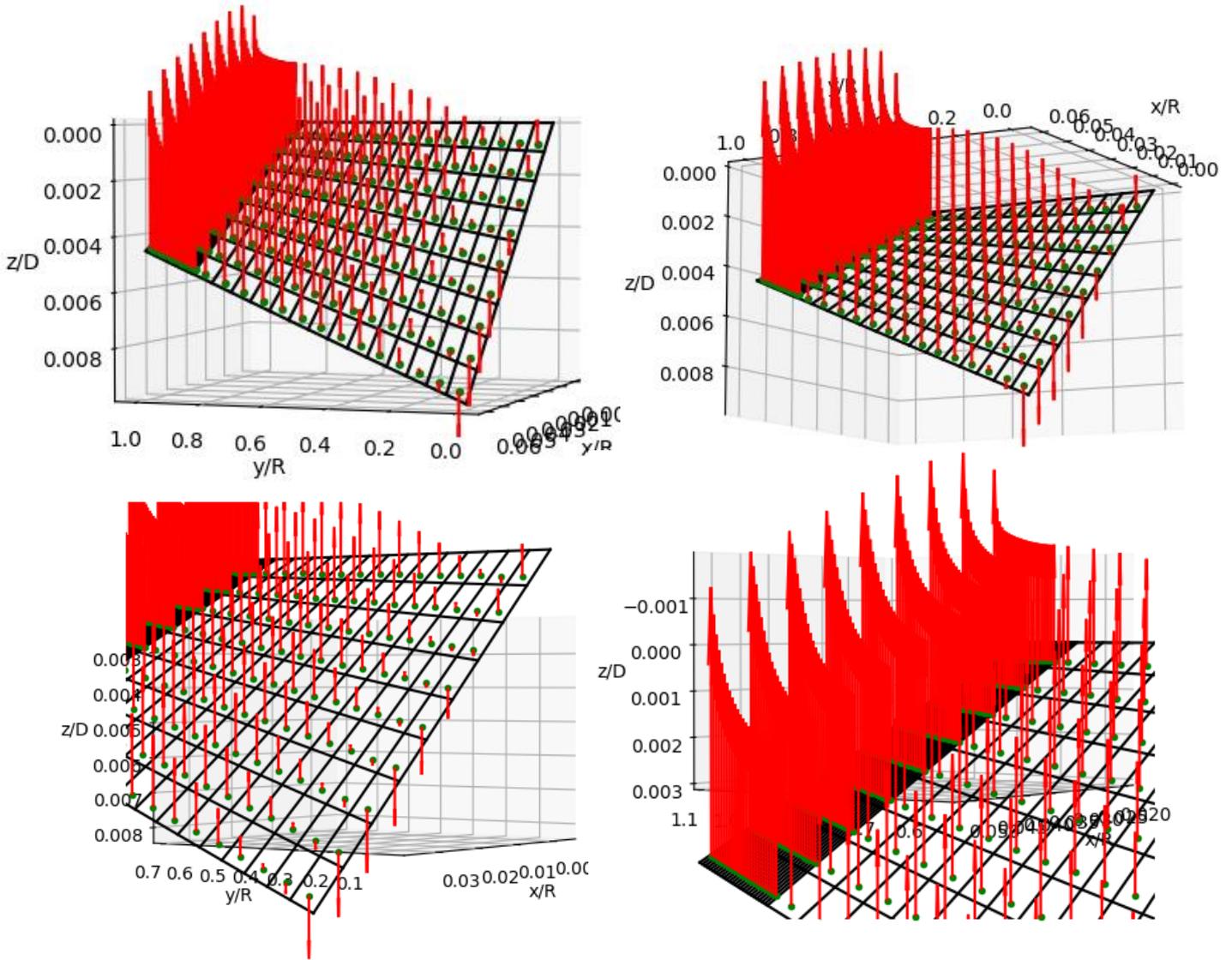


Ilustración 62. Distribución local de velocidad inducida para NACA 0012 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_\lambda = 0.07$

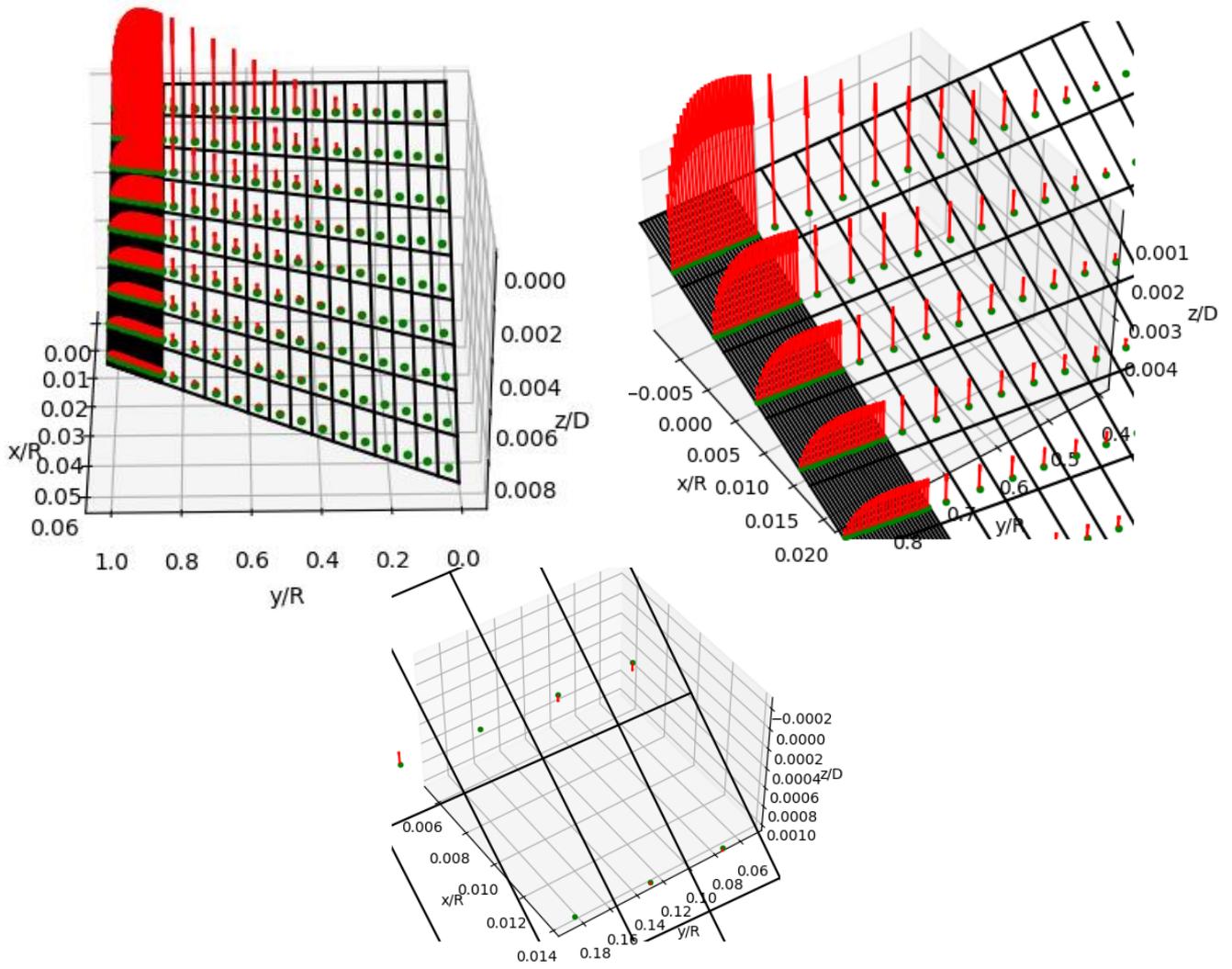
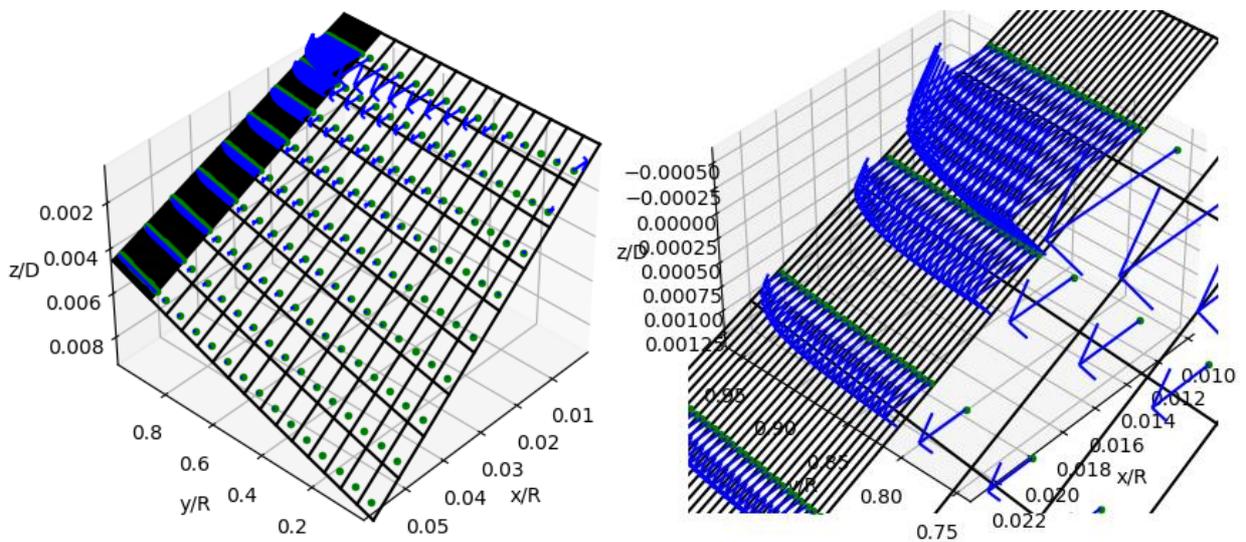
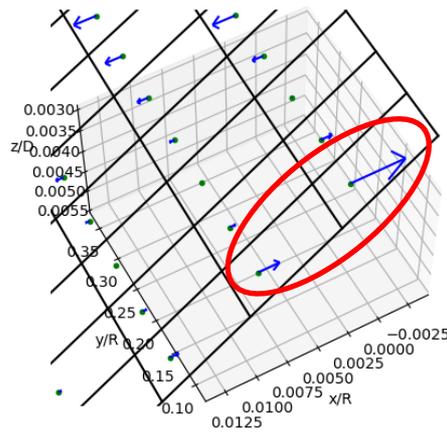


Ilustración 63. Distribución local de fuerza de batimiento para NACA 0012 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_{F_b} = 0.03$





Fuerza dominante en la sección

Ilustración 64. Distribución local de fuerza de arrastre para NACA 0012 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_{F_a} = 0.7$

De los gráficos de las fuerzas aerodinámicas (ilustraciones 63 y 64) primeramente resulta singular que entorno al 40% de la pala (desde la raíz) apenas contribuye a estas. Adicionalmente, también cabe destacar como la parte más cargada aerodinámicamente de la pala se corresponde con las inmediaciones de la punta (como ya se vio en el análisis comparativo) y del borde de ataque.

Otro aspecto por destacar es como las distribuciones de fuerzas tienden a ser singulares a medida que nos acercamos hacia el borde de ataque como queda representado en la ilustración 65. Este hecho está relacionado con la metodología empleada en la resolución, la cual es capaz de predecir el comportamiento aerodinámico en prácticamente la totalidad del dominio, aunque no tan bien cerca del borde de ataque. Para ejemplificar este hecho, se presenta en la siguiente ilustración un análisis realizado con esta misma metodología sobre un perfil NACA 0009 para un ángulo de ataque de aproximadamente 9° . En ella puede verse como en la zona de gran curvatura (cerca del borde de ataque) la solución es singular, difiriendo de soluciones más complejas calculadas con metodologías más avanzadas.

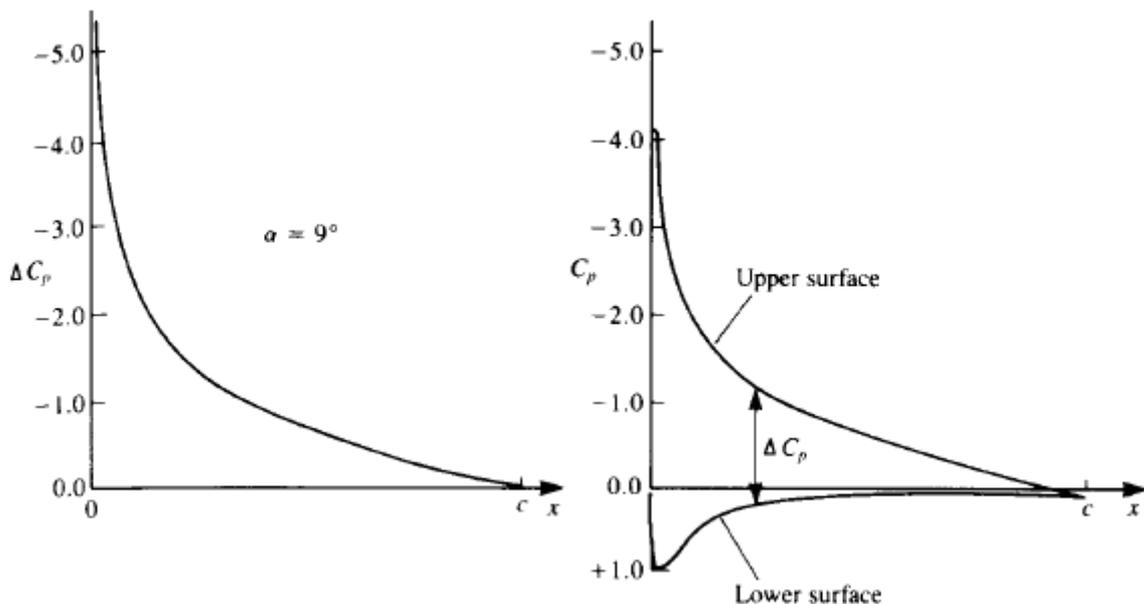


Ilustración 65. Cálculo de la distribución de presión a través de la cuerda para perfil NACA 0009. A la izquierda metodología de la superficie sustentadora y a la derecha método de los paneles [3]

Esta tendencia está relacionada con la propia distribución de presiones de los perfiles aerodinámicos (véase la figura 66). Así, en lo que se refiere a perfiles simétricos (NACA 0012, NACA 0009, NACA 0006, etc.), estos presentan distribuciones de presión cuyo máximo se desplaza hacia el borde de ataque a medida que la esbeltez del perfil aumenta. De esta forma, perfiles aerodinámicos más esbeltos como por ejemplo el NACA 0006, podrían analizarse de una forma más precisa con esta teoría. Las inmediaciones al borde de ataque no serían representadas con exactitud, dado el carácter asintótico previamente comentado.

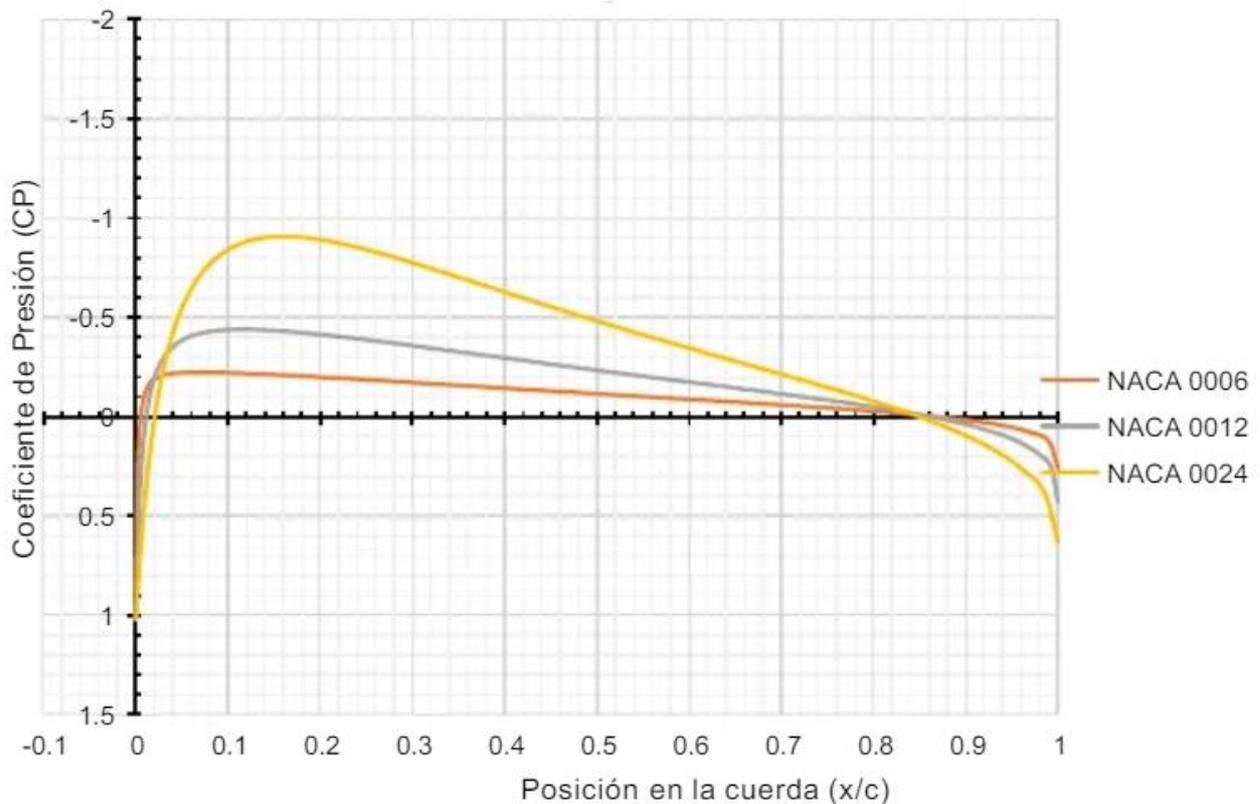


Ilustración 66. Representación de los coeficientes de presiones para los perfiles simétricos NACA 0006, NACA 0012 y NACA 0024, considerando régimen subsónico a $M = 0.3$ y $Re = 10^6$ [15]

Por otro lado, la fuerza de arrastre negativa asociada a las zonas próximas a la raíz, al igual que en el caso anterior, están asociadas con valores del ángulo de ataque negativos dada la alta incidencia del flujo en estas zonas pues la velocidad tangencial es muy baja. Esta componente es dominante en la primera sección de la pala dado que en el resto de los paneles es prácticamente nula, justificando el cambio drástico de tendencia en la velocidad inducida mostrada en el estudio comparativo. En aplicaciones reales esta situación no suele darse ya que la pala no suele comenzar en la propia sección del buje (eje de giro), sino que esta comienza sobre el 5 – 10% de la envergadura, donde la velocidad tangencial ya es apreciable, $V_t(r = 0.1) \approx 20 \text{ m/s}$.

VARIABLE	θ_0 [°]	ϵ_{θ_0} [%]	$C_{P_{ic}}$	C_{P_0}	$C_{P_{tot}}$ [-]	$\epsilon_{P_{TOT}}$ [%]
TEORÍA						
TCM	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	$4.6397E - 04$	<i>N/A</i>	$4.6397E - 04$	16.94
TCME	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	$4.7064E - 04$	<i>N/A</i>	$4.7064E - 04$	15.74
TEP-TCM	18.3703	0.40	$4.6397E - 04$	$8.0959E - 05$	$5.4493E - 04$	2.47
TEP-TCME	18.3808	0.34	$4.7243E - 04$	$8.1622E - 05$	$5.5405E - 04$	0.81
TEP-TCMEP	18.3207	0.67	$4.7903E - 04$	$7.8921E - 05$	$5.5795E - 04$	0.11
TEP-TCMEP CON PPP	18.4858	0.23	$4.9077E - 04$	$7.8926E - 05$	$5.6970E - 04$	1.99
LS	18.5462	0.56	$4.9168E - 04$	$7.8670E - 05$	$5.7034E - 04$	2.11
SS	18.4435	<i>REF.</i>	$4.7930E - 04$	$7.9266E - 05$	$5.5857E - 04$	<i>REF.</i>

Tabla 17. Valores de los ángulos de paso colectivo y potencias para perfil NACA 0012 y $V_c = 10 \frac{m}{s}$

Finalmente, en lo que respecta a los valores de ángulo de paso y potencias, estos son mostrados en la tabla anterior. La Teoría de la Superficie Sustentadora es tomada como referencia al ser la más avanzada de las metodologías a utilizar. Además, junto a cada variable, el parámetro ϵ representa la diferencia en términos relativos con respecto al caso de referencia.

De esta forma, las dos primeras teorías, al tratarse de teorías globales los ángulos de paso no están definidos. Además, dado que en el análisis no se ha retenido el término viscoso de la ecuación de cantidad de movimiento, la potencia de forma queda igualmente fuera del análisis. De esta forma, se trata de números rápidos los cuales retienen tendencias de primer orden en el comportamiento del rotor en vuelo axial ascendente (relación empuje y velocidad inducida, velocidad ascensional y velocidad inducida, etc.).

En relación con los resultados de los coeficientes de potencia inducida y ascensional para las teorías TCM, TCME, TEP-TCM y TEP-TCME, se observa que mientras TCM y TEP-TCM proporcionan resultados idénticos para la potencia inducida y ascensional (de acuerdo con [6]), en el caso de TCME y TEP-TCME se observan algunas diferencias. Estas diferencias se deben a las propias distribuciones de velocidad inducida que ahora no son constantes a lo largo de la pala.

Por otro lado, la Teoría del Elemento de Pala considerando pérdidas de punta de pala se ajusta excelentemente a los resultados arrojados por la Teorías de Vórtices, tanto en términos de ángulo de paso colectivo, como de potencia, especialmente para el caso de la Línea Sustentadora. De igual forma, la TCMEP se encuentra en una posición intermedia, aunque bien es cierto, que al igual que TEP-TCM y TEP-TCME no reproducen la fenomenología de la pérdida de punta de pala, aunque en términos globales funcionan adecuadamente.

5.3.2. NACA 0012 & $V_c = 0$ m/s

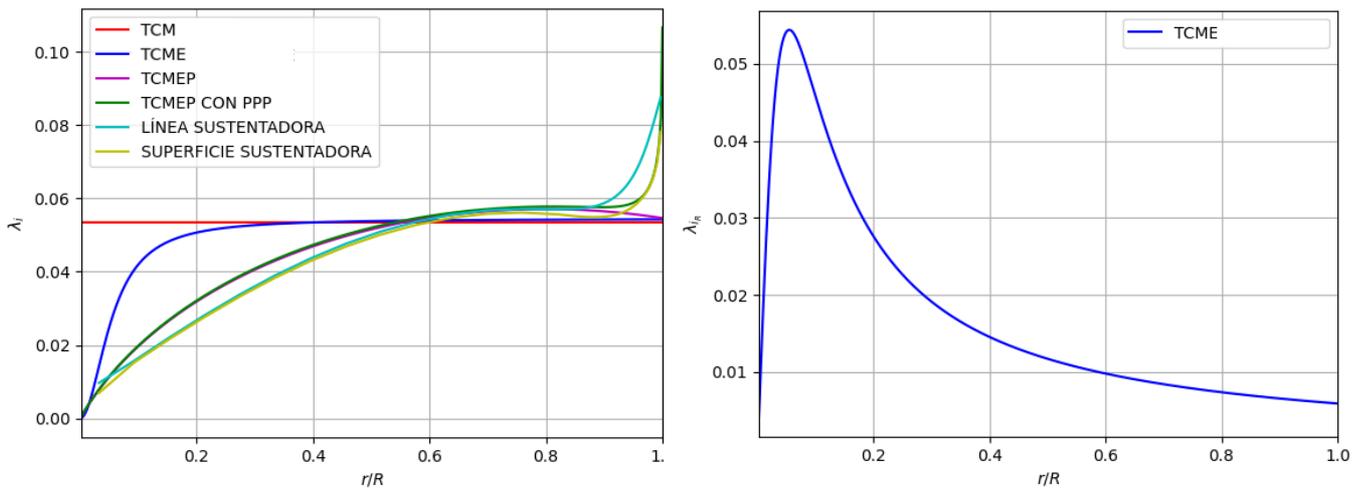


Ilustración 67. Velocidades inducidas axial y radial para NACA 0012 & $V_c = 0$ m/s

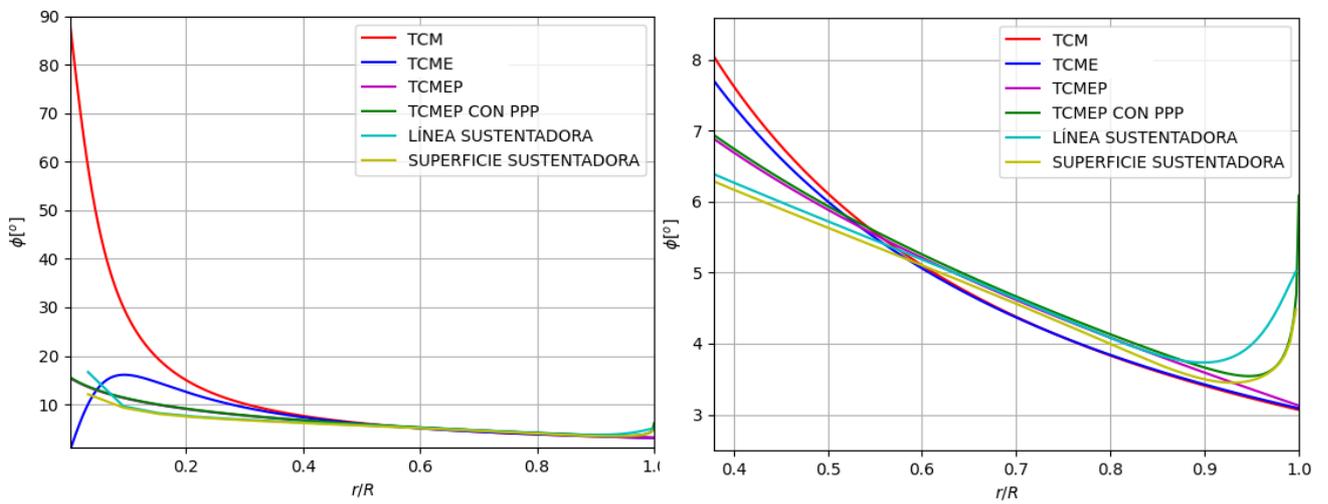


Ilustración 68. Ángulo de entrada de corriente para NACA 0012 & $V_c = 0$ m/s

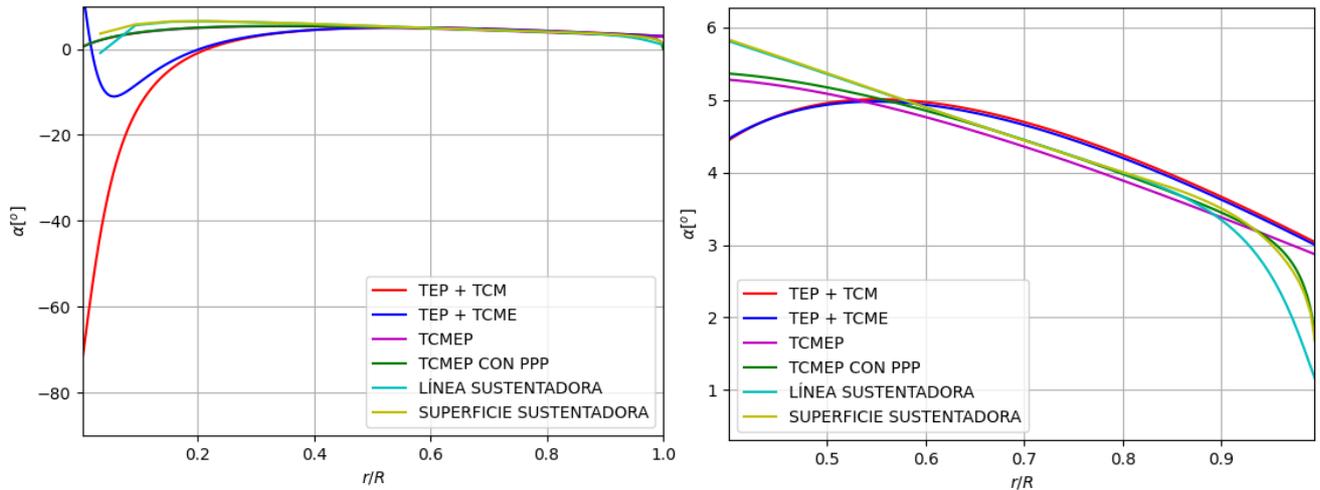


Ilustración 69. Ángulo de ataque para NACA 0012 & $V_c = 0 \text{ m/s}$

Lo primero que puede deducirse de las representaciones de velocidad inducida axial y radial es que estas se han incrementado con respecto al caso anterior. Así, tal y como predice la Teoría de Cantidad de Movimiento (figura 70), a medida que la velocidad de ascenso aumenta, la velocidad inducida decrece, tomando más protagonismo la potencia ascensional frente a la inducida.

$$\frac{v_i}{v_{i0}} = -\left(\frac{V_c}{v_{i0}}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{V_c}{v_{i0}}\right)^2 + 1} \quad \forall \frac{V_c}{v_{i0}} \geq 0$$

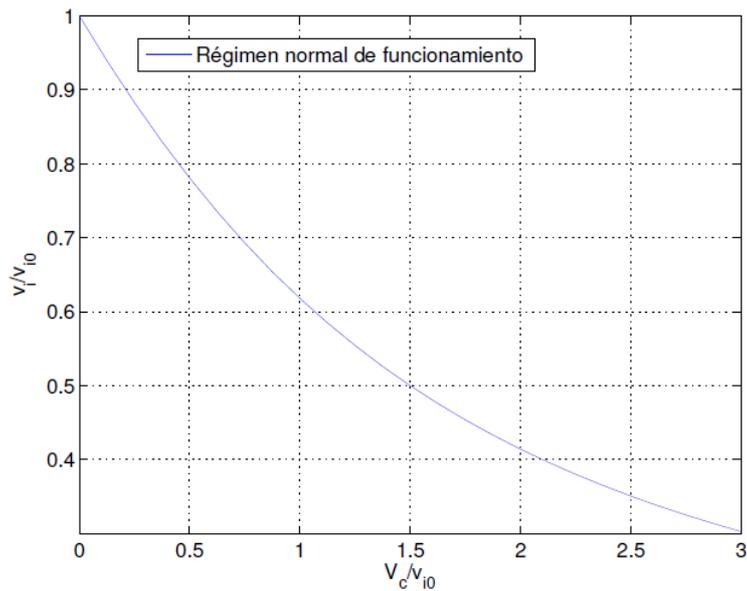


Ilustración 70. Tendencia de la velocidad inducida de la TCM frente a la velocidad ascensional [6]

De forma similar al caso anterior, la TEP-TCM y su versión extendida (TEP-TCME) presentan comportamientos similares para valores de la coordenada radial suficientemente alejados de la raíz. Sin embargo, se ha de destacar con respecto al caso ascensional, que ahora dado que no se considera velocidad ascensional, mientras el modelo de velocidad inducida de la Teoría de Cantidad de Movimiento proporciona incidencias prácticamente de 90° en la zona de la raíz, la Teoría de Cantidad de Movimiento Extendida parte de incidencias nulas, dado su perfil de velocidad inducida. Esto aleja mucho al rotor de un comportamiento indeseado en la zona de la raíz, eliminando la pérdida en los perfiles, siendo de aplicabilidad la teoría en la totalidad de la pala. Por su parte, la Teoría de Cantidad de Movimiento sigue proporcionando un pobre comportamiento en esta zona, siendo los ángulos de ataque muy negativos. Por supuesto, dado el modelado de los coeficientes aerodinámicos, esta zona está totalmente fuera del régimen de aplicación de la aerodinámica lineal

En lo que respecta al segundo bloque de teorías, resulta destacable como las Teorías de Vórtices, especialmente la Teoría de la Línea Sustentadora difiere notablemente del resto en la zona de la raíz. Esta situación puede explicarse sin más que introducir en la formulación la velocidad rotacional inducida que surge en la pala (según la componente x), la cual en zonas próximas a la raíz ha de contribuir a anular la condición de impenetrabilidad impuesta. Como puede verse, la Teoría de la Superficie Sustentadora no presenta esta tendencia en las inmediaciones a la raíz, sino que tiende a cero más claramente.

Además, puede contemplarse como con respecto al caso anterior, las Teorías de Vórtices difieren más del resto de teorías. Al tratarse de vuelo a punto fijo, la única componente de la velocidad axial presente es la de la propia velocidad inducida. Así, mientras anteriormente la estela era propagada $V_{estela} = V_c + \bar{v}_{ind}$, estando la velocidad axial dominada por la velocidad de ascenso, ahora la estela es propagada únicamente con la velocidad inducida media $V_{estela} = \bar{v}_{ind}$, lo cual puede inducir más desviaciones en los cálculos, explicando las mayores diferencias encontradas.

En relación con la pérdida en la punta de la pala, el comportamiento exhibe notables similitudes. La Teoría de la Superficie Sustentadora y la TCMEP CON PPP comparten una destacada semejanza al capturar la fenomenología de manera excepcional. Sin embargo, la Teoría de la Línea Sustentadora, si bien aprehende la fenomenología, sugiere una tendencia algo más gradual, sin llegar a la pendiente vertical esperada.

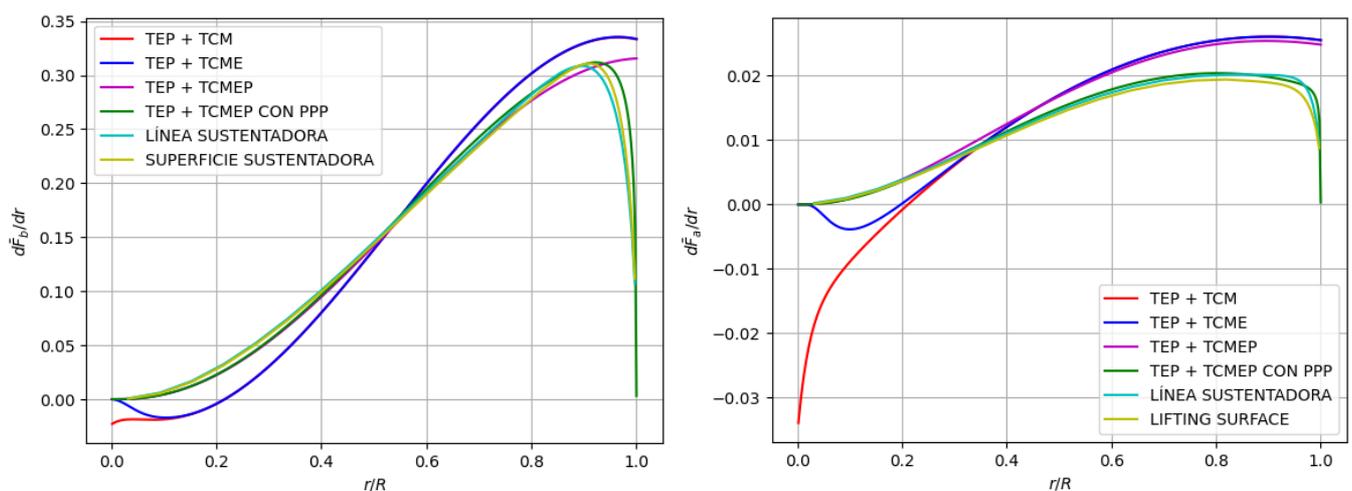


Ilustración 71. Fuerzas de batimiento y arrastre para NACA 0012 & $V_c = 0 \text{ m/s}$

Las fuerzas de batimiento y arrastre representadas en la figura anterior, muestran tendencias muy similares a los casos anteriores. Dentro del primer bloque de teorías, la TEP + TCME ahora, dado que su modelo de velocidad

inducida es nulo para el arranque de la pala, proporciona diferenciales de fuerzas nulos prácticamente nulos para este punto (no exactamente nulos, ya que se da un cierto margen para evitar posibles errores numéricos). Además, poseen un primer tramo en el que proporcionan valores de las fuerzas negativos, de acuerdo con ángulos de ataque del mismo signo. El resto del dominio es monótono creciente hasta alcanzar su máximo para la punta de la pala. Por su parte, el segundo bloque de teorías no presenta tramo negativo, dado que los ángulos de ataque son positivos para todo el dominio (exceptuando un pequeño tramo para la línea sustentadora). La pérdida de punta de pala es igualmente visible en las gráficas.

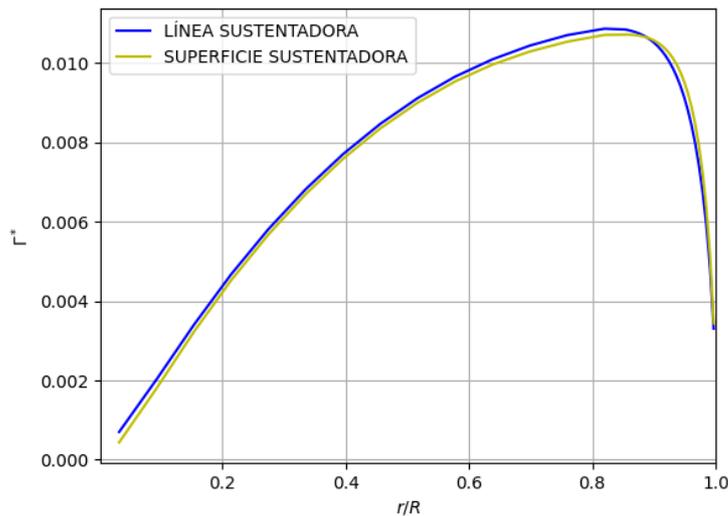


Ilustración 72. Circulación adimensional para NACA 0012 & $V_c = 0 \text{ m/s}$

Las distribuciones de circulación presentadas en la Ilustración 72 son ahora comparadas con la literatura existente para vuelo a punto fijo. Se ha de remarcar, que el rotor bajo análisis no posee un radio inicial de comienzo, por lo que los resultados en la zona de la raíz pueden ser ligeramente diferentes. Sin embargo, en rasgos generales ambas tendencias son muy similares, tendiendo a cero en los extremos y proporcionando su máximo para el entorno del 85% de la envergadura, de acuerdo con Johnson [1].

Como puede verse también, el perfil de sustentación puede ser comparado con el diferencial de fuerza de batimiento (ilustración 71), pues en esencia es el responsable de la tracción a generar. Por otro lado, el enroscamiento previamente comentado está relacionado con la circulación (véase ilustración 73 y 74). Un perfil de circulación más uniforme (como el de una pala de gran diámetro en su parte central) no genera enroscamiento, pues el aire es capaz de mezclarse en el ambiente de manera tranquila y uniforme. Sin embargo, en las proximidades de la punta de la pala, dado que la geometría es finita, y por ende la circulación es acusada, el aire se vuelve más turbulento, mezclándose en el ambiente de forma más agresiva. Toda esta fenomenología queda representada en la tercera figura de la siguiente ilustración.

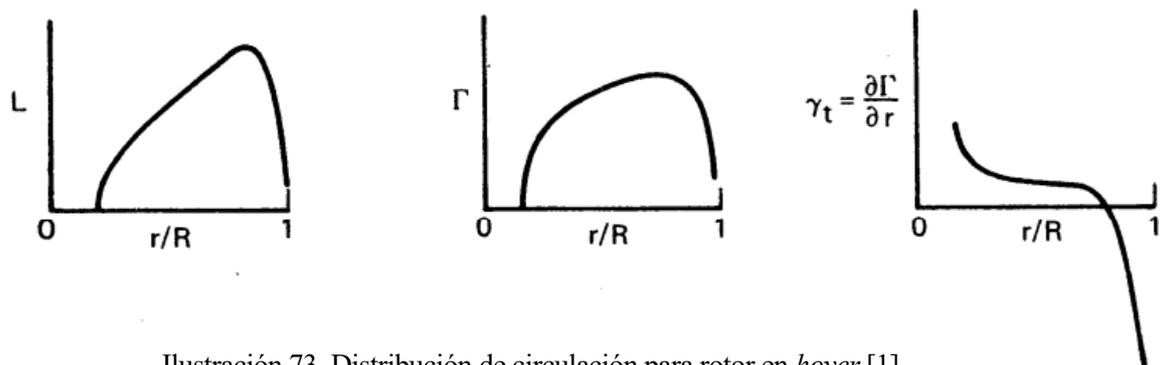


Ilustración 73. Distribución de circulación para rotor en *hover* [1]

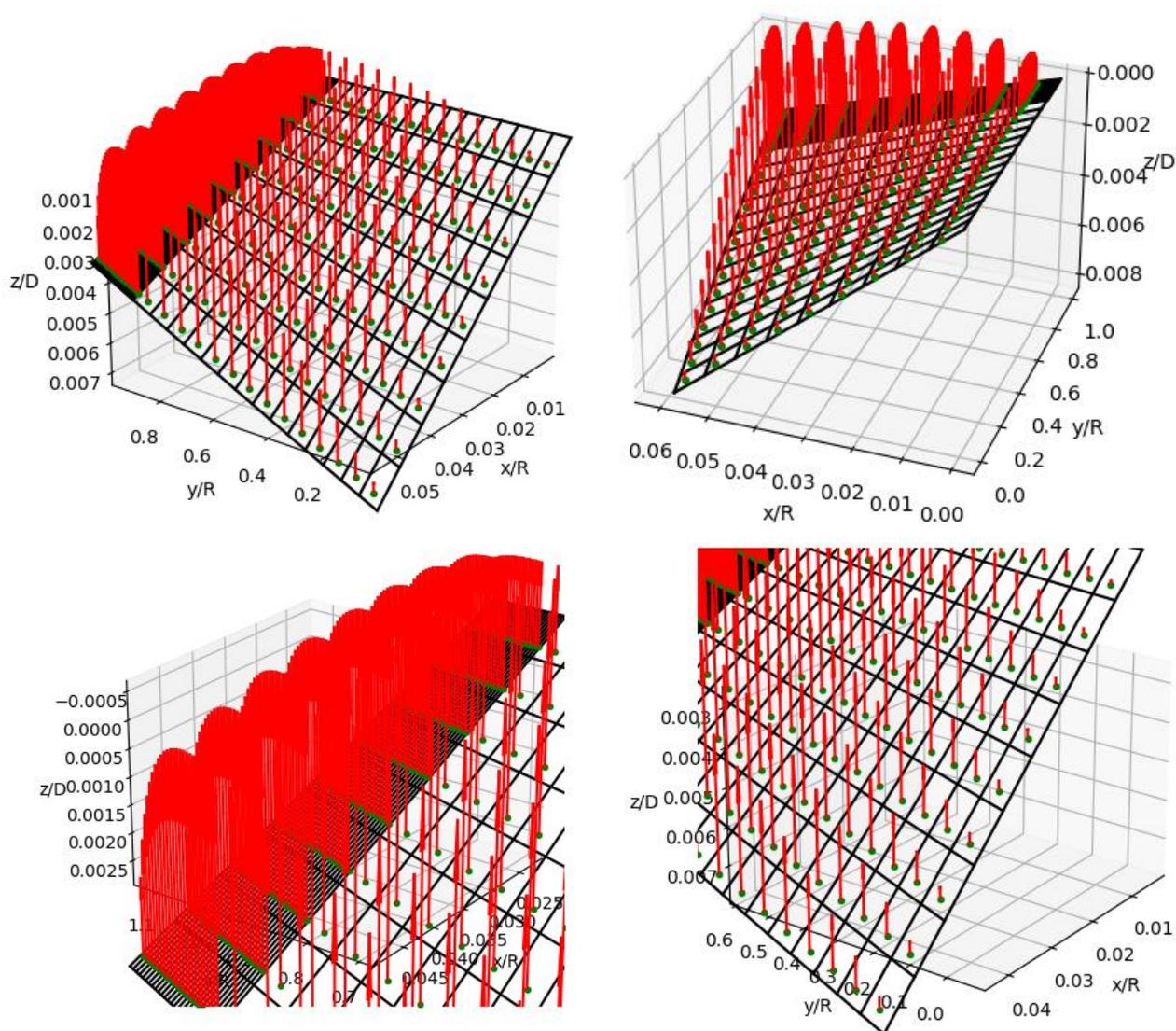


Ilustración 74. Distribución local de circulación para NACA 0012 y $V_c = 0$ m/s. Factor de escalado $K_\Gamma = 0.004$

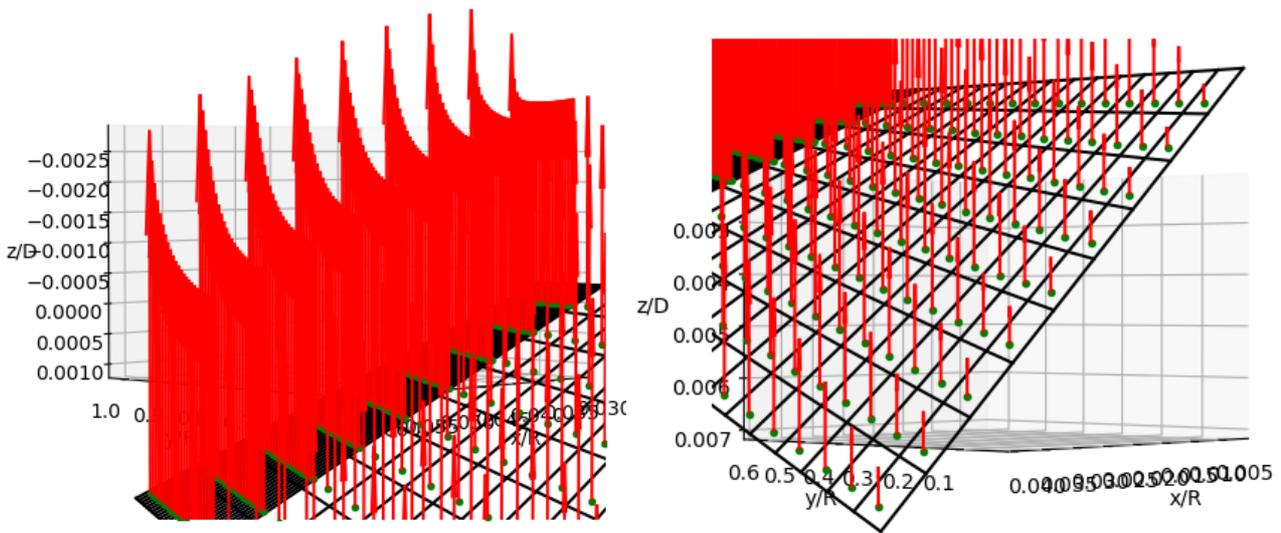
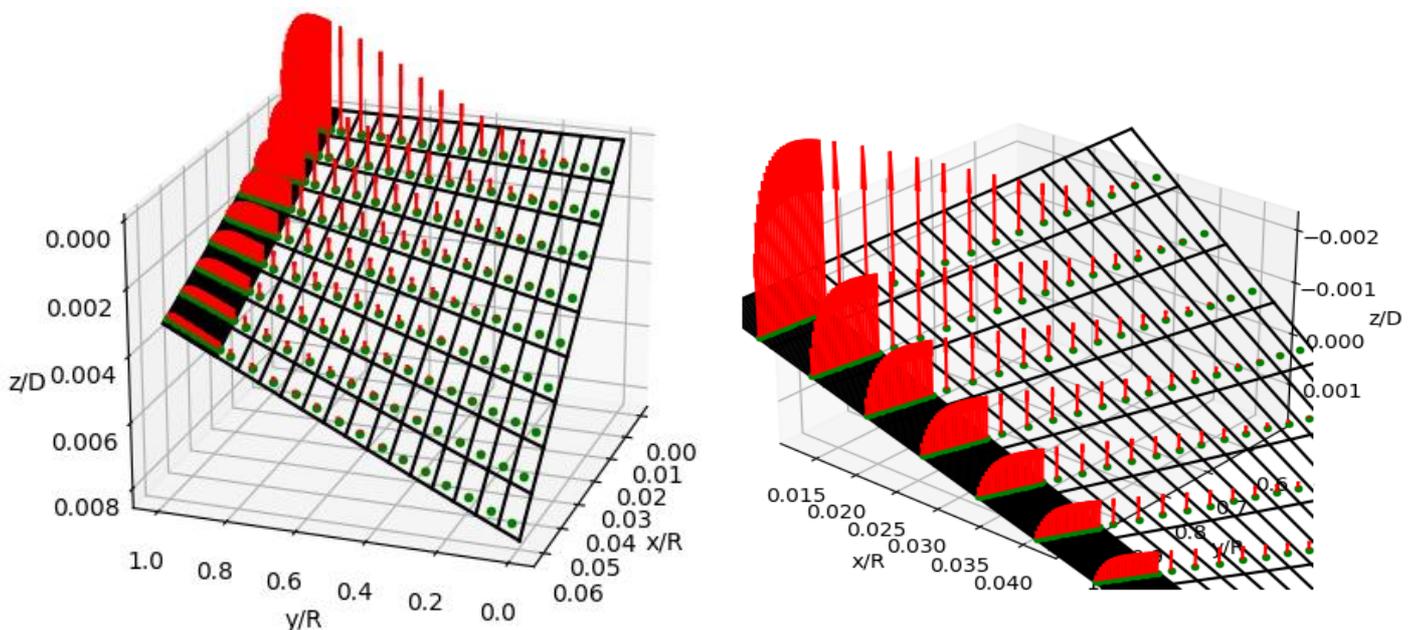


Ilustración 75. Distribución local de velocidad inducida para NACA 0012 y $V_c = 0 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_{\lambda_i} = 0.07$

En lo que respecta al análisis local realizado con la Teoría de la Superficie Sustentadora, las distribuciones de circulación y velocidad inducida (figuras 74 y 75 respectivamente) son ahora positivas para todo el dominio, tal y como ya se evidenció en el análisis comparativo. La tendencia positiva de la velocidad inducida es resultado de la condición de impenetrabilidad impuesta en cada uno de los puntos de colocación. En las inmediaciones de la raíz ahora, al no existir velocidad ascensional, la velocidad inducida debe de ser positiva y reducida, para poder contrarrestar la componente rotacional de la velocidad, que cerca de la raíz es igualmente pequeña. Las tendencias más uniformes siguen manteniéndose en las proximidades del borde de ataque, siendo las distribuciones más próximas al borde de salida más acusadas.

Todos estos aspectos, junto con los resultados arrojados por el análisis comparativo, parecen vislumbrar el buen comportamiento del rotor a lo largo de toda la envergadura de la pala, proporcionando fuerzas de batimiento únicamente positivas. Además, la zona más cercana a la raíz se encuentra muy poco cargada aerodinámicamente, proporcionando contribución mínima a las fuerzas de batimiento y arrastre.



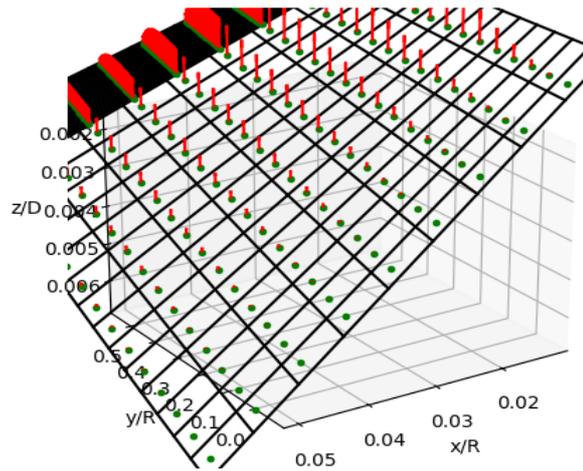


Ilustración 76. Distribución local de fuerza de batimiento para NACA 0012 y $V_c = 0$ m/s. Factor de escalado $K_{F_b} = 0.03$

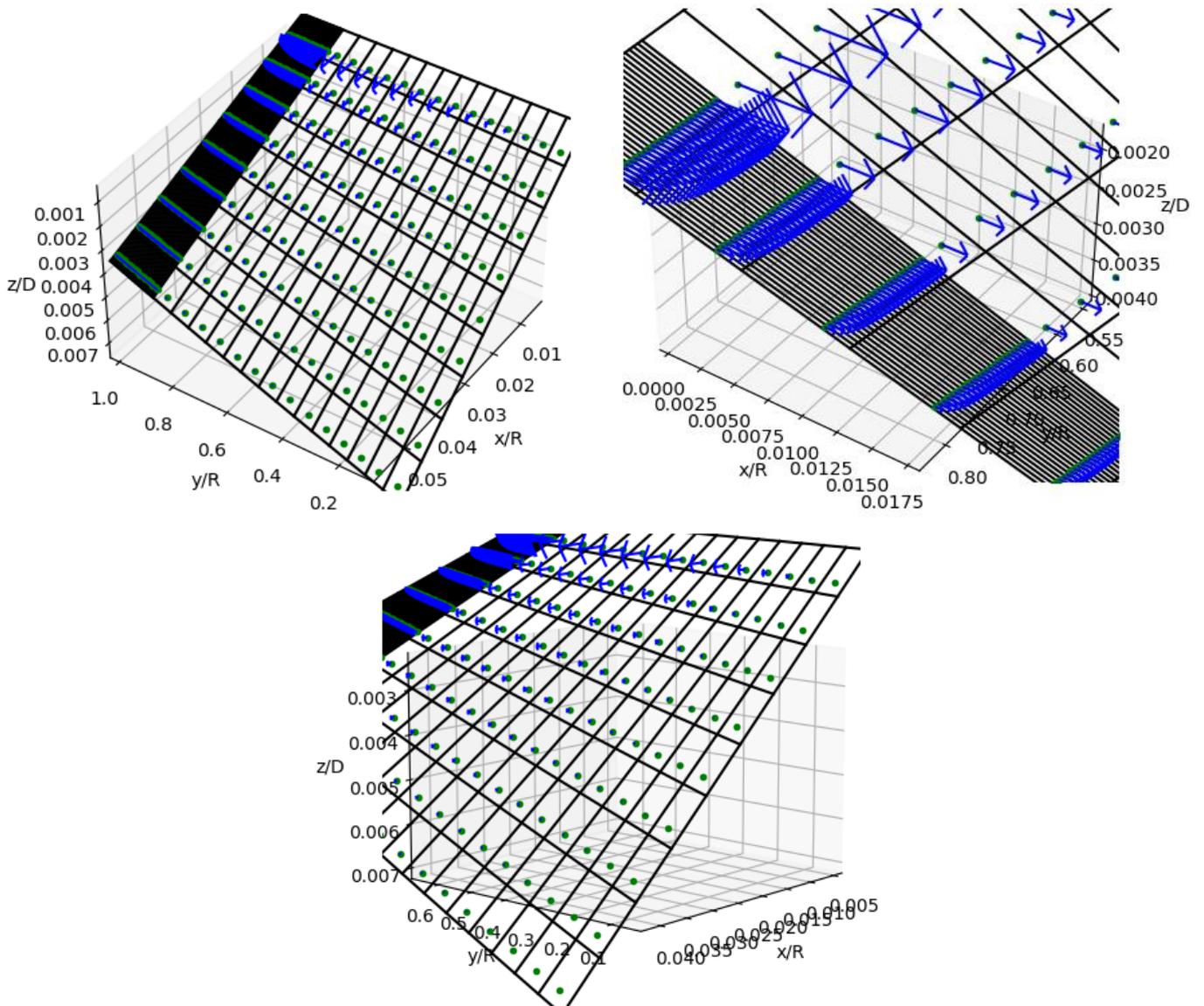


Ilustración 77. Distribución local de fuerza de arrastre para NACA 0012 y $V_c = 0$ m/s. Factor de escalado $K_{F_d} = 0.7$

Cabe destacar de nuevo el carácter asintótico cerca del borde de ataque para perfiles sin curvatura, modelados en esta teoría como una placa plana, pues únicamente su línea media de cuerda es considerada.

Finalmente, los valores correspondientes a los ángulos de paso colectivo y diversas potencias para las diferentes teorías se encuentran resumidos en la siguiente tabla. A pesar de que los resultados se asemejan a los obtenidos previamente, destacan algunos aspectos significativos. En primer lugar, las teorías basadas en el concepto del elemento de pala no logran aproximarse de manera satisfactoria a los valores del ángulo de paso colectivo y coeficiente de potencia proporcionados por las Teorías de Vórtices. Esta discrepancia podría atribuirse a la condición específica de vuelo en punto fijo como ya se evidenció en el estudio comparativo. Al haber considerado una estela propagándose axialmente a una velocidad constante media resultante de la velocidad de ascenso y la velocidad inducida promedio, y dado que la componente ascensional pierde influencia a medida que se reduce la velocidad de ascenso, en el caso de vuelo a punto fijo toda la velocidad de propagación de la estela se corresponde con la componente inducida promedio, lo cual podría explicar la existencia de diferencias más pronunciadas entre los resultados obtenidos por las Teorías de Vórtices y las demás teorías. Además, conviene resaltar cómo los resultados emanados de la Teoría de la Superficie Sustentadora y la Teoría del Elemento de Pala considerando pérdidas difieren de forma más marcada que en la instancia previa, aunque esta última se encuentra muy próxima a los valores arrojados por la Teoría de la Línea Sustentadora.

VARIABLE TEORÍA	θ_0 [°]	ϵ_{θ_0} [%]	$C_{P_{ic}}$	C_{P_0}	$C_{P_{tot}}$ [-]	$\epsilon_{P_{TOT}}$ [%]
TCM	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	$3.0557E - 04$	<i>N/A</i>	$3.0557E - 04$	19.53
TCME	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	$3.1049E - 04$	<i>N/A</i>	$3.1049E - 04$	18.24
TEP-TCM	16.0472	0.58	$3.0557E - 04$	$7.9520E - 05$	$3.8501 - 04$	1.34
TEP-TCME	16.0503	0.60	$3.1242E - 04$	$8.0237E - 05$	$3.9265E - 04$	3.40
TEP- TCMEP	16.0293	0.47	$3.1332E - 04$	$7.8322E - 05$	$3.9164E - 04$	3.13
TEP- TCMEP CON PPP	16.1715	1.36	$3.2102E - 04$	$7.8375E - 05$	$3.9939E - 04$	5.17
LS	16.1984	1.53	$3.2491E - 04$	$7.8063E - 05$	$4.0297E - 04$	6.11
SS	15.9546	REF.	$3.0117E - 04$	$7.8582E - 05$	$3.7975E - 04$	REF.

Tabla 18. Valores de los ángulos de paso colectivo y potencias para perfil NACA 0012 y $V_c = 0 \frac{m}{s}$

5.3.3. VR-12 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

Adicionalmente a los dos análisis previamente expuestos en las secciones previas, se introduce un análisis adicional contemplando un perfil no simétrico, para poder de igual manera explotar el potencial de las teorías analizadas y ver las diferencias sustanciales con respecto al caso de perfiles simétricos.

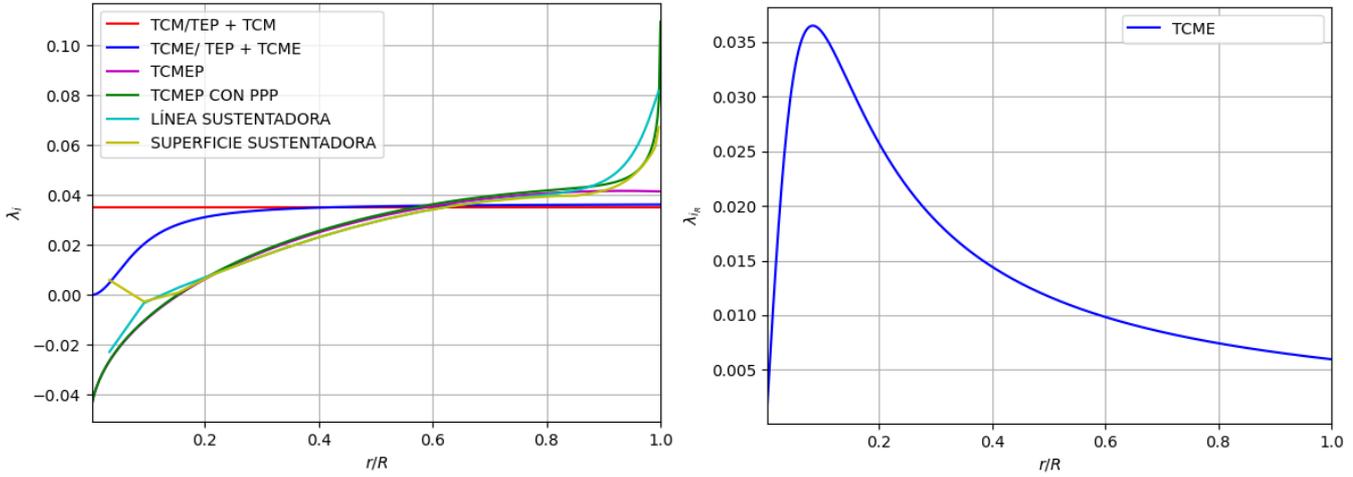


Ilustración 78. Velocidad inducida axial y radial para VR-12 y $V_c = 10 \text{ m/s}$

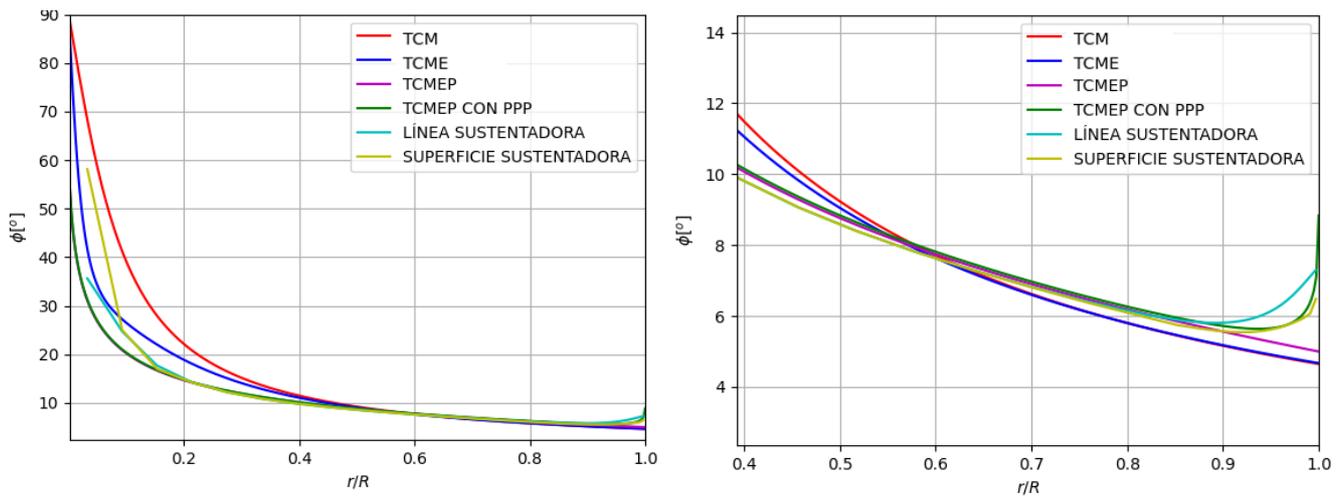


Ilustración 79. Ángulo de entrada de corriente para VR-12 y $V_c = 10 \text{ m/s}$

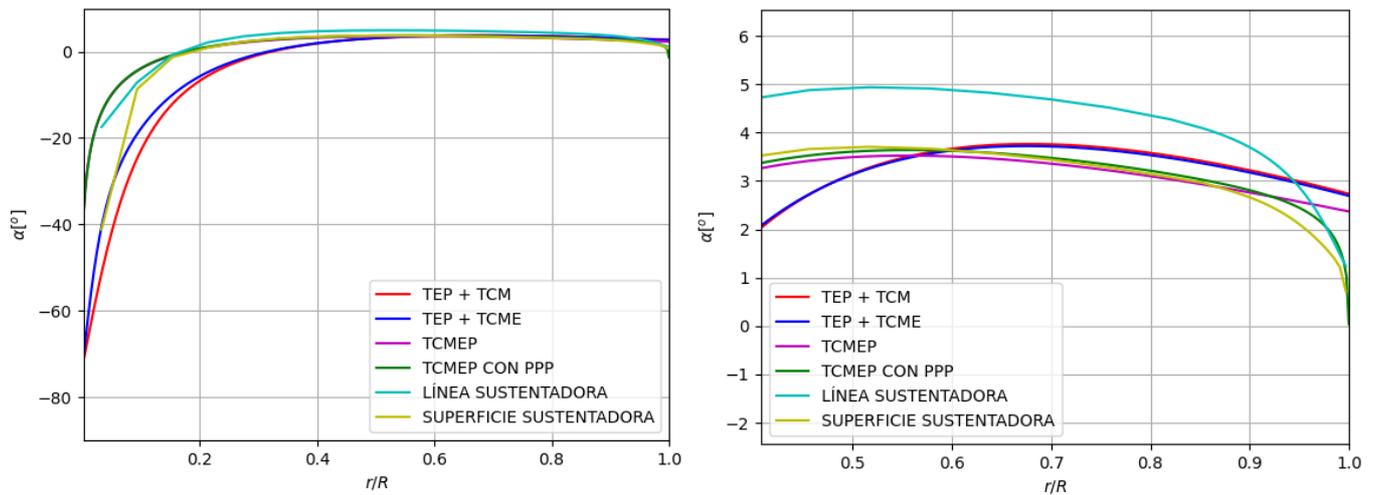


Ilustración 80. Ángulo de ataque para VR-12 y $V_c = 10 \text{ m/s}$

En lo que respecta a las gráficas anteriores, la única diferencia notable puede identificarse en el ángulo de ataque. La Teoría de la Línea Sustentadora proporciona ángulos de ataque (ilustración 80) significativamente superiores al resto de teorías, alejándose bastante del resto de tendencias. Este hecho queda explicado sin más que investigar cómo esta teoría modela la geometría de la pala. En ella, la discretización de la pala en dirección de la cuerda queda únicamente definida por un panel, el cual no es capaz de representar la propia curvatura del perfil (véase la figura 81). Así, la geometría de la pala es tratada como si fuera una placa plana, por lo que el ángulo de paso deberá de aumentar con respecto al resto de teorías para compensar la curvatura. Dado que el ángulo de ataque está estrictamente relacionado con el ángulo de paso y la velocidad inducida, y esta última no experimenta cambios significativos (pues se opera al mismo nivel de tracción), la tendencia de este estará dominada por el aumento del ángulo de paso.

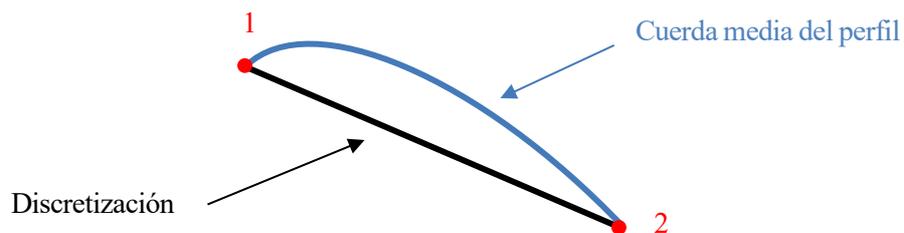


Ilustración 81. Discretización de la geometría según la Teoría de la Línea Sustentadora

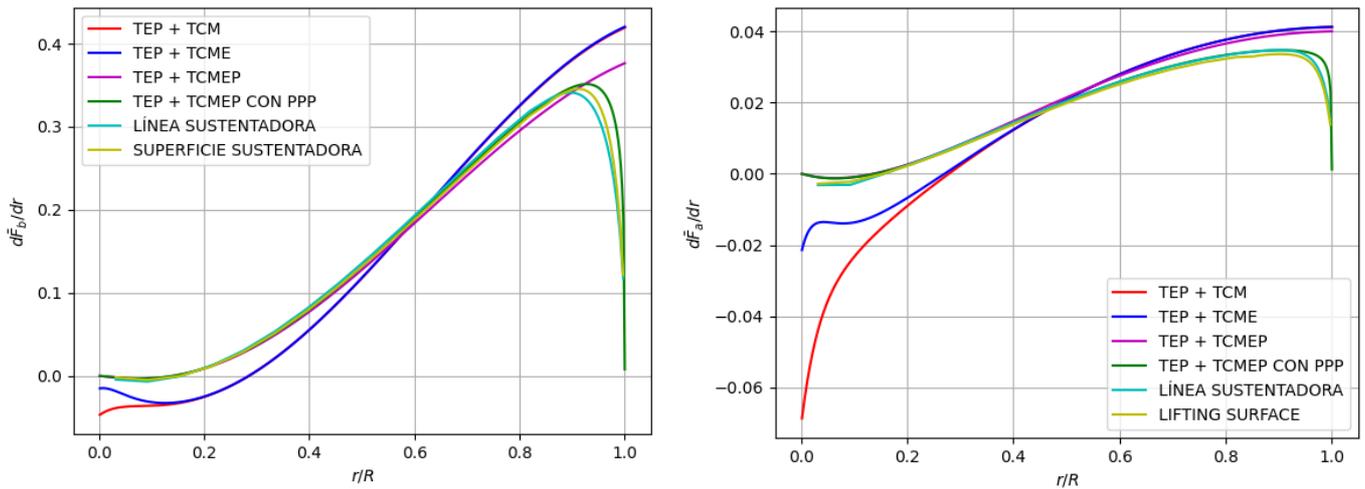


Ilustración 82. Fuerzas de batimiento y arrastre para VR-12 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

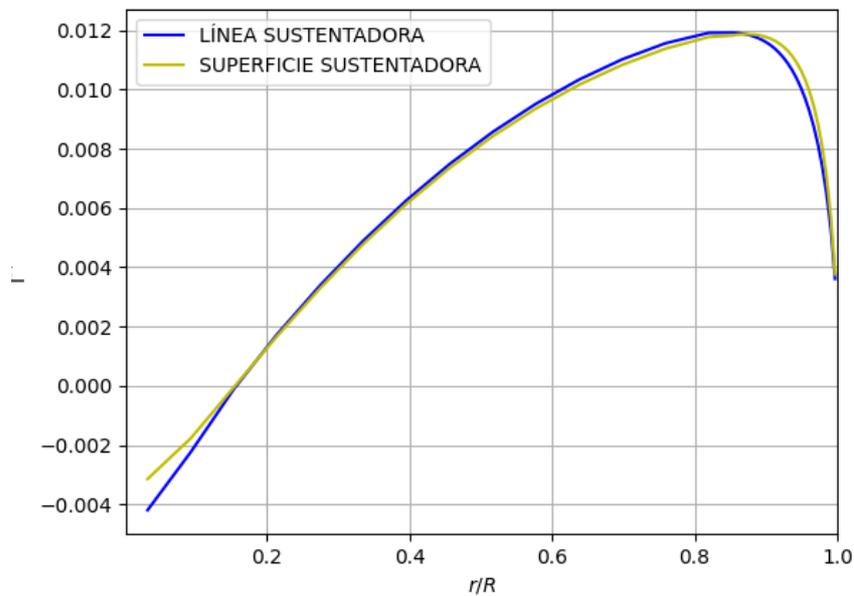


Ilustración 83. Circulación adimensional para VR-12 & $V_c = 10 \text{ m/s}$

En lo que respecta a las distribuciones de diferencial de batimiento y arrastre adimensionales (ilustración 83), las tendencias son muy similares a las ya presentadas para el caso del perfil simétrico NACA 0012. Este hecho recae en la imposición de la tracción para todos los análisis realizados y la similitud entre ambos perfiles, los cuales presentan regresiones para los coeficientes de sustentación y resistencia similares.

Para el caso de la circulación (representada en la ilustración 83) las tendencias son igualmente similares a las ya presentadas para el caso simétrico, pudiendo distinguir la caída drástica de la misma en las inmediaciones de la raíz y de la punta, las cuales son zonas de alta liberación de vorticidad, dado el carácter finito de la pala.

Del análisis de detalle, el primer aspecto a destacar es la geometría de la pala, representada en la figura 84. Dado que ahora no se considera un perfil simétrico, la línea de cuerda de este no se corresponderá con una línea

completamente recta, sino que puede apreciarse cierta curvatura. Este hecho aleja a los perfiles simétricos modelados como placas planas de los no simétricos.

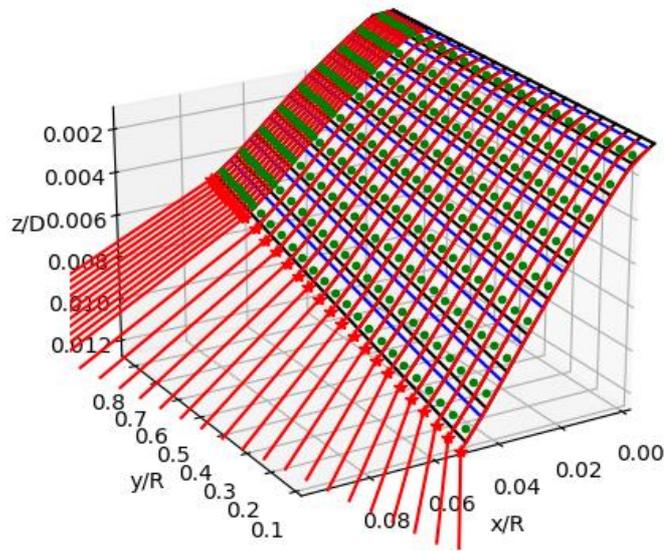


Ilustración 84. Geometría de la pala y estela para perfil VR-12

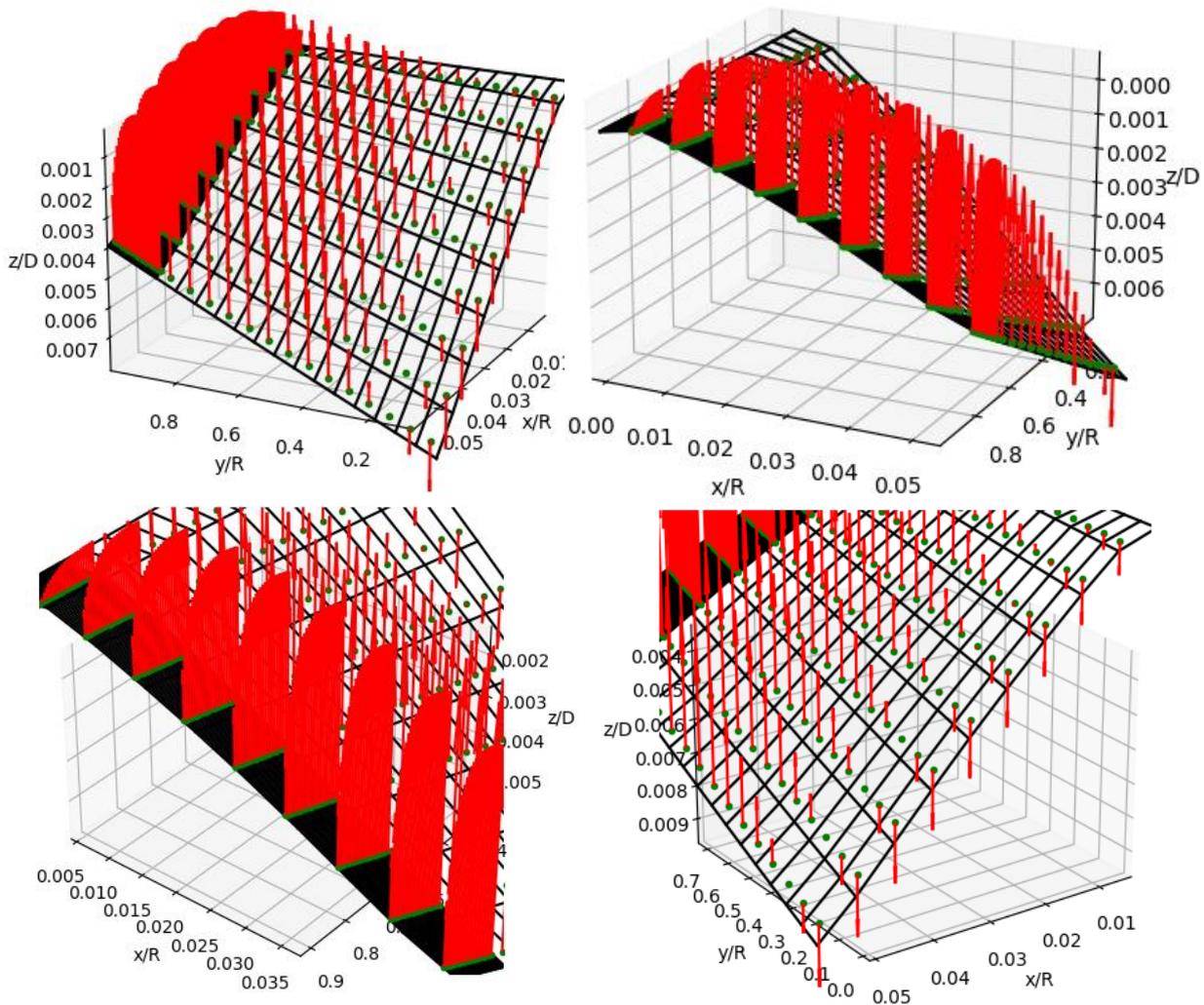


Ilustración 85. Distribución local de circulación para VR-12 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_\Gamma = 0.004$

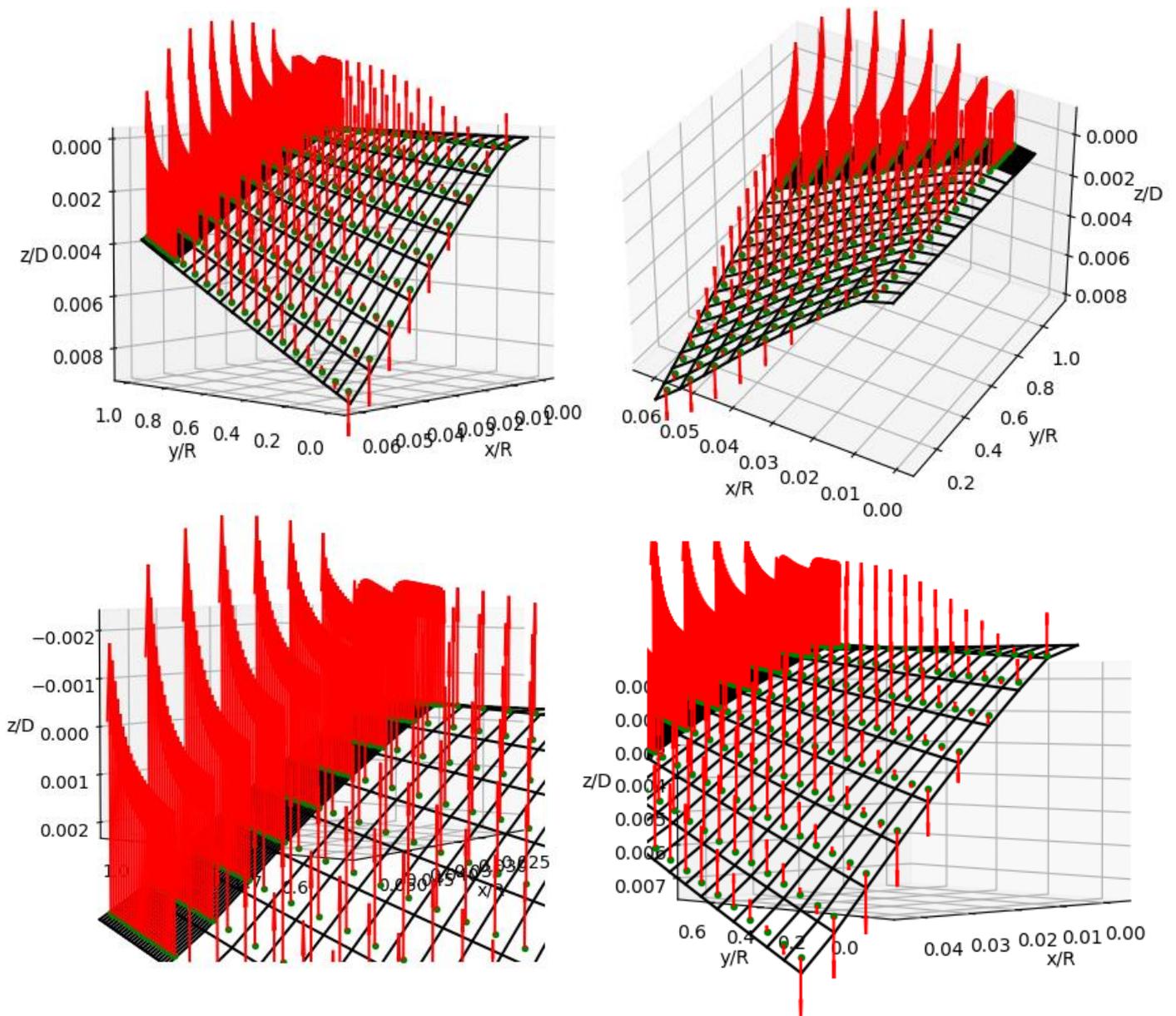


Ilustración 86. Distribución local de velocidad inducida para VR-12 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_\lambda = 0.007$

La distribución de circulación (ilustración 85) revela una perspectiva que difiere con lo discutido previamente en el análisis de perfiles simétricos. Al considerar perfiles no simétricos y, por ende, sus líneas de curvatura, los resultados se distancian de los obtenidos para una placa plana. En consecuencia, la tendencia asintótica observada en la fila de paneles más cercanos al borde de ataque desaparece. Esto aleja el pico máximo del coeficiente de presiones en cada perfil, desplazando el punto de mayor presión hacia el borde de salida de la pala.

De este modo, la teoría se aproxima más al comportamiento real al alejar el punto de máxima presión en los perfiles conformantes de la pala. Como resultado, la distribución de fuerzas sobre la pala refleja una situación mucho más cercana a la realidad.

En lo que respecta a la velocidad inducida esta presenta distribuciones incluso más uniformes en las primeras filas de paneles más próximos al borde de ataque para luego aumentar a medida que se avanza hacia el borde de salida, tal y como se evidenció en análisis previos.

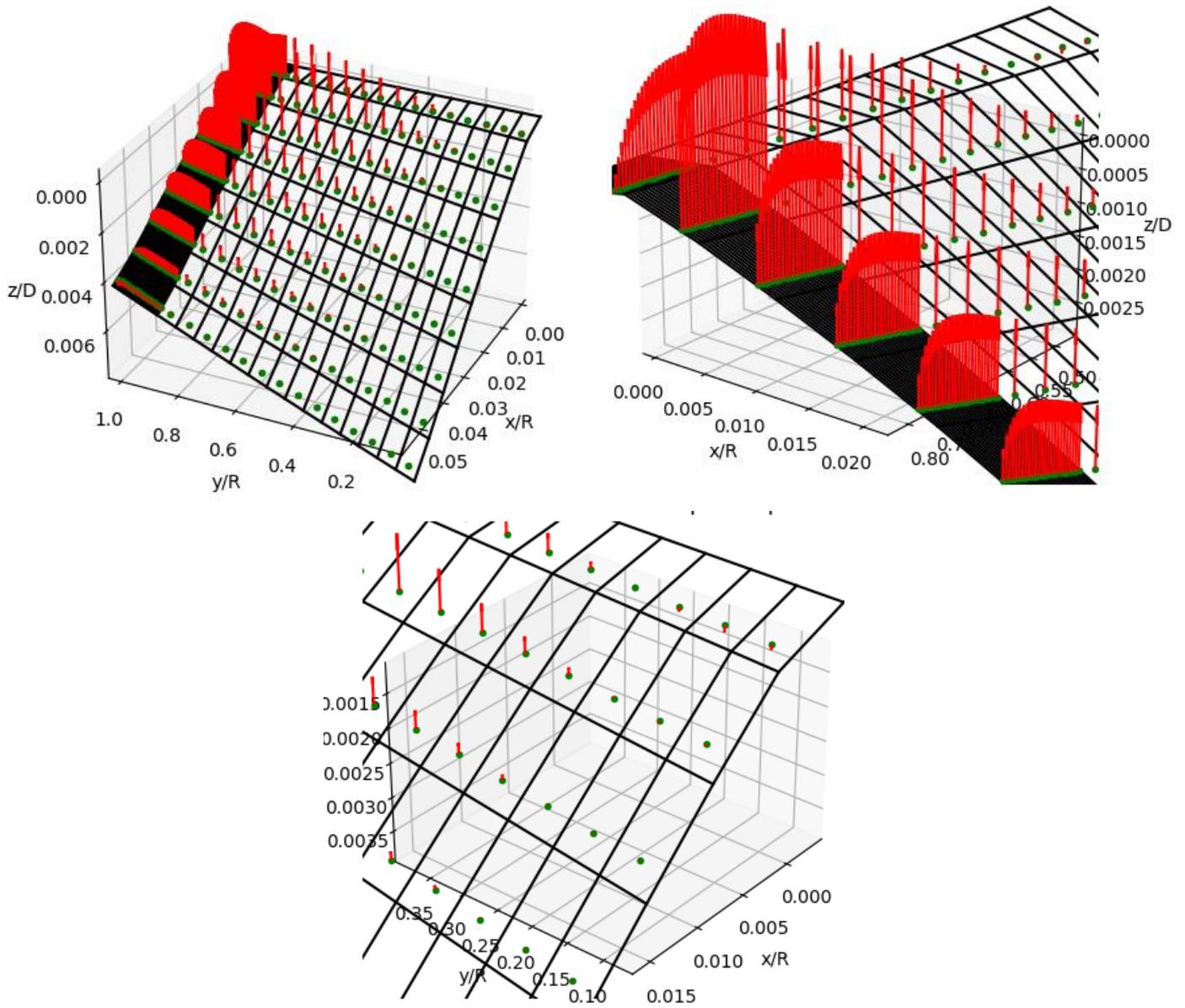


Ilustración 87. Distribución local de fuerza de batimiento para VR-12 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_{F_b} = 0.03$

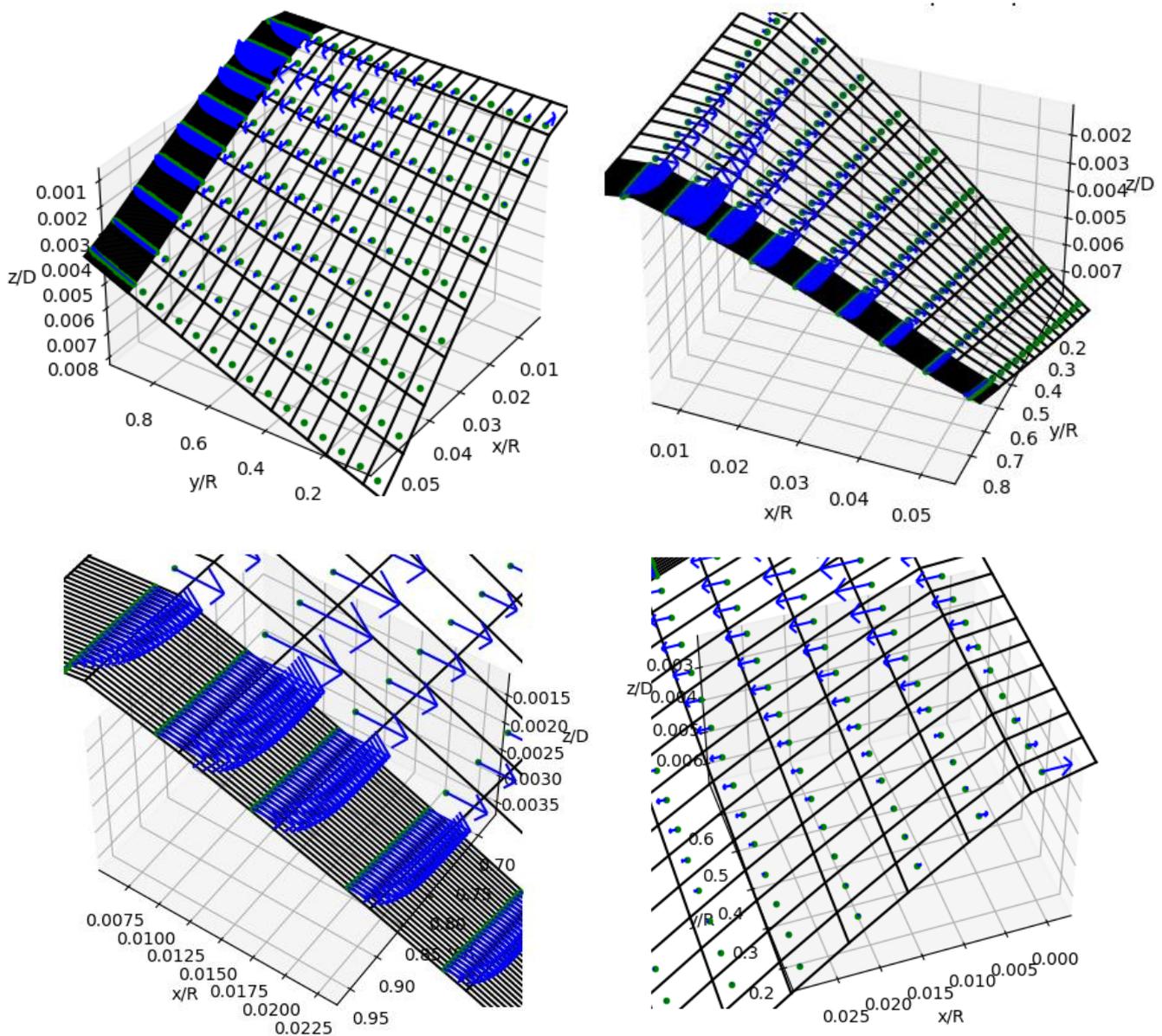


Ilustración 88. Distribución local de fuerza de arrastre para VR-12 y $V_c = 10 \text{ m/s}$. Factor de escalado $K_{F_a} = 0.7$

Las fuerzas aerodinámicas representadas en las figuras 87 y 88 presentan el comportamiento anteriormente evidenciado al analizar las distribuciones de circulación. Ahora, las fuerzas aerodinámicas no crecen asintóticamente en las inmediaciones del borde de ataque, sino que alcanzan el máximo para la segunda fila de paneles, estando el máximo para la distribución de presiones entorno al 15% de la cuerda media.

Finalmente, en lo que respecta a los valores de potencia y ángulo de paso colectivo el único aspecto reseñable es la desviación que sufre la Teoría de la Línea Sustentadora, dada la pobre discretización de la geometría en el sentido de la cuerda. Así, los valores del ángulo de paso colectivo han de verse incrementados para compensar la pérdida de curvatura del perfil, que ahora es modelado como una línea recta. Este incremento en el ángulo de paso se refleja posteriormente en un incremento de la potencia inducida con respecto a la Teoría de la Superficie Sustentadora.

Otro aspecto que destacar es la reducción de las magnitudes con respecto a la actuación con perfil NACA 0012. La introducción del perfil no simétrico VR-12 parece mejorar la actuación desde el punto de vista de

requerimientos de potencia y ángulos de paso, descargando las secciones de la pala. Las reducciones más significativas se producen en la potencia de forma, las cuales se reducen aproximadamente un 15%, teniendo un impacto significativo en la potencia total.

VARIABLE	θ_0 [°]	ϵ_{θ_0} [%]	$C_{P_{ic}}$	C_{P_0}	$C_{P_{tot}}$ [-]	$\epsilon_{P_{TOT}}$ [%]
TEORÍA						
TCM	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	4.6397E - 04	<i>N/A</i>	4.6397E - 04	15.56
TCME	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	4.7064E - 04	<i>N/A</i>	4.7064E - 04	14.34
TEP-TCM	17.3554	0.56	4.6397E - 04	7.1381E - 05	5.3535E - 04	2.72
TEP-TCME	17.3659	0.61	4.7257E - 04	7.2025E - 05	5.4460E - 04	0.88
TEP-TCMEP	17.3104	0.29	4.7909E - 04	6.9885E - 05	5.4897E - 04	0.09
TEP-TCMEP CON PPP	17.5363	1.60	4.9128E - 04	7.0165E - 05	5.6144E - 04	2.18
LS	18.5090	7.24	4.9167E - 04	7.3113E - 05	5.6478E - 04	2.79
SS	17.2596	REF.	4.7969E - 04	6.9970E - 05	5.4945E - 04	REF.

Tabla 19. Valores de los ángulos de paso colectivo y potencias para perfil VR-12 y $V_c = 10 \frac{m}{s}$

6 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

La única manera de hacer un gran trabajo es amar lo que haces

-Steve Jobs-

El presente trabajo permite establecer un estudio comparativo entre las teorías más abordadas en el análisis de la actuación de rotores en vuelo axial ascendente. Adicionalmente, se presenta un último estudio de detalle para cada uno de los casos en los que las características aerodinámicas de la pala son analizadas localmente, mediante la discretización de la pala según la cuerda y la envergadura. En este último estudio, características geométricas de la propia pala tal y como cambios en la cuerda y el carácter finito de la envergadura han sido investigados, lo que amplía la comprensión del comportamiento del rotor en su conjunto.

Dada la naturaleza de los elementos sustentadores, la clave para la resolución del problema requiere la resolución del campo de velocidades alrededor de la pala y por ello el campo de velocidades inducidas ha de ser igualmente resuelto. En este sentido, en el presente estudio a través de las diferentes teorías este ha sido obtenido en términos de ecuaciones explícitas, implícitas y a través teorías de vórtices que modelan el campo de velocidades inducidas como superposición de torbellinos situados en la superficie aerodinámica.

En resumen, el estudio comparativo arroja la conclusión de que la Teoría del Elemento de Pala Combinada considerando las pérdidas en el extremo de la pala logra replicar con notable precisión los resultados globales en términos de ángulo de paso y potencia en comparación con la Teoría de la Superficie Sustentadora, quedándose la Teoría de la Línea Sustentadora en una posición igualmente cercana. Este enfoque ofrece la ventaja adicional de un cálculo rápido, realizado en cuestión de segundos, lo que lo convierte en una herramienta valiosa para las etapas iniciales del diseño de rotores.

No obstante, se ha de remarcar que, a pesar de sus méritos en el contexto global, la Teoría del Elemento de Pala Combinada con pérdidas no puede capturar con precisión algunos fenómenos aerodinámicos locales debido a su discretización basada únicamente en la envergadura. Como resultado, en situaciones que requieran información detallada sobre zonas de mayor o menor carga aerodinámica, esta teoría demostrará limitaciones y será necesario recurrir a enfoques más avanzados, como la Teoría de la Superficie Sustentadora.

Por consiguiente, para aplicaciones aeroelásticas estáticas o aeromecánicas de mayor grado de detalle o para análisis aerodinámicos más detallados, la Teoría de la Superficie Sustentadora podría emplearse como un modelo para las fuerzas aerodinámicas, suministrando una información altamente detallada y localizada acerca de las excitaciones aerodinámicas en el rotor.

Es pertinente señalar que la Teoría de la Línea Sustentadora exhibe notables limitaciones en la región del borde de ataque al considerar perfiles simétricos. Debido a su representación como una placa plana, se observa una tendencia asintótica poco congruente con la realidad, lo que conduce a resultados menos precisos en las cercanías del borde de ataque.

Finalmente, en lo que respecta a la Teoría de la Superficie Sustentadora dada la pobre discretización según la cuerda realizada, cuando se trata de perfiles no simétricos esta no proporciona valores precisos especialmente en de ángulos de paso, sobrestimando estos frente a los valores del resto de teorías. Los valores de potencia sin embargo resultan cercanos a los proporcionados por el resto de las teorías.

Como parte del compromiso con el avance del conocimiento en el campo de la aerodinámica de rotores, se deja a disposición de la comunidad académica una interfaz de usuario desarrollada con Python. Esta herramienta permite la generación de gráficos comparativos detallados de todas las variables de interés y la realización de un

análisis pormenorizado utilizando la Teoría de la Superficie Sustentadora. Se pone a disposición este recurso con la intención de apoyar a la docencia de la asignatura de Helicópteros del Máster Habilitante en Ingeniería Aeronáutica de la Universidad de Sevilla, así como a otros investigadores y estudiantes interesados en este campo. Compartir herramientas y conocimientos es fundamental para el avance de la ciencia y la ingeniería. Se desea que esta herramienta sea de utilidad en futuras investigaciones y proyectos relacionados con rotores.

Al finalizar este análisis, se abre una puerta hacia los futuros trabajos que resultan evidentes a partir de las conclusiones presentadas. Este cierre nos conduce de manera fluida hacia las próximas etapas, resaltando la importancia de abordar los desafíos y limitaciones que han sido identificadas. En particular, las limitaciones identificadas en las teorías examinadas sugieren áreas específicas donde se podría profundizar para mejorar la precisión y aplicabilidad de los modelos. Explorar y desarrollar métodos de discretización más sofisticados podría permitirnos capturar con mayor precisión los fenómenos aerodinámicos locales, resolviendo así uno de los desafíos destacados en esta investigación.

En cuanto a las futuras direcciones de investigación, se abren varias áreas prometedoras que tienen el potencial de profundizar aún más en nuestra comprensión de la actuación de los rotores. En primer lugar, sería altamente beneficioso explorar modelos de estela más avanzados. Entre estos modelos se encuentran los semi-empíricos, que a través de ecuaciones pueden capturar fenómenos experimentales como el estrechamiento de la estela y las variaciones en su propagación axial. Además, los modelos de estela libre podrían considerar las posibles interacciones entre las estelas de las diferentes palas. Estos enfoques más complejos podrían proporcionar un nivel más realista de cómo las estelas impactan la interacción entre el rotor y su entorno aerodinámico.

Además, considerar la metodología de los paneles podría eliminar discrepancias en los resultados arrojados por las Teorías de Vórtices en lo que respecta a la zona cercana al borde de ataque. Esta metodología tiene el potencial de proporcionar una resolución más precisa y detallada de la fenomenología aerodinámica, permitiendo un análisis más detallado en lo que concierne al rotor y su flujo de aire circundante.

Incorporar análisis CFD (Dinámica de Fluidos Computacional) sería otro paso significativo. Esto permitiría considerar factores viscosos y turbulentos que son cruciales para comprender la aerodinámica realista. Esta herramienta facilita la validación experimental, optimización de modelos teóricos y experimentales, y el análisis de geometrías y condiciones complejas.

Para ampliar aún más el espectro de aplicación, se podría considerar otras actuaciones de vuelo, como el vuelo de avance o el descenso e incluso actuaciones más particulares como el vuelo bajo efecto suelo, la autorrotación, etc.

En conjunto, estas áreas representan oportunidades prometedoras para profundizar en la comprensión de los rotores y perfeccionar la precisión de los análisis efectuados. Al abordar estas direcciones futuras, se fortalecerá la capacidad para diseñar y optimizar rotores en diversos contextos y situaciones operativas.

ANEXO I: INTERFAZ DE USUARIO

Las herramientas son el puente entre la imaginación y la realidad.

- Anónimo -

Como resultado destacable de este Trabajo de Fin de Máster, se ha desarrollado una interfaz de usuario. Esta se ha creado con el propósito fundamental de proporcionar a los usuarios una herramienta de uso sencillo y práctico. Su función primordial es facilitar la identificación y establecimiento de las relaciones comparativas presentes en el propio trabajo, permitiendo una exploración profunda y accesible de los datos y resultados obtenidos. Esta herramienta, promueve un enfoque más efectivo y enriquecedor en el análisis y la interpretación de los hallazgos de esta investigación académica.

El nombre 'ROTORALIS' para esta interfaz de usuario se corresponde con una combinación de dos palabras. La primera parte, 'ROTOR', se deriva de la palabra 'rotor', que representa el objeto de estudio del presente trabajo. La segunda parte, 'ALIS', es un apodo cariñoso que pertenece al propio autor del trabajo, confiriendo a la interfaz un toque personal.

A continuación, tomando como apoyo la ilustración 90, se describe la interfaz, destacando los elementos de entrada y de salida, así como sus rasgos más esenciales:

1. **Velocidad ascensional.** Se encuentra dentro del marco de los parámetros de actuación junto con la altura de operación. Este parámetro se corresponde con la velocidad de ascenso del rotor en m/s.

Posee las siguientes **restricciones** y de no cumplirse se muestran los errores presentes en la ilustración 89:

- a) **No se permiten valores negativos**, pues el vuelo de descenso no está contemplado en el análisis.
- b) **No se puede dejar la casilla sin rellenar.**

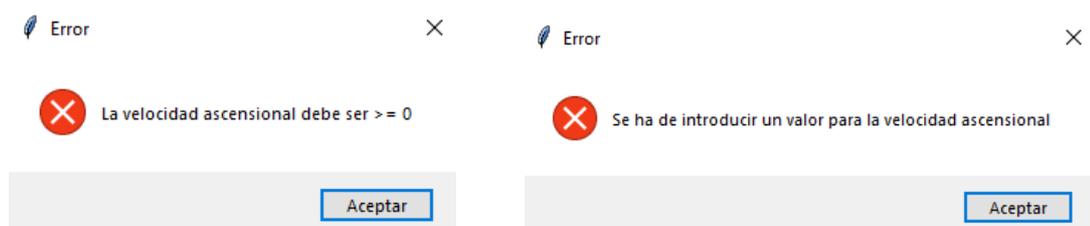


Ilustración 89. Posibles errores en el campo Velocidad ascensional

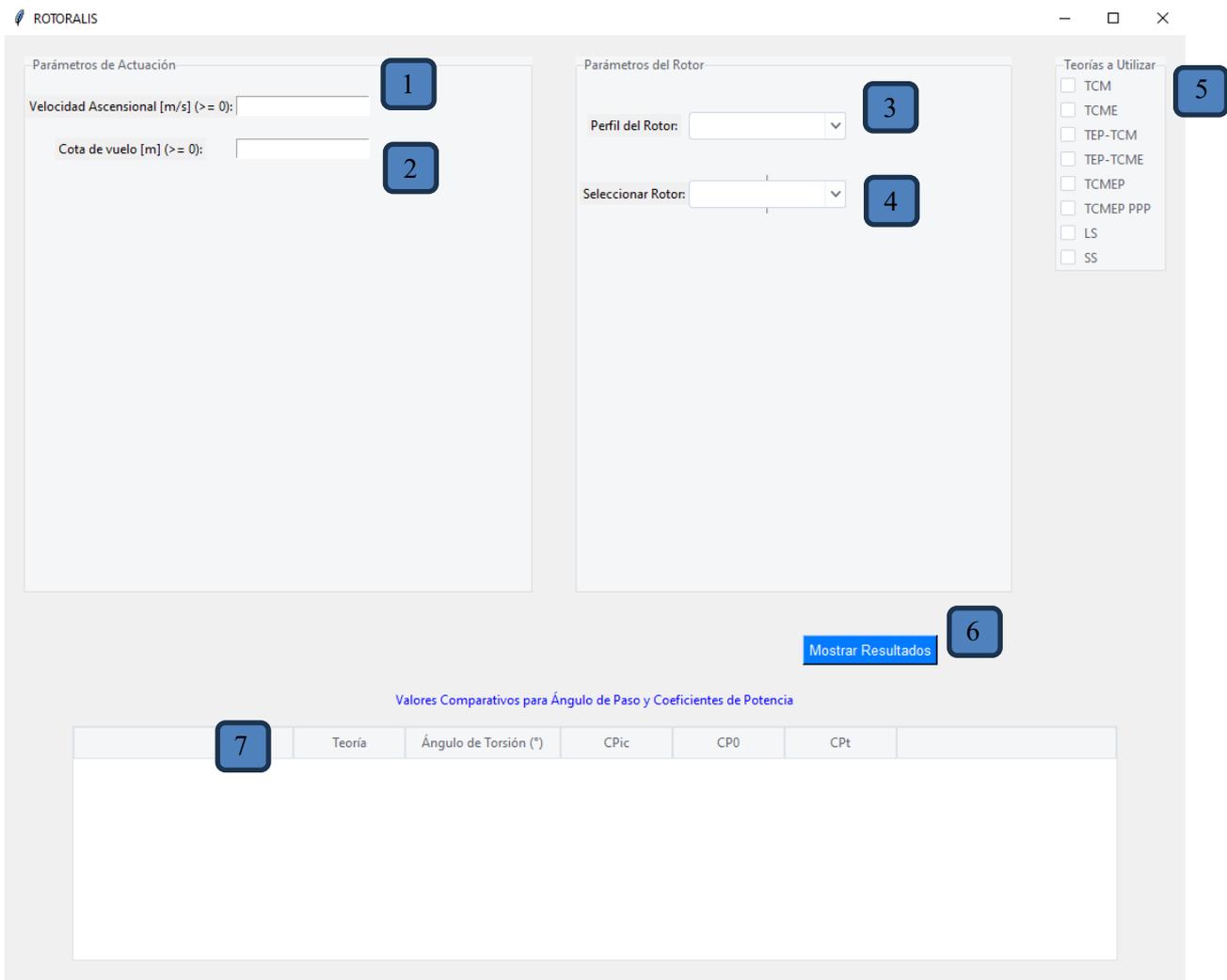


Ilustración 90. Descripción de la interfaz de usuario

2. **Altura de operación.** Este parámetro representa la altura de actuación del rotor en m y está estrictamente relacionada con la densidad del aire circundante.

Este parámetro posee las siguientes **restricciones**:

- c) **No se permiten valores negativos.**
- d) **No se puede dejar la casilla sin rellenar.**

3. **Perfil del Rotor.** Este parámetro representa los perfiles aerodinámicos que conforman la pala. Se trata de un menú desplegable con dos posibles opciones: NACA 0012 y VR-12. Únicamente se podrá seleccionar uno de ellos, no siendo posible realizar análisis para palas formadas por diferentes perfiles.

Este parámetro posee una única **restricción**:

- a) **No se puede dejar la casilla sin rellenar.**

4. **Seleccionar Rotor.** Este campo es igualmente un menú desplegable donde se selecciona el modelo de rotor a utilizar.

Este parámetro posee una única **restricción**:

- a) **No se puede dejar la casilla sin rellenar.**

En él se encuentran dos posibles opciones:

- 4.1. **HC135.** Se corresponde con el modelo de rotor del helicóptero HC135 tomado como referencia en el presente trabajo fin de máster, cuyas características pueden ser encontradas en la sección 4.
- 4.2. **Rotor personalizado.** En el caso de seleccionar este campo, automáticamente aparece un menú desplegable que permite introducir valores para definir el modelo de rotor a tratar (véase ilustración 91).

The image shows a software interface for selecting a rotor. At the top, there is a dropdown menu labeled 'Seleccionar Rotor:' with 'Rotor personalizado' selected. Below this is a section titled 'Parámetros Personalizados del Rotor' containing seven input fields: 'Radio inicial [m]', 'Radio final [m]', 'Cuerda [m]', 'Velocidad de rotación [rad/s]', 'Ángulo de torsión lineal [°]', 'Número de Palas [uds]', and 'Tracción [N]'. Each field has a corresponding empty text box for data entry.

Ilustración 91. Parámetros personalizados del rotor

Dentro de este submenú se distinguen los siguientes parámetros:

- **Radio inicial.** Se corresponde con la distancia en m desde el eje de rotación hasta el comienzo de la pala. Posee las siguientes **restricciones**:
 - a) **No puede dejarse sin rellenar.**
 - b) **No pueden introducirse valores negativos.**
 - c) **No se puede introducir un valor mayor que el Radio final.**

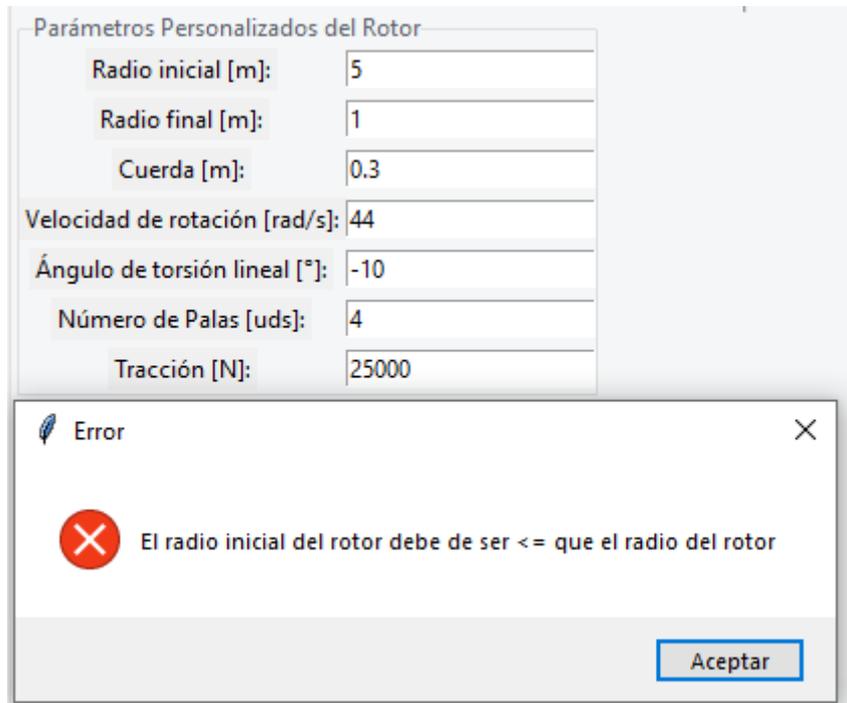


Ilustración 92. Error mostrado para Radio inicial mayor que Radio final

- **Radio final.** Se corresponde con la distancia en m desde el eje de rotación hasta el final de la pala. Posee las siguientes **restricciones**:
 - a) **No puede dejarse sin rellenar.**
 - b) **No pueden introducirse valores negativos.**

Nótese que ahora no se considera la posibilidad de un radio final menor que el inicial pues ya se ha chequeado en el punto anterior, y de igual manera mostraría un mensaje de error.
- **Cuerda.** Se corresponde con el ancho de la pala en m. En este caso la pala se modela únicamente con cuerda constante. Posee las siguientes **restricciones**:
 - a) **No puede dejarse sin rellenar.**
 - b) **No pueden introducirse valores negativos.**
- **Ángulo de torsión lineal.** Se corresponde con la variación lineal que sufre el ángulo de torsión de la pala desde la raíz hasta la punta (considerando una pala que posee radio inicial nulo). Se ha de introducir en $^{\circ}/m$. Posee la siguiente **restricción**:
 - a) **No puede dejarse sin rellenar.**

- **Número de palas.** Posee las siguientes **restricciones**:
 - a) **No puede dejarse sin rellenar.**
 - b) **No pueden introducirse valores negativos.**
- **Tracción.** Se corresponde con la fuerza requerida por el rotor para realizar la operación. Posee las siguientes **restricciones**:
 - a) **No puede dejarse sin rellenar.**
 - b) **No pueden introducirse valores negativos.**

5. **Teorías a Utilizar.** En este bloque se identifican todas las teorías modeladas por la interfaz en cuestión. Las teorías en cuestión se encuentran abreviadas por motivos de sencillez en la representación, pudiendo ver los títulos de estas en las secciones 2 y 3. En este bloque se pueden seleccionar más de una teoría de forma simultánea.

Este módulo posee las siguientes **restricciones**:

- a) **No se puede dejar la casilla sin rellenar.**
- b)

Además, las teorías LS y SS poseen ciertas particularidades, y cuando estas son seleccionadas un menú adicional aparece para poder completar los parámetros de discretización (véase figura 93). Nótese que, para cada uno de los parámetros, se muestra a la derecha los parámetros de diseño resultado del presente trabajo.

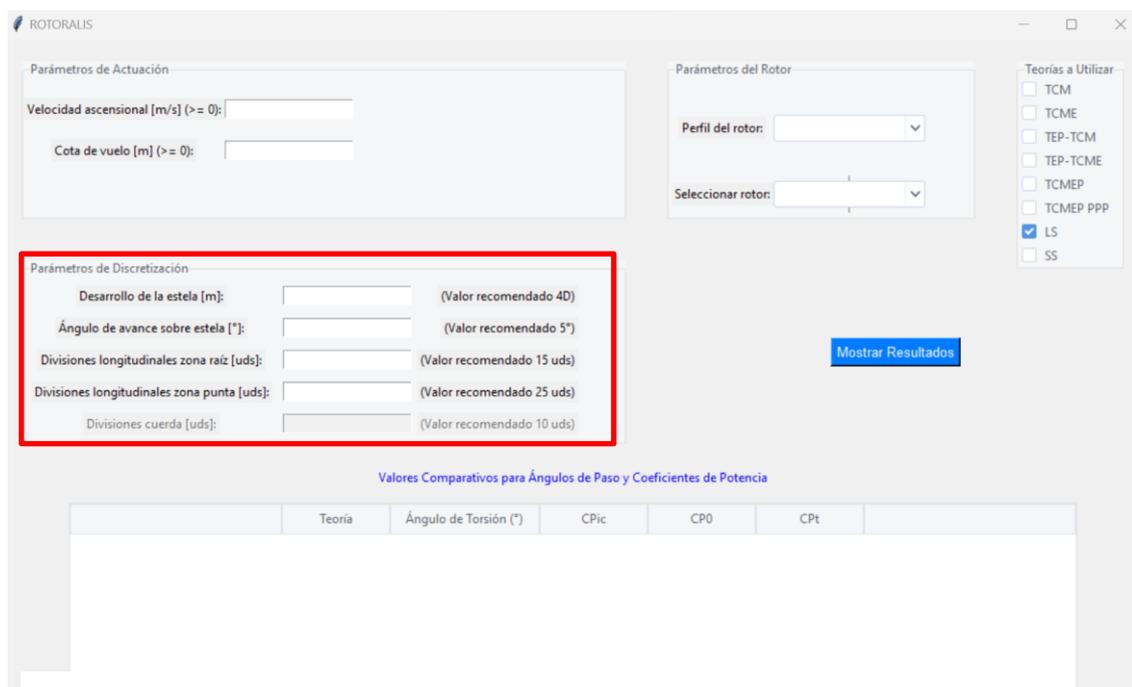


Ilustración 93. Módulo Parámetros de Discretización condicionado a LS y SS

Estos parámetros son los siguientes:

- **Desarrollo de la estela.** Se corresponde con la distancia axial en m a la cual la estela es terminada, pues esta se considera desarrollada. En este punto, es importante comprobar que la estela no posee apenas influencia en el rotor. Un valor apropiado para este parámetro se corresponde con $4D$, siendo D el diámetro del rotor.

Al igual que en casos anteriores, este parámetro **no puede ser negativo**.

- **Ángulo de avance sobre la estela.** Dado que ROTORALIS aborda la solución del problema a través de un modelo numérico en el cual la estela será discretizada en segmentos rectos, la longitud de estos segmentos está estrechamente relacionada con este parámetro, el cual representa la proyección sobre el plano de rotación del ángulo entre los puntos inicial y final del propio segmento, medido desde el centro de rotación.

Un valor apropiado para este parámetro se corresponde con 5° , y este **no admite valores negativos**. Además, se ha de destacar que este parámetro condiciona de forma significativa el tiempo de cálculo, incrementando este a medida que este parámetro aumenta.

- **Divisiones longitudinales sobre la raíz y punta.** Estos parámetros representan la discretización en dirección del radio de la pala. El primero de los parámetros se corresponde con las divisiones en el primer 85% del radio, y el segundo, las divisiones en el resto de la pala.

Valores recomendados para estos parámetros se corresponden con 15 y 25 divisiones para la raíz y punta respectivamente. Además, estos valores **han de ser necesariamente mayores que 2**, para poder definir al menos una división en cada región.

- **Divisiones cuerda.** Este parámetro únicamente estará activo cuando se seleccione la teoría SS y representa el número de divisiones en la dirección de la cuerda. Un valor apropiado para este parámetro se encuentra en el entorno de 10 divisiones y al igual que en los casos anteriores **no admite valores menores de 2**.

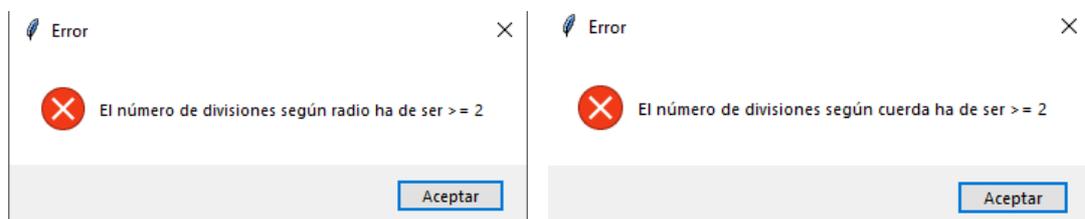


Ilustración 94. Errores para número de divisiones longitudinales y según cuerda

6. **Mostrar Resultados.** Este botón separa la parte de preprocesado de postprocesado del problema, mostrando los resultados. En caso de haber algún problema relacionado con los anteriormente comentados el software devolverá un error y no permitirá continuar con los cálculos (véase la ilustración 94 como ejemplo).

7. **Resultados.** En este bloque se encuentran los resultados numéricos presentados en forma de tabla (ilustración 95) y los resultados gráficos igualmente generados (ilustración 96).

Valores Comparativos para Ángulo de Paso y Coeficientes de Potencia

Teoría	Ángulo de Torsión (°)	CPic	CP0	CPt
TCM	N/A	3.0557e-04	N/A	3.0557e-04
TCME	N/A	3.1049e-04	N/A	3.1049e-04
TEP-TCM	16.0473	3.0557e-04	7.9520e-05	3.8509e-04
TEP-TCME	16.0503	3.1242e-04	8.0237e-05	3.9265e-04
TCMEP	16.004	3.1266e-04	7.8561e-05	3.9122e-04
TCMEP PPP	16.1453	3.2031e-04	7.8614e-05	3.9892e-04

Teorías a Utilizar

TCM

TCME

TEP-TCM

TEP-TCME

TCMEP

TCMEP PPP

LS

SS

Ilustración 95. Resultados para ángulo de paso y coeficientes de potencia para las teorías seleccionadas

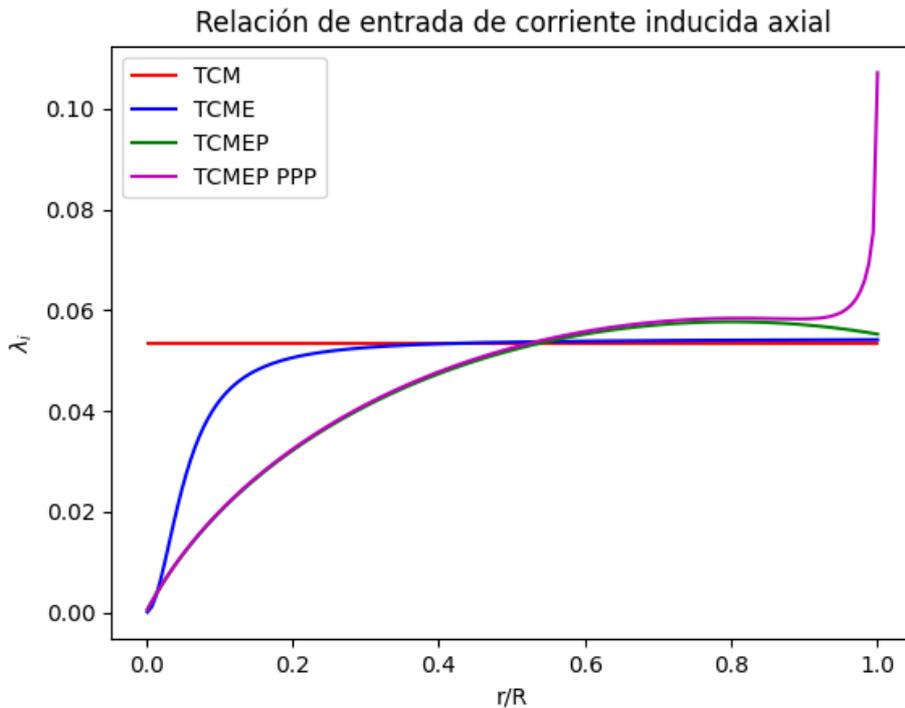


Ilustración 96. Ejemplo de resultado gráfico generado

Para concluir este capítulo dedicado a la descripción de la interfaz de usuario, es relevante destacar que este software representa una herramienta práctica en el análisis de la actuación ascensional de rotores. Al permitir la comparación entre teorías convencionales y más avanzadas, se proporciona una plataforma versátil y educativa para el estudio de la fenomenología que rodea a los rotores. Esta herramienta se pone a disposición de la comunidad académica y profesional, con el objetivo de contribuir al avance y la comprensión en este campo.

REFERENCIAS

- [1] W. Jonhson, Helicopter Theory, New Jersey: Princeston University Press, 1994.
- [2] J. G. Leishman, Principles of Helicopter Aerodynamics, Maryland: Cambridge University Press, 2006.
- [3] A. P. Joseph Katz, Low Speed Aerodynamics from Wing Theory to Panel Methods, San Diego, 1991.
- [4] H. Abedi, Development of Vortex Filament Method for Aerodynamic Loads on Rotor Blades, Gothenburg: Chalmers University of Technology, Department of Applied Michanics, 2013.
- [5] D. S. Muñoz, Study of Horizontal Axis Wind Turbine Aerodynamics using Prandtl's, Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, 2014.
- [6] A. Valenzuela, Helicopteros, Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2014.
- [7] J. Katz y A. Plotkin, Low Speed Aerodynamics from Wing Theory to Panel Methods, San Diego, 1991.
- [8] H. Abedi, L. Davidson y S. Voutsinas, Development of Free Vortex Method for Aerodynamic Loads on Rotor Blades, Goteborg: Chalmers University of Technology.
- [9] F. J. Chao, «Aeronaves Militares Españolas,» 1 Mayo 2020. [En línea]. Available: <https://aeronavesmilitaresespanolas.com/bo-105-saer-guardia-civil/>.
- [10] «The Official Helicopter BlueBook,» HeliValue, 2007.
- [11] Airfoil Tools, 2023.
- [12] G. D. y. D. B. A. Bramwell, «Bramwell's Helicopter Dynamics,» 1976.
- [13] C. Ferlisi, «Rotor Wake Modelling Using the Vortex-Lattice Method,» University of Montreal, Montreal, 2018.
- [14] C. J. Szymendera, «Computational Free Wake Analysis of a Helicopter Rotor,» University of Pennsylvania, Pennsylvania, 2002.
- [15] M. A.J, «Estudio de Perfil NACA 0006, 0012 y 0024,» SCRIBD, 2017.
- [16] J.D, Mecánica de Rotores III, La Plata, Buenos Aires: Universidad de la Plata, 2002.
- [17] L. B. a. S. B. G. Vernengo, «Supercavitating Three-Dimensional Hydrofoil Analysis by Viscous Lifting-Line Approach,» *Aeroespace Research Central*, 2017.

[18] D. M. a. T. Sant, «A Review of Wind Turbine Yaw Aerodynamics,» INTECH, 2015.