Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar
Septiembre-Octubre, 2023, Volumen 7, Número 5
https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i5.8275

Variedades Inerciales para una Ecuación Diferencial Parcial en Espacios de Sobolev con Peso

Pedro Gustavo Reyes Carrera[1]
Gustavoreyes8@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4854-2952
Universidad nacional de Trujillo
Perú

RESUMEN

En el presente trabajo, se demuestra la existencia de una variedad inercial para una ecuación diferencial parcial en espacio de Sobolev con peso. Se usó la metodología del análisis funcional en espacio de Hilbert con operadores autoadjuntos no acotados; analizándose la ecuación diferencial parcial $u_t + Au + F(u) = 0$ (1), siendo A un operador positivo no acotado autoadjunto y disipativo en un espacio de Sobolev con peso en H, F es el término no lineal con la propiedad de Lipschitz local en el dominio de $D(A) = H$. Al realizar el análisis de la ecuación (1) se obtuvieron los resultados siguientes:

i) Para λ barrera espectral de la ecuación (1) tal que $\lambda > \lambda_0$, para algún λ_0 y $P_\lambda H$ es de dimensión finita se concluye que $\mathrm{Gr}(\mathrm{Q}) = \{\mathrm{u} + \mathrm{Q}(u) : u \in P_\lambda H\}$ es una variedad Lipschitziana de dimensión finita satisfaciendo las siguientes propiedades:

a) $\mathrm{Gr}(\mathrm{Q})$ es invariante para el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

b) $\mathrm{Gr}(\mathrm{Q})$ atrae exponencialmente todas las órbitas de la ecuación de evolución (1).

ii) Si $\lambda \notin \sigma(A)$, se tiene una variedad inercial para la ecuación de evolución no lineal $u_t + Au + F(u) = 0$.

Finalmente se concluye que: Sea λ una barrera espectral para (1) tal que $\lambda > \lambda_0, P_\lambda H$ es de dimensión finita y $\lambda \notin \sigma(A)$. Entonces, la función $\mathrm{Gr}(\mathrm{Q})$ es una variedad inercial para (1).

Palabras clave: *espacios sobolev; variedades inerciales; barreras espectrales*

[1] Autor Principal
Correspondencia: Gustavoreyes8@gmail.com

Inertial Manifolds for A Partial Differential Equation in Sobolev Space with Weight

ABSTRACT

In the present work, the existence of an inertial manifold is demonstrated for a partial differential equation in Sobolev space with weight. The methodology of functional analysis in Hilbert space with unbounded self-adjoint operators was used; analyzing the partial differential equation $u_t + Au + F(u) = 0$ .... (1). where A is a self-adjoint and dissipative unbounded positive operator on a Sobolev space with weight on H, F is the nonlinear term with the local Lipschitz property in the domain of $D(A) = H$. When performing the analysis of equation (1) the following results were obtained:

i) For λ spectral barrier of equation (1) such that $\lambda > \lambda_0$,for some λ_0 and $P_\lambda H$ is of finite dimension it follows that $\mathrm{Gr(Q)} = \{\mathrm{u} + \mathrm{Q}(u) : u \in P_\lambda H\}$ is a manifold Finite-dimensional Lipschitzian satisfying the following properties:

a)$\mathrm{Gr(Q)}$ is invariant for the semigroup $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

b)$\mathrm{Gr(Q)}$exponentially attracts all the orbits of the evolution equation (1).

ii) If $\lambda \notin \sigma(A)$, we have an inertial manifold for the nonlinear evolution equation $u_t + Au + F(u) = 0$.

Finally it is concluded that: Let λ be a spectral barrier for (1) such that $\lambda > \lambda_0, P_\lambda H$ is of finite dimension and $\lambda \notin \sigma(A)$. Then, the function Gr(Q) is an inertial manifold for (1).

Keywords: *sobolev spaces; inertial varieties; barrier spectral varieties*

Artículo recibido 15 setiembre 2023

Aceptado para publicación: 28 octubre 2023

INTRODUCCIÓN

La teoría de variedades inerciales se relaciona estrechamente entre las ecuaciones de evolución en ecuaciones diferenciales parciales y los sistemas dinámicos de menor dimensión, tal como se aprecia en los trabajos de Brown,H.S.,M.S.Jolly,I.G.Kevrekidis and E.S. Titi(1990) ; Sell, G.R. (1989) y Constantin, P. Foias,C. Nicolaenko, B. and Témam, R. (1988), en la que se usa fuertemente la teoría de semigrupos como se desarrollan en los trabajos de Pazy,A.(1983), Pruss,J.(1984) y Stuart,A. (1995). Aproximaciones de las variedades inerciales también han sido considerados en el trabajo de Foias, C. ,R. Teman and E.S. Titi(1989) y sus distintas formas de construcción. Por otro lado las barreras espectrales usado para construir variedades inerciales fueron realizado en los trabajos de Yuncheng, Y., G.R. (2004). En el presente trabajo de tesis se demostrará la existencia de una variedad inercial usando barrera espectral en los espacios de Sobolev con peso. Desarrollamos algos preliminares que serán usados en la demostración del teorema resultante, se definen las variedades inerciales y algunas otras propiedades. Por otro lado en la discusión se demuestra el resultado principal de la existencia de una variedad inercial para una ecuación de evolución disipativa no lineal.

METODOLOGÍA

Se usó el método del análisis funcional más precisamente la teoría del espacio de Hilbert en el que involucran los operadores autoadjuntos no acotados. Por otro lado se tiene en cuenta el espectro de dicho operador así como también el generador infinitesimal de semigrupo el cual dará la solución. Se analiza la ecuación diferencial parcial $u_t + Au + F(u) = 0$ siendo A un operador positivo no acotado autoadjunto y disipativo en un espacio de Sobolev con peso en H, F es el término no lineal con la propiedad de Lipschitz local en el dominio de $D(A) = H$, se demostrará la existencia de una variedad inercial para la ecuación diferencial dada.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se tiene como resultado el siguiente teorema

Teorema.

Sea λ una barrera espectral para (1) tal que $\lambda > \lambda_0, P_\lambda H$ es de dimensión finita y $\lambda \notin \sigma(A)$. Entonces, la función $\mathrm{Gr(Q)}$ definido por (5) es una variedad inercial para (1).

Esto es:

1. Para λ barrera espectral de la ecuación

$$u_t + Au + F(u) = 0 \qquad (*)$$

tal que $\lambda > \lambda_0$, para algún λ_0 y $P_\lambda H$ es de dimensión finita

se concluye que $\mathrm{Gr(Q)} = \{\mathrm{u} + \mathrm{Q}(u): u \in P_\lambda H\}$ es una variedad Lipschitziana

de dimensión finita satisfaciendo las siguientes propiedades:

a) $\mathrm{Gr(Q)}$ es invariante para el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

b) $\mathrm{Gr(Q)}$ atrae exponencialmente todas las órbitas de la ecuación de evolución (*).

2. Si $\lambda \notin \sigma(A)$, entonces se concluye según el teorema 12, que existe una variedad inercial para la ecuación de evolución no lineal

$$u_t + Au + F(u) = 0$$

DESARROLLO

1.1. Espacios de Hilbert

Definición 1.- Sea H un espacio vectorial sobre el campo de los reales provisto de un producto interno (.,.). H es un espacio de Hilbert si la norma inducida por el producto interno es un espacio normado completo. Es decir para toda sucesión de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H converge en la norma para un elemento de H.

1.2. Espacios $\mathbf{L}^p\ (\Omega)\,, 1 < p \leq \infty$

Definición 2.- Se define el espacio $L^p(\Omega)$ como las funciones medibles

$u: \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u(x)|^p$ es integrable, es decir:

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty$$

En particular en $L^2(\Omega)$ provisto de la norma

$$|u| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

1.3. Espacios $\mathbf{L}^{\infty}$ $(\boldsymbol{\Omega})$

Definición 3.- El espacio $L^{\infty}(\Omega)$ consiste de las funciones medibles esencialmente acotadas $u: \Omega \to \mathbb{R}$ con la norma

$$\|u\| = \sup \underset{\Omega}{\mathrm{ess}} |u|$$

1.4. Distribuciones

Definición 4.- Se dice que el funcional $\boldsymbol{T}: C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una distribución si satisface las siguientes condiciones:

i) **T** es lineal en $C_0^{\infty}(\Omega)$

ii) **T** es continuo en $C_0^{\infty}(\Omega)$

Donde $C_0^{\infty}(\Omega)$ es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y que tienen su soporte compacto en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Al conjunto de las distribuciones se le denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$

<u>**Ejemplo 1:**</u> Dada la función impulso unitario en el punto a, definido por

$\boldsymbol{\delta_a}: C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

Evidentemente es una distribución sobre $C_0^{\infty}(\Omega)$, es decir satisface las condiciones (i) y (ii) de la Definición 4.

Definición 5.- Se dice que la distribución $\boldsymbol{T}: C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tiene una derivada distribucional si

$$\langle \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle \boldsymbol{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad , \qquad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Lema 1 (Lema de Dubois Raymond)

La aplicación $\boldsymbol{\mathcal{T}}: L^p(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ es inyectiva . Es decir

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

<u>**Ejemplo 2:**</u> Dada la función escalón unitario

$$\boldsymbol{f}(x) = H_a(x) = \begin{cases} 1\,, si\ x \geq a \\ 0\,,\ \ si\ x < a \end{cases} \ ,\ \ a \geq 0$$

Su derivada distribucional es la distribución delta de Dirac en el punto a, es decir

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} = \delta_a$$

En efecto, para $\varphi \ \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$\langle \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = -\int_{\boldsymbol{a}}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$$

Por lo tanto del Lema de Dubois Raymond se deduce que

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} = \delta_a$$

1.5. Espacios de Sobolev $\boldsymbol{H^1(\Omega)}$, $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ y $\boldsymbol{H^{-1}(\Omega)}$

Definición 6.- Se define el espacio de Sobolev de orden uno y se representa por $H^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ tales que todas las derivadas distribucionales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ pertenecen a $L^2(\Omega)$. $H^1(\Omega)$ con el producto interno:

$\big((u, v)\big) = \ (u, v) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$, donde $(,)$ denota el producto interno en $L^2(\Omega)$, es un espacio de Hilbert.

Definición 7.- Se define el espacio $H_0^1(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ con la norma equivalente

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

Teorema 1. (Desigualdad de Poincaré)

Supongamos que Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

a) Si Ω es acotado, entonces, para todo $1 \leq p < \infty$,existe una constante $C_p > 0$, tal que

$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\ ,\ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$

b) Si Ω es conexo de frontera de clase C^1, entonces para todo $1 \leq p < \infty$existe una constante $C_p > 0$, tal que

$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\ ,\ \ \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$

donde $(u)_\Omega$es la media de $u$sobre Ω, o sea,

$(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx.$

1.6 Espacio de Sobolev con peso

Definición 8.- El espacio de Sobolev con peso w se define como el siguiente conjunto:

$$H = \{u \in H^1(\Omega) ; \; u * w \; \in H^1(\Omega)\}$$

con el producto interno $(u, v)_H = \big(\big((u * w), (v * w)\big)\big)$, donde $\big((\; , \;)\big)$ es el producto interno en $H^1(\Omega)$.

1.7 Semigrupos

En esta parte, todos los espacios vectoriales están definidos sobre un cuerpo $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

Definición 9

Sea Xun espacio de Banach. Una familia de operadores lineales y acotados $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ es llamado un semigrupo de operadores lineales acotados en X o simplemente semigrupo en$X$, si

i) $S(0) = I$, donde Ies el operador identidad de $L(X)$.

ii) $S(t + s) = S(t)S(s), \; \forall t, s \geq 0.$

Definición 10

Sea Xun espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$un semigrupo en$X$. El operador lineal$A: D(A) \subset X \to X$ definido por

i) $D(A) = \left\{u \in X: \lim\limits_{t\to 0} \frac{S(t)u-u}{t} \; existe\right\}$

ii) $Au = \lim\limits_{t\to 0} \frac{S(t)u-u}{t}, \; \forall u \in D(A).$

es llamado el generador infinitesimal del semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Observación 1

i) $D(A) = \{u \in X: Au \in X\}$ es el dominio del operador$A$.

ii) $S(t) = e^{tA}, \; \forall t \geq 0$ es un semigrupo en Xcon generador infinitesimal A, donde $A \in \mathrm{L}(X)$.

Definición 11

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo en X. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado uniformemente continuo, sí $\lim_{t\to 0}\|S(t)-I\|_{L(X)}=0$.

Teorema 2

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$un semigrupo en$X$.

$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo, si y solo si, $S(t)=e^{tA}$, $\forall t\geq 0$, para algún $A\in L(X)$.

Definición 12

Sean Xun espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo en$X$.

i) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$es llamado de clase C_0 o C_0- semigrupo, si $\lim_{t\to 0} S(t)u=u$, $\forall u\in X$.

ii) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado fuertemente continuo, si $\lim_{t\to r} S(t)u=S(r)u$, $\forall u\in X$.

Proposición 1

Sean Xun espacio de Banach y un semigrupo en X.

i) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$es un C_0- semigrupo, si y solo si, es fuertemente continuo.

ii) Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo, entonces es un C_0- semigrupo.

Definición 13.- $S(t)$ son uniformemente compacto para t suficientemente grande.

Si para todo conjunto E existe $t_0(E)$ tal que

$$\underset{t\geq t_0}{\cup} S(t)E$$

es relativamente compacto en H.

Además para todo conjunto acotado $K\subset H$ y $S(t)=S_1(t)+S_2(t)$ donde $S_1(t)$ son uniformemente compacto y S_2 un operador contínuo del espacio de Banach H.Se verifica:

$$r_K(t)=\operatorname*{Sup}_{E\subset K}|S_2(t)E|_H \to 0 \quad , \quad t\to\infty$$

Definición 14

Sean Xun espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$un C_0- semigrupo. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es llamado uniformemente acotado, si existe una constante $M\geq 1$ tal que $\|S(t)\|\leq M$, $\forall t\geq 0$.

Sí $M=1$, es llamado un C_0- semigrupo de contracciones.

Corolario 1

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Entonces $D(A)$ es denso en X y A es un operador lineal cerrado.

Definición 15

Sean Xun espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Se denotan por $A^0 = I$ y $A^1 = A$. Supongamos A^{n-1} que este bien definido, entonces se define A^n como

$D(A^n) = \{u \in X : u \in D(A^{n-1})$ y $A^{n-1}u \in D(A)\}$

$A^n u = A(A^{n-1}u),\ \forall u \in D(A^n)$.

Definición 16

Sean Xun espacio de Banach, X^* su dual y $A: D(A) \subset X \to X$ un operador lineal. Se denota el valor de $u^* \in X^*$ en $u \in X$, por $\langle u, u^* \rangle_{X\times X^*}$.

Para cada $u \in X$, se define el conjunto dualidad $F(u) \subset X^*$, como

$F(u) = \{u^* \in X^* : \langle u, u^* \rangle_{X\times X^*} = \|u\|^2 = \|u^*\|^2\}$.

A es llamado disipativo, si para cada $u \in D(A)$, se tiene $Re\langle Au, u^* \rangle_{X\times X^*} \leq 0$, $\forall u^* \in F(u)$.

Observación 2

Si $X = H$es un espacio de Hilbert, entonces por el teorema de representación de Riesz, se obtiene: A es disipativo, si y solo si, $Re\langle Au, u \rangle_H \leq 0$, $\forall u \in D(A)$.

Teorema 3

Sean Hun espacio de Hilbert y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A.

$\{S(t)\}_{t\geq 0}$es un C_0- semigrupo de contracciones, si y solo si, A es disipativo.

Teorema 4

Sean$H$ un espacio de Hilbert y $A: D(A) \subset H \to H$un operador lineal disipativo.

$i)$ Si $Im(\lambda_0 I - A) = H$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces $Im(\lambda I - A) = H, \forall \lambda > 0$.

$ii)$ Si $Im(I - A) = H$, entonces $\overline{D(A)} = H$.

Teorema 5 (Lumer – Phillips)

Sean Hun espacio de Hilbert y $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal con $\overline{D(A)} = H$ definido.

i) Si A es disipativo y existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = H$, entonces A es generador infinitesimal de un C_0- semigrupo de contracciones.

ii) Si A es generador infinitesimal de un C_0- semigrupo de contracciones, entonces A es disipativo y $Im(\lambda I - A) = H,\ \forall \lambda > 0$.

Colorario 2 (Corolario de Liu)

Sean Hun espacio de Hilbert y $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal disipativo con dominio $D(A)$ denso en H. Si $0 \in \rho(A)$, entonces A es generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 .

Teorema 6

Si $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ es un generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 sobre X, y $U_0 \in D(A)$. Entonces el problema de Cauchy abstracto o también llamado problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} U_t = AU, t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

tiene una única solución fuerte o clásica U tal que,

$U \in C(0, \infty[, D(A)) \cap C^1(0, \infty[, X)$

Definición 17

Sean X un espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Decimos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable, si existen

constantes $\mu > 0$ y $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\|_{L(X)} \leq Me^{-\mu t},\ \forall t \geq 0$.

Teorema 7 (Gearhart)

Sea$\{S(t)\}_{t\geq 0}$un C_0- semigrupo de contracciones sobre un espacio de Hilbert H, generado por A. El semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable, si y solo

si

a) $i\alpha \subset \rho(A)$ y

b) $\limsup_{|\alpha|\to+\infty} \|(i\alpha I - A)^{-1}\|_{L(H)} < \infty$.

Teorema 8 (Pruss – Huang – Renardy)

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo sobre un espacio de Hilbert H,generado por A.

El semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$es exponencialmente estable, si y solo si,

a) $i\alpha \subset \rho(A)$ y

b) Existe $C > 0$ tal que $\|(i\alpha I - A)^{-1}\|_{L(H)} \leq C, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Variedades inerciales

2.1 Conjunto invariante y w –límite

Definición 18.-Un conjunto **E** es invariante para el semigrupo S(t) si $S(t)E = E$,

$\forall t \geq 0$

y es positivamente invariante si $S(t)E \subset E$,$\forall t > 0$.

Definición 19.- Un conjunto w-límite de un punto p está definido por

$$w(p) = \{x \in \mathbb{R}^k; \exists\ (t_i), t_i \to \infty: S(t_i)p \to x \ \ cuando\ t_i \to \infty\}$$

Una definición equivalente

$$w(p) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)p}$$

Análogamente se define un conjunto w-límite de un conjunto E como:

$$w(p) = \{x \in \mathbb{R}^k; \exists\ (t_i), (p_i), t_i \to \infty\ , p_i \in E: S(t_i)p_i \to x\ , \qquad t_i \to \infty\}$$

Equivalentemente

$$w(E) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)E}$$

Teorema 9.- Se verifica las siguientes afirmaciones:

1. Sea $E \subset \mathbb{R}^k$ un conjunto acotado, $w(E)$ es un conjunto positivamente invariante y cerrado.

2. Si $\exists\ T > 0$ tal que $S(t)E$ es acotado para $t \geq T$, $w(E)$ es invariante.

3. Si $w(p)$ es acotado para algún $p \in \mathbb{R}^k$, entonces él es conexo

Teorema 10.-. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Son equivalentes:

1. f es cerrada y f^{-1} ({y}) es compacto para todo y ∈ Y .

2. f es cerrada y f^{-1} (K) es compacto para todo K ⊆ Y compacto.

3. Para todo Z espacio topológico, idZ × f : Z × X → Z × Y es cerrada.

4. f es propia.

2.2. Atractores globales y conjuntos obsorventes

Sea H un espacio de Hilbert.

Definición 20.- Un atractor es un conjunto $\mathcal{A} \subset H$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $\mathcal{A}$ es un conjunto invariante ($S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$.

b) $\mathcal{A}$ posee una vecindad abierta U tal que para todo $u_0 \in U$, $S(t)u_0$ converge para $\mathcal{A}$, cuando $t \to \infty$:

$d(S(t)u_0, \mathcal{A}) \to 0 \quad , t \to \infty$

Es decir $\mathcal{A}$ atrae los puntos de U. Por otro lado si

$d(S(t)E, \mathcal{A}) \to 0 \quad , t \to \infty$

Se dice que $\mathcal{A}$ atrae uniformemente un conjunto $E \subset U$

Definición 21.- $\mathcal{A} \subset H$ es un atractor global para el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Si $\mathcal{A}$ es un atractor compacto que atrae los conjuntos acotados de H.

Definición 22.- Sea $\mathfrak{B} \subset H$ y U un conjunto abierto conteniendo $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}$ es un conjunto absorvente en U si la órbita de cualquier conjunto acotado de U entra en $\mathfrak{B}$ después de un cierto tiempo, es decir:

$$\begin{cases} \forall\, E \subset U \;, \quad E \text{ acotado} \\ \exists\, t_1(E) \quad \text{tal que} \quad \mathrm{S(t)E} \subset \mathfrak{B} \;, \forall t \geq t_1(E) \end{cases}$$

Sea M una variedad topológica equipado con una atlas compatible cuyas aplicaciones de transición son todas Lipschitz(Atlas Lipschiziano).

Definición 23.- Una variedad Lipschitziana M es aquella que su atlas se puede extender a un único atlas maximal Lipschitziano compatible.

Considere un sistema dinámico sobre un espacio de Hilbert H :

$u' = A(u) \quad , \quad u(0) = u_0 \qquad (1)$

con la cual asociamos el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, donde $S(t)$ es la aplicación:

$$S(t): u_0 \to u(t)$$

Donde $u(t)$ es la solución de (1).

2.3. variedad Inercial

Definición 24.- Una **variedad Inercial** del sistema (1) es una variedad Lipschitziana $\mathcal{M}$ de dimensión finita satisfaciendo las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{M}$ es invariante positivamente para el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

b) $\mathcal{M}$ atrae exponencialmente todas las órbitas de (1).

Considere ahora la ecuación diferencial parcial:

$u_t + Au + F(u) = 0$ (2)

Donde A es un operador positivo no acotado autoadjunto y disipativo en un espacio de Hilbert H, F es el término no lineal con la propiedad de Lipschitz local en el dominio $D(A) \subset H$.

Considere un funcional $J: H \to [0, \infty)$ semicontínuo inferior y sea C un subconjunto de H podemos suponer que C está contenido en:

$D(J) = \{u \in H; J(u) < \infty\}$

Caso contrario se hace $D(J) \cap C$

Definición 25.- La clase de los operadores semilineales $\mathfrak{G}(C, J)$ se define como la suma $A + F$ de un operador lineal A en H y un operador no lineal F de C en H satisfaciendo las siguientes condiciones:

1) A es generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}_{t>0}$ de clase C_0 sobre H tal que $|T(t)u| \leq e^{\lambda t}|u|$, $t \geq 0, u \in H$ y para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

2) Para cada $\alpha > 0$ el conjunto de nivel $C_\alpha = \{u \in C: J(u) < \alpha\}$ en C es cerrado y F es contínuo en C_α.

3) Para cada $\alpha > 0$ existe $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $F - \lambda_\alpha I$ es disipativo en C_α, en el sentido de que $(Fu - Fv, u - v) \leq \lambda_\alpha |u - v|^2$, $u, v \in C_\alpha$

Sea $A + F$ un operador semilineal de la clase $\mathfrak{G}(C, J)$ y considere las siguientes dos condiciones de subtangencial:

H1) Para cada $u \in C$ existe una sucesión nula $\{h_n\}$ de números positivos y una sucesión $\{u_n\}$ en C tal que

i) $\lim_{n\to\infty} {h_n}^{-1} |T(h_n)u + h_n Fu - u_n| = 0$

ii) $\limsup_{n\to\infty} {h_n}^{-1} [J(u_n) - J(u) - u_n] \leq f(J(u))$

H2) Para cada $u \in C$ existe una sucesión nula $\{h_n\}$ de números positivos y una sucesión $\{u_n\}$ en $D(A) \cap C$ tal que

i) $\lim_{n\to\infty} {h_n}^{-1} |u_n + h_n(A + F)u_n - u| = 0$

ii) $\limsup_{n\to\infty} {h_n}^{-1} [J(u_n) - J(u) - u_n] \leq f(J(u))$

iii) $\lim_{n} |u_n - u| = 0$

2.4. Barrera espectral

Definición 26 (BARRERAS ESPECTRALES). Un número λ, 0< λ<∞ es llamado una *Barrera espectral* para (2) si para todo u_1, u_2 en *D(A)* satisface

$(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = \lambda |u_1 - u_2|^2$ (3)

Observación 3

De la definición se tiene que

$|(A - \lambda)(u_1 - u_2)|^2 + (F(u_1) - F(u_2), (A - \lambda)(u_1 - u_2)) > 0$

Proposición 1. Asumamos que λ es una barrera espectral para (2) y sea $u_1(t) = s(t)u_1^0, u_2(t) = s(t)u_2^0$ dos soluciones de (2). Entonces se satisfacen las siguientes implicancias:

a) Si $\left|A^{\frac{1}{2}}(u_1^0 - u_2^0)\right|^2 \leq \lambda \left|u_1^0 - u_2^0\right|^2$ entonces

$\left|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\right|^2 \leq \lambda |u_1(t) - u_2(t)|^2$ para todo $t \geq 0$.

b) Si $\left|A^{\frac{1}{2}}(u_1(t) - u_2(t))\right|^2 > \lambda |u_1(t) - u_2(t)|^2$ para algún $t > 0$ y si $\lambda > \lambda_0$, entonces

$|u_1(t) - u_2(t)| \leq |u_1(\sigma) - u_2(\sigma)| \exp\left(-\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - \lambda_0^\alpha)(t - \sigma)\right)$ para todo , $\sigma \in [0, t]$

Sea P_λ el operador proyección espectral de A en el intervalo $[0, \lambda)$, $\lambda > 0$. Suponga que existe una barrera espectral λ para (2) tal que

(1) $\lambda > \lambda_0$,

(2) $\dim(P_\lambda H) = m$.

(3) λ_m es el mayor valor propio de A en $P_\lambda H$.

Considere la variedad M_t, definida por:

$$M_t = S(t)P_\lambda H \quad , \ t \geq 0$$

Evidentemente $S(t): H \to D(A)$ es continua para todo $t > 0$, siendo $P_\lambda H \subset H$, vemos que

$$S(t)P_\lambda H \subset D(A) \qquad \Rightarrow \qquad M_t \subset D(A)$$

Proposición 2. Si $t \geq t_0 \geq 0$. Entonces se tiene:

a) $\left|A^{\frac{1}{2}}(u - v)\right|^2 \leq \lambda |u - v|^2$, $\forall\, u, v \in M_t$

b) La aplicación $Q_t: P_\lambda H \to D(A)$ definida por $Q_t(P_\lambda u) = (I - P_\lambda)u$, es continua con rango en $D(A) \cap (I - P_\lambda)H$

c) Sea $D_t = P_\lambda S(t) B_r^c$, $B_r = \{u \in P_\lambda H \,/\, \|u\| < r\}$. Entonces

$$D_{t_0} \subset D_t \quad y \ \ Q_t(u) = Q_{t_0}(u) \ , \qquad u \in D_{t_0}$$

d) Si $u \notin D_{t_0}$ entonces

$$\left|Q_t(u) - Q_{t_0}(u)\right| \leq 2r\, e^{-\beta t_0}$$

donde

$$\beta = \lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - \lambda_0^\alpha) > 0$$

3. Existencia de Variedades inerciales

Analizaremos la ecuación diferencial parcial:

$u_t + Au + F(u) = 0$ (1)

Donde A es un operador positivo no acotado autoadjunto y disipativo en un espacio de Sobolev con peso H, F es el término no lineal con la propiedad de Lipschitz local en el dominio $D(A) \subset H$, se demostrará la existencia de una variedad inercial para la ecuación (1). Como dado anteriormente P_λ el operador proyección espectral para A en el intervalo $[0, \lambda)$, $\lambda > 0$. Suponga que existe una barrera espectral λ para (1) tal que $\lambda > \lambda_0$, $P_\lambda H$ es de dimensión finita.

Sea $m = \dim\,(P_\lambda H)$, $\lambda_m =$ el mayor autovalor de A en $P_\lambda H$.

Y considere la función

$Q_t(P_\lambda u) = (I - P_\lambda)u, \ \ u \in M_t$ (2)

Donde:

$M_t = S(t)P_\lambda H$ la cual es una función continua para $P_\lambda H$ en $D(A)$ con rango en el dominio de A, ie, D(A) ∩ $(I - P_\lambda)H$.

Consecuentemente se define $\mathrm{Q}(u) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{Q}_t(u)$ para $u \in P_\lambda H$ y se verifica

$|\mathrm{Q}(u) - \mathrm{Q}_t(u)| \leq 2r\exp(-\beta t)$ (3)

Para todo $u \in P_\lambda H$, $t \geq 0$.

Lema 2

$\left|A^{\frac{1}{2}}(u + \mathrm{Q}(u) - v - \mathrm{Q}(v))\right|^2 \leq \lambda\, |u + \mathrm{Q}(u) - v - \mathrm{Q}(v)|^2$ (4)

Para todo $u, v \in P_\lambda H$.

Demostración:

Aplicando la proposición 2 (a) , pasando al límite se consigue (4).

Lema 3

Existe $r_1 > 0$ tal que

$\left|A^{\frac{1}{2}}S(t_0)u_0\right| \leq r_1$, para algún $t_0 \in [0, {\lambda_0}^{-1}]$

Demostración:

Siendo $u_t + Au + F(u) = 0$, y

$$(F(u_1) - F(u_2), u_1 - u_2) \geq -\lambda_0^\alpha |(u_1 - u_2)|^{2\alpha} \left|A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\right|^{2(1-\alpha)}$$

Para $u(t) = S(t)u_0$ se obtiene usando las técnicas multiplicativas:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}|u|^2 + \left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2 \leq \lambda_0^\alpha |u|^{2\alpha} \left|A^{1/2}u\right|^{2(1-\alpha)} + |F(0)||u|$$

$$\leq \alpha\lambda_0 |u|^2 + (1-\alpha)\left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2 + |F(0)||u|$$

Por lo tanto

$$\lambda_0 \int_0^{{\lambda_0}^{-1}} \left|A^{1/2}u\right|^2 dt = \left|A^{\frac{1}{2}}S(t_0)u_0\right|^2 \leq r_1^2$$

para algún $t_0 \in \left[0, {\lambda_0}^{-1}\right]$, con

$r_1^2 = \left(\frac{1}{2\alpha} + 1\right)\lambda_0 r^2 + \frac{1}{\alpha}|F(0)|r.$

Lo que se quería demostrar.

Por otro lado, siendo $\mathrm{Q}(v) = 0$ para $|v| \geq r$, deducimos por (4) que el rango de Q esta incluido en $D(A^{1/2})$.

Definimos $\mathrm{Gr(Q)}$ como el gráfico de Q, esto es,

$$\mathrm{Gr(Q)} = \{\mathrm{u} + \mathrm{Q}(u) : u \in P_\lambda H\} \qquad (5)$$

Es claro que $\mathrm{Gr(Q)}$ es una variedad de dimensión m. La desigualdad (4) puede ser escrito como

$$\left|A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\right|^2 \leq \lambda |u_1 - u_2|^2 \qquad (6)$$

Para $u_1, u_2 \in \mathrm{Gr(Q)}$. A continuación se demuestra que $\mathrm{Gr(Q)}$ es una variedad inercial para (1)

Teorema 11

Sea λ una barrera espectral para (1) tal que $\lambda > \lambda_0$, $P_\lambda H$ es de dimensión finita. Entonces, la función $\mathrm{Gr(Q)}$ definido por (5) satisface las siguientes propiedades:

1) $S(t)\mathrm{Gr(Q)} = \mathrm{Gr(Q)}$, para todo $t \geq 0$;

2) Para todo u_0, tal que $|u_0| \leq r$, la distancia $d(S(t)u_0, \mathrm{Gr(Q)})$ satisface la desigualdad

$$d\big(S(t)u_0, \mathrm{Gr(Q)}\big) \leq R\ exp\ (-\beta(t - \lambda_0^{-1})) \qquad (7)$$

Para todo $t \geq \lambda_0^{-1}$ y alguna constante $R > 0$.

DISCUSIÓN

Dada la bola cerrada $B_0 = \{u \,/\, |u| \leq r\}$, suponga que $F(u) = 0$ para todo $u \in B_0$, entonces la ecuación (1) es lineal en el complemento de la bola B_0.

Por lo tanto para todo conjunto acotado B en H, existe un $t_0 = t_0(B)$ tal que

$$S(t)B \subset B_0 \subset D(A)$$

Del Teorema 1, se tiene que

$$d\big(S(t)u_0, \mathrm{Gr(Q)}\big) \leq \tilde{r}\ exp\left(-\beta\big(t - \lambda_0{}^{-1}\big)\right) \quad , \qquad t \geq \lambda_0{}^{-1}$$

Luego, por definición de supremo existe $d\big(S(t - t_0)u_0, \mathrm{Gr(Q)}\big)$, para $\varepsilon > 0$

$$\operatorname*{Sup}_{u_0 \in B} d\big(S(t)u_0, \mathrm{Gr(Q)}\big) - \varepsilon < d\big(S(t - t_0)u_0, \mathrm{Gr(Q)}\big) \leq c\ exp\left(-\beta\big(t - t_0 - \lambda_0{}^{-1}\big)\right)$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, resulta

$$\operatorname*{Sup}_{u_0 \in B} d\big(S(t)u_0, \mathrm{Gr(Q)}\big) \leq c\, exp\left(-\beta\big(t - t_0 - {\lambda_0}^{-1}\big)\right)$$

Esto es, la variedad $\mathrm{Gr(Q)}$ atrae todas las trayectorias $u = S(t)u_0$ exponencialmente.

$\mathrm{Gr(Q)}$ es una variedad Lipschitziana

En efecto, sean $u_1 = u + Q(u)$, $u_2 = v + Q(v)$ en $\mathrm{Gr(Q)}$. Haciendo $w = u - v$

$\widetilde{w} = Q(u) - Q(v)$, resultando $w + \widetilde{w} = u_1 - u_2$,.

Luego,

$$\left|A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\right|^2 \leq \lambda |u_1 - u_2|^2$$

$$\left|A^{\frac{1}{2}}(w + \widetilde{w})\right|^2 \leq \lambda |w + \widetilde{w}|^2$$

$\lambda_{m+1} \notin \sigma(A)$ es una barrera espectral para (1) , esto es

$$\left|A^{\frac{1}{2}}(w + \widetilde{w})\right|^2 = \lambda_{m+1} |w + \widetilde{w}|^2$$

De donde,

$$\lambda_{m+1}|\widetilde{w}|^2 \leq \lambda_{m+1}|w|^2 + \lambda_{m+1}|\widetilde{w}|^2 \leq \lambda|w|^2 + \lambda|\widetilde{w}|^2$$

Equivalentemente

$$(\lambda_{m+1} - \lambda)|\widetilde{w}|^2 \leq \lambda|w|^2$$

consecuentemente

$$|Q(u) - Q(v)|^2 \leq \frac{\lambda}{\lambda_{m+1} - \lambda}|u - v|^2$$

Así , Q es Lipschitziana.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Adams, R.A. & Fournier, J.J.F.(2003). Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science.

Fabes, E.,M. Luskin and G.R. Sell(1988), Construction of inertial manifolds by elliptic regularization, IMA No. 459.

Foias, C., B. Nikolaenko, G.R. Sell, R. Teman (1988), inertial manifolds for the Kuramoto Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimensions, J.Math. Pures Appl.,67,pp.197-226 inertial manifolds for systems of coupled reaction-diffusion equations.

Foias, C. ,R. Teman and E.S. Titi(1989), Inertial manifolds interpretation of the finite of difference method.

Brezis, H.(2010). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext. Springer New York.

Brown,H.S.,M.S.Jolly,I.G.Kevrekidis and E.S. Titi(1990), Implementation of approximate inertial manifolds for systems of coupled reaction-diffusion equations.

Comway,J.B.(2007) , A Course in Functional Analysis. Springer Verlag, N.Y.

Comway. E. Hoff, D. and Smoller, J. (1978). Large time behavior of solutions of nonlinear reaction-diffusion equations.SIAM J. Appl. Math. 35, 1-16.

Constantin, P. Foias,C. and Témam, R. (1985). Attractors representing turbulent flows. Mem. Am. Math. Soc. 314, 53.

Constantin, P. Foias,C. Nicolaenko, B. and Témam, R. (1988). Integral Manifolds and inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations (Applied MathematicalSciences Series N0 70), Springer-Verlag, Mew York.

Constantin, P. Foias, (1985). Global Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke formulas and the dimension of the attractor for 2D Navier-Stokes equations.Commun.Pure Appl. Math. 38,1-27.

Doering. C. R. Gibbon, J.D. Holm, D. D., and Nicolaenko, B. (1988).Low dimensional behavior in the complex Ginzburg-Landau equation: Los Alamos report LA-UR-87-1546. J. Nonlineararity (in press)

Constantin. Journal of Dynamics and Differential Equations.Vol. 1.No. 1. 1989.

Gearhart, L.(1978). Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Spaces.Transactions of the American Mathematical Society (236), 381- 387.

Hale, J.K.(1988), Asymptotic Behaviour of dissipative systems, Math. Surveys and Monographs,25,AMS,Providence,R.I.

Henry,D.(1983) Geometric theory of parabolic Equations. Lect. Notes Math.840.

Loring, W. T.(2011) ,An Introduction to Manifolds. Springer Verlag.N.Y.

Liu, Z. & Zheng, S.(1999). Semigroups associated with dissipative systems. In CRC Research Notes in Mathematics 398. Chapman and Hall.

Marion,M. (1989).Approximate inertial manifolds for reaction-diffusion equations in high space dimension, J.Dynamics and Differential Equations,1,pp.245-267.