Universidad de Valladolid

Facultad de **Ciencias Económicas**

y **Empresariales**

Trabajo de Fin de Grado

Grado en ADE

Juegos no cooperativos, ejemplos y aplicaciones

Presentado por:

Diego Marín Lantada

Valladolid, 26 de julio de 2023

RESUMEN

La teoría de juegos es una disciplina científica que utiliza modelos matemáticos para estudiar las interacciones entre dos o más agentes en estructuras de incentivos llamadas juegos. En el caso de los juegos no cooperativos estos agentes, llamados jugadores, tomarán decisiones considerando únicamente su beneficio personal.

Su capacidad para explicar el comportamiento humano en situaciones de negociación a través del rigor de los modelos matemáticos y su versatilidad para ser aplicada en prácticamente cualquier área de conocimiento hacen que se haya convertido en una herramienta indispensable para el estudio de toda clase de situaciones de interacción.

Palabras clave: Teoría de juegos, Juegos no cooperativos, Equilibrio de Nash.

Clasificación JEL: C72

ABSTRACT

Game theory is a scientific discipline that uses mathematical models to study the interactions between two or more agents in incentive structures called games. In the case of non-cooperative games, these agents, called players, will make decisions considering only their personal benefit.

Its ability to explain human behaviour in negotiation situations through the rigor of mathematical models and its versatility to be applied in practically any area of knowledge make it an indispensable tool for the study of all kinds of interaction situations.

Keywords: Game Theory, Non-cooperative games, Nash Equilibrium.

JEL codes: C72

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS Y GRÁFICOS

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de juegos es una rama de las matemáticas y la economía que estudia las decisiones y estrategias en situaciones de conflicto o cooperación entre dos o más agentes. En otras palabras, la teoría de juegos busca entender cómo las personas, empresas o gobiernos toman decisiones cuando interactúan entre sí en un entorno en el que las acciones de cada uno influyen en los resultados obtenidos por todos.

Esta disciplina se ha convertido en una herramienta fundamental en el análisis y comprensión de fenómenos sociales y económicos complejos, como la competencia empresarial, la negociación, la cooperación internacional o el comportamiento humano en general.

1.1. Motivación

Desde que sus aplicaciones prácticas empezaran a aumentar de forma vertiginosa a partir de la década de los 60, la teoría de juegos ha sido una disciplina en constante evolución. Su gran capacidad de adaptación permite que pueda ser aplicada a casi cualquier campo, garantizando su vigencia en los años venideros, y convirtiéndola en una materia con un gran atractivo para su estudio.

Esta flexibilidad, junto a su gran utilidad en el mundo de la economía y de la empresa, han motivado el desarrollo de este trabajo para finalizar el grado en Administración y Dirección de Empresas, profundizando su estudio e investigando acerca de sus aplicaciones prácticas más recientes.

1.2. Metodología

El desarrollo de este trabajo se centrará en el estudio de los juegos no cooperativos, recabando en la medida de lo posible información a partir de artículos científicos y publicaciones académicas de diversa índole. Se utilizarán ejemplos para hilvanar los conceptos de naturaleza teórica con sus implicaciones más prácticas.

En primer lugar, se realizará un breve recorrido de los acontecimientos más importantes en el desarrollo de la teoría de juegos, relevantes para entender su evolución y poner en contexto los apartados posteriores. A continuación, se expondrá la terminología básica necesaria para la comprensión de los conceptos de solución y modelos teóricos de los siguientes apartados. Para finalizar, se hará una revisión de las aplicaciones prácticas para las cuales la teoría de juegos resulta de mayor utilidad.

2. HISTORIA

Antes de que la teoría de juegos fuera formalizada existieron ciertos autores precursores, matemáticos en su mayor parte, que ya planteaban la búsqueda de estrategias en situaciones de juego. Aunque resulta difícil de determinar con exactitud, varios autores coindicen en que podemos encontrar los primeros indicios de su aparición en el siglo XVIII.

2.1. Precedentes de la teoría de juegos

El primer antecedente lo encontramos en 1704, con la obra *Nouveaux Essais sur l’entendement humain* del matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhel Leibniz (1646-1716), que trataba la investigación de los juegos de azar en términos probabilísticos. En 1713 el matemático francés Pierre-Rémond de Montmort (1678-1619) publica *Essay d’analyse sur les jeux de hasard*, esbozando el concepto de estrategia mixta y la regla minimax. En esta obra incluye la correspondencia mantenida durante los 3 años anteriores con Nicolaus I Bernoulli (1687-1759) y Monsieur de Waldegrave, sobre la solución de un problema basado en el juego de cartas clásico “Le Her”, finalmente resuelto por Waldegrave y que sirvió para desarrollar estos conceptos.

2.1.1. Antecedentes fuera de las matemáticas

Más adelante, entrando en el ámbito de las Ciencias Sociales, el matemático, físico y político francés Jean-Charles de Borda (1733-1799) publica *Memoire sur les elections au scrutin* en 1784 para analizar el sistema electoral francés anterior a la Revolución Francesa. En 1785 el político y matemático francés Marie-Jean Antoine Nicolas de Caritat (1743-1794) publica su *Essai sur l’application de l’analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, donde plantea el Teorema del Jurado y la Paradoja de Condorcet.

También procede mencionar la memoria que el naturalista y geólogo inglés Charles Robert Darwin (1809-1882) publicó en 1871 presentando la Teoría de Selección Sexual en su obra *The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex*, utilizando conceptos basados esencialmente en la teoría de juegos. En 1930 Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) terminó de definir la teoría evolutiva moderna como hoy la conocemos con su obra *The Genetical Theory of Natural Selection*, coincidiendo en esencia con lo expuesto por Darwin.

2.1.2. Modelos clásicos

En el siglo XIX aparecen los planteamientos formales de los hoy llamados modelos clásicos. En 1838 el matemático francés Antoine Augustin Cournot (1801-1877) publica *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, donde plantea matemáticamente un modelo de competición imperfecta que más adelante se conocería como el Duopolio de Cournot, que será descrito con más profundidad en este trabajo. Algunos años más adelante, el matemático y economista francés Joseph-Louis-François Bertrand (1822-1900) publica en 1883 su obra *Theorie mathématique de la richesse sociale* como crítica al planteamiento de Cournot, donde propone el modelo hoy conocido como duopolio de Bertrand, al que también se dedicará un apartado en este trabajo. A su vez, el economista y estadístico irlandés Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) publica en 1897 su obra *The Pure Theory of Monopoly*, proponiendo una modificación del modelo propuesto por Bertrand para solucionar una paradoja. En 1881 Edgeworth publica su obra *Mathematical Psychics*, llegando a importantes conclusiones en el análisis de equilibrios.

2.2. Formalización de la teoría de juegos

En el siglo XX surgen los primeros autores considerados como el germen de la teoría de juegos tal y como la conocemos. A partir de esta fecha el número de autores que realizaron aportaciones relevantes en la materia crece exponencialmente, por lo que solo se nombrarán los más importantes. En 1913 el matemático alemán Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) publica *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, donde establece dos teoremas que permiten analizar los juegos no cooperativos de suma cero. Una década más tarde, el matemático y político francés Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956) establece los fundamentos de los juegos psicológicos, formula matemáticamente la estrategia mixta por primera vez, e introduce la idea de estrategia pura en una serie de artículos recogidos por M. Frechet en *Emile Borel, Initiator of the Theory of Psychological Games and its Application*.

En 1928 el matemático austrohúngaro John von Neumann (1903-1957) amplía aún más la formulación matemática, desarrolla el criterio minimax, aporta la definición actual de estrategia y la forma extensiva de un juego como un árbol lógico enraizado en su obra *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. No obstante, no fue hasta 1944 cuando junto al economista alemán Oskar Morgenstern (1902-1977) publica *Theory of Games and Economic Behavior* y se empieza a tratar la teoría de juegos como una disciplina científica en sí misma. Esta obra se considera como la primera en tratar de forma rigurosa y exhaustiva la teoría de juegos, modelizando los juegos no cooperativos de suma cero y distinta de cero desde el punto de vista económico y desarrollando la axiomática de la utilidad.

2.3. Teoría de juegos moderna

El trabajo de Morgenstern tuvo gran impacto en la comunidad científica, lo que hizo que aumentara en gran medida el interés en la disciplina. Sin duda, el momento clave que revolucionó la teoría de juegos y que sirvió de base para las posteriores investigaciones, especialmente de los juegos no cooperativos, se produce en 1950 gracias a John Forbes Nash Jr. (1928-2015). Ese año Nash presenta su tesis doctoral con el título de *Non Cooperative Games*, donde demuestra que cualquier juego no cooperativo finito siempre tiene al menos un punto de equilibrio, hoy día conocido como equilibrio de Nash. Esta tesis se fundamentaba en el anterior trabajo de von Neumann y Morgenstern y en el breve artículo de tan solo una página escrito por el propio *Nash Equilibrium Points in n-Person Games*, que puede consultarse en el anexo.

El trabajo de Nash permitía analizar y modelar la interacción estratégica en una amplia gama de situaciones, por lo que la teoría de juegos mejoró su aplicabilidad enormemente. La corporación gubernamental norteamericana RAND, creada con fines de investigación y desarrollo tecnológico, vio en ella una potente y flexible herramienta analítica. En su seno se seguiría expandiendo el desarrollo de la teoría de juegos, buscando especialmente su aplicación en la negociación y estrategia militar.

En 1952 los matemáticos Lloyd Stowell Shapley (1923-2016) y Donald Bruce Gillies (1928-1975) introdujeron y formalizaron de forma independiente el concepto de *core* para representar el conjunto de todas las imputaciones no dominadas en un juego. El mismo año Gérard Debreu (1921-2004) introdujo el primer modelo de equilibrio competitivo con su teorema de la existencia, y Shapley desarrolló un modelo para medir la importancia de cada jugador en los juegos cooperativos, conocido hoy como valor de Shapley.

En 1965 el economista alemán Reinhard Selten (1930-2016) desarrolló los aspectos dinámicos de la teoría de juegos, y en 1967 el economista húngaro John Charles Harsanyi (1920-2000) desarrolló los juegos con información incompleta, ambos fundamentales para el refinamiento y estudio de los llamados equilibrios generales de Nash.

2.4. Aplicación y consolidación

En la década de 1960 empezaron a aparecer aplicaciones en toda clase de disciplinas, de las cuales se mencionarán las más relevantes. Diversos autores explotaron la teoría de juegos en Ciencias Políticas, por ejemplo, modelando las distribuciones de poder en un congreso bipartidista o utilizando el valor de Shapley para determinar el poder de los miembros del Consejo de Seguridad de la ONU. En Ciencias Económicas se empezó a utilizar para la toma de decisiones empresariales, el diseño de subastas, o el modelado de los oligopolios, y en el ámbito militar se enfatizó la importancia de la información y compromiso en las dinámicas de estrategias y control armamentístico, de especial importancia en el contexto de la Guerra Fría.

Gracias a su probada utilidad, en las posteriores décadas aumentó el reconocimiento mundial de la teoría de juegos, y diversos académicos empezaron a ser galardonados con el Nobel en Economía (formalmente conocido como Premio de Ciencias Económicas del Banco de Suecia en Memoria de Alfred Nobel).

- En 1994 se entregó el Nobel en Economía a Nash, Harsanyi y Selten por sentar las bases de la teoría de juegos moderna.

- En 1996, William Spencer Vickrey (1914-1996) y James Alexander Mirrlees (1936-2018) reciben el Nobel en Economia por sus contribuciones en esenciales en la teoría de subastas.

- En 2005 el mismo galardón fue entregado al matemático israelo-estadounidense Robert John Aumann (n.1930) y al economista estadounidense Thomas Crombie Schelling (1921-2016) por sus trabajos con modelos dinámicos para el análisis de la cooperación y conflicto, y el estudio de equilibrios, respectivamente.

- En 2007 se entrega en Nobel en Economía a los economistas norteamericanos Leonid Hurwicz (1917-2008), Roger Bruce Myerson (n. 1951) y Eric Stark Maskin (n.1950) por establecer los fundamentos de la teoría de diseño de mecanismos.

- En 2012 se entrega el mismo premio al ya mencionado L.S. Shapley junto al investigador operativo y economista Alvin Elliot Roth (n. 1951) por su teoría de localizaciones estables y la práctica de diseño de mercados.

3. CONCEPTOS BÁSICOS

Como se ha mencionado con anterioridad, la teoría de juegos es una herramienta poderosa y flexible para analizar la toma de decisiones en situaciones de interdependencia. Aunque por motivos históricos debido a su origen conocemos a la teoría de juegos por ese nombre, una forma más intuitiva de llamarla y que recoge mejor su propósito sería “teoría de la decisión interactiva”, como menciona J. Pérez *et al.* (2004).

Antes de entrar en las características concretas que cada juego puede tener se definirán los elementos que todos ellos tienen en común:

- Juego: Cualquier situación en la que intervienen dos o más agentes con intereses contrapuestos, y donde el resultado final depende de la interdependencia de las decisiones de cada uno.

- Jugador: Un jugador es un participante en un juego que toma decisiones estratégicas con el objetivo de maximizar su resultado. Los jugadores suelen ser racionales, ya sean individuos, empresas, países o cualquier otro tipo de entidad, aunque esto no es estrictamente necesario.
- Acciones de cada jugador: Conjunto de posibles decisiones que cada jugador puede elegir en el momento de jugar.
- Pago: Resultado o beneficio que un jugador recibe como resultado de las decisiones tomadas por todos los jugadores en un juego. El pago puede ser cualquier cosa, desde dinero hasta prestigio o incluso algo abstracto como la satisfacción personal.
- Resultados del juego: Conjuntos de posibles pagos que pueden recibir los jugadores al final de un juego.
- Estrategia: Plan de acción que un jugador elige en un juego. Una estrategia puede ser pura si se trata de una acción específica para una situación dada, o mixta si existen varias acciones con una probabilidad asignada para una situación dada.
- Solución: Es un conjunto de estrategias del cual es razonable que los jugadores escojan para un juego dado.
- Concepto de solución: Propuesta o enfoque teórico que busca describir y analizar cómo se puede llegar a una solución en un juego.

3.1. Tipos de juegos

Existen múltiples categorías en las que se pueden clasificar los juegos, lo que define los métodos específicos que se pueden emplear para solucionarlos. Se usará un ejemplo para ilustrar cada tipo de juego.

3.1.1. Cooperativos y no cooperativos

Es la división más elemental que podemos hacer para clasificar un juego.

- En los juegos cooperativos los jugadores pueden colaborar entre sí para conseguir un beneficio común. La clave en estos juegos es la negociación y el acuerdo entre los jugadores.

  Ejemplo: Proyecto de investigación. Supongamos que un grupo de investigadores está trabajando en un proyecto de investigación científica en equipo. Los investigadores deben colaborar y compartir recursos, conocimientos y esfuerzos para alcanzar un objetivo común.

- En los juegos no cooperativos los jugadores compiten entre sí tomando sus decisiones de forma independiente, tratando de maximizar su propio beneficio. Esta clase de juegos será el motivo principal de desarrollo en el presente trabajo.

  Ejemplo: Subasta. Los participantes compiten entre sí para obtener un bien al mejor precio posible, buscando maximizar su propio beneficio sin tener en cuenta los intereses de los demás.

3.1.2. Estáticos o dinámicos

- Los juegos estáticos, también llamados simultáneos, son aquellos en los que los jugadores toman sus decisiones a la vez, sin tener conocimiento de qué decisiones tomarán el resto de jugadores.

  Ejemplo: Elección de precios en un mercado. Varias empresas compiten en un mercado para vender un producto. Cada empresa toma su decisión sin conocer los precios que ofrecerán sus competidores.

- En los juegos dinámicos, también llamados secuenciales, los jugadores toman sus decisiones en una secuencia ordenada, y normalmente conocerán las decisiones de los jugadores anteriores.

  Ejemplo: Negociación empresarial. Dos empresas negocian un contrato comercial en el cual una empresa realiza una oferta y la otra empresa decide si la acepta o la rechaza. Las decisiones se toman en una secuencia ordenada, ya que la respuesta de una empresa depende de la oferta de la otra.

3.1.3. Con información completa o incompleta

- Un juego con información completa es aquel en el que todos los jugadores conocen las reglas del juego, las funciones de utilidad del resto de jugadores, las estrategias que tienen disponibles y los efectos de sus acciones sobre los demás.

  Ejemplo: Póker. Todos los jugadores tienen acceso a la misma información: qué cartas son repartidas y las apuestas realizadas, por lo que toman decisiones basadas en la información disponible para todos.

- En los juegos con información incompleta los jugadores conocen la estructura del juego y sus características, pero no las funciones de utilidad de los demás jugadores, sus estrategias disponibles ni los efectos de sus acciones.

  Ejemplo: Subasta de arte. Se trata de una subasta con información privada, pues cada participante tiene su propia evaluación del valor de una obra de arte (utilidad), pero no conoce la de los demás.

3.1.4. Simétricos o asimétricos

- Un juego es simétrico si todos los jugadores tienen el mismo conjunto de estrategias y los pagos son iguales para el mismo perfil de estrategias independientemente de quien las juegue.

  Ejemplo: Piedra, papel, tijeras. Las reglas son las mismas para ambos jugadores, cada estrategia tiene el mismo valor y ambos tienen las mismas probabilidades de ganar, perder o empatar.

- En los juegos asimétricos los jugadores tienen distintas estrategias disponibles y/o diferentes pagos asociados con cada combinación de estrategias.

  Ejemplo: Elecciones políticas: Los candidatos pueden tener diferentes recursos, como financiamiento de campaña, popularidad o apoyo de grupos de interés, lo que crea asimetría en términos de oportunidades y pagos.

3.1.5. De suma cero y suma distinta de cero

- En un juego de suma cero la cantidad total de ganancias o pérdidas de los participantes se mantiene constante, es decir, si un jugador gana otro perderá en la misma medida (lo que hace imposible que los jugadores maximicen sus ganancias al mismo tiempo)

  Ejemplo: Ajedrez. En el ajedrez, la ganancia de un jugador es la pérdida del otro jugador, ya que cada movimiento que beneficie a uno de los jugadores perjudica al otro.

- En los juegos de suma distinta de cero la suma de las ganancias y las pérdidas no siempre es nula, ya que cada jugador puede obtener un beneficio distinto.

  Ejemplo: Negociación salarial. Dos empleados negocian aumento salarial con su empleador. El aumento de salario para uno de ellos no necesariamente implica una disminución del salario del otro.

3.2. Formas de representación

Los juegos estáticos o simultáneos suelen representarse mediante la llamada forma estratégica o normal. Cuando hay dos jugadores es común su notación en forma de bimatriz, y con más de dos se usa la notación algebraica.

Tabla 3.2.1: Representación normal.

		Jugador 2	
		Estrategia S_1^2	Estrategia S_2^2
Jugador 1	Estrategia S_1^1	$u_1(S_1^1, S_1^2)$, $u_2(S_1^1, S_1^2)$	$u_1(S_1^1, S_2^2)$, $u_2(S_1^1, S_2^2)$
	Estrategia S_2^1	$u_1(S_2^1, S_1^2)$, $u_2(S_2^1, S_1^2)$	$u_1(S_2^1, S_2^2)$, $u_2(S_2^1, S_2^2)$

Bimatriz

$$G = \{J; S_1, S_2, \dots, S_n;\ u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

Siendo:

J el número de jugadores

S_i el conjunto de estrategias para cada uno

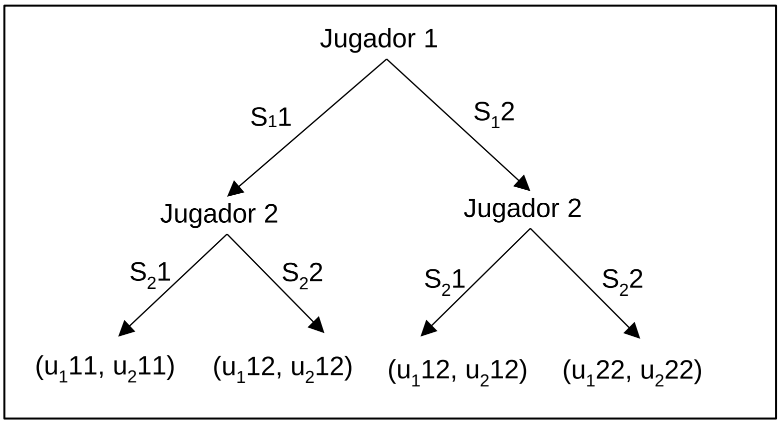
u_i la función de pagos para cada uno

Notación algebraica

Fuente: Elaboración propia.

Los juegos dinámicos o secuenciales se suelen representar con la llamada forma extensiva mediante árboles de decisión.

Gráfico 3.2.1: Representación extensiva.



Fuente: Elaboración propia.

3.3. Conceptos de solución

Como se ha definido anteriormente, un concepto de solución es una propuesta o enfoque teórico que busca describir y analizar cómo se puede llegar a una solución en un juego. J. Pérez *et al.* distingue dos tipos de conceptos de solución: los basados en argumentos de dominación y en argumentos de equilibrio.

3.3.1. Soluciones mediante argumentos de dominación

Antes de introducir este tipo de soluciones, es preciso explicar en qué consiste una estrategia dominante. Una estrategia será dominante si es la que mayor utilidad aporta a un jugador con independencia de la estrategia que elijan el resto de jugadores. Por el contrario, una estrategia estará dominada si ofrece peor resultado que otra con independencia de las decisiones de los demás. La dominancia podrá ser estricta si la estrategia ofrece una utilidad mayor a las demás, o débil si ofrece una utilidad mayor o igual a las demás.

A su vez, las soluciones mediante argumentos de dominación pueden dividirse en dos subtipos:

- Las basadas en el Uso de Estrategias Dominantes (UED). Si existen estrategias dominantes, se considera que serán elegidas por cualquier jugador racional, llegando fácilmente a la solución del juego. Lamentablemente, este concepto de solución no es eficaz en la práctica, pues los casos en los que todos los jugadores tienen alguna estrategia dominante son excepcionales.

- Las basadas en simplificar las posibilidades de elección eliminando las estrategias dominadas de forma sucesiva a lo largo de distintas fases. Si es posible se aplicará la Eliminación Iterativa Estricta (EIE), eliminando en la primera fase aquellas estrategias estrictamente dominadas (que ningún jugador racional elegiría) para construir una versión reducida del juego. En la siguiente fase se parte de esta versión reducida para seguir eliminando estrategias. El proceso finaliza cuando no queden estrategias por eliminar para ningún jugador. Si no es posible eliminar estrategias con la EIE, se puede usar el criterio menos exigente de la Eliminación Iterativa Débil (EID).

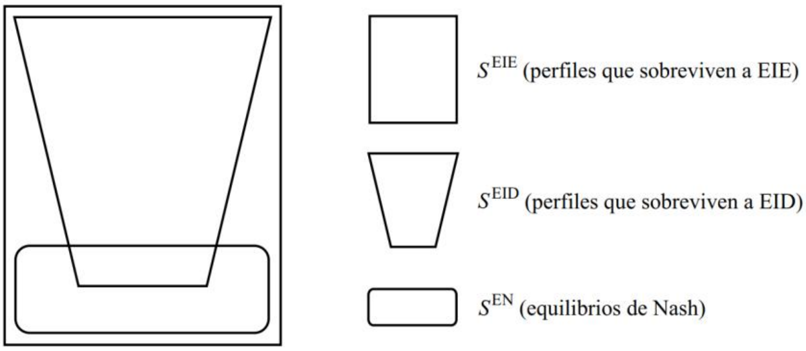
3.3.2. Soluciones mediante argumentos de equilibrio

Este tipo de solución pretende definir las propiedades que debería tener un perfil de estrategias para que fuera elegido por un jugador racional, para lo cual se hace uso del concepto de equilibrio de Nash, que será desarrollado en el siguiente apartado. En esencia, el equilibrio de Nash supone que cada jugador elige una estrategia que maximiza su beneficio dadas la estrategias de sus rivales, y ningún jugador tendrá incentivo para cambiar su estrategia si ningún otro jugador altera la suya.

La formalización matemática cambia según se juegue con estrategias puras (donde la solución asigna una sola estrategia a cada jugador) o mixtas (los jugadores disponen de varias estrategias con una probabilidad de ser elegidas), pero el equilibrio al que se llega es equivalente.

El siguiente gráfico ilustra el grado de exigencia para delimitar perfiles de estrategia de los distintos conceptos de solución, como forma de solucionar un juego.

Gráfico 3.3.2.1: Relaciones de inclusión.



Fuente: Teoría de Juegos (2004), por J. Pérez, J.L. Jimeno y E. Cerdá.

4. EQUILIBRIO DE NASH

El equilibrio de Nash, es quizás el concepto de solución para juegos no cooperativos más importante, y que mejora sustancialmente las soluciones que pueden obtenerse con el criterio minimax propuesto por von Neumann y Morgenstern. La solución de Nash no solo mostró como resolver, esencialmente, todos los juegos, sino que supuso un paso de gigante en lo que respecta a su aplicación para resolver problemas sociales.

4.1. Definición

Dado un juego no cooperativo finito, será posible llegar a una situación de equilibrio en la que todos los jugadores adopten la mejor estrategia que tienen disponible, dadas las estrategias de sus rivales. En esta situación ningún jugador tendrá incentivo para modificar su estrategia individualmente.

La siguiente definición matemática es aplicable tanto a estrategias puras como mixtas, según aparece formulada por J. Pérez et al. (2004):

En el juego $G = \{S_1, \dots, S_n;\ u_1, \dots, u_n\}$, decimos que el perfil de estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash si para el jugador i:

$$U_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*) \geq U_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*)$$

para todo σ_i de $\Delta(S_i)$,

siendo:

S_i: Conjunto de estrategias del jugador i,

σ_i^*: Distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias del jugador i,

U_i: Función de pagos del jugador i.

Es decir, para cada, jugador i, σ_i^* es una solución del problema $\max U_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*)$ en la variable σ_i, donde σ_i pertenece a $\Delta(S_i)$ o, dicho de otro modo, para jugador i, σ_i^* es respuesta óptima a σ_{-i}^* (vector de respuestas óptimas del resto de jugadores)

Aunque esta definición de equilibrio de Nash es aplicable a cualquier juego no cooperativo finito, para mejorar su operatividad se han desarrollado distintos refinamientos con una metodología propia para llegar al equilibrio según el tipo de juego, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4.1.1: Tipos de equilibrio.

JUEGOS NO COOPERATIVOS	JUEGOS ESTÁTICOS	JUEGOS DINÁMICOS
JUEGOS CON INFORMACIÓN COMPLETA	Juegos estáticos con información completa: **EQUILIBRIO DE NASH**	Juegos dinámicos con información completa: **EQUILIBRIO DE NASH PERFECTO EN SUBJUEGOS**
JUEGOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA	Juegos estáticos con información incompleta: **EQUILIBRIO BAYESIANO DE NASH**	Juegos dinámicos con información incompleta: **EQUILIBRIO BAYESIANO PERFECTO**

Fuente: Elaboración propia.

4.2. Equilibrio de Nash en la práctica

Según M. J. Osborne (2009), para que el equilibrio de Nash sea adoptado en un juego han de cumplirse dos axiomas, que pueden extraerse de la definición, referidos a la racionalidad de sus jugadores:

- Cada jugador ha de elegir su acción de acuerdo con el modelo de elección racional, dada su creencia sobre las acciones de los otros jugadores.

Dicho de otro modo, el equilibrio de Nash lleva adherida una “norma social” estable, de la cual ningún individuo desea desviarse si todos los demás la respetan.

- La creencia de cada jugador sobre las acciones de los otros jugadores es correcta. Esto implicaría que las creencias de dos jugadores sobre la acción de un tercer jugador sean las mismas.

La existencia de estos axiomas hace que, en la práctica, la diferencia entre el resultado observado y un equilibrio de Nash pueda deberse al incumplimiento de uno o ambos. Por lo tanto, para asegurar que se llegue al equilibrio alcanzado en el modelo, necesitaríamos recopilar observaciones del comportamiento de los sujetos para comprobar que se adapten al papel que tomen en el juego que se esté examinando. No obstante, la evidencia experimental tiene el potencial de indicar los tipos de juegos para los que la teoría funciona bien y, para aquellos en los que no, señalar el componente defectuoso y darnos pistas sobre las características que debería tener un modelo que se adapte mejor.

Por tanto, cuando usamos este concepto de solución podemos esperar que se corresponda con la realidad solo aproximadamente, pues el estudio de comportamientos sociales lleva intrínsecas variables que no podemos determinar con exactitud. Podemos analizar si los datos esperados son consistentes con la teoría mediante experimentos empíricos, pero en última instancia debemos ser nosotros quienes juzguemos si el modelo mejora nuestra comprensión del comportamiento humano en determinado juego. En el siguiente apartado se comprobarán estas inconsistencias a través de la evidencia en diversos estudios experimentales.

5. DILEMA DEL PRISIONERO

El dilema del prisionero es quizás, el más clásico ejemplo con el que se puede representar el equilibrio de Nash. Su resolución ha sido cuestionada por matemáticos, economistas, psicólogos, politólogos y filósofos desde que fue propuesto. A pesar de la simplicidad de sus hipótesis, proporciona un marco para estudiar el frágil equilibrio entre cooperación y conflicto, la confianza y la traición, la codicia y el miedo. Esto ha hecho que se convierta en una potente herramienta para el análisis del comportamiento con aplicación directa en toda clase de ámbitos.

Este problema tiene su origen 1950, cuando fue ideado por los investigadores Merrill M. Flood (1908-1991) y Melvin Dresher (1911-1992) de la corporación RAND. Su nombre se atribuye a Albert William Tucker (1905-1955), quien en 1951 escribió el primer artículo formalizándolo (además de encontrarse tutorizando la tesis doctoral de Nash en esos momentos).

Antes de enunciar el problema resulta útil caracterizarlo: se trata de un juego no cooperativo, estático, de información completa, simétrico y de suma no cero, en el que se utilizan estrategias puras.

5.1. Enunciado

Tucker presentó el enunciado de este problema con la forma de breve historia policíaca que conocemos hoy día. A continuación, se recoge la adaptación de J. Pérez *et al.* (2004) del enunciado original escrito por Tucker, que dicta lo siguiente:

> *Dos delincuentes habituales son apresados cuando acaban de cometer un delito grave. No hay prueba clara contra ellos, pero sí indicios fuertes de dicho delito y además hay pruebas de un delito menor. Son interrogados simultáneamente en habitaciones separadas. Ambos saben que si los dos se callan serán absueltos del delito principal por falta de pruebas, pero condenados por el delito menor (1 año de cárcel), que si ambos confiesan, serán condenados por el principal pero se les rebajará un poco la pena por confesar (4 años), y finalmente, que si sólo uno confiesa, él se librará de penas y al otro «se le caerá el pelo» (5 años).*

La información aportada por el enunciado puede representarse de forma mucho más visual con una bimatriz mediante la forma estratégica o normal:

Tabla 5.1.1: Bimatriz del dilema del prisionero.

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	–1, –1	–5, 0
	Confesar	0, –5	–4, –4

Fuente: J. Pérez *et al.* (2004).

El primer número en cada celda indica la utilidad del Preso 1, y el segundo número la del Preso 2. Como son preferibles menos años en prisión, se utilizan pagos negativos, siendo cero el mejor resultado posible.

5.2. Solución

El dilema del prisionero es un juego que por sus características puede ser resuelto con todos los conceptos de solución anteriormente descritos.

5.2.1. Solución mediante argumentos de dominación

En primer lugar, el problema se puede resolver mediante el uso de estrategias dominantes. Este concepto de solución es aplicable puesto que ambos jugadores tienen una estrategia dominante: confesar. Por tanto, la solución del juego sería el perfil de estrategias (Confesar, Confesar).

Asimismo, si utilizamos el método de la eliminación iterativa llegamos a la misma solución: (Confesar, Confesar).

5.2.2. Solución mediante equilibrio de Nash

Para encontrar una solución mediante el equilibrio de Nash es necesario identificar todos los perfiles de estrategias disponibles para comprobar si fijada una estrategia de un jugador el otro consigue maximizar sus beneficios. Existen cuatro perfiles de estrategia a elegir:

- (Callar, Callar). No es un equilibrio de Nash, pues si un jugador elige Callar, el otro elegiría Confesar porque obtendría un pago mayor (0 > -1).

- (Confesar, Callar). No es un equilibrio de Nash, pues si un jugador elige Confesar, el otro elegiría Confesar (-4 > -5).

- (Callar, Confesar). Este caso es análogo al anterior, intercambiando la posición de los jugadores.

- (Confesar, Confesar). Se trata del único equilibrio de Nash disponible en este juego, pues en esta posición ninguno de los dos jugadores tiene incentivos para variar su estrategia (-4 > -5). Confesar es la mejor opción independientemente de la acción que se espere del oponente.

El siguiente cuadro, propuesto por J. Pérez *et al.* muestra mediante flechas la desviación que los jugadores seguirían en cada uno de los perfiles de estrategias:

Tabla 5.2.2.1: equilibrio de Nash del Dilema del Prisionero.

		Preso 2		
		Callar		Confesar
Preso 1	Callar	–1, –1	⇒	–5, 0
		⇓		⇓
	Confesar	0, –5	⇒	–4, –4

Fuente: J. Pérez *et al.* (2004).

Como se puede comprobar, el equilibrio de Nash no llega a la solución más óptima y eficiente en el sentido de Pareto (Callar, Callar), donde todos los jugadores saldrían ganando. Según J. Pérez *et al.* esto se debe a una paradójica contradicción que se produce entre la solución más apropiada desde el punto de vista social (Callar, Callar) e individual (Confesar, Confesar). En su opinión, el resultado más predecible sería el dado por el equilibrio de Nash, aunque el resultado cooperativo podría verse favorecido si los jugadores pueden comunicarse, si el juego se repite varias veces o si obviamos el supuesto de racionalidad.

El equilibrio de Nash presenta la ventaja de ser más resolutivo que los otros conceptos de solución mencionados, pues reduce el subconjunto de perfiles que sobreviven a la eliminación iterativa. Como contrapartida, y al contrario con la eliminación iterativa, la solución dada por el equilibrio de Nash puede no ser la que se presente en la práctica.

5.3. Evidencia experimental

Se han llevado a cabo gran cantidad de experimentos tomando como base el Dilema del Prisionero para analizar el comportamiento de las personas en la realidad. Las conclusiones extraídas de estos experimentos, publicadas a lo largo de más de mil artículos, han resultado no ser concluyentes. Estas divergencias pueden deberse a las distintas condiciones con las que cada experimento se ha diseñado, variando el número de repeticiones, la posibilidad de comunicación, la propia personalidad y sexo de los sujetos, o la cantidad y la forma de pago, llegándose a pagar grandes sumas de dinero a los jugadores. No obstante, se ha comprobado que el número de resultados cooperativos aumenta (aunque solo moderadamente) cuando se disminuye el precio por traicionar al oponente, se aumenta el número de repeticiones del juego o se posibilita la comunicación entre jugadores. A continuación, se exponen los resultados de algunos de estos experimentos, con distintas variaciones:

En dos experimentos con pagos muy bajos, cada sujeto jugó el juego una pequeña cantidad de veces contra diferentes oponentes; entre el 50% y el 94% de los sujetos eligieron confesar, según los tamaños relativos de los pagos y algunos detalles en el diseño (Rapoport, Guyer y Gordon 1976, 135-137, 211-213 y 223-226).

En un experimento más reciente, el 78% de los sujetos eligió confesar en las últimas 10 de 20 rondas de juego contra diferentes oponentes (Cooper, DeJong, Forsythe y Ross 1996).

En los juegos cara a cara en los que se permite la comunicación, la incidencia de confesar tiende a ser menor: del 29% al 70% según la naturaleza de la comunicación permitida (Deutsch 1958, y Frank, Gilovich, y Regan 1993, 163–167).

5.4. Aplicación práctica

Como ya se ha mencionado, la gran utilidad del dilema del prisionero está en su aplicación para modelar situaciones con una estructura similar en escenarios muy diversos. A continuación, se expone una situación en la que gracias a su adaptabilidad ha resultado especialmente útil a lo largo de la historia.

5.4.1. La carrera armamentística

Una carrera armamentística es una situación en la que dos o más países compiten entre ellos para desarrollar una capacidad ofensiva que supere la de sus adversarios. Aunque se trata de una situación que se ha repetido en diversas ocasiones en la historia, fue en la etapa conocida como Guerra Fría donde la teoría de juegos intervino de forma más directa para calcular el coste y beneficio de cada actuación.

A principios de la década de 1950, EE. UU. y la URSS estaban involucrados en una carrera de armamento nuclear, en la que ambos países empezaron a destinar una gran cantidad de recursos para aumentar su arsenal con fines disuasorios. Esta situación puede modelarse de forma idéntica al Dilema del Prisionero:

Tabla 5.4.1.1: La carrera armamentística como Dilema del Prisionero.

		URSS	
		No fabricar bombas	Fabricar bombas
EE. UU.	No fabricar bombas	0, 0	–8, 3
	Fabricar bombas	3, –8	–4, –4

Fuente: Elaboración propia.

Las cifras contenidas dentro de la tabla son representativas de la mayor o menor utilidad que obtiene un país en cada actuación, aunque han sido escogidas de manera arbitraria por la gran dificultad de estimar la misma.

La fabricación de bombas por parte de ambos países supone grandes costes, por lo que no conviene a ninguno de ellos. No obstante, la no fabricación de bombas solo por parte de uno de ellos implicaría una situación de vulnerabilidad y cesión de poder al otro país. Al tratarse de una situación en la que peligra la seguridad nacional de forma extrema, ninguno de los dos países confía en que el otro no vaya a fabricarlas, por lo que se descarta la cooperación y se alcanza el equilibrio de Nash con ambos países fabricando bombas.

6. MODELOS CLÁSICOS

6.1. Introducción

Los modelos clásicos son una de las herramientas más básicas para el estudio de juegos no cooperativos. Aunque su uso puede generalizarse, los modelos clásicos se suelen usar para estudiar el comportamiento de oligopolios, donde un pequeño grupo de empresas controla la oferta de un producto o servicio, lo que les permite influir en los precios y dinámica del mercado. La cantidad de producto que se vende y el precio al que se vende están interrelacionados, por lo que, si las empresas fijan uno de ellos el otro será dado por el mercado. Si las empresas fijan la cantidad a producir se hablará de competencia en cantidades, y en caso contrario será competencia en precios.

Los modelos que presentan a continuación han sido simplificados para la competencia de dos empresas en forma de duopolio, que producen un bien homogéneo.

6.2. Duopolio de Cournot

Antes de que se sentaran las bases de la teoría de juegos moderna, el matemático francés Antoine Augustin Cournot desarrolló en 1838 un modelo de competencia imperfecta en el que dos empresas con igual función de costes compiten produciendo un bien homogéneo en un entorno estático.

Cournot se anticipó a la solución conseguida a través del equilibrio de Nash en más de un siglo, ampliando con su estudio de los oligopolios los análisis anteriores centrados en la competencia perfecta y los monopolios. En palabras de J. Pérez *et al.,* al equilibrio resultante de ese modelo se le conoce tradicionalmente como equilibrio de Cournot, y se llama a veces equilibrio de Cournot-Nash para indicar que se trata del equilibrio de Nash del juego definido por el modelo de Cournot.

En este modelo, cada empresa compite para obtener el mayor beneficio posible, que será función de su volumen de ventas. Al tratarse de un modelo de competencia en cantidades, se supone que el precio de venta será el mismo para ambas empresas, de lo contrario la empresa con el precio más bajo se haría con todas las ventas del mercado. Las empresas toman sus decisiones simultáneamente, por lo que no tendrán conocimiento de qué estrategia tomará la empresa rival y producirán en función de lo que estimen que ésta va a producir.

6.2.1. Formulación del modelo de Cournot

Se consideran 2 empresas E_1 y E_2, que compiten fabricando un producto homogéneo en las cantidades q_1 y q_2, respectivamente. La función de demanda inversa es $P(Q) = a - bQ,\ \text{donde } a, b > 0 \text{ y } Q = q_1 + q_2$. La función de costes es idéntica en ambas empresas: $C_1(q_1) = cq_1 \ \text{ y } \ C_2(q_2) = cq_2$.

El beneficio de cada una de las empresas será:

$\Pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$ y $\Pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$.

Los beneficios de cada empresa dependen de la cantidad producida por ambas, por lo que nos enfrentamos a un problema de optimización. Para la empresa E_1 será el siguiente: $\max \Pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$.

Las condiciones de primer y segundo orden son:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}(q_1, q_2) = a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial {q_1}^2}(q_1, q_2) = -2bq_1 < 0, \ \text{ por lo que es un máximo.}$$

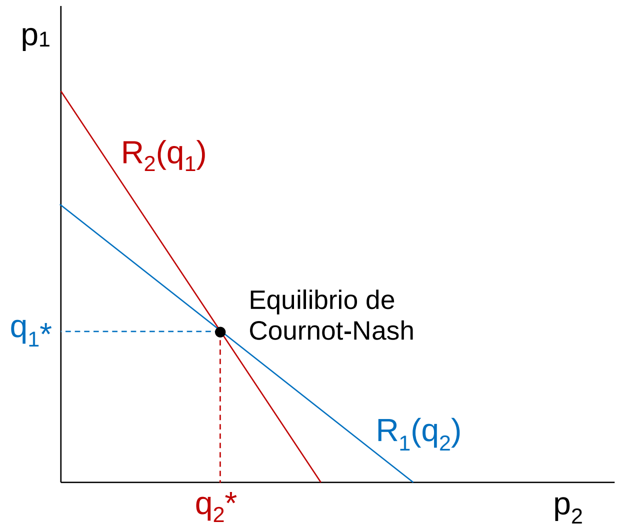
Despejando la producción de la primera empresa en función de la segunda se obtiene la mejor respuesta posible, lo que se conoce como función de reacción:

$$R_1(q_2) = \frac{a - c - bq_2}{2b}. \qquad \text{Análogamente, para la } E_2\text{:} \quad R_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b}.$$

El equilibrio de Cournot-Nash se obtiene resolviendo el sistema formado por ambas funciones de reacción, resultando en las siguientes cantidades a producir para cada una de las empresas:

$$q_1^* = \frac{a - c}{3b}, \qquad q_2^* = \frac{a - c}{3b}.$$

Gráfico 6.2.1.1: Equilibrio en el modelo de Cournot.



Fuente: Elaboración propia.

6.3. Duopolio de Bertrand

En 1883, varias décadas después de que el modelo de Cournot fuera publicado, el matemático y economista francés Joseph-Louis-François Bertrand expuso un razonamiento alternativo como crítica al modelo antes mencionado. En lugar de competir en cantidades, Bertrand defendía que era más lógico que las empresas se enfrentaran en términos de cambios en el precio, produciendo toda la cantidad que el mercado demandase al precio propuesto por estas.

6.3.1. Formulación del modelo de Bertrand

De forma análoga al modelo de Cournot, se alcanza el equilibrio de Nash cuando ambas empresas fijan el mismo precio, pues intentando acaparar la mayor cuota de mercado lo disminuirían hasta igualarse con sus costes marginales. Si no fuera así, la empresa con menor precio satisfaría toda la demanda. Al igual que en el modelo de Cournot suponemos que las funciones de costes de ambas empresas son idénticas: $C_1(q_1) = cq_1$ y $C_2(q_2) = cq_2$

La función de demanda de la empresa E_i está definida por:

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_i > p_j\,, \\ q(p_i) & \text{si} \quad p_i < p_j\,, \\ \dfrac{q(p_i)}{2} & \text{si} \quad p_i = p_j\,. \end{cases}$$

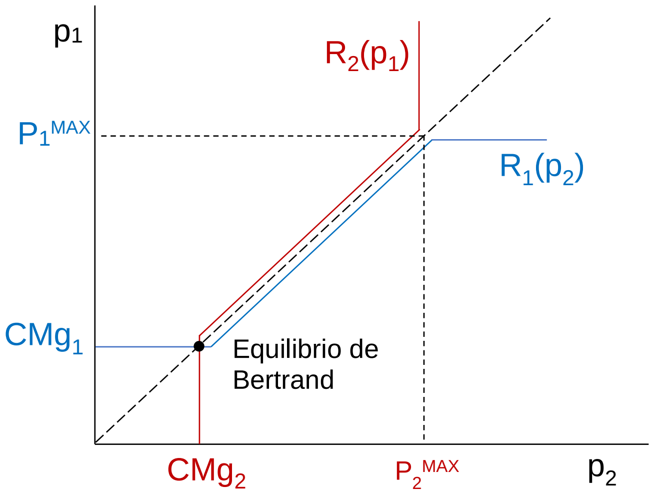
Los beneficios estarán definidos por la siguiente función:

$$\Pi_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_i > p_j\,, \\ (p_i - c)q(p_i) & \text{si} \quad p_i < p_j\,, \\ \dfrac{(p_i - c)q(p_i)}{2} & \text{si} \quad p_i = p_j\,. \end{cases}$$

El equilibrio de Nash en el modelo de Bertrand se obtiene cuando los precios son iguales al coste marginal, es decir: $p_i^* = p_j^* = c$. En este punto ninguna de las empresas tiene incentivo para cambiar de precio, y al ser igual a sus costes marginales los beneficios son nulos. Este resultado implica una paradoja, pues a pesar de estar en una situación de duopolio se obtiene el mismo resultado que en competencia perfecta.

Pocos años más tarde, en 1897, el economista y estadístico irlandés Francis Ysidro Edgeworth propone una modificación del modelo de Bertrand para solucionar esta paradoja, incluyendo restricciones en la capacidad de producción de las empresas para permitirles la colusión.

Gráfico 6.3.1.1: Equilibrio en el modelo de Bertrand



Fuente: Elaboración propia.

6.4. Duopolio de Stackelberg

Este modelo fue introducido en 1934 por el economista alemán Heinrich Freiherr von Stackelberg en su obra *Market Structure and Equilibrium*. A diferencia de los dos modelos anteriores, aquí las empresas toman sus decisiones de manera secuencial, donde una empresa líder toma sus decisiones en primer lugar y otra empresa seguidora utiliza esta información para tomar las suyas. Este liderazgo puede deberse a que una de las empresas esté mejor posicionada, tiene una marca más conocida o de mayor valor. Antes de anunciar sus acciones, la empresa líder anticiparía la respuesta de la seguidora de tal forma que el resultado final sea más favorable para la misma.

El modelo de Stackelberg es muy general, y adaptando las hipótesis puede ser derivado a otros modelos. Para alcanzar el equilibrio es necesario que las empresas tengan claro y estén dispuestas a desempeñar su papel como líder o seguidora. Si ambas empresas quisieran ser líderes, cada una de ellas intentaría expulsar a la rival mediante una guerra de precios, derivando en el modelo de Bertrand. Otra posibilidad sería que cooperaran para buscar el máximo beneficio conjunto, derivando en un modelo de colusión. Si ambas empresas quisieran ser seguidoras estaríamos ante un modelo de Cournot, donde ambas empresas adaptan sus expectativas sucesivamente hasta llegar al equilibrio.

6.4.1. Formulación del modelo de Stackelberg

Al igual que en los anteriores modelos, ambas empresas producen bienes homogéneos y están sujetas a las mismas funciones de demanda y costes. La función de demanda inversa es $\mathrm{P(Q) = a - Q}$, donde $\mathrm{a > 0}$ y $\mathrm{Q = q_1 + q_2}$. La función de costes es idéntica en ambas empresas: $\mathrm{C_1(q_1) = cq_1}$ y $\mathrm{C_2(q_2) = cq_2}$.

El beneficio de cada una de las empresas será:

$\Pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - q_1 - q_2 - c)$ y $\Pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - q_1 - q_2 - c)$.

Partiendo de que la empresa $\mathrm{E_1}$ es líder y $\mathrm{E_2}$ seguidora, una vez $\mathrm{E_1}$ haya decidido qué cantidad producir, $\mathrm{E_2}$ tomará esa cantidad como dada para resolver el siguiente problema de maximización para la variable q_2:

$$\max \Pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - c - q_1 - q_2).$$

Las condiciones de primer y segundo orden son:

$$\frac{\partial \Pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = a - c - q_1 - 2q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_2(q_1, q_2)}{\partial {q_2}^2} = -2 < 0, \text{ por lo que es un máximo.}$$

Despejando la condición de primer orden, obtenemos la respuesta de la empresa $\mathrm{E_2}$ a $\mathrm{E_1}$:

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}.$$

La empresa $\mathrm{E_1}$, conociendo que $\mathrm{E_2}$ responderá de acuerdo con la anterior función, aprovecha esta información para maximizar el siguiente problema en la variable q_1:

$$\max \Pi_1(q_1, R_2(q_1)) = q_1[a - c - q_1 - R_2(q_1)] = \frac{q_1(a - q_1 - c)}{2}.$$

Las condiciones de primer y segundo orden son:

$$\frac{\partial \Pi_1(q_1, R_2(q_1))}{\partial q_1} = \frac{a - 2q_1 - c}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_1(q_1, R_2(q_1))}{\partial {q_1}^2} = -1 < 0, \text{ por lo que es un máximo.}$$

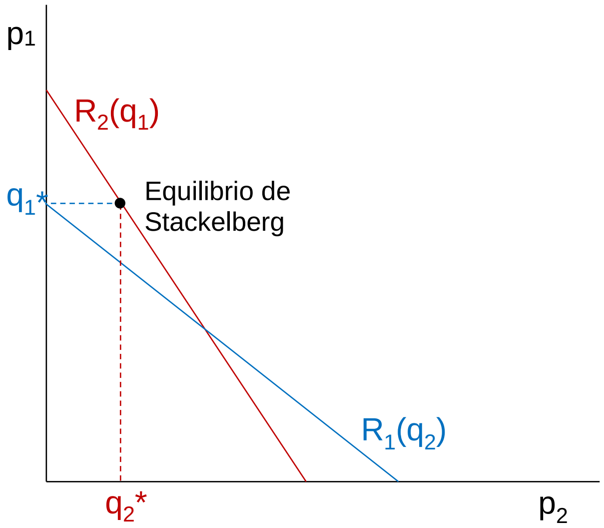
Despejando la función de primer orden, obtenemos la anticipación de E_1:

$$q_1 = \frac{a-c}{2}.$$

Como resultado del juego, obtenemos un equilibrio de Nash determinado por las siguientes cantidades producidas para cada empresa:

$$q_1^* = \frac{a-c}{2} \qquad \text{y} \qquad R_2(q_1^*) = \frac{a-q_1-c}{2} = \frac{a-c}{4}.$$

Gráfico 6.4.1.1: Equilibrio en el modelo de Stackelberg.



Fuente: Elaboración propia.

7. APLICACIONES

Desde su formulación, la teoría de juegos no se ha limitado a un área específica, sino que ha estado presente en una amplia gama de disciplinas y situaciones. La característica que dota de mayor relevancia a la teoría de juegos es su gran flexibilidad para adaptarse a diferentes contextos, siendo posible adaptar los modelos matemáticos a las características específicas de cada escenario. Se trata de un campo en constante desarrollo, por lo que es probable que se sigan descubriendo y aplicando nuevas formas de utilizarla en diversos ámbitos. A continuación, se presentan algunas de las situaciones en las que la teoría de juegos resulta de mayor utilidad.

7.1. Economía y negocios

El uso más extendido de la teoría de juegos probablemente se encuentre en el campo de la economía y los negocios, para analizar y predecir el comportamiento de los mercados, las empresas y los consumidores. Permite comprender cómo interactúan los distintos agentes y cómo toman sus decisiones estratégicas para maximizar sus beneficios. Entre sus usos más relevantes se encuentran los siguientes:

- Toma de decisiones estratégicas en la empresa: La teoría de juegos se utiliza para analizar y predecir el comportamiento de las empresas en situaciones de competencia. Permite modelar estrategias de fijación precios, publicidad, lanzamiento de nuevos productos, segmentación y entrada en nuevos mercados, gestión de la cadena de suministro… También ayuda resulta útil para analizar situaciones de negociación, modelando los incentivos y estrategias de las diferentes partes para lograr los acuerdos empresariales más beneficiosos.

- Diseño de subastas: La teoría de juegos permite determinar la estructura de la subasta, las reglas de participación y las estrategias óptimas de los participantes. También ayuda a prever los resultados de la misma y garantizar que sea justa y eficiente.

- Análisis de riesgo y decisiones de inversión en los mercados financieros: La teoría de juegos se utiliza para analizar decisiones de inversión en situaciones de incertidumbre. Ayuda a modelar y evaluar el riesgo asociado a diferentes opciones de inversión y a determinar las estrategias óptimas en entornos competitivos y cambiantes.

7.2. Ciencias políticas

Se trata de otro los campos históricamente vinculados a la teoría de juegos, siendo la estrategia una parte fundamental en las ciencias políticas. Entre algunos de sus usos podemos encontrar:

- Campañas electorales y competencia política: La teoría de juegos ayuda a entender cómo los partidos políticos y los candidatos eligen sus estrategias de campaña, como la fijación de plataformas políticas, la selección de candidatos y la distribución de recursos. También permite analizar cómo los votantes responden a estas estrategias y cómo se forman las coaliciones políticas.

- Negociación y conflicto internacional: Permite modelar las interacciones estratégicas entre diferentes países o grupos de interés, y evaluar las opciones y resultados posibles. Ayuda a entender cómo se alcanzan acuerdos o se resuelven conflictos en el ámbito internacional.

- Política de seguridad y disuasión: Permite modelar las estrategias de defensa y ataque de los países, así como la toma de decisiones en situaciones de conflicto armado o escalada militar. Ayuda a analizar los incentivos y las consecuencias de diferentes acciones militares y políticas de disuasión.

7.3. Ciencias sociales y comportamiento humano

La teoría de juegos ayuda a entender cómo las personas toman decisiones en interacción con los demás, cómo se forman normas sociales y cómo se desarrollan los fenómenos de cooperación y competencia en la sociedad. Algunas de las ramas en las que resulta útil son las siguientes:

- Psicología: La teoría de juegos se está utilizando para entender cómo las emociones y los sesgos cognitivos afectan a las decisiones que toman las personas. También resulta útil para el estudio de dinámicas de grupo e interacciones sociales en entornos de equipo, además de mejorar nuestra comprensión de diversos trastornos psicológicos.

- Sociología: La esencia de esta disciplina trata el estudio de las interacciones sociales, haciendo ideal el uso de la teoría de juegos. Permite analizar cómo se forman y mantienen las relaciones de poder, cómo se crean las normas sociales y cómo se establecen las dinámicas de dominación y subordinación en diferentes contextos.

- Antropología: Permite analizar la adaptación humana a diferentes entornos y cómo se desarrollan las estrategias de supervivencia y reproducción. También se puede aplicar al estudio de la evolución cultural, y a los juegos rituales y simbólicos en distintas comunidades.

7.4. Ingeniería y tecnología

En este campo encontramos gran parte de las aplicaciones que se han beneficiado de la teoría de juegos en los años más recientes. La teoría de juegos se utiliza para desarrollar algoritmos y estrategias de optimización, especialmente en entornos con mínima intervención humana.

- Telecomunicaciones: Se trata de una de las primeras áreas en aplicar la teoría de juegos, beneficiando a proveedores de servicios y usuarios. Se usa para optimizar la asignación de recursos tales como el ancho de banda, la potencia de transmisión y los canales de comunicación. Esto permite una mejor planificación del espectro de frecuencias en redes móviles, negociar los acuerdos de interconexión entre distintos proveedores y mitigar los problemas de congestión de red.

- Seguridad informática: Permite modelar y predecir el comportamiento estratégico de los atacantes y los defensores en situaciones de ciberataques, intrusiones y protección de sistemas, ayudando a entender cómo se pueden desarrollar estrategias óptimas de defensa y técnicas de detección.

- Inteligencia artificial y aprendizaje automático: Es una de las disciplinas más prometedoras y que con mayor velocidad se está desarrollando en los últimos años. La teoría de juegos resulta esencial para desarrollar algoritmos de aprendizaje automático y redes neuronales capaces de tomar decisiones de forma autónoma.

- Internet de las cosas (IoT): La teoría de juegos se está utilizando para modelar situaciones de interacción entre dispositivos IoT y para diseñar protocolos de comunicación eficientes y seguros.

- Criptoeconomía: Se trata de un campo emergente que utiliza la teoría de juegos para diseñar sistemas económicos descentralizados y autónomos, como criptomonedas y blockchains.

- Redes sociales: la teoría de juegos se usa para entender la dinámica de las redes sociales y para diseñar algoritmos que maximicen la participación y el compromiso de los usuarios.

7.5. Biología y medicina

Se trata de un campo en el que, si bien resulta mas complicado buscar aplicaciones, algunas de las encontradas han resultado de especial relevancia.

- Epidemiología: La teoría de juegos se utiliza para entender la propagación de enfermedades infecciosas y para diseñar estrategias de vacunación óptimas.

- Biología evolutiva y ecología: Desde sus inicios con la teoría de la evolución formulada por Darwin, la teoría de juegos sigue resultado útil para estudiar los comportamientos estratégicos de organismos en la competencia por recursos limitados.

8. CONCLUSIONES

La teoría de juegos no ha parado de evolucionar desde su consolidación como disciplina científica, y especialmente desde que las nociones de equilibrio general fueron presentadas por Nash en la década de los 50. Las posibilidades para su aplicación son innumerables, y la comunidad científica sigue hallando nuevas formas para explotar su utilidad, por lo que su vigencia en el tiempo está garantizada.

Esta disciplina se ha convertido en una potente herramienta especialmente útil para mejorar nuestro entendimiento del comportamiento humano en situaciones de negociación, por lo que su uso tiene especial relevancia en las Ciencias Sociales y Políticas. Cabe destacar su utilidad en el ámbito empresarial y de los negocios, donde existen modelos específicos capaces de explicar la interacción de empresas y consumidores a través del mercado. No obstante, gracias a su gran flexibilidad, se ha demostrado que puede ser muy útil en otros campos que no se basan en la racionalidad del comportamiento humano, como la ingeniería o las ciencias de la salud.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

9.1. Libros y artículos

Pérez Navarro, J., Jimeno Pastor, J. L. y Cerdá Tena, E. (2004): Teoría de Juegos. Editorial Pearson Educación S.A., Madrid.

Visencio Brambila, H., (2002): Economía Para la Toma de Decisiones. Editorial International Thompson Editores.

Martínez Rodríguez E. (2004): Concepto de solución para los juegos cooperativos, en Anuario Jurídico y Económico Escurialense, XXXVII, pp. 409-425.

Martin J. Osborne (2009): An Introduction to Game Theory. Editorial Oxford University Press.

Başar, T. (2013): Game Theory: Historical Overview, en Baillieul, J., Samad, T. (eds) Encyclopedia of Systems and Control. Editorial Springer, Londres.

Mérő, L. (1998): The Prisoner's Dilemma, en Moral Calculations. Editorial Springer, Nueva York.

Anatol Rapoport, Melvin J. Guyer & David G. Gordon (1976): Twice Two Game the 2 X 2 Game. Editorial University of Michigan Press.

Russell Cooper, Douglas V. DeJong, Robert Forsythe y Thomas Ross (1996): Cooperation without Reputation: Experimental Evidence from Prisoner's Dilemma Games, en Games and Economic Behavior vol. 12, issue 2, 187-218. Editor: E. Kalai.

Morton Deutsch (1958): Trust and suspicion, en Journal of Conflict Resolution, 2, 265-279. Editorial: SAGE Publications.

Robert H. Frank, Thomas Gilovich y Dennis T. Regan (1993): Does Studying Economics Inhibit Cooperation?, en Journal of Economic

Perspectives, vol. 7, no. 2, 159-171. Editorial American Economic Association.

Javier D. Fernández, María Elizabeth Parra Cadavid (2012): La teoría de juegos de Nash en los modelos de negociación tecnológica, en Revista Ingeniería Solidaria, Vol. 8, No. 14, pp 89-93.

9.2. Recursos electrónicos

MIT Libraries (2011): “Year 91 – 1951: Non-cooperative Games by John Nash, in: Annals of Mathematics 54 (2)”. Disponible en: https://libraries.mit.edu/150books/2011/04/07/1951 [Consulta 03/04/2023] .

The Nobel Prize (1994): “The Work of John Nash in Game Theory”. Disponible en: https://www.nobelprize.org/uploads/2017/05/nash-lecture.pdf [Consulta 03/04/2023].

The Econ Page: “Prisoners' Dilemma”. Disponible en: http://www.econpage.com/201/handouts/gametheory/dilemma.html [Consulta 15/04/2023].

Polinomics: “Teoría de Juegos I, II y III”. Disponible en: https://policonomics.com/es/teoria-juegos/ [Consulta 22/04/2023].

Muñoz San Miguel, J (2022): “Matemáticas para la Economía. Proyecto Mateco 3.141593”, Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas, Departamento de Economía Aplicada I. Disponible en: https://personal.us.es/jmiguel/MATECO/Web-Matheco.pdf [Consulta 25/04/2023].

RAND Corporation (2015): “Statement About John Forbes Nash, Jr.”. Disponible en: https://www.rand.org/news/press/2015/05/24.html [Consulta 30/04/2023].

Upjourney (2023): “10+ Game Theory Examples in Real Life”. Disponible en: https://upjourney.com/game-theory-examples-in-real-life [Consulta 03/05/2023].

9.3. Artículos históricos

G. W. Leibinz (1765), *Nouveaux Essais sur l’entendement humain*, Oeuvres philosophiques, latines et françoises, de feu Mr. de Leibnitz (R. E. Raspe, ed.), J. Scheuder, Amsterdam y Leipzig.

P. R. Montmort (1713), Essay d’analyse sur les jeux de hasard, 2da. edición ed. Jacque Quillau, París.

M. de Condorcet (1785), *Essai sur l’application de l’analyse à la probabilité des d´ecisions rendues à la pluralité des voix*, Imprenta Real, París.

J. C. Borda (1784), *Memoire sur les elections au scrutin*, Histoire de l’Académie Royale des Sciences 1781, 657–664.

A. Cournot (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, L. Hachette, París.

J. Bertrand (1883), *Theorie mathématique de la richesse sociale*, Journal des Savants 1883, 499–508.

F. Y. Edgeworth (1897), *The Pure Theory of Monopoly*, Giornale Degli Economisti 40, 13–31.

F. Y. Edgeworth (1881), *Mathematical psychics*, Kegan Paul & Co., Londres.

H. F. von Stackelberg (1934), Marktform und Cleichgewicht, pp. VI + 138. M. 9.60, Editado por Julius Springer.

C. Darwin (1871), *The descent of man, and selection in relation to sex*, John Murray, Londres.

R. A. Fisher (1915), *The evolution of sexual preference*, Eugenics Review 7, 184–192.

E. Zermelo (1913), *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, Proceedings of the Fifth Congress of

Mathematicians (Cambridge) (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), vol. II, Cambridge University Press, pp. 501–504.

M. Frechet (1953), *Emile Borel, Initiator of the Theory of Psychological Games and its Application*, Econometrica 2, 95–96: 126.

J. Von Neumann (1928), *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen 100, 295–320.

J. Von Neumann and O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton.

J.F. Nash (1950a), *Equilibrium Points in N-person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36, 48-49.

J.F. Nash (1950b), *The Bargaining Problem*, Econometrica 18, 155-162.

J.F. Nash (1951), *Non-Cooperative Games*, Annals of Mathematics 54, 286-295.

10. ANEXOS

10.1. Equilibrium points in n-person games

Primer artículo de Nash, que escribió con tan solo 20 años, en el que expone las ideas principales para resolver cualquier tipo de juego no cooperativo finito, y que acabaría desarrollando en su tesis doctoral.

EQUILIBRIUM POINTS IN N-PERSON GAMES

BY JOHN F. NASH, JR.*

PRINCETON UNIVERSITY

Communicated by S. Lefschetz, November 16, 1949

One may define a concept of an n-person game in which each player has a finite set of pure strategies and in which a definite set of payments to the n players corresponds to each n-tuple of pure strategies, one strategy being taken for each player. For mixed strategies, which are probability distributions over the pure strategies, the pay-off functions are the expectations of the players, thus becoming polylinear forms in the probabilities with which the various players play their various pure strategies.

Any n-tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space obtained by multiplying the n strategy spaces of the players. One such n-tuple counters another if the strategy of each player in the countering n-tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n - 1$ strategies of the other players in the countered n-tuple. A self-countering n-tuple is called an equilibrium point.

The correspondence of each n-tuple with its set of countering n-tuples gives a one-to-many mapping of the product space into itself. From the definition of countering we see that the set of countering points of a point is convex. By using the continuity of the pay-off functions we see that the graph of the mapping is closed. The closedness is equivalent to saying: if $P_1, P_2, \ldots$ and $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ are sequences of points in the product space where $Q_n \rightarrow Q$, $P_n \rightarrow P$ and Q_n counters P_n then Q counters P.

Since the graph is closed and since the image of each point under the mapping is convex, we infer from Kakutani's theorem[1] that the mapping has a fixed point (i.e., point contained in its image). Hence there is an equilibrium point.

In the two-person zero-sum case the "main theorem"[2] and the existence of an equilibrium point are equivalent. In this case any two equilibrium points lead to the same expectations for the players, but this need not occur in general.

* The author is indebted to Dr. David Gale for suggesting the use of Kakutani's theorem to simplify the proof and to the A. E. C. for financial support.

[1] Kakutani, S., *Duke Math. J.*, **8**, 457–459 (1941).

[2] Von Neumann, J., and Morgenstern, O., *The Theory of Games and Economic Behaviour*, Chap. 3, Princeton University Press, Princeton, 1947.