

J. PINTO PEIXOTO \* F. R. DIAS AGUDO \* J. TIAGO DE OLIVEIRA \* J. CAMPOS FERREIRA  
MARGARITA RAMALHO \* A. RIBEIRO GOMES \* ARMANDO POLICARPO \* F. DUARTE SANTOS  
J. GOMES FERREIRA \* L. A. MENDES VICTOR \* MANUEL LARANJEIRA \* M. GOMES GUERREIRO  
J. CÂNDIDO DE OLIVEIRA \* ROBALO CORDEIRO \* J. CELESTINO DA COSTA \* A. CASTRO CALDAS  
BARAHONA FERNANDES \* ARANTES E OLIVEIRA \* A. F. CARVALHO QUINTELA \* A. BARBOSA  
DE ABREU \* GOUVÊA PORTELA \* L. BRAGA CAMPOS \* J. J. DELGADO DOMINGOS \* A. F.  
OLIVEIRA FALCÃO \* DOMINGOS MOURA \* H. CAMPOS NETO \* A. LARCHER BRINCA \* J. F.  
QUINTINO ROGADO \* M. AMARAL FORTES \* M. BAPTISTA BRAZ \* M. PEREIRA COUTINHO  
FERNANDO ESTÁCIO \* P. O. PEREIRA SANTOS \* A. A. MONTEIRO ALVES \* BRITALDO RODRI-  
GUES \* L. AIRES DE BARROS \* MATOS ALVES \* M. PORTUGAL FERREIRA \* ANTÓNIO RIBEIRO  
FRANCISCO GONÇALVES \* TELLES ANTUNES \* LUÍS ARCHER \* J. MONTEZUMA DE CARVALHO  
J. FIRMINO MESQUITA \* ABÍLIO FERNANDES \* J. MALATO-BELIZ \* ARSÊNIO PATO DE  
CARVALHO \* A. XAVIER DA CUNHA \* ALLEN DEBUS \* J. SIMÕES REDINHA \* SEBASTIÃO  
J. FORMOSINHO \* A. M. A. ROCHA GONSALVES \* L. ALMEIDA ALVES \* OLIVEIRA CABRAL  
FRAÚSTO DA SILVA \* JOSÉ V. PINA MARTINS \* AMÉRICO COSTA RAMALHO \* FERNANDO  
REBELO \* C. ALBERTO MEDEIROS \* ILÍDIO DO AMARAL \* MANUEL GARRIDO ARAÚJO  
MANUEL VIEGAS GUERREIRO \* A. SIMÕES LOPES \* A. SOUSA FRANCO \* ONÉSIMO T. ALMEIDA  
JUSTINO MENDES DE ALMEIDA \* FRANCISCO GAMA CAEIRO \* RÔMULO DE CARVALHO

---

# HISTÓRIA E DESENVOLVIMENTO DA CIÊNCIA EM PORTUGAL NO SÉC. XX

I VOLUME



---

PUBLICAÇÕES DO II CENTENÁRIO DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA  
LISBOA • 1992



SOBRE ALGUMAS FIGURAS DOMINANTES  
NA ANÁLISE MATEMÁTICA, EM PORTUGAL  
(DE GOMES TEIXEIRA A SEBASTIÃO E SILVA)

J. CAMPOS FERREIRA \*

**Summary**

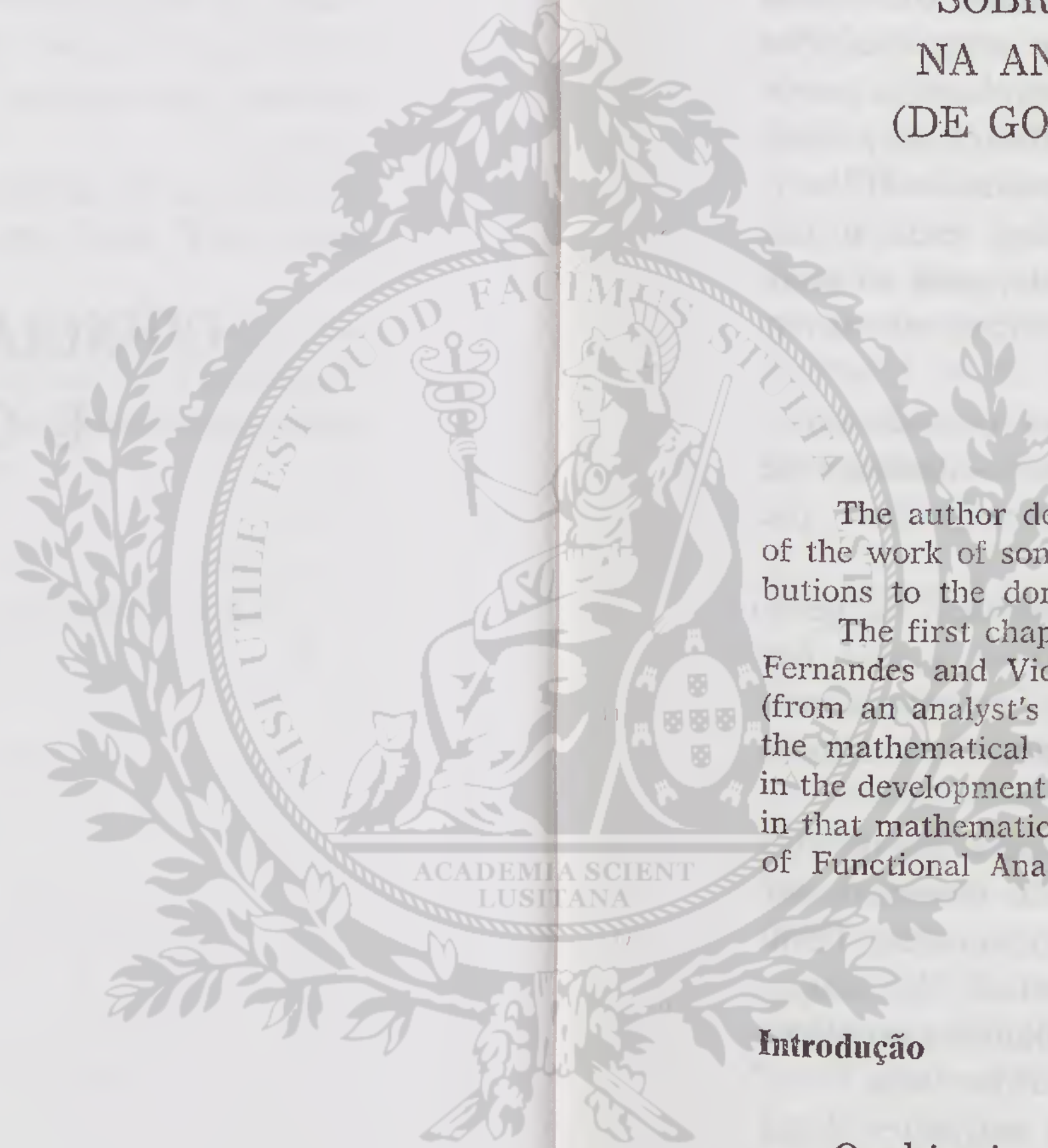
The author describes briefly what he considers the most remarkable aspects of the work of some portuguese mathematicians that have made important contributions to the domain of Mathematical Analysis.

The first chapter is dedicated to three mathematicians: Gomes Teixeira, Mira Fernandes and Vicente Gonçalves. The second describes shortly the chief events (from an analyst's point of view) produced in a period of uncommon intensity of the mathematical activity in Portugal, period that had a considerable influence in the development of Mathematical Analysis in our country. One of the participants in that mathematical movement was Sebastião e Silva, whose works in the domain of Functional Analysis are briefly considered in the last chapter of the paper.

**Introdução**

O objectivo essencial deste trabalho é o de destacar, no quadro geral da actividade desenvolvida em Portugal no domínio da Análise Matemática, no período considerado, alguns aspectos da obra de um pequeno número de matemáticos que, pela repercussão internacional dos seus trabalhos ou pela importância da sua contribuição para o progresso científico nacional, desempenharam no meio matemático português um papel particularmente relevante.

\* Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico.



ACADEMIA DAS CIÊNCIAS  
DE LISBOA



No período em referência, compreendido entre as décadas finais do século XIX e as primeiras da segunda metade do século XX, assistiu-se a nível internacional a um desenvolvimento colossal da Análise, concomitante — e em certa medida decorrente — dos grandes progressos entretanto verificados na Topologia e na Álgebra. Centrado em alguns países europeus e, de certa altura em diante, também nos Estados Unidos da América, esse desenvolvimento integrou, para além de uma evolução importante ao nível dos fundamentos, uma renovação completa da teoria das funções de variável real (Jordan, Borel, Lebesgue, Baire, etc.), uma enorme expansão da recém-criada Análise funcional (espaços de Hilbert, de Banach, espaços vectoriais topológicos, distribuições, etc.) e um extraordinário surto no domínio das equações diferenciais, para só mencionar alguns dos aspectos mais importantes, aliás estreitamente interligados.

Todo este movimento teve, em Portugal, reflexos consideráveis, embora, naturalmente, o condicionamento aqui existente — escassez de tradições de investigação, carência de meios, etc. — não permitisse que o nosso país nele participasse em posição de relevo.

No entanto, não só o ensino universitário de Matemática, na generalidade das escolas, registou melhoramentos significativos, graças aos esforços de actualização empreendidos por muitos professores, como, em alguns domínios, matemáticos portugueses puderam dar valiosas contribuições para o progresso da ciência.

O número de investigadores e de professores que, pelo mérito dos seus trabalhos ou pela qualidade do seu magistério, não deveriam ser esquecidos, excede de longe o dos que aqui serão mencionados. Limitações pessoais — de conhecimentos, de capacidade crítica, de tempo, de acesso à informação — impuseram e condicionaram algumas escolhas, porventura nem sempre fáceis de justificar em termos objectivos.

Registaremos agora algumas indicações relativas à estrutura deste trabalho. Uma observação ligeira do movimento matemático em Portugal, ao longo do período aqui considerado, é suficiente para evidenciar uma evolução sem perturbações assinaláveis, se exceptuarmos uma espécie de singularidade, verificada por volta dos anos quarenta. Na realidade, no espaço de uma década, com início em 1937-38, produziu-se entre nós uma série de acontecimentos desusados, que vieram como que revolucionar o meio matemático português. O estudo das múltiplas actividades desenvolvidas nesse período e da obra de cada uma das personalidades que

nelas tiveram participação relevante é um tema de grande interesse e amplitude, que transcende de longe o âmbito deste trabalho.

Assim, no que respeita a esse «movimento dos anos quarenta», limitamo-nos a registar no capítulo 2 um breve resumo de alguns dos seus aspectos mais significativos, visando essencialmente dar uma ideia da sua contribuição para a evolução posterior da Análise no nosso país e, em particular, definir as condições iniciais de desenvolvimento do que viria a ser, segundo cremos, o maior dos analistas portugueses: José Sebastião e Silva.

A Sebastião e Silva — ou melhor, ao que nos parece serem os traços dominantes da sua obra — é consagrado o último capítulo. O primeiro contém breves referências às obras de três matemáticos que, para além de terem contribuído decisivamente para o progresso da Análise em Portugal, serão decerto considerados, num consenso muito generalizado, os vultos cimeiros da Matemática portuguesa nas primeiras décadas do nosso século: Gomes Teixeira, Mira Fernandes e Vicente Gonçalves.

#### 1. Gomes Teixeira, Mira Fernandes, Vicente Gonçalves

No limiar deste século, a figura tutelar da Matemática portuguesa era a do sábio Francisco Gomes Teixeira.

Nascido em S. Cosmado (Armamar, Beira Alta) em 28 de Janeiro de 1851, Gomes Teixeira começou em 1876 a exercer funções docentes na Universidade de Coimbra, onde se licenciara e doutorara com raras distinções.

Em 1879, com 28 anos de idade, foi promovido a lente catedrático de Cálculo diferencial e integral. Mais cedo ainda, aos 25 anos, ingressara como sócio correspondente na Academia das Ciências, na qual passou a sócio efectivo em 1907 e, no ano seguinte, a sócio emérito.

Transferido para a cidade do Porto em 1883 foi desde então e até 1911 director da Academia Politécnica; em 1911 seria reitor da Universidade do Porto, em 1918 reitor honorário.

Publicou mais de 140 trabalhos, em perto de 50 revistas, portuguesas e estrangeiras. De entre as primeiras, além das publicações da Academia das Ciências, deve destacar-se o *Jornal das Ciências Matemáticas e Astronómicas*; fundado pelo próprio Gomes Teixeira em 1877, este jornal atingiu elevado nível científico (foram seus colaboradores, nomeadamente, Hermite e Césaró), tendo contribuído para uma vitalização sen-



sível da vida matemática portuguesa na parte final do século XIX. Há também ampla colaboração de Gomes Teixeira nos *Anais Científicos* da Academia Politécnica do Porto, que viriam a suceder ao *Jornal das Ciências Matemáticas e Astronómicas* (e, por sua vez, a ceder posteriormente o lugar aos *Anais* da Faculdade de Ciências do Porto).

Quanto às revistas estrangeiras que inseriram contribuições de Gomes Teixeira mencionaremos apenas os títulos das mais célebres: o *Jornal de Crelle*, o *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, criado por Liouville, as *Acta Mathematica*, fundadas por Mittag-Leffler, os *Rendiconti* da Academia dei Lincei, os *Anais Científicos* da Escola Normal Superior de Paris.

No que respeita aos ramos da Matemática considerados nos seus trabalhos e aos períodos da sua vida que a cada um deles dedicou, pode citar-se o próprio Gomes Teixeira: «Em Matemática, segui na minha vida uma evolução. Primeiro, enveredei pela Análise, a parte mais abstracta. Mais tarde, quando o meu espírito começava a cansar-se com grandes esforços, passei à Geometria. Por fim, quando já a Geometria me fatigava também, voltei às minhas predilecções da juventude, aos estudos históricos. Esta última transição coincidiu com a guerra e com a diminuição de relações com os meios científicos estrangeiros».

Gomes Teixeira foi premiado pelas Academias das Ciências de Lisboa (prémio D. Luís, 1888), de Madrid (1897) e de Paris (prémio Binoux, com relatório de P. Appel publicado nos *Comptes Rendues* em 1917). Com pouco mais de 50 anos, viu o valor da sua obra reconhecido também pelo Governo português que determinou — em portaria de 8 de Fevereiro de 1902, assinada pelo Presidente do Conselho de Ministros e Ministro dos Negócios do Reino, E. Hintze Ribeiro — a edição das suas «Obras sobre Mathematica» a expensas do Estado.

Contendo trabalhos de investigação e textos didácticos, as *Obras*, que vieram a lume sob a orientação do seu Autor entre 1904 e 1915, distribuem-se por 7 volumes, num total superior a 3000 páginas. Comentando o início da publicação, Gaston Darboux escreveu no *Bulletin des Sciences Mathématiques*: «C'est avec un grand plaisir que nous annonçons aujourd'hui la publication du premier volume des Oeuvres mathématiques de M. Gomes Teixeira, réunies par ordre du Gouvernement portugais. Le savant et habile géomètre est bien connu par nos lecteurs qui ont lu avec un vif intérêt ses nombreuses recherches insérées dans les divers recueils que publient aujourd'hui les différents pays civilisés».

Consideremos brevemente o conteúdo das *Obras*. Os dois primeiros volumes contêm um grande número de artigos dedicados, na sua maioria, a temas de Análise. São muitos os assuntos tratados: equações em derivadas parciais, desenvolvimentos em série de diversos tipos de funções, interpolação, extensões de resultados clássicos do cálculo diferencial, cálculo de integrais notáveis, etc.

No domínio das equações em derivadas parciais de 2.<sup>a</sup> ordem, que constituiu o objecto da sua tese de doutoramento, Gomes Teixeira generalizou alguns aspectos importantes da teoria de Ampère, obtendo resultados que Forsyth reobteria anos mais tarde usando essencialmente os mesmos métodos. Dá-nos uma ideia do valor de algumas das doutrinas expostas na sua tese e nos artigos sobre o mesmo assunto que publicou nos *Comptes Rendus* da Academia das Ciências de Paris e no Boletim da Academia Real da Bélgica, o facto de Goursat os ter incluído nas suas célebres lições sobre a integração das equações em derivadas parciais de 2.<sup>a</sup> ordem.

Outro tema estudado em numerosos trabalhos de Gomes Teixeira é o desenvolvimento de uma função em série de funções dadas. Além de uma memória premiada e editada em 1897 pela Real Academia das Ciências de Madrid (que lhe premiaria também, no mesmo ano, o Tratado das curvas especiais notáveis, planas e torsas) podem ser destacados os artigos que publicou no *Journal de Crelle* (sobre desenvolvimentos em série de potências do seno e do coseno, ou em série trigonométrica), no *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées* (sobre o desenvolvimento em série de funções implícitas, generalizando uma fórmula de Lagrange) e nos *Anais* da Escola Normal Superior de Paris (sobre o desenvolvimento das soluções de uma equação diferencial).

Noutros artigos estudou questões de interpolação (problemas de convergência relativos à interpoladora de Lagrange, interpolação por meio de funções circulares, etc.), de cálculo diferencial (fórmulas para o cálculo de derivadas de qualquer ordem de funções compostas e generalização de resultados de Jacobi sobre dependência funcional), problemas da teoria das funções elípticas, etc.

Nos volumes III e VI das *Obras sobre Mathematica* inclui-se o Curso de Análise infinitesimal, que teve papel fundamental na renovação do ensino na sua época. Eis alguns dos temas desenvolvidos no volume III, Cálculo diferencial, no qual — como aliás no volume VI, dedicado ao Cálculo integral — se inserem, em diversos capítulos, resultados e complementos originais de Gomes Teixeira: números irracionais



e imaginários, séries, produtos infinitos, fracções contínuas, limites, derivadas, funções implícitas, determinantes funcionais, polinómios de Legendre, etc. Igual amplitude e profundidade caracterizam o volume VI, que inclui cálculo integral, equações diferenciais ordinárias e parciais, funções de variável complexa, integrais eulerianos, funções implícitas, cálculo das variações.

P. Gilbert, professor na Universidade de Lovaina e membro da Academia de Paris, escreveu, numa recensão bibliográfica do Curso de Análise: «Si la culture des sciences mathématiques refléurit en Portugal on peut bien dire que M. Gomes Teixeira en a presque tout l'honneur, pas seulement par ses recherches propres, mais aussi par ses excellents traités d'Analyse»; e, noutra local: «M. Gomes Teixeira est certainement le mathématicien le plus actif et le plus fécond de la péninsule ibérique; ce ne sera pas sa faute il le Portugal ne prend pas une place distinguée parmi les nations où les sciences exactes sont portées à un niveau élevé» [*Revue des questions scientifiques*, Société Scientifique de Bruxelles, 1891].

Comentando edições anteriores da mesma obra, P. Mansion, professor na Universidade de Gand, observara no *Mathesis*, em 1912: «Dans maintes chapitres, l'Auteur a complété les travaux de ses devanciers par des recherches personnelles. Nous recommandons avec confiance son livre aux professeurs et aux étudiants de doctorat, comme l'un des meilleurs qu'ils puissent prendre pour guide ou pour auxiliaire dans leur enseignement ou dans leurs études»; e, quatro anos mais tarde, na mesma revista: «Comme nous l'avons dit antérieurement, cet ouvrage est des quatre ou cinq manuels d'Analyse infinitésimal (ceux de Jordan, Lipschitz, Peano) les plus remarquables publiés depuis une vingtaine d'années».

Por fim, os volumes IV, V e VII das *Obras* de Gomes Teixeira contêm — para além de um apêndice inserto no último volume e relativo aos problemas célebres da Geometria elementar não resolúveis com a régua e o compasso — o «Traité des courbes spéciales remarquables, planes et gauches», versão francesa desenvolvida do trabalho com que Gomes Teixeira ganhara o prémio da Academia das Ciências de Madrid.

São catalogadas neste tratado, de modo exaustivo, inúmeras curvas portadoras de nomes especiais; para cada uma delas estuda-se a forma, métodos de construção, rectificação, áreas limitadas e muitas outras propriedades importantes, registam-se os problemas que lhes deram origem ou com os quais se encontram ligados e dá-se notícia das obras e autores que primeiramente as consideraram. A cultura matemática e

de História da Matemática revelada neste trabalho é verdadeiramente impressionante. Para se avaliar do invulgar interesse que não cessa de provocar basta referir que, cerca de três quartos de século depois da sua primeira publicação — precisamente em 1972 — foi reeditado por uma grande editora americana\*. Comentando alguns aspectos desta nova edição, R. C. Archibald, escreveu nesse ano, no Boletim da Academia Mathematical Society, as palavras seguintes: «We have under review the very interesting and excellent volume of Professor Gomes Teixeira 'Sur les problèmes célèbres...' (originally published separately, now an appendix to the 'Traité'). His power of lucid exposition and his scholarly style are probably familiar to many americans through the two volume [now three volume] 'Traité des courbes spéciales remarquables'. We heartily recommend Professor Gomes Teixeira's book for every mathematical library, as no other publication of the kind can take its place».

Em termos muito gerais, parece legítimo afirmar que, na sua obra de investigação — centrada em domínios que, mesmo na sua época, podiam já ser considerados clássicos — Gomes Teixeira se dedicou ao estudo de problemas que mantinham elevado grau de interesse, a nível internacional. Comprovam-no, em particular, as honras e prémios que lhe foram atribuídos em países estrangeiros e as elogiosas citações dos seus trabalhos por matemáticos eminentes, como Hermite, Darboux, Appel, Tannery, Césaró, etc.

Na parte final da sua vida escreveu, além de alguns textos de índole religiosa e de um volume de impressões de viagem, *Santuários de montanha*, diversos trabalhos sobre História da Ciência, designadamente os elogios de Pedro Nunes, Monteiro da Rocha e José Anastácio da Cunha. Em conjunto com um estudo sobre a obra de Daniel da Silva, que redigira anteriormente, e com os textos de diversas conferências que proferira, esses trabalhos foram publicados no volume *Panegíricos e Conferências*. Foi ainda editada no ano seguinte ao do seu falecimento — ocorrido em 8 de Fevereiro de 1933 — uma *História das Matemáticas em Portugal*, contendo as lições proferidas por Gomes Teixeira, em Abril de 1932, nos Altos Estudos da Academia das Ciências de Lisboa.

\* Esta informação e o comentário de R. C. Archibald que se lhe segue, foram-me gentilmente facultados pelo Prof. Doutor F. Dias Agudo.



\*

Parece, sem dúvida, razoável afirmar que, como matemático, Gomes Teixeira foi essencialmente um analista: na verdade, consagrou-se a estudos de Análise, de forma quase exclusiva, durante cerca de três décadas; e mesmo após a sua inflexão para a Geometria (que, no dizer expressivo de Duarte Leite, «encarava com olhos de analista») ainda produziu alguns importantes trabalhos de Análise.

O caso de Mira Fernandes é diferente, pelo menos no que respeita à parte fundamental da sua obra de investigação, que se centrou na Geometria diferencial, no Cálculo tensorial e nas suas aplicações à Teoria da Relatividade (não obstante algumas contribuições esporádicas mas valiosas noutros domínios, em particular na Análise).

Para além destas últimas contribuições, porém, e das suas primorosas conferências sobre equações diferenciais, cálculo das variações, etc. — há pelo menos uma razão decisiva para que a sua figura não possa ser omitida num trabalho desta natureza: o papel que lhe coube no ensino da Análise em duas escolas universitárias, nas quais criou uma tradição de elevado nível científico que muito contribuiu para prestigiá-las.

Aureliano Lopes de Mira Fernandes nasceu no lugar da Mina de S. Domingos, Mértola, em 16 de Junho de 1884. Como já tive ocasião de afirmar na cerimónia comemorativa do centenário do seu nascimento realizada pela Academia, trinta anos mais tarde nasceria no mesmo concelho José Sebastião e Silva, de cuja obra me ocuparei adiante. Julgo no entanto oportuno recordar aqui, como o fiz nessa intervenção, as seguintes palavras de Sebastião e Silva: «O facto de eu não ter sido discípulo de Mira Fernandes não exclui que tenha recebido dele influência decisiva, em vários aspectos e diferentes fases da minha carreira. A minha primeira modesta tentativa de investigação, iniciada ainda quando aluno da Faculdade, foi por ele encorajada e deve-se em parte à sua intervenção o rumo que a minha vida tomou, após a redacção dos resultados desse estudo. Depois ainda, no decorrer dos anos, e até pouco tempo antes da sua morte, não faltaram o seu conselho e o seu juízo a servirem-me de estímulo poderoso».

Mira Fernandes licenciou-se e doutorou-se na Universidade de Coimbra, com as mais altas classificações. Poucos meses depois do doutoramento foi convidado para professor catedrático do Instituto Superior Técnico, recentemente criado. Assumiu essas funções em 1911 e desempenhou-as ininterruptamente durante 43 anos regendo disciplinas de

Cálculo e Mecânica (e, nos primeiros anos, Matemáticas Gerais). A partir de 1918 — e também por convite — passou a reger cumulativamente Análise infinitesimal no Instituto Superior do Comércio (mais tarde Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras).

Embora não tenha deixado redigidos os seus cursos — declararia mesmo, na fase final da sua carreira, que nunca se sentira atraído pela redacção de tratados ou livros de curso — pode tentar-se reconstituir alguns deles, pelo menos no que respeita aos assuntos tratados, consultando apontamentos das suas lições redigidas por alguns discípulos.

Para além da extensão dos programas — particularmente impressionante quando comparada com os padrões actuais nas nossas escolas superiores — causa admiração a capacidade de Mira Fernandes para seleccionar, de entre a multiplicidade de temas que eram então objecto de investigação recente, aqueles cujo interesse não cessaria de intensificar-se no futuro. É assim que, nos seus cursos de Cálculo no Instituto Superior Técnico (isto é, ao nível do segundo ano das licenciaturas) se estudavam já — sem prejuízo dos temas clássicos, sempre tratados com profundidade — algumas noções relativas a integrais de Lebesgue e Stieltjes, às funções de quadrado somável, de variação limitada e absolutamente contínuas, bem como as principais propriedades das funções semicontínuas, para citar apenas alguns exemplos. Na disciplina seguinte, de Mecânica Racional, surgiam ainda, a título de complementos de Análise, a somabilidade das séries, os desenvolvimentos assintóticos, espaços abstractos, sistemas ortonormados, equações integrais, etc.

Mira Fernandes publicou cerca de uma centena de trabalhos: memórias, notas e artigos de investigação, textos didácticos, ensaios, perspectivas históricas, orações de sapiência e elogios de cientistas falecidos.

Entre os textos didácticos, todos relativos a temas então praticamente ignorados no nosso meio universitário, merece referência especial a sua dissertação *Teoria de Galois — Elementos da teoria dos grupos de substituições* (apresentada na Universidade de Coimbra em acto de conclusões magnas e mais tarde reelaborada e incorporada no trabalho *Grupos de substituições e resolubilidade algébrica*) e ainda os *Elementos da teoria das formas quadráticas* e os *Fundamentos da Geometria diferencial dos espaços lineares*.

Quanto a trabalhos de investigação, podemos começar por observar que os primeiros resultados de Mira Fernandes relativos ao domínio em que se tornaria especialista de renome — a Geometria diferencial — se referem ao conceito de curvatura associada, introduzido por Bianchi.



Mira Fernandes obteve novas propriedades desse conceito e interpretou-o em termos geométricos, generalizando resultados de Lipka e Vitali; estabeleceu ainda uma fórmula (das duas curvaturas) relacionando o ângulo de duas direcções variáveis ao longo de uma curva com as curvaturas associadas a essas direcções e obteve diversas aplicações dessa fórmula.

É curioso apontar que estes resultados de Mira Fernandes foram objecto de uma lição do Prof. Vicente Gonçalves, nas aulas de Física Matemática que então regia na Universidade de Coimbra; e a exposição provocou tal entusiasmo que logo foi enviado a Mira Fernandes o seguinte telegrama, assinado por Vicente Gonçalves e por todos os alunos do curso: «Após lição admiráveis trabalhos V. Ex.<sup>a</sup> curvatura associada, transportes isoclínicos, professor e alunos Física Matemática Universidade Coimbra felicitam Mestre tanto dignifica Ciência nacional».

A fórmula das duas curvaturas de Mira Fernandes, generalização de outra fórmula devida a Levi-Civita, originou o relacionamento dos dois matemáticos. A colaboração científica com Levi-Civita estender-se-ia por largos anos, ao longo de um dos períodos mais fecundos da actividade criadora de Mira Fernandes. Com efeito, entre 1928 e 1939 — ano em que Levi-Civita foi afastado da sua cátedra na Universidade de Roma, pelo regime fascista italiano — Mira Fernandes enviou 17 comunicações à Academia dos Linceus, contendo contribuições originais sobre diversos temas (relações do desvio geodésico com a curvatura associada, propriedades de conceitos de transporte em variedades riemannianas, teorias unitárias do espaço físico, etc.) geralmente transmitidas à Academia pelo próprio Levi-Civita.

Como já tivemos oportunidade de referir, a obra de investigação de Mira Fernandes compreende, para além do seu domínio principal que sempre o ocuparia prioritariamente, algumas contribuições relativas a questões de Análise. Na maioria dos casos, tais contribuições relacionam-se de perto com temas desenvolvidos no seu magistério: é o que se passa, por exemplo, com as suas generalizações de teoremas fundamentais do Cálculo diferencial ou com o trabalho sobre equações diferenciais de matrizes, que apresentou à Academia das Ciências em 1940; e também, embora em menor escala, com os artigos «Funzione continue sopra una superficie sferica» (*Portugaliae Mathematica*, 1943), onde generaliza resultados de Kakutani relativos a um problema de Rademacher e «Funzione pseudo-monogene» (*Rev. Fac. Ciênc. Lisboa*, 1952), onde obtém extensões de teoremas sobre funções pseudo-monogéneas e pseudo-

-harmónicas publicados por Nicolesco nos *Comptes-Rendus* da Academia das Ciências de Paris.

Também publicou um grande número de artigos, em geral de carácter divulgativo, na *Técnica*, revista dos estudantes do Instituto Superior Técnico.

Outro aspecto muito relevante da personalidade de Mira Fernandes foi decerto a sua vastíssima cultura científica e humanística, que impressionou vivamente todos os que com ele privaram. Dão cabal testemunho dessa sua característica os primorosos elogios e orações de sapiência que compõem o único volume das suas *Obras Completas*.

Para sugerir o que terá sido a fase final da sua vida, no período posterior à jubilação, nada melhor do que transcrever aqui algumas palavras de Vicente Gonçalves, insertas no seu magnífico prefácio às *Obras Completas de Mira Fernandes*: «Incompreendido, refugiou-se no estudo. Retomou a teoria dos extensores que edificara em 1943 (adiantando-se então a investigadores de renome), mas a que só pudera voltar em 1952. Durante três anos reviu, esclareceu e generalizou seus anteriores resultados, prefazendo uma fecunda contribuição pessoal de ordem superior. De caminho escreveu ainda um ensaio sobre a evolução da geometria de Riemann e fez algumas investigações de Geometria e Mecânica.

Já em sensível declínio de saúde, continuava a estudar. Estudou sempre; e a inexorável doença, que lhe cortou o estudo, por imprescritível determinação de capa e batina o levou para o derradeiro claustro (19 de Abril de 1958)».

\*

As contribuições de Gomes Teixeira e Mira Fernandes para o progresso do ensino da Matemática consistiram, não apenas na actualização, extensão e aprofundamento dos assuntos tratados, mas também na consolidação interna dos seus cursos, mediante uma maior exigência de precisão e uma organização logicamente mais apurada. Diversos outros professores — José Bruno Cabedo, na Universidade de Coimbra, Pedro José da Cunha, na Faculdade de Ciências de Lisboa e alguns outros — se distinguiram também por imprimirem às suas lições notáveis aperfeiçoamentos da mesma natureza.

No que respeita, porém, ao progresso registado na sistematização das matérias e, sobretudo, no nível de rigor da exposição, não parece



arriscado atribuir a Vicente Gonçalves a contribuição mais decisiva. Mesmo que não tivesse deixado, como de facto deixou e em grande número, trabalhos muito valiosos no domínio da Análise, só a razão acabada de invocar tornaria imprescindível fazer-se-lhe aqui uma referência especial.

José Martins Vicente Gonçalves, nasceu no Funchal, em 26 de Agosto de 1896.

Licenciado na Universidade de Coimbra em 1917, sempre com as mais elevadas classificações, aí se doutorou em 1921 com uma tese de Análise complexa, *Sobre quatro proposições da teoria das funções inteiras*. No domínio da Análise complexa se integram também os seus primeiros artigos de investigação, publicados nos *Anais Científicos* da Academia Politécnica do Porto, nos quais, com a profundidade que lhe era característica, estuda diversas questões relativas a funções holomorfas, singularidades, funções de duas variáveis complexas, etc. Mas a sua dissertação de concurso para professor catedrático, apresentada à Universidade de Coimbra em 1927 e intitulada *Teoria geral da integrabilidade riemanniana*, inicia já o que pode considerar-se outro período da sua actividade de investigação, a qual, durante mais de vinte anos, será quase exclusivamente ocupada com temas da Análise real.

São deste período, designadamente, os seus estudos sobre alguns teoremas clássicos do cálculo diferencial (em que avulta uma análise minuciosa de propriedades da incógnita  $\theta$  do teorema dos acréscimos finitos e diversas extensões dos teoremas de Darboux, Rolle e Lagrange a classes de funções compreendendo alguns tipos de funções descontínuas), sobre contornos de Jordan (incluindo uma nova demonstração do teorema de Jordan relativo à decomposição do plano por uma curva fechada simples e a determinação de condições de variação contínua do integral com o contorno), equações diferenciais (generalizando, em particular, a fórmula clássica de Rodrigues), dependência funcional (nova demonstração e interpretação do teorema de Jacobi sobre os sistemas com jacobiano nulo), etc.

Na sua maioria, os resultados das investigações realizadas neste período saíram a lume nos primeiros volumes da *Portugaliae Mathematica* ou na *Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra*.

Entretanto, em 1942, Vicente Gonçalves transferiu-se para Lisboa, para a Faculdade de Ciências, onde veio leccionar a disciplina de Álgebra superior, Geometria analítica e Trigonometria esférica (depois Matemá-

ticas gerais) até ao ano da sua jubilação, 1966; entre 1947 e 1960 ensinou também uma disciplina do 1.º ano da licenciatura no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras.

Os cursos de Vicente Gonçalves exigiam muito dos seus alunos. Não era fácil, na sequência imediata de um ensino secundário em que, geralmente, se não tinham adquirido ainda hábitos de abstracção e raciocínio rigoroso, estudar apenas num ano (com a profundidade requerida e para além dos trabalhos das outras disciplinas): números reais, conjuntos de números reais, sucessões, séries, propriedades das funções contínuas e das funções deriváveis, integral de Riemann, funções de mais de uma variável real; e ainda números complexos, polinómios, teoria das equações algébricas, matrizes, determinantes, formas quadráticas, geometria analítica, trigonometria esférica.

No entanto, ultrapassadas as dificuldades, raros seriam os alunos que não estariam prontos a reconhecer que, ao fim e ao cabo, o que Vicente Gonçalves lhes deu foi incomparavelmente mais do que o que lhes exigiu.

Voltemos à actividade de investigação de Vicente Gonçalves.

Pode situar-se no final dos anos quarenta o início de um novo período, no qual sem deixar a Análise real — onde continuou obtendo múltiplos refinamentos relacionados com a teoria das séries, com a continuidade uniforme, com a variação total das funções descontínuas, etc. — passa a interessar-se predominantemente por problemas de Álgebra Clássica, muitas vezes relacionados de perto com questões finas de Análise: limites dos módulos das raízes dos polinómios, métodos de aproximação no cálculo de raízes, eliminação, decomposição de fracções racionais e também teoria dos grupos, matrizes, formas quadráticas, programação linear.

Os seus artigos deste período foram geralmente publicados na *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa* (2.ª série, A - Ciências Matemáticas, lançada em 1950 por Vicente Gonçalves e por ele dirigida até à sua jubilação); na mesma revista foram divulgadas pequenas notas históricas ou pedagógicas, em grande número, que o intenso labor de Vicente Gonçalves não cessava de produzir.

A partir de 1960 é em publicações da Academia das Ciências — da qual fora eleito sócio correspondente em 1941 e sócio efectivo em 1945 — que passam a figurar, na sua maioria, os trabalhos de Vicente Gonçalves. No *Boletim* ou nas *Memórias* da Academia se incluem os seus últimos



artigos relativos a questões de Análise (generalizações do teorema de Euler sobre as funções homogéneas, estudo de propriedades das funções subaditivas de intervalo, etc.), bem como alguns elogios e comunicações de índole histórica (sobre Pedro Nunes, André de Resende, Monteiro da Rocha, Anastácio da Cunha, etc.).

Entre os trabalhos relativos a temas de História da Ciência deve destacar-se um estudo, apresentado ao Congresso do Mundo Português em 1940 e intitulado *Análise do Livro VIII dos Princípios Matemáticos, de José Anastácio da Cunha*. Nesse trabalho, Vicente Gonçalves mostra que, já em 1790, José Anastácio dera uma definição rigorosa da noção de série convergente, que Cauchy, cerca de 30 anos mais tarde, redescobriria e formularia como condição necessária e suficiente de convergência na sua estruturação geral da teoria das séries. Ficava assim estabelecida a prioridade do matemático português numa questão de interesse indiscutível.

Nesta breve referência aos trabalhos publicados por Vicente Gonçalves (ao todo cerca de uma centena, na sua maioria artigos de investigação) não foram ainda mencionados os livros que dedicou ao ensino secundário e ao ensino superior. De entre estes, merece relevo muito particular o seu *Curso de Álgebra Superior*, publicado em sucessivas edições sempre ampliadas e renovadas, no qual são estudados com invulgar profundidade e grande riqueza de pormenor muitos temas fundamentais de Análise e Álgebra. De feição marcadamente clássica, este tratado — que insere numerosos resultados originais do seu Autor e onde se evidenciam as características de rigor, concisão e elegância sempre presentes nos seus trabalhos — continua a ser, sob vários aspectos, uma das obras mais completas existentes no mercado (não apenas em língua portuguesa) e um elemento indispensável de consulta para muitos profissionais.

Está prevista a publicação, pela Academia das Ciências, de alguns inéditos históricos de Vicente Gonçalves, resultantes do trabalho a que se dedicou incansavelmente, até ao final da sua vida. A vida de um homem que, no dizer de Tiago de Oliveira, «passou no desvão de circuitos públicos por modéstia de trato, conquanto marcasse de forma indelével — o que progressivamente se irá reconhecendo — a Ciência em Portugal». Uma vida exclusivamente consagrada ao estudo, à investigação e ao ensino, que terminou em 2 de Agosto de 1985, aos 89 anos incompletos.

## 2. Movimento dos anos quarenta

Um dos factos mais importantes da vida científica portuguesa no nosso século foi, sem dúvida, o extraordinário surto de actividade verificado à volta dos anos quarenta. No que respeita à Matemática, que teve nesse contexto contribuição relevante, pode dizer-se que o que nessa altura foi feito, num período de poucos anos, marcou de forma decisiva toda a nossa evolução posterior; e decerto teria tido repercussões bem mais profundas e benéficas se o enquadramento político então vigente não tivesse acabado por destruir quase por completo, também em pouco tempo, o que a espantosa criatividade de alguns homens conseguira pôr de pé.

Pode dizer-se que até aos anos quarenta os progressos alcançados em Portugal no domínio da Matemática — e, designadamente, na Análise — tinham sido consequência dos esforços individuais de algumas personalidades singulares, trabalhando isoladamente. Foi esse o caso dos matemáticos que destacámos no capítulo anterior: não obstante a profunda influência que cada um deles exerceu em muitos dos seus discípulos, de nenhum pode dizer-se que tenha criado uma escola ou se tenha sequer integrado em alguma.

Na realidade, creio ter sido a partir do que poderemos designar por «movimento dos anos quarenta» que entre nós se começou a pensar seriamente em constituir equipas de investigação e criar centros dedicados à pesquisa matemática.

Assim, logo em 1938 foram organizados o Seminário Matemático de Lisboa (que no ano seguinte adoptaria a designação de Seminário de Análise Geral) e o Centro de Estudos de Matemática Aplicada à Economia. O primeiro, funcionando em ligação com a Faculdade de Ciências de Lisboa, era dirigido por António Aniceto Ribeiro Monteiro; o segundo, integrado no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, tinha por director Bento de Jesus Caraça. Em conjunto com Ruy Luís Gomes, da Faculdade de Ciências do Porto, estes dois homens seriam os verdadeiros protagonistas do movimento matemático que então começava a esboçar-se.

Sob a égide do Instituto de Alta Cultura — organismo que, em muitos aspectos, desenvolveu por essa altura uma acção deveras notável — é criado em 1940 o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa (orientado por António Monteiro) e em 1942 o Centro de Estudos Matemáticos do Porto (sob a direcção de Ruy Luís Gomes).



Entre 1940 e 1943 desenvolveu-se no Centro de Lisboa, como domínio principal de pesquisas, a Topologia: o estudo de diversos tipos de espaços topológicos, a estruturação axiomática desses espaços quando se adopta como primitiva uma ou outra das noções relevantes na teoria, constituíram o objecto de numerosos trabalhos realizados nessa época por António Monteiro, Hugo Ribeiro, Sebastião e Silva, Ribeiro de Albuquerque e outros. Pode observar-se de passagem que nalguns desses trabalhos foram resolvidos problemas que tinham sido propostos por Maurice Fréchet, no seu famoso livro sobre os espaços abstractos.

Na realidade, a linha de investigação escolhida por António Monteiro — recentemente doutorado em Paris, onde trabalhara sob a orientação de Fréchet — era de grande actualidade: muitos matemáticos de primeiro plano (o próprio Fréchet, Hausdorff, Riesz, Kuratowski, etc.) ocupavam-se então de problemas da mesma área, à qual iam facultando as contribuições fundamentais que permitiriam fixar, de modo definitivo, as bases da Topologia geral.

Em 1942-1943 quase todos os componentes do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa partiram para o estrangeiro, como bolseiros do Instituto para a Alta Cultura. Tratava-se, no dizer de António Monteiro, de «forjar as armas indispensáveis para recomeçar com novas possibilidades».

Quanto ao Centro de Estudos Matemáticos do Porto, pode dizer-se que a sua criação veio institucionalizar a existência de dois pólos de interesse na Secção de Matemática da Faculdade de Ciências daquela cidade, um centrado na Álgebra moderna, outro na Análise real.

Lideravam os grupos de investigadores correspondentes os Professores António Almeida Costa e Ruy Luís Gomes.

Almeida Costa, que de início se interessara por Física teórica, acabaria por dedicar-se integralmente à Álgebra moderna, tendo sido o principal responsável pela sua difusão no nosso país e o fundador de uma escola portuguesa de algebristas.

No caso de Ruy Luís Gomes, parece também ter sido o seu interesse pela Física, em especial pela Física quântica, que o atraiu para os estudos de Análise. Professor de Física Matemática com uma sólida formação de analista — que atribuía à influência de Vicente Gonçalves, seu antigo mestre em Coimbra — era particularmente sensível à importância de alguns temas de Análise para um estudo aprofundado das teorias físicas modernas.

Outros matemáticos que influíram bastante na vida científica de Ruy Luís Gomes, particularmente no período em que os seus interesses se centraram na Teoria da Relatividade, foram Mira Fernandes e Levi-Civita. Em trabalhos de um e outro encontrou preciosas sugestões para as suas teses de doutoramento e de concurso a professor catedrático; e, tal como acontecera com Mira Fernandes, também Ruy Luís Gomes publicou numerosas notas nos *Rendiconti* da Academia dos Linceos por intermédio de Levi-Civita.

Foi Ruy Luís Gomes o principal obreiro da renovação e desenvolvimento da actividade matemática então verificados na Faculdade de Ciências do Porto; para esse efeito, porém, pôde contar com a colaboração de vários docentes dessa Faculdade, designadamente (e além de Almeida e Costa), Luís Neves Real, Alfredo Pereira Gomes, José Gaspar Teixeira, José Morgado, Laureano Barros, Manuel Gonçalves Miranda e Manuel Pereira Barros. Foi-lhe também preciosa a ajuda de António Monteiro, que participou intensamente em muitos trabalhos do Centro Portuense, no qual esteve mesmo integrado por período superior a um ano.

Para além das actividades de pesquisa de cada um dos seus elementos, o Centro realizou um grande número de colóquios, cursos livres e conferências sobre diversos temas de Matemática — Teoria dos grupos, Topologia, Medida e integração, Cálculo tensorial, Geometrias finitas, etc. — visando actualizar a preparação dos seus colaboradores e despertar o interesse dos estudantes pelo trabalho científico. Foram ainda produzidas numerosas publicações e criado, como anexo ao Centro de Matemática, um Seminário de Física teórica, para cuja direcção foi possível atrair físicos estrangeiros de renome: Guido Beck e, mais tarde, Alexandre Proca.

Também o Centro de Estudos de Matemática Aplicada à Economia, do ISCEF, já, pela mesma época, promovendo a realização de cursos e conferências, com objectivos semelhantes. Temas de Economia matemática, interpolação, complementos de Análise, etc., foram aí objecto de exposições de Bento Caraça, Augusto Sá da Costa, Orlando Morbey Rodrigues, João Remy Freire, Alfredo de Miranda e outros; Bento Caraça era frequentemente convidado a proferir lições nos outros centros e alguns dos colaboradores do Centro de Matemática Aplicada à Economia participavam regularmente em actividades do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa.



Outra manifestação significativa da vitalidade do movimento dos anos quarenta foi o lançamento de duas revistas, com objectivos claramente demarcados: a *Portugaliae Mathematica* e a *Gazeta de Matemática*.

A *Portugaliae* destinava-se exclusivamente à publicação de trabalhos originais de investigação matemática. O seu primeiro fascículo saiu em 1937 e nele figurava como editor António Monteiro e como cooperantes Hugo Ribeiro, José da Silva Paulo e Manuel Zaluar Nunes. Conseguiu rapidamente um lugar entre as revistas de Matemática com aceitação internacional (pode aferir-se o nível que atingiu logo de início se se tiver em conta que, entre os seus colaboradores, figuravam Maurice Fréchet e John von Neumann). Em 1943 tinham já sido publicados quatro volumes da *Portugaliae* com um total de perto de 1 500 páginas, na sua maioria de investigadores portugueses.

A *Gazeta*, revista trimestral cujo primeiro número foi publicado em 1940, era consagrada em primeiro lugar aos estudantes de Matemática das nossas escolas superiores e aos candidatos a exames de aptidão, embora tenha desempenhado também um papel de relevo junto de outros quadrantes, nomeadamente entre os professores do ensino secundário. Foram seus fundadores António Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, Silva Paulo e Zaluar Nunes. Além de pequenos artigos de divulgação sobre temas aliciantes, em geral de nível elementar, publicava regularmente pontos de exame de disciplinas de Matemática de várias escolas superiores e também uma secção de Noticiário.

Traduzindo a animação que então agitava o meio matemático português, esta secção, nos primeiros números da *Gazeta*, trazia constantes referências a iniciativas de professores e estudantes (das Faculdades de Ciências das três cidades universitárias, dos Institutos Superiores Técnico, de Agronomia e de Ciências Económicas e Financeiras, da Faculdade de Letras de Lisboa, etc.): Colóquios e conferências realizados, programas de actividades a desenvolver no futuro próximo, informações sobre a criação de clubes de Matemática e sobre a atribuição de prémios a estudantes, notícias sobre o labor matemático realizado noutros países e sobre a visita a Portugal de cientistas estrangeiros, palestras radiofónicas de carácter divulgativo, etc.

A partir de 1943, muitas destas iniciativas passaram a ser promovidas e coordenadas pela Junta de Investigação Matemática, fundada nesse ano sob proposta de Mira Fernandes, António Monteiro e Ruy Luís Gomes e à qual aderiram imediatamente muitos outros professores.

Na proposta de constituição, os objectivos da Junta eram descritos nos termos seguintes:

- 1.º Promover o desenvolvimento da investigação matemática;
- 2.º Realizar trabalhos de investigação necessários à economia da nação e ao desenvolvimento das outras ciências;
- 3.º Sistematizar e coordenar a inquirição científica dos matemáticos portugueses;
- 4.º Vincular o movimento matemático português com o dos outros países, em especial com o dos países ibero-americanos;
- 5.º Despertar na juventude estudiosa portuguesa o entusiasmo pela investigação matemática e a fé na sua capacidade criadora.

A fundação da Junta, que visava criar condições para a actualização da nossa cultura matemática colocando num quadro nacional a problemática da investigação e do ensino desta ciência no nosso país, foi um acontecimento de grande significado.

O Instituto para a Alta Cultura, dirigido por Celestino da Costa e aconselhado por Pedro José da Cunha, continuava a dar o seu apoio, em particular através da concessão de subsídios e bolsas de estudo no país e no estrangeiro.

Vivia-se, na realidade um período de renovação e entusiasmo, em que cada realização conseguida era um estímulo para novas realizações.

Ainda antes da criação da Junta de Investigação Matemática, ao referir no n.º 10 da *Gazeta* os objectivos de uma nova secção recém-criada, «Movimento matemático», António Monteiro congratulava-se nos termos seguintes com os progressos que vinham sendo alcançados: «É indiscutível que assistimos hoje no nosso país a uma verdadeira efervescência de actividade no campo das ciências matemáticas»; e, depois de enunciar uma série de acontecimentos, verificados nos últimos anos, que comprovavam a sua afirmação, concluía, com esperança não isenta de apreensões, que em breve se revelariam justificadas: «Todas estas organizações e publicações trabalham por um ressurgimento da cultura matemática portuguesa! Se tudo isto é muito animador e nos permite ter esperanças num triunfo mais ou menos próximo, não devemos ter ilusões de espécie alguma sobre as dificuldades que nos esperam! Há que contar — isto é de todos os tempos — com um recrudescimento da hostilidade da ignorância e da má fé...».



Fora entretanto constituída, em 1940, a Sociedade Portuguesa de Matemática, de que António Monteiro foi também um dos principais impulsionadores e da qual seria o primeiro secretário-geral. Da respectiva acta de fundação, publicada no 1.º número do Boletim da Sociedade (Série B) destacamos os nomes do Presidente da Assembleia Geral — Mira Fernandes — e do Presidente da Direcção — Pedro José da Cunha — eleitos para o biénio 1941-42 em assembleia reunida para eleição dos corpos gerentes e discussão e aprovação dos estatutos da Sociedade (os quais, aliás, não chegariam a obter homologação oficial).

No mesmo número do Boletim insere-se um Prefácio, da autoria de Pedro José da Cunha, no qual a situação anterior à década de 40 e as perspectivas que, no início desta, pareciam desvendar-se, são apreciadas nos termos seguintes:

«Não há dúvida que a investigação científica, nas suas diferentes manifestações, estagnou no nosso país por largos anos. É certo que, nalguns ramos da Ciência, sempre houve quem, entre nós, se celebrizasse produzindo trabalhos de valor, mas o facto de podermos evocar facilmente esses cientistas, apontando-os um a um, não será, afinal, uma prova manifesta de que eles não constituíram legião?» No mesmo sentido e noutro ponto: «...durante largos anos, quase que não se fez em Portugal ensino superior, fazia-se geralmente, como já por vezes se tem dito, ensino secundário sobre matérias de ensino superior». Por fim, a perspectiva animadora: «Restringindo-nos ao âmbito das Ciências Matemáticas folgamos em poder afirmar que hoje [...] possuímos entre os novos um grupo de cultores destas Ciências a par do seu nível actual e identificados com a sua técnica mais moderna, alguns dos quais estão revelando magníficas disposições para trabalhos de investigação e já têm feito descobertas valiosas nos ramos da Ciência em que se estão especializando. E isto quando, por outro lado, contamos nos nossos dias, no ensino superior das Matemáticas, professores eminentes, que não se limitam a ensinar aos alunos a Ciência; a quem merecem igual atenção as outras características desse grau de ensino: aplicar a Ciência e fazê-la progredir. [...] Neste momento verificam-se, portanto, as condições mais favoráveis para as Ciências Matemáticas entrarem de novo em Portugal numa era de fecunda e proveitosa actividade».

Infelizmente, todas estas expectativas saíam frustradas. Em breve começaria o êxodo de muitos cientistas portugueses — entre eles, alguns dos nossos melhores matemáticos — aos quais o regime ditatorial impedia de exercer a sua profissão no seu país.

A partir de 1945-46 e durante vários anos, as notícias insertas na *Gazeta*, na secção «Movimento Matemático», passaram a descrever pouco mais do que actividades desenvolvidas fora de Portugal e saídas de matemáticos portugueses para universidades estrangeiras.

Em 1945 partiu António Monteiro para a Universidade do Rio de Janeiro, que o convidara por recomendação de Einstein, von Neumann e Guido Beck. Aí, e posteriormente na Argentina, iria continuar a bater-se pelo seu sonho de sempre — a promoção de jovens, a criação de verdadeiras escolas de Matemática — e exercer uma acção notabilíssima como professor e investigador, na área da Lógica Matemática e da Álgebra da Lógica, em que se tinham centrado os seus interesses.

Tal como António Monteiro, também Hugo Ribeiro — prémio Artur Malheiros da Academia das Ciências de Lisboa e Doutor pela Universidade de Zurich, onde trabalhara com H. Hopf — não conseguiu lugar em nenhuma das universidades nacionais, nem sequer como assistente. Nunca obteve também o reconhecimento da equivalência do seu doutoramento aos de universidades portuguesas. Acabou por partir em 1947 para os Estados Unidos, a convite da Universidade de Berkeley, para onde foi trabalhar com Tarski; em universidades americanas desenvolveria a sua carreira, tornando-se um especialista de renome na Teoria dos Modelos.

Os anos de 47 e 48 foram verdadeiramente trágicos para o nosso movimento matemático. Em 47 foram afastados das suas escolas, entre outros: Bento Caraça, Ruy Luís Gomes, Zaluar Nunes, Ferreira de Macedo, Laureano Barros, José Morgado, Remy Freire, Morbey Rodrigues (além de Mário Silva, Manuel Valadares, Marques da Silva, Armando Gibert, Flávio Resende, Torres de Assunção, Azevedo Gomes, Celestino da Costa, Pulido Valente, Fernando Fonseca, Dias Amado, etc.). É difícil sobrestimar as consequências destes afastamentos no ensino universitário português.

Bento Caraça, extraordinário pedagogo e paladino incansável da promoção cultural do povo português, faleceu no ano seguinte.

Também em 1948 saiu do país Alfredo Pereira Gomes, na qualidade de bolsheiro do governo francês; foi trabalhar em Paris, sob a direcção de Fréchet e Denjoy e posteriormente em Nancy, com Dieudonné e Schwartz. Tinha já concluído o seu doutoramento, com uma tese preparada no Centro de Estudos Matemáticos do Porto, mas não obtivera a renovação do contrato que o ligava à sua Faculdade. No mesmo ano e na mesma qualidade seguiu, também para Paris, Manuel Zaluar Nunes.



A partir de 1953, Pereira Gomes e Zaluar Nunes encontrar-se-iam no Recife, na Universidade de Pernambuco, onde coube ao primeiro liderar um projecto de criação de uma escola de Matemática que veio a ter grande repercussão no meio científico brasileiro. Por seu lado Zaluar Nunes, além de colaborar activamente nesse projecto, continuou sempre a dirigir a publicação, em Portugal, da *Gazeta* e da *Portugaliae*\* (depois do seu falecimento, esta missão seria desempenhada com grande dedicação por J. Gaspar Teixeira). Pereira Gomes saiu do Brasil em 1962, para ocupar um lugar de professor na Universidade de Nancy, a convite de J. Delsarte, com o apoio de matemáticos da categoria de Schwartz, Cartan, Lions e Malgrange.

Em 1960, a equipa do Recife fora enriquecida pela incorporação de um dilecto colaborador de Ruy Luís Gomes: José Morgado; a partir de 1962, passou a contar também com a colaboração do próprio Ruy Luís Gomes que, tendo saído de Portugal em 1958, passara os primeiros anos do seu exílio no Instituto de Matemática da Universidade do Sul, na Argentina, a trabalhar ao lado de António Monteiro, na criação de uma boa escola de Matemática.

Todos estes factos, relativos a actividades desenvolvidas por exilados portugueses nos países que os acolheram, são aqui mencionados apenas para dar ideia de quanto o país perdeu com o afastamento destes homens. Impressiona pensar como poderia ter sido diferente a evolução da Matemática portuguesa se tivéssemos podido contar inteiramente com o talento e o entusiasmo de tantos matemáticos ilustres, que foram forçados a procurar além fronteiras as condições necessárias ao exercício da sua profissão.

### 3. Sebastião e Silva

Como registou Ruy Luís Gomes num artigo publicado em 1983\*, entre os jovens que iniciaram a sua carreira científica no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa um viria a ser considerado por António

\* Após uma interrupção, a *Portugaliae Mathematica* está hoje de novo a publicar-se regularmente, agora sob a direcção do Prof. Doutor Pereira Gomes.

\* «Tentativas feitas nos anos quarenta para criar no Porto uma Escola de Matemática» (Boletim n.º 6 da S.P.M.), valioso documento que muito nos subsidiou no capítulo anterior.

Monteiro como o maior matemático português. Esse jovem, desde o início activo colaborador de todas as iniciativas do Centro, chamava-se José Sebastião e Silva.

Nascido em Mértola, no dia 12 de Dezembro de 1914, cedo se estreou no exercício de funções docentes: órfão de pai, já aos treze anos dava explicações a colegas do liceu para poder participar nas despesas familiares.

Em 1937 concluiu com elevadas classificações a licenciatura em Ciências Matemáticas, na Faculdade de Ciências de Lisboa. Só em 1942, porém, conseguiria ser admitido como segundo assistente. Este atraso de cinco anos, num período da vida geralmente tão importante numa carreira de investigador, poderia ter sido muito grave se Sebastião e Silva não tivesse tido entretanto a oportunidade de entrar para o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, a convite de António Monteiro.

Na qualidade de colaborador do Centro publicou os seus primeiros trabalhos, na *Portugaliae Mathematica*: uns sobre questões de Topologia geral, outros sobre um assunto que o ocupava desde os seus tempos de estudante, a resolução numérica de equações algébricas.

Num dos seus artigos sobre este último tema introduziu um método de aproximação que designou modestamente por «semelhante ao método de Gräffe». É curioso notar que em 1971 — isto é, uns trinta anos mais tarde — esse algoritmo de Sebastião e Silva iria servir de base a dois trabalhos de especialistas de renome no domínio da Análise numérica: o primeiro, de A. S. Householder, intitula-se «Generalization of an algorithm of Sebastião e Silva» e foi publicado na *Numerical Mathematics*; o segundo, «The numerical factorisation of a polynomial», saído a lume na *Siam Review*, tem por autores o mesmo Householder e G. W. Stewart.

No primeiro destes artigos, escreveu Householder: «The algorithm of Sebastião e Silva [...] was described by him as 'similar to that of Gräffe'. However, it is superior in at least two important respects. First, if a zero is distinct from all others in modulus, it provides the polynomial of which these are the zeros. Second, it is self-correcting, a feature which may not be generally recognized».

O objectivo do outro artigo está descrito na sua introdução nos termos seguintes: «The purpose of the present note is to attempt to show in a heuristic and expository manner how some of the algorithms to which allusion has been made can be regarded as natural outgrowths of the basic theory of Sebastião e Silva».



Foi Sebastião e Silva um dos elementos do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa enviados para fora do país em 1943, com bolsa do Instituto para a Alta Cultura. Seguiu para Roma, onde iria ter oportunidade de privar com matemáticos dos mais categorizados — como F. Enriques, G. Castelnuovo, F. Severi, M. Picone, L. Fantappié — e com outros grandes vultos da ciência, da literatura e das artes italianas. Sempre consideraria estes contactos como extremamente importantes na sua vida, nos planos científico e humano.

Permaneceu em Roma durante quatro anos, parte dos quais em clima de guerra e sob ocupação nazi. Apesar desse condicionamento pouco favorável, o trabalho que realizou nesse período é deveras impressionante; dele resultaram, designadamente, duas notas sobre o método a que chamava «semelhante ao de Gräffe» e um artigo de Análise funcional no campo das funções analíticas, publicados nos *Rendiconti* da Academia dos Lincei, outro trabalho sobre funções analíticas inserto nas *Actas* da mesma Academia, um trabalho de Lógica matemática publicado nas *Memórias* da Academia Pontifícia das Ciências e ainda ... duas teses de doutoramento, uma de Lógica Matemática e outra de Análise funcional.

Foi a segunda destas teses, *As funções analíticas e a Análise funcional*, que Sebastião e Silva apresentou em Lisboa, em 1949, nas suas provas de doutoramento; publicada — mesmo em português — na *Portugaliae Mathematica*, o seu conteúdo despertou considerável interesse a nível internacional, dando origem a trabalhos importantes de G. Köthe, A. Grotendieck e outros grandes matemáticos.

Quanto à sua primeira tese, um documento de 230 páginas intitulado *Para uma teoria geral dos homomorfismos*, ficaria inédita por muito tempo, vindo a ser publicada apenas a título póstumo, cerca de quarenta anos depois de ter sido elaborada. Na opinião de alguns especialistas do domínio, que a apreciaram recentemente, trata-se de um trabalho de grande originalidade e riqueza de ideias, ainda hoje com considerável interesse. É curiosa a razão porque Sebastião e Silva evitou utilizar essa tese nas suas provas de doutoramento: terá receado que, na época, alguns membros do júri pudessem entender que Lógica matemática ... não era Matemática.

Pouco depois de doutorado, submeteu-se a um concurso de provas públicas para professor catedrático do Instituto Superior de Agronomia. Ocuparia este lugar durante perto de dez anos, regendo — sempre com perfeita consciência das necessidades e interesses da Escola em que se

integrava — disciplinas de Matemáticas gerais e Cálculo infinitesimal e das probabilidades. No plano da investigação foram para Sebastião e Silva dez anos de trabalho intenso, durante os quais se alcançou a uma posição de grande relevo no domínio da Análise funcional. Daí em diante, os convites de prestigiosas universidades (Oxford, Heidelberg, Roma, Maryland, etc.) para nelas realizar cursos e proferir conferências sobre os seus trabalhos pessoais iam-se tornando cada vez mais insistentes.

Assumira entretanto a direcção do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa. Após uma paralização de vários anos, este Centro voltaria a ser, nas suas mãos, uma verdadeira escola de investigadores, onde orientou no início da carreira vários jovens que viriam a ocupar posições de relevo no nosso meio matemático.

Em 1956, a Academia das Ciências atribuiu-lhe o prémio Artur Malheiros; três anos mais tarde elegê-lo-ia académico correspondente e posteriormente sócio efectivo.

Em 1960 foi nomeado, por convite, professor catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa, lugar que ocupou até ao final da sua vida, regendo Análise Superior e História do Pensamento Matemático.

A sua vasta cultura científica e humanística transparecia no seu curso de História do Pensamento Matemático, que entusiasmou várias gerações de estudantes. Quanto ao ensino da Análise, pode dizer-se que a sua acção, na Faculdade de Ciências, teve características verdadeiramente revolucionárias. Renovação dos programas (nos quais incluiu novos temas de grande importância e actualidade, sem prejuízo das matérias clássicas de real interesse, que passaram a ser tratadas de forma mais moderna e rigorosa), abandono dos métodos tradicionais de ensino magistral (visando uma participação activa dos alunos e estimulando a redescoberta e a criatividade), redacção de textos primorosos tanto pelo conteúdo como pela forma, foram alguns dos aspectos de que essa acção se revestiu.

Uma actuação de índole semelhante, mas que teve naturalmente muito maior repercussão junto do grande público, permitiu-lhe actualizar e remodelar completamente o ensino da Matemática nos anos terminais do curso secundário. Tendo reconhecido a esta tarefa um carácter prioritário, a nível nacional, dedicou-lhe grande parte dos seus esforços, durante alguns anos. Conseguiu resultados admiráveis embora, posteriormente, a valiosa obra que realizara neste domínio tivesse sofrido algumas deturpações.



No que respeita à actividade de investigação, parece legítimo afirmar que as contribuições mais significativas de Sebastião e Silva se situaram no campo da Análise funcional e sobretudo na teoria dos funcionais analíticos, na teoria das distribuições e no cálculo simbólico; essas contribuições influenciaram sensivelmente a evolução da Análise funcional durante cerca de duas décadas, e algumas delas entraram por direito próprio na história desse ramo da Matemática.

Os primeiros estudos de Sebastião e Silva no domínio dos funcionais analíticos foram realizados em Itália e iniciaram-se com uma análise crítica da teoria que fora criada por L. Fantappiè. Tratava-se de uma teoria rica em aplicações que, em particular, permitia resolver em termos explícitos alguns tipos importantes de equações diferenciais. No entanto, sob diversos aspectos, revelava-se pouco manejável: em determinados espaços de funções holomorfas, básicos na teoria, havia que trabalhar com topologias não separadas e com operações algébricas desprovidas das propriedades minimamente desejáveis.

Apercebendo-se de que a essência da teoria era independente de tais deficiências, Sebastião e Silva reformulou-a em novos termos, eliminando os referidos inconvenientes. Os seus resultados permitiram reconhecer que, na sua maior parte, a teoria em causa podia ser enquadrada no estudo das aplicações lineares contínuas entre certos tipos de espaços localmente convexos — isto é, numa teoria que estava então praticamente a ser criada por Dieudonné, Schwartz, Köthe, etc. — o que abriu o caminho a investigações importantes de Köthe, Grothendick, Nachbin e outros matemáticos. Mais tarde, Köthe reconheceria ter encontrado nos trabalhos de Sebastião e Silva sobre os funcionais analíticos, não só um dos mais interessantes campos de aplicação da teoria dos espaços localmente convexos, mas também as primeiras sugestões para o seu conceito de ultradistribuição de fronteira, generalização importante da noção de distribuição que introduziu em 1955.

Foi também no seu estudo dos funcionais analíticos que pela primeira vez surgiram a Sebastião e Silva certos espaços de funções que, como ele próprio escreveu, suspeitava não serem espaços de Banach, embora pudessem exprimir-se como uma espécie de «somadas» de uma infinidade de espaços de Banach. Eram já, sob forma embrionária, os espaços que estudaria em 1955 no seu artigo «Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni», que tão úteis se revelariam também na teoria das distribuições e que viriam a ficar conhecidos por «espaços de Silva».

Outro ramo da Análise funcional a que Sebastião e Silva deu contribuições importantes foi a teoria das distribuições. Criada em 1945 por Laurent Schwartz — com o objectivo principal de evitar as complicações que, na Análise clássica, resultam da existência de funções contínuas sem derivada — a teoria das distribuições foi-se revelando cada vez mais um instrumento indispensável em muitas aplicações e diversos ramos da Matemática, designadamente na moderna teoria das equações diferenciais.

Schwartz introduziu as distribuições por um processo que, para a generalidade dos físicos e técnicos — e até para muitos matemáticos — seria talvez na altura pouco acessível. Daí resultou o aparecimento de várias outras definições do conceito de distribuição, matematicamente equivalentes, mas mais fáceis de abordar pelos não especialistas. Uma dessas novas definições — sem dúvida uma das mais simples e naturais — foi dada em 1954 por Sebastião e Silva: as distribuições eram encaradas (localmente) como derivadas de certa ordem de funções contínuas, com um sentido generalizado da noção de derivada. Para muitos utilizadores este ponto de vista, mais directo, lançava uma nova luz sobre a teoria, aproximando-a, em certo sentido, da Análise clássica.

De qualquer modo, do ponto de vista das aplicações, o que importava não era tanto a adopção de uma ou outra das várias definições propostas, mas antes a fixação das regras fundamentais a que as distribuições deveriam subordinar-se no cálculo (tal como ao operar com números reais não há que pensar se foram definidos como cortes de Dedekind, classes de equivalência de sucessões de Cauchy, etc., mas sim que conhecer as regras operatórias de uso legítimo). Em resumo, interessava obter uma estruturação axiomática da teoria das distribuições.

Veio a ser esta uma das mais significativas contribuições de Sebastião e Silva. Depois, ao reelaborar a teoria sob o seu novo ponto de vista, obteve diversos complementos importantes; em particular — recorrendo de novo aos espaços que concebera no seu estudo dos funcionais analíticos, os espaços de Silva — pôde dar uma definição directa da topologia do espaço das distribuições, que Schwartz definira apenas por dualidade.

Fora-lhe entretanto possível aperceber-se da existência de nítidas analogias entre a teoria das distribuições e a dos funcionais analíticos (com alguns aspectos essenciais em flagrante contraponto: por exemplo, à fórmula integral de Cauchy das funções analíticas corresponde, nas distribuições, a fórmula integral de Dirac); aliás, as razões profundas



de tais analogias tornar-se-iam ainda mais claras, alguns anos depois, com a criação das suas ultradistribuições.

Tudo isto parece apontar para uma unidade essencial na obra de Sebastião e Silva, apesar da sua vastidão e diversidade. Um outro indício no mesmo sentido é revelado no facto seguinte: para provar que as distribuições segundo Schwartz se identificam com as que estruturara axiomáticamente, Sebastião e Silva teve que recorrer a um método metamatemático, introduzido muitos anos antes, por ele próprio, num dos seus trabalhos de Lógica.

É curioso recordar a este respeito as seguintes palavras, que algumas destas coincidências lhe suscitaram: «A harmonia preexistente de um mundo platónico, que temos a sensação de redescobrir, mais do que inventar, foi sobretudo o que me emocionou no decurso destas investigações em que, como se vê, não faltaram as surpresas».

Outras contribuições importantes de Sebastião e Silva para a teoria das distribuições foram o desenvolvimento de uma teoria de integração (sugerida por algumas ideias de S. Lōjasiewicz) e a aplicação dessa teoria ao estudo da convolução e das transformações de Fourier, Laplace e Stieltjes, num quadro muito generalizado; e ainda alguns resultados novos relativos à estrutura topológica das distribuições vectoriais.

Finalmente, no que respeita ao Cálculo simbólico, convém começar por recordar que uma das aplicações mais interessantes da teoria de Fantappié fora precisamente a abertura de um caminho para realizar certas funções de operadores por meio de uma fórmula análoga à fórmula integral de Cauchy (possibilidade que já tinha sido antevista por Poincaré, numa memória sobre grupos contínuos).

Este Cálculo simbólico de Fantappié foi reformulado e generalizado em vários sentidos por Gelfand, Taylor, Dunford, Sebastião e Silva e outros.

Um problema que preocupava Fantappié — mas cuja resolução estava fora do seu alcance, por não existir ainda nessa altura a teoria das distribuições — fora o relacionamento do seu Cálculo simbólico com o cálculo operacional dos electrotécnicos, baseado na transformação de Laplace. Foi Sebastião e Silva quem, em 1955, conseguiu estabelecer a ligação entre os dois métodos e alargar a possibilidade de recorrer à fórmula integral de Cauchy para realizar certas funções de operadores de espectro vazio e de operadores de espectro ilimitado.

As possibilidades de aplicação do Cálculo simbólico viriam ainda a ser substancialmente ampliadas por outra concepção de Sebastião e Silva,

a sua teoria das ultradistribuições. Como tivemos oportunidade de observar em trabalho anterior, essa teoria «constitui como que uma síntese das teorias dos funcionais analíticos e das distribuições, na qual se combinam harmoniosamente, num todo de rara beleza, a Análise real e a Análise complexa».

Sebastião e Silva faleceu em Lisboa, em 25 de Maio de 1972, com 57 anos de idade. Os sofrimentos morais e físicos que o atormentaram nos seus últimos tempos não o impediram de dedicar-se, com o entusiasmo de sempre, aos seus trabalhos de investigação. Nas *Actas* da Academia dos Linceus foi publicada postumamente uma memória incompleta — «Sur l'intervention du calcul symbolique et des distributions dans l'étude de l'équation de Boltzmann» — cuja redacção ocupou as últimas semanas da sua vida.

### Bibliografia

- [ 1 ] AGUDO, F. R. Dias, «A Matemática no Mundo Contemporâneo», *Mem. Ac. Ciênc. (Cl. Ciênc.)*, Tomo XXIII.
- [ 2 ] BARBOSA, A. M. Pinto, *Discurso de homenagem a Mira Fernandes*, Ac. Ciênc., 1984.
- [ 3 ] BOURBAKI, Nicolas, *Éléments d'histoire des mathématiques*.
- [ 4 ] COSTA, A. Almeida. «Elogio histórico de J. Sebastião e Silva», *Mem. Ac. Ciênc. (Cl. Ciênc.)*, Tomo XVII, 1974.
- [ 5 ] COSTA, J. F. Ramos e, «Elogio histórico de A. L. Mira Fernandes», *Mem. Ac. Ciênc. (Cl. Ciênc.)*, Tomo IX, 1966.
- [ 6 ] DIEUDONNÉ, J., *History of functional analysis*.
- [ 7 ] FARO, M. J. Abreu, *Discurso de homenagem a Mira Fernandes*, Ac. Ciênc., 1984.
- [ 8 ] FERREIRA, J. Campos, *Discurso de homenagem a Mira Fernandes*, Ac. Ciênc., 1984.
- [ 9 ] FERREIRA, J. Campos, «Alguns aspectos da vida e da obra de J. Sebastião e Silva», *Escola de Outono em História da Matemática*, Soc. Port. Mat., 1988.



- [10] GOMES, Ruy Luís, «Tentativas feitas nos anos quarenta para criar no Porto uma Escola de Matemática», *Bol. Soc. Port. Mat.*, 6.
- [11] GOMES, R. L. e REAL, L. N., «António Aniceto Monteiro e o C. E. M. do Porto, 1941-1944», *Port. Math.*, vol. 39, 1980.
- [12] GOMES, A. Pereira, «Matemática - Anos 40», *Bol. Soc. Port. Mat.*, 5, 1988.
- [13] GOMES, A. Pereira, «O regresso de António Monteiro a Portugal, de 1977 a 1979», *Port. Math.*, vol. 39, 1980.
- [14] GOMES, A. Pereira, «Ruy Luís Gomes - In Memoriam», *Port. Math.*, vol. 42, 1983/84.
- [15] GUIMARAES, A. Andrade, *Estudo sobre José Sebastião e Silva* (inédito), elaborado em 1972.
- [16] KÖTHE, Gottfried, «J. Sebastião e Silva et l'Analyse fonctionnelle», *An. Fac. Ciênc. Porto*, vol. VI, 1973.
- [17] LEITE, Duarte, «Prof. Dr. Gomes Teixeira», *An. Fac. Ciênc. Porto*, vol. XVIII, 1934.
- [18] MORGADO, José, «Ruy Luís Gomes, Professor e Companheiro», *Bol. Soc. Port. Mat.*, 8.
- [19] MORGADO, José, «Hugo Baptista Ribeiro», *Bol. Soc. Port. Mat.*, 12.
- [20] NACHBIN, Leopoldo, «The influence of António A. Ribeiro Monteiro in the development of Mathematics in Brazil», *Port. Math.*, vol. 39, 1980.
- [21] OLIVEIRA, J. Tiago, «Elogio histórico de Vicente Gonçalves», *Mem. Ac. Ciênc. (Cl. Ciênc.)*, Tomo XXVIII, 1987.
- [22] OLIVEIRA, J. Tiago, «Vicente Gonçalves, um mestre de rigor e de serenidade», *Bol. Soc. Port. Mat.*, 9.
- [23] ORTIZ, E. L., «Professor António Monteiro and contemporary Mathematics in Argentina», *Port. Math.*, vol. 39, 1980.
- [24] REAL, L. N., «Testemunho sobre Ruy Luís Gomes», *Bol. Soc. Port. Mat.*, 8.
- [25] RIBEIRO, Hugo B., «Actuação de António Monteiro em Lisboa, entre 1939 e 1942», *Port. Math.*, vol. 39, 1980.
- [26] SALEMA, Álvaro, *Bento de Jesus Caraça — um humanista do nosso tempo*, 1978.

- [27] STRUIK, D. J., *História concisa das Matemáticas*.
- [28] VILHENA, Henrique, *O Prof. Doutor Gomes Teixeira*, Lisboa, 1936.

E ainda:

- Trabalhos de Gomes Teixeira mencionados na bibliografia inserta em [28].
- Trabalhos de Mira Fernandes referidos na bibliografia incluída no único volume publicado das *Obras Completas de Mira Fernandes*.
- Trabalhos de Sebastião e Silva referenciados na bibliografia inserta no vol. I das *Obras de Sebastião e Silva*.
- Textos sobre Matemática e Matemáticos em Portugal — *Escola de Outono em História da Matemática*, Soc. Port. Mat., 1988.
- Textos sobre Lógica em Portugal — *Colóquio de Lógica Matemática à Memória de Hugo Ribeiro*, Soc. Port. Mat., 1989.