EDUCAÇÃO E FORMAÇÃO

Ensinar através da modelação matemática: uma primeira discussão baseada numa experiência de ensino no 4.º ano de escolaridade

Fernando M. L. Martins[1]; **Marta Vieira**[2]; **Diogo Reis**[2]; **C. Miguel Ribeiro**[3]

[1] Instituto de Telecomunicações (Covilhã); RoboCorp; Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, fmlmartins@esec.pt

[2] Escola Superior de Educação de Coimbra, mcdvieira@esec.pt; di_traves@hotmail.com

[3] Centro de Investigação sobre Espaço e Organizações (CIEO), Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve, cmribeiro@ualg.pt.

Resumo

A modelação matemática como ambiente de aprendizagem é, atualmente, considerada uma metodologia que se fundamenta na conjugação da resolução de problemas com referência na realidade envolvente. A sua implementação na sala de aula permite que os alunos assumam um papel de relevo na enunciação de tais situações baseadas na resolução de problemas e na busca da(s) sua(s) solução(ões) sendo, também por isso, encarada como uma das formas de potenciar aprendizagens matemáticas significativas, participando os alunos ativamente no processo e sendo (co)responsáveis pelo conhecimento do grupo através da partilha e discussão sistemática das soluções encontradas. Para uma plena aplicação da modelação matemática como ambiente de aprendizagem o conhecimento do professor assume um lugar de destaque, não só no que concerne à metodologia em si mas também relativamente aos temas matemáticos e suas possíveis conexões.

Neste texto iremos apresentar uma experiência de modelação matemática como ambiente de aprendizagem realizada no 1.º Ciclo do Ensino Básico, à volta de uma tarefa envolvendo sequências.

Palavras-chave: Modelação matemática como ambiente de aprendizagem; 1.º Ciclo do Ensino Básico; práticas de sala de aula.

Abstract

Mathematical modeling as a learning environment is currently considered as a methodological approach based on the use of problem solving sustained on the student's context. Its implementation in classroom allows students to take a leading role in problem posing and solving. As such, it is perceived as one of the ways to enhance a meaningful mathematics learning, wherein students actively participate in the process, thus being (co)responsible for the group's knowledge by sharing and discussing systematic solutions. To fully apply mathematical modeling as a learning environment, teachers' knowledge plays a prominent position, not only related to the methodology itself, but also with the mathematical topics and their possible connections.

In this paper, we present an experiment of mathematical modeling as a learning environment held at the elementary school, using task involving sequences.

Key-words: Mathematical modelling as a learning environment; Elementary school; Classroom practice.

Introdução

A modelação matemática como ambiente de aprendizagem tem sido bastante investigada, principalmente nas últimas duas décadas, assumindo-se como uma prática de sala de aula (metodologia) que tem por objetivo o ensino com e para a compreensão (e.g., Barbosa, 2001, 2003; Blum, Galbraith, Henn e Niss, 2007; Blum e Ferri, 2009; Jurkiewicz e Friedman, 2010; Haines, Galbraith, Blum e Khan, 2011; Kaiser, Blum, Ferri, e Stillman, 2011; Mendonça e Lopes, 2011; Oliveira e Oliveira, 2012). Assim, a modelação matemática como ambiente de aprendizagem é considerada *um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade* (Barbosa, 2001).

A modelação matemática deverá ser uma atividade desenvolvida em pequeno grupo (Stender, 2012) possibilitando, assim, desenvolver competências como a argumentação, a comunicação e a resolução de problemas, fazendo com que os alunos trabalhem de forma eficaz no problema, capacitando-os a apresentar os seus resultados e também discutir, argumentando, os percursos efetuados tornando, assim, possível efetivar o desenvolvimento das capacidades transversais (Ponte et al., 2007).

No estudo de Ferri e Blum (2013) relacionado com professores dos primeiros anos, o conhecimento profissional do professor é referido como um dos aspetos essenciais para a (na) implementação desta metodologia, concretamente nas fases que envolvem conhecimento extra matemático e a monotorização do processo. A modelação envolve contextos extra matemáticos, que podem estar na génese de situações de contingência (no sentido considerado por Rowland, Huckstep e Thwaites (2005)). Estas situações de contingência poderão ocorrer também pelo facto de, dificilmente, os professores dos primeiros anos serem especialistas em todas as áreas (apesar de terem, teoricamente, formação para a sua maioria) e domínios possíveis de modelação, tais como as ciências naturais, ciências da computação, economia, artes, desporto ou outros contextos específicos (não necessariamente científicos). Segundo Sins (2006) a ausência de conhecimento em determinado domínio conduz a modelos pobres sendo, portanto, determinante que a escolha de um contexto de modelação tenha em consideração, por um lado, o que os alunos já sabem – para que o ponto de partida da modelação possa ser proveitoso –, mas também que envolva (possa envolver) aspetos e conteúdos que os alunos não conheçam (possam não conhecer), permitindo assim, também, o desenvolvimento do seu conhecimento e capacidades matemáticas. Para que isso seja possível o professor tem que estar familiarizado com o problema de modelação estando ciente, em particular, que um problema pode levar a vários modelos diferentes.

Neste texto apresentamos e discutimos uma experiência de modelação matemática como ambiente de aprendizagem realizada numa turma do 1.º Ciclo do Ensino Básico (4.º ano de escolaridade), tendo como ponto de partida uma tarefa envolvendo sequências. Esta tarefa tinha por intuito possibilitar que os alunos desenvolvessem o seu conhecimento relativamente ao tema em concreto e justificassem, de forma argumentativa, as suas opções, processos e conclusões. Discutiremos a metodologia em si, desafios e dificuldades que se colocaram, e algumas potencialidades deste tipo de trabalho nas aprendizagens dos alunos para uma sua maior autonomia e responsabilização nas aprendizagens (também matemáticas), tanto individuais como grupais.

Modelação matemática e conhecimento do professor para ensinar

Segundo Barbosa (2001) podem ser consideradas três perspetivas de encarar a modelação matemática que consistem na conceção de um conjunto de práticas que decorrem consoante o papel do professor ou dos alunos durante o processo de modelação na sala de aula. No primeiro caso o professor coloca um problema (com referência na realidade envolvente), devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos, sob orientação do professor, resolvê-lo. No segundo caso o professor formula o problema inicial, tendo os alunos de recolher dados que lhes permitam resolvê-lo. No terceiro caso, a partir de temas "não-matemáticos" que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos, os alunos, sob a orientação do professor, recolhem informações, formulam problemas e resolvem-nos. Na figura 1 ilustra-se a participação do professor e do aluno em cada um dos casos referidos.

	Caso 1	***Caso 2***	***Caso 3***
Elaboração da situação-problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Figura 1. O envolvimento do professor e dos alunos nos casos de Modelação (Barbosa, 2001, p.9).

À medida que diminui o foco no professor (e a quantidade de tarefas que lhe cumprem), aumenta a responsabilidade dos alunos, transferindo para estes mais responsabilidade pela resolução do problema e consequentemente, pela sua própria aprendizagem. Ainda que os casos não sejam prescritivos (e.g. Barbosa, 2001, 2003), podemos vislumbrar várias formas de organizar e de conduzir atividades de modelação. Mostram também possíveis caminhos/opções por meio dos quais podemos implantar e desenvolver o processo de modelação de forma gradativa nas aulas de matemática, fazendo-se variar em número e em grau de dificuldade as tarefas que competem a cada um dos intervenientes no processo de ensino e de aprendizagem – professor e alunos. O processo de modelação pode ser encarado como um ciclo (Figura 2) que permite encarar o processo de ensino de forma distinta do tradicional, no qualo professor assume o papel primordial.

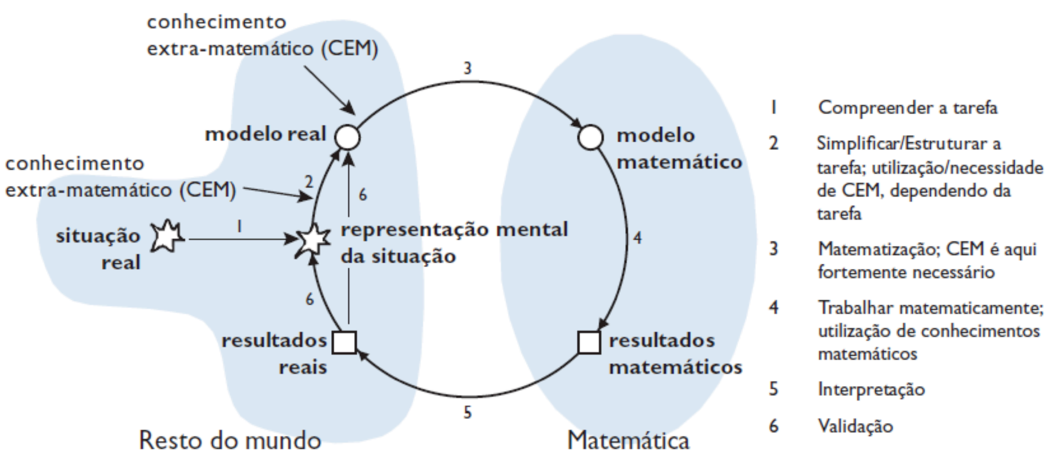


Figura 2. Ciclo da modelação matemática (Ferri, 2010, p.20)

A análise e reflexão sobre a modelação como ambiente de aprendizagem, conduz-nos à valorização deste novo paradigma de ensino e de aprendizagem (e.g. Barbosa, 2003; Caldeira, 2009; Blum e Ferri, 2009; Kaiser et al., 2011) promovendo uma mudança no ensino da matemática tendo por objetivo o cumprimento dinâmico do currículo e despromovendo o tradicional ensino estanque por temas, potenciando dessa forma, também, o desenvolvimento do trabalho multidisciplinar (Andresen, 2009). Por outro lado, esta metodologia permite chegar mais facilmente a cada aluno e, acima de tudo, leva a que o ensino possa ser, mais efetivamente realizado com e para a compreensão, assumindo o aluno um papel essencial na construção do seu conhecimento e raciocínio matemático. Esta abordagem é, também, uma das formas de permitir sustentar as alterações necessárias no processo de ensino de modo a potenciar aprendizagens efetivas nos alunos. Para além da compreensão dos conceitos matemáticos de forma individual e conexões entre estes e entre conceitos e a realidade, o recurso a esta prática de sala de aula permitirá promover, também, de forma mais acentuada, o desenvolvimento efetivo de capacidades transversais preconizadas nos documentos oficiais – de forma mais explícita no antigo programa (Ponte et al., 2007), mas também, ainda que apenas de forma implícita, no novo programa e metas curriculares (MEC, 2013).

Deste modo a elaboração de boas tarefas de modelação matemática é, também, um aspeto fulcral e determinante na implementação desta metodologia. De entre estas, as mais proveitosas correspondem às que partem de um problema ou situação da realidade (preferencialmente do contexto dos alunos) e que a matemática seja necessária para resolver esse problema. Existem alguns critérios a ter em conta aquando da elaboração de tarefas de modelação (e.g., Oliveira e Oliveira, 2012), sendo um dos principais o facto de a tarefa permitir que os alunos consigam calcorrear todo o ciclo da modelação (Ferri, 2010) – ver figura 2. Segundo Ferri, os principais princípios orientadores deste tipo de abordagem são: (1) s*ignificado da tarefa de modelação* – é importante que a tarefa tenha sentido para os alunos e deste modo ganhem motivação quando trabalharem sobre ela; (2) *contexto realista adequado à realidade* – o meio e o contexto social deve ser tido em conta na escolha da tarefa de modelação para que esta possa despertar interesse naqueles alunos; (3) p*rovocação de questões* – deve proporcionar ao aluno a oportunidade de formular novas questões, tanto ao nível da matemática como ao nível extra matemático da tarefa; (4) *estimulação de formas holísticas de aprendizagem* – tornar possível “aprender com todos os sentidos”, nomeadamente problemas complexos de modelação, geralmente resolvidos fora da sala de aula; (5) *nível de linguagem adequado* – é extremamente importante a formulação das frases tendo em conta o nível de ensino e a clareza do que se pretende.

Neste sentido, este tipo de prática de sala de aula, pela maior imprevisibilidade que acarreta poderá colocar o professor em maior número de situações imprevistas, sendo esta assumida como uma das desvantagens da sua utilização (e.g., Jurkiewicz e Friedman, 2010). Para que tal desvantagem seja minimizada, ou mesmo erradicada (e potenciadas as aprendizagens matemáticas dos alunos) será fulcral que o professor seja detentor de um amplo e sólido conhecimento profissional que permita minimizar estas desvantagens. Aos professores de matemática (mas também de modo similar para os demais), para o exercício da prática, de modo a permitir que os alunos possam entender o que fazem e porque o fazem, é essencial um conhecimento que conglomera aspetos do conhecimento do conteúdo e do conhecimento didático do conteúdo – tal como é encarado por Shulman (1986). Uma das perspetivas de encarar esse conhecimento de matemática do professor de matemática refere-se ao *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Rowan & Ball, 2005). Consideramos os subdomínios considerados por Ball et al., (2008) e cuja visualização da sua colocação nos domínios do conhecimento do professor se encontra na figura seguinte.

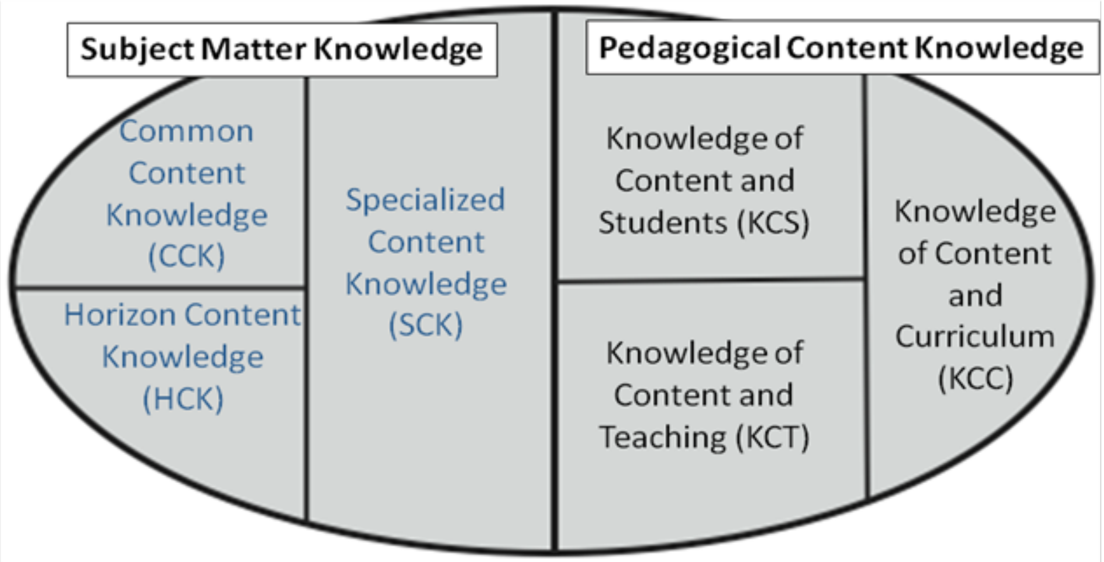


Figura 3 – Domínios do Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT) (Ball et al., 2008, p. 403)

Tanto o conhecimento do conteúdo como o conhecimento didático do conteúdo, definidos por Shulman são, nesta concetualização, considerados subdivididos em três subdomínios cada. O *Common Content Knowledge* (CCK) refere-se a um conhecimento sobre como fazer, numa ótica de utilizador; o *Specialized Content Knowledge* (SCK) complementa o CCK e refere-se mais concretamente a um conhecimento associado aos porquês, possibilitando, posteriormente, uma abordagem com e para a compreensão que permita, entre outros, entender os motivos matemáticos que sustentam os erros ou atribuir sentido às resoluções dos alunos – fundamentalmente quando estas são distintas do esperado; o *Horizon Content Knowledge* (*HCK)* corresponde, reconhecidamente pelos autores, a um dos subdomínios menos abordados e pode ser visto como um conhecimento das conexões entre os diversos tópicos, e no mesmo tópico – tanto ao mesmo nível como em níveis anteriores e posteriores (e.g., seguindo a perspetiva de Fernández, Figueiras, Deulofeu e Martínez, 2011) mas também como um conhecimento que permite relacionar o que se faz (pode fazer) em cada momento com o que os alunos podem vir a fazer em anos/etapas educativas seguintes – aspetos que não fazem parte do currículo que o professor tem de ensinar na sua etapa educativa (e.g., Jakobsen, Thames e Ribeiro, 2013; Jakobsen, Thames, Ribeiro e Delaney, 2012). Incluídos no conhecimento didático do conteúdo (mas obviamente com relações estreitas com os demais subdomínios), consideram o *Knowledge of Content and Teaching (KCS)*, que se refere, entre outros, ao conhecimento das dificuldades e facilidades dos alunos, de modo a que possam ser colmatadas e potenciadas; *Knowledge of Content and Teaching (KCT)*, incluindo o conhecimento relativo às estratégias a utilizar para abordar determinado conteúdo, e aos exemplos considerados bem como a ordem pela qual são apresentados e explorados, e o *Knowledge of Content and Curriculum (KCC).*

Por forma a promover a implementação da modelação como ambiente de aprendizagem em sala de aula é fundamental que os professores (atuais ou futuros) possam experienciar vivências similares às que se espera possam vir a facultar aos seus alunos (e.g., Magiera, van den Kieboom e Moyer, 2011; Pinto e Ribeiro 2013b), possibilitando a que as possam sentir como suas, atribuindo-lhe efetivo significado. Dessa forma poderão ir adquirindo uma maior segurança sobre a utilização desta abordagem e decidir, autonomamente, diferentes possíveis formas da sua incorporação na prática (e.g., Chaves e Espírito Santo, 2007; Jurkiewicz e Friedman, 2010). Tal com refere Spandaw (2009), preparar os professores por forma para a trabalharem com a modelação matemática implica ter em conta (para além das necessárias matemática e suas didáticas) as lições apreendidas a partir da literatura sobre o papel e os objetivos da modelação na ciência e na educação matemática, o ciclo de modelação, disposições, autenticidade, compreensão epistemológica, o conhecimento de domínio, modelação por computador, monitorização e avaliação.

O contexto, a turma e a tarefa

Tendo como pano de fundo a conjugação das potencialidades e das principais razões que fundamentam o recurso à modelação como ambiente de aprendizagem com o MKT do professor, efetuámos um estudo exploratório tendo por objetivo que os futuros professores possam discutir e efetuar a planificação de diferentes tarefas sustentadas na modelação como ambiente de aprendizagem. Essa discussão tem por intuito, por um lado, contribuir para uma compreensão de como deverão organizar o trabalho de forma a ser posteriormente aplicado em sala de aula, e por outro lado (de forma conjugada), incrementar o seu MKT associado aos conteúdos que pretendem abordar.

Neste texto discutimos e refletimos sobre uma experiência de ensino implementada numa turma do 4.º ano de escolaridade usando a Modelação Matemática como metodologia de ensino e de aprendizagem. A turma era composta por 18 alunos que, tal como a professora (estudante do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico), não estavam familiarizados com este tipo de prática de sala de aula. A tarefa implementada foi a seguinte:

Na tabela 1 sintetizamos a estrutura da aula com a distribuição dos tempos e comentários didáticos, contemplando, portanto, um exemplo da descrição de como o processo de ensino se poderá desenrolar tendo por base a metodologia considerada, com a distinção de todas as fases pelas quais deve passar assim como os diferentes papéis dos alunos e do professor. Segundo Ferri (2010), o tempo não é apenas necessário para a resolução do problema mas também para apresentação dos resultados, para a validação e discussão, ou seja a indicação do tempo é uma

Construções*

Deram um jogo de construções à Joana que apenas contém hexágonos, ela começou a construir e formou a seguinte sequência:

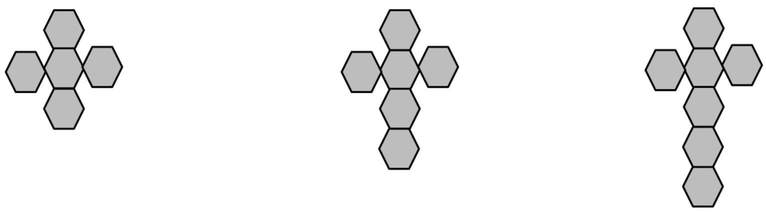


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

1. Ajuda a Joana a representar a próxima figura da sequência.

2. Quantos hexágonos compõem a figura que ocupa a posição 6 da sequência da Joana? Justifica a tua resposta.

3. Qual a posição ocupada pela figura composta por 14 hexágonos? Explica como chegaste a essa conclusão.

4. Se a Joana quisesse construir a figura número 20 como deveria proceder?

estimativa para ajudar na implementação desta prática de sala de aula, pois por pode ser apontado como uma barreira (Ferri & Blum, 2013).

Tabela 1. Possível estruturação da aula

Fases	**Tempo aprox.**	**Atividades do professor/ intervenções**	**Considerações relativas aos alunos /atividades dos alunos**	**Objetivo**
Introdução	10 min	Introdução da tarefa e sua clarificação Constituição de grupos de 3	Os alunos expõem as dúvidas sobre a tarefa	Os alunos contactam com a tarefa
Trabalho de pequeno grupo na tarefa	45 min	O professor vai acompanhando o trabalho dos diferentes grupos e intervém sempre que necessário. Quando os alunos estão a terminar o trabalho é lançado o desafio final (encontrar a fórmula geral).	Trabalham em grupo e esboçam as possíveis soluções	Os alunos utilizam as suas competências matemáticas e sociais
Em grande grupo	5 min	O professor pede que os alunos se voltem para o quadro	Os alunos podem estar um pouco agitados	Os alunos devem ter um momento para se concentrarem
Apresentação Validação e discussão	30 min	O professor pede aos alunos que apresentem os seus resultados. O professor coloca questões de maneira a provocar discussão e modera a mesma.	Os alunos mostram as suas representações e explicam como procederam. Os alunos discutem as soluções e os processos de resolução	Os alunos apresentam e comunicam as suas soluções. Os alunos podem refletir sobre os resultados
Síntese e *feedback*	15 min	O professor sintetiza os resultados da discussão.	Os alunos dão feedback ao professor	

Aqui iremos apresentar e discutir algumas das respostas dadas por alunos do 4.º ano de escolaridade, bem como a reflexão efetuada pela professora antes e depois da aula acerca da implementação da modelação matemática como prática de sala de aula.

A implementação em sala de aula

Considerando que a professora nunca tinha trabalhado com os alunos tendo a modelação como ambiente de aprendizagem como uma metodologia explícita, a aula iniciou-se com uma explicação de como a mesma iria decorrer (trabalho de pequeno grupo e discussão dos percursos seguidos na resolução da tarefa proposta). Após formar os grupos (de três alunos) apresentou a tarefa à turma, lendo o enunciado da mesma e dando-lhes tempo para que pudessem colocar algumas questões – isso não se verificou pois todos afirmaram que era muito fácil).

Os alunos começaram a trabalhar na tarefa nos pequenos grupos tendo a professora detetado que, após concluírem a primeira questão, as dificuldades começaram a surgir (foi geral em todos os grupos), tendo surgido a necessidade de os orientar de modo a que pudessem ultrapassar estas dificuldades iniciais, colocando a seguinte questão: "*como seria se houvesse uma figura inicial anterior à figura um"*. Esta intervenção permitiu que os alunos estruturassem o seu pensamento e raciocínio, possibilitando a obtenção de uma resposta às questões colocadas na tarefa. De seguida, cada pequeno grupo passou à apresentação das suas conclusões e os restantes grupos iam concordando ou pedindo explicações caso não compreendessem algum aspeto do raciocínio efetuado pelos colegas (quando diferia do seu próprio). É de realçar o facto de todos os alunos terem tentado explicar as suas ideias e raciocínio, argumentando de modo a tentar convencer os demais. Por fim, foi analisado e discutido o desafio que a professora lhes tinha colocado: *"qual a forma de sabermos quantos hexágonos terá qualquer figura em que pensemos?"*. Apesar de nem todos os grupos terem conseguido obter a lei de formação, conseguindo apenas efetuar uma concretização para valores próximos que tornavam possível a contagem, a discussão em grande grupo permitiu ampliar os conhecimentos de todos os alunos, tornando-os, também, todos responsáveis pelas aprendizagens de todos.

Em seguida vamos discutir e refletir acerca das diversas respostas dadas pelos alunos, sendo estas as representativas das diversas respostas.

1. Ajuda a Joana a representar a próxima figura da sequência.

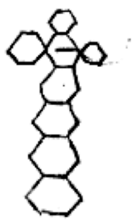


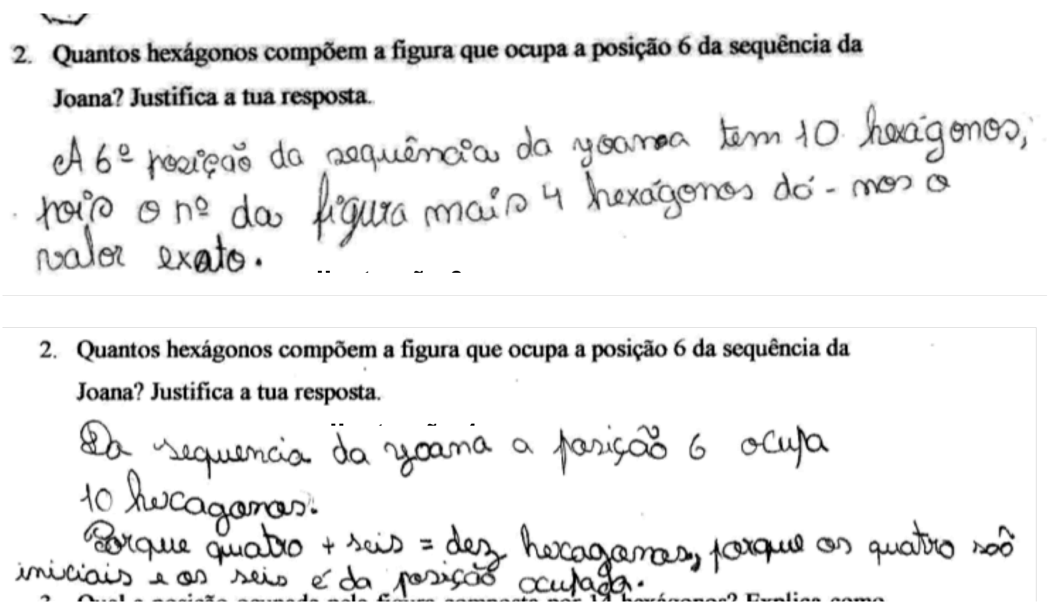
Ilustração 1

1. Ajuda a Joana a representar a próxima figura da sequência

Ilustração 2

A maioria dos grupos apresentou uma resposta correta, quanto ao número de imagens da próxima figura. No entanto alguns optaram por alterar a representação, não considerando importante a forma geométrica de cada uma dessas imagens (Ilustração 2) enquanto outros, por outro lado, referiram explicitamente que tinham de fazer hexágonos pois o que se pretendia era construir a figura seguinte da construção (que apenas contém hexágonos), pelo que não podiam ser utilizadas outras figuras. O facto de alguns alunos não considerarem a pertinência de representar hexágonos pode associar-se a um raciocínio matemático que poderá ser considerado correto, se assumindo apenas o número de figuras, mas onde não é utilizada uma representação adequada, tendo em consideração o contexto específico. Ao professor cumprirá um conhecimento que lhe permita equacionar estas diferenças, ainda que à primeira vista subtis, na forma de representação e nas implicações que essas aproximações e diferenças poderão ter na visão matemática dos alunos – poderá ser importante explorar de forma mais aprofundada o raciocínio de alunos que não recorrem ao mesmo tipo de representação pois poderá indiciar, por um lado, uma mais plena compreensão da situação em si ou, por outro, ao invés, uma mera descontextualização e um assumir a álgebra pela álgebra (ainda que aqui de forma indireta).

Uma outra questão que se coloca relaciona-se com a justificação das respostas fornecidas, bem como dos motivos matemáticos que as podem sustentar.



2. **Quantos hexágonos compõem a figura que ocupa a posição 6 da sequência da Joana? Justifica a tua resposta.**

A 6º posição da sequência da Joana tem 10 hexágonos, pois o nº da figura mais 4 hexágonos dá-nos o valor exato.

2. **Quantos hexágonos compõem a figura que ocupa a posição 6 da sequência da Joana? Justifica a tua resposta.**

Da sequencia da Joana a posição 6 ocupa 10 hexagonos.
Porque quatro + seis = dez hexagonos, porque os quatro são iniciais e os seis é da posição ocupada.

Figura 6. Algumas respostas associadas a uma generalização próxima (2.ª questão)

A maioria dos grupos revela um raciocínio associado ao considerar que se a figura inicial tem cinco hexágonos, tirando um da posição ocupada ficavam com quatro e passaram a designá-los como sendo os quatro iniciais (figura 6). Este raciocínio (e justificação) encontra-se acoplado ao processo de generalização que permitirá determinar o número de hexágonos de uma qualquer figura sendo indicada a sua ordem, apresentando os alunos um processo de raciocínio que, sustentado por um caso concreto, lhes permitiria obter uma generalização de qualquer tipo.

Este raciocínio foi seguido para determinar a ordem da figura quando é fornecido o número de hexágonos que a compõem sendo que, na maioria dos casos, verifica-se ainda uma inadequação da linguagem matemática utilizada, o que requererá um foco de atenção especial (figura 7). Esta adequação da linguagem corresponde-se, também, a um outro aspeto do conhecimento do professor e à perspetivação que este detém da forma como os próprios conteúdos vão evoluindo e se relacionam ao longo da escolaridade (no caso concreto que aqui reportamos este não foi um dos aspetos discutidos com os alunos pois, conscientemente, o objetivo matemático relacionava-se muito mais com o desenvolvimento do seu raciocínio e o abordar todos os aspetos a um mesmo nível inviabilizaria o recurso à modelação como ambiente de aprendizagem).

3. **Qual a posição ocupada pela figura composta por 14 hexágonos? Explica como chegaste a essa conclusão.** A posição ocupada por 14 hexágonos é a decima posição. Porque quatro + dez = catorze, porque os quatro são os iniciais e os dez da posição ocupada.

Ilustração 5

3. **Qual a posição ocupada pela figura composta por 14 hexágonos? Explica como chegaste a essa conclusão.**

Se na figura 6 deu 10 e nesta são 14, só temos de tirar os iniciais 4 e vai dar a figura 10.

Ilustração 6

3. **Qual a posição ocupada pela figura composta por 14 hexágonos? Explica como chegaste a essa conclusão.**

A posição ocupada por 14 hexágonos, é a figura nº 10, pois como referimos na pergunta anterior, o nº da figura mais 4 dá-nos o valor dos hexágonos necessários.

Ilustração 7

A maioria dos alunos procedeu à resolução usando um raciocínio inverso ao da questão anterior, ou seja, se tendo a posição se juntam quatro hexágonos para obter o número total de hexágonos dessa ordem então tendo o número total de hexágonos dessa ordem retirando quatro hexágonos temos a ordem do termo.

4. **Se a Joana quisesse construir a figura número 20 como deveria proceder?**

24. Porque quatro + vinte = vinte e quatro, porque os quatro são os iniciais e os vinte da posição ocupada.

Ilustração 8

necessários.

4. **Se a Joana quisesse construir a figura número 20 como deveria proceder?**

Deveria proceder fazen-do uma flor de 4 hexágonos, à volta de um e ao hexágono de baixo juntar 19 hexágonos por baixo.

Ilustração 9

Figura 8. Algumas respostas associadas à explicação da obtenção do 20º termo (4.ª questão)

A maioria dos alunos não referiu como é que se deveria proceder para construir a figura número vinte, limitando-se apenas a indicar o número de hexágonos que serão necessários (figura 8). Este facto pode estar associado à inexistência de explicações na primeira questão.

Relativamente ao desafio lançado pela professora: "*Descrever como pode ser construída qualquer figura desta sequência*", a maioria dos alunos apresentou respostas na linha das ilustradas na figura 9.

juntar mais 4 ao nº da figura, e dá-mos o resultado dos hexágonos.

Ilustração 10

O número da figura +4.

Ilustração 11

Figura 9. Algumas respostas ao desafio "como construir uma qualquer figura?"

Consoante a maturidade matemática dos alunos, a generalização pode ser expressa por palavras ou recorrendo a simbologia matemática, cumprindo ao professor a gestão das situações em que poderá pretender ir, ou não, mais além. No nosso caso concreto, o facto de alguns grupos começarem a utilizar a simbologia faz com que os outros também o comecem a fazer.

Assim, podemos referir que a modelação como ambiente de aprendizagem permitiu que os alunos, ao confrontarem, discutirem e argumentarem sobre a (in)correção das suas resoluções com os colegas pudessem compreender melhor algumas das relações numéricas presentes, permitindo-lhes desenvolver alguns aspetos da linguagem algébrica. Este tipo de trabalho permite assim, defendemos, criar condições favoráveis para que os alunos dos primeiros anos possam desenvolver o pensamento algébrico, sendo que um aspeto importante se relaciona, também, com o conhecimento do professor na e para a preparação das tarefas que prepara e como as implementa (e.g., Charalambous, 2008; Ribeiro e Carrillo, 2011). Este conhecimento, e à-vontade em cada um dos tópicos que tem de abordar permitirá também que o professor incentive os alunos a centrarem-se no "processo" e não apenas na resposta final, assumindo a resolução de problemas como um todo onde a modelação é, efetivamente, um ambiente de aprendizagem.

Algumas reflexões após a implementação e potencialidades

A reflexão acerca desta primeira aproximação a este tipo de prática de sala de aula leva-nos na linha do que refere Stender (2012), considerando a modelação matemática como um processo que permite uma aprendizagem auto-regulada realizada em pequenos grupos, sem um forte apoio por parte do professor. Deste modo, a prática de sala de aula poder-se-á tornar mais dinâmica, permitindo que os alunos não trabalhem apenas de modo individual e onde o professor assume o papel mais importante (lê a tarefa em conjunto, tira as dúvidas, dá um tempo para a realização da tarefa e tira dúvidas durante a execução da mesma).

Um outro ponto de reflexão está relacionado com os possíveis receios do professor em implementar esta metodologia, sendo que estes estão quase sempre ligados a questões relacionadas com questões de gestão do ambiente de sala de aula, com a as possíveis dificuldades de os alunos resolverem tarefas de forma *"tão autónoma"*, com o facto que esta metodologia (por exigir uma abordagem dinâmica do currículo) exigir outros conhecimentos, além dos matemáticos, (Jurkiewicz & Friedman, 2010; Ferri & Blum, 2013)) e exigir um à-vontade (real) do professor relativamente aos diferentes tópicos que tem de abordar e à especificidade do conhecimento associado a cada um deles e à atuação docente. Estes receios, apesar de ainda naturais (mas que urge erradicar das mentes e práticas dos professores, sendo a formação inicial um dos pontos de partida para que tal seja possível) não ocorreram na experimentação que aqui apresentámos, pois os alunos mostraram um grande entusiasmo na execução da tarefa o que vai ao encontro de uma das razões, para a inclusão de modelação matemática no currículo: os alunos vislumbram a aplicabilidade da matemática, entendendo-a.

Por outro lado, o facto de a tarefa ser realizada em pequeno grupo faz com que se verifique uma competição saudável, pela responsabilização e implicação de todos os alunos no processo, tendo consciência que no final todos terão de apresentar e discutir os seus resultados. É, também, importante realçar que o facto de todos os elementos do pequeno grupo terem de participar, leva a que todos tenham de compreender o que está a ser feito, situação que não fica assegurada quando as tarefas são realizadas individualmente e depois corrigidas por alguns alunos no quadro, até porque muitos nem conseguem realizar a tarefa, limitando-se a esperar pela correção.

Além das reflexões mencionadas anteriormente, a modelação matemática como ambiente de aprendizagem pode ser vista, também, como uma plataforma para promover a multidisciplinaridade e a transdisciplinaridade de uma forma muito natural e simples, pois os contextos são reais incrementando deste modo a motivação dos alunos promovendo aprendizagens efetivas.

Assim, de modo a tornar realidade a aplicabilidade de uma tal metodologia como elemento central das suas aulas, associada a objetivos matemáticos específicos (e.g., Pires, Colaço, Horta e Ribeiro, 2013), e que possibilitem o desenvolvimento de conhecimentos e capacidades matemáticos nos alunos é fulcral que os professores (atuais e futuros) sejam detentores de um conhecimento amplo e aprofundado de todo o ciclo de modelação matemática, mas também, concomitantemente, de um conhecimento que lhes permita relacionar os conteúdos que estão a abordar com outros de outras áreas e/ou domínios (matemáticos e extra matemáticos). Conscientes de que apenas poderemos ensinar o que sabemos, e como o sabemos, é essencial que a formação se centre nestes dois aspetos que consideramos centrais no processo de ensino: a modelação e o conhecimento do professor. À formação cumpre, por um lado, o assumir um papel fundamental na preparação para a utilização desta metodologia (Spandaw, 2009) e, por outro, no desenvolvimento de um conhecimento matemático do professor tendo em consideração as especificidades desse conhecimento e não se centrando somente na preparação e implementação de tarefas giras (e.g., Pinto e Ribeiro, 2013a) que até podem ser didaticamente emocionantes, mas que se configuram como matematicamente pouco desafiadoras (Ribeiro & Carrillo, 2011). O desenvolvimento e consciencialização do papel destas dimensões no processo de ensino e de aprendizagem por parte dos professores (atuais ou futuros) e também dos seus formadores passará também, por lhes serem possibilitados um conjunto de vivências que lhes permitam experienciar um conjunto de dificuldades e situações que promovam o desenvolvimento do seu conhecimento, que se configurem do mesmo tipo mas, obviamente, de um nível distinto, das que esperamos possam vir a facultar aos seus alunos.

Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia e pelo Instituto de Telecomunicações (IT-Covilhã). Este trabalho faz parte do projeto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha).

Referências

Andresen, M. (2009). What roles can modelling play in multidisciplinary teaching. In V. D. Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)* (pp. 2196- 2205). Lyon, France: ERME.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barbosa, J. (2001). Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. *Anais da 24ª Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Rio de Janeiro: ANPED. Disponível em http://www.uefs.br/nupemm/anped2001.pdf. Acedido em 14/04/2012.

Barbosa, J. (2003). Modelagem matemática na sala de aula. *Perspectiva*, Erichim (RS), 27 (98), 65-74.

Blum, W., & Ferri, R. (2009) Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer.

Caldeira, A. (2009). Modelagem Matemática: um outro olhar. *Alexandria*, 2(2), 33-54.

Charalambous, C. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, Mexico: PME.

Chaves, M. I. A., & Espírito Santo, A. (2007). Modelagem matemática na escola de aplicação: proveitos e finalidades. *Anais do V seminário de Institutos, Colégios e Escolas de Aplicação das Universidades Brasileiras*.

Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J., & Martínez, M. (2011). Re-defining HCK to approach transition In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2640-2649). Rzeszów, Poland University of Rzeszów, ERME.

Ferri, R., & Blum, W. (2013). Barriers and motivations of primary teachers for implementing modelling in mathematics lessons *Proceedigs of CERME 8* (pp. to appear). Antalya: ERME.

Ferri, R. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*. 110, 19-25.

Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., & Khan, S. (Eds) (2011). Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics. Oxford : Woodhead Publishing.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Jakobsen, A., Thames, M. H., & Ribeiro, C. M. (2013). Delineating issues related to Horizon Content Knowledge for mathematics teaching *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. to appear). Antalia, Turquia: ERME.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In ICME (Ed.), *12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (pp. 4635-4644). Seoul (Coreia): ICME.

Jurkiewicz, S., & Friedman, C. (2010). Modelagem matemática na escola e na formação do professor – uma abordagem abrangente. *Educação e Matemática*, 106, 43-47.

Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R., & Stillman, G. (Eds) (2011). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. New York: Springer.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35thIGPME Conference* (Vol. 3, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.

Mendonça, L., & Lopes, C. (2011). Modelagem Matemática: um ambiente de aprendizagem para a implementação da Educação Estatística no Ensino Médio. *Bolema*, 24(40), 701-724.

Ministério da Educação e Ciência (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico. Lisboa: MEC.

Oliveira, C., & Oliveira, H. (2012). Modelação Matemática no Ensino Profissional: Construção e Exploração de uma tarefa. *Investigação em Educação Matemática 2012 - Práticas de ensino da Matemática 1*, 105-119.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013a). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional *Da Investigação às Práticas*, to appear.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013b). Diferentes significados das frações - conhecimento mobilizado por futuros professores dos primeiros anos. In R. Cadima, H. Pinto, H. Menino & I. S. Simões (Eds.), *Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 209-217). Leiria: ESECS.

Pires, A., Colaço, H., Horta, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Desenvolver o sentido de número no Pré-Escolar. *Exedra, 7*, 120-135.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 41-48). Ankara, Turkey: PME.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Sins, P. (2006). Students' reasoning during computer-bases scientific modelling. The impact of epistemology, motivation and communication mode. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Spandaw, J. (2009). Modelling in mathematics' teachers' professional development. In V. D. Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)* (pp. 2076-2085). Lyon, France: ERME.

Stender, P. (2012). Facilitating complex modelling activities - the role of the teacher. In ICME (Ed.), *12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (pp. 3423-3430). Seoul: ICME.