



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

El teorema de Pick

Autor/es

Joel Mateo Salazar

Director/es

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

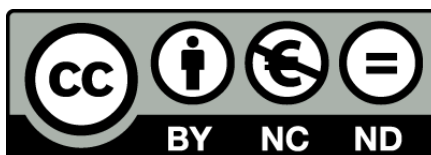
Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2022-23



El teorema de Pick, de Joel Mateo Salazar
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los
titulares del copyright.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

El teorema de Pick

Realizado por:

Joel Mateo Salazar

Tutelado por:

Manuel Bello Hernández

Logroño, julio, 2023

*A mi abuelo,
gracias a nuestras competiciones
empecé a disfrutar de las matemáticas.
Espero que estés orgulloso de mí.*

Resumen/Abstract

Resumen

En este trabajo de fin de grado presentaremos el teorema de Pick, un resultado que permite calcular el área de polígonos reticulares simples a través del conteo de puntos reticulares en su interior y en su frontera.

El contenido de este trabajo recorre, capítulo a capítulo, las distintas pruebas que existen del teorema a través de resultados tan importantes como el teorema de Euler y el teorema de Minkowski, además de adentrarnos en el análisis complejo y análisis armónico, permitiendo relacionar la geometría combinatoria con distintas áreas de las matemáticas.

Para finalizar, presentaremos como generalizar el teorema de Pick a dimensiones mayores que dos a través del teorema de Ehrhart.

Abstract

In this final degree project we will introduce Pick's theorem, a result that allows us to compute the area of a simple lattice polygon via counting lattices points in its interior and its boundary.

The content of this project consists of various proofs of the theorem via important mathematical results such as Euler's theorem and Minkowski's theorem, besides we will see notions about complex and harmonic analysis, allowing us to connect combinatorial geometry with different areas of mathematics.

To conclude, we will see how to generalize Pick's theorem to dimensions greater than two.

Índice general

| | |
|---------------------------------------|----|
| Introducción | IX |
| 1. Prueba elemental | 1 |
| 2. Teorema de Euler | 5 |
| 3. Teorema de Minkowski | 15 |
| 4. La ζ -función de Weierstrass | 21 |
| 5. Análisis armónico | 33 |
| 6. Teorema de Ehrhart | 41 |
| A. Relaciones trigonométricas | 49 |
| B. Transformada de Fourier | 51 |
| Conclusiones | 59 |
| Bibliografía | 61 |

Introducción

¿Imaginarías un resultado que nos diese una sorprendente relación entre la geometría y la teoría de números cuyo enunciado sea fácilmente comprensible? La respuesta la encontraríamos con el teorema de Pick, nombrado en honor al matemático alemán Georg Alexander Pick. Este bello y profundo teorema contiene relevantes conocimientos sobre estructuras de polígonos y la distribución de puntos en el plano.

Cualquiera pensaría que esta importante relación entre campos tan distintos de las matemáticas se comenzaría a investigar desde su publicación en 1899. Sin embargo, pasó desapercibida hasta su presentación en el libro *Mathematical Snapshots* de Steinhaus en el año 1969. Desde entonces cautivaría la curiosidad de los grandes investigadores del infinito mundo de las matemáticas, permitiendo el desarrollo de diversas demostraciones del teorema que utilizan, desde variados planteamientos geométricos y algebraicos, hasta el uso de sofisticados resultados del análisis complejo y del análisis armónico.

Ahora bien, cualquier amante de la investigación matemática apreciaría que esta fórmula funciona correctamente en dos dimensiones, ¿pero podríamos generalizarla a dimensiones mayores? Eugéne Ehrhart obtuvo esta extensión. Este laureado matemático francés, quien ejercía de profesor de matemáticas de un instituto de secundaria, disfrutaba divulgando las matemáticas en su tiempo libre. Su resultado describe la relación entre los coeficientes de un polinomio y el número de puntos reticulares en un politopo de dimensión mayor o igual que tres.

Por lo tanto, a lo largo de este trabajo de fin de grado emprenderemos un viaje por el amplio mundo de la geometría y el análisis matemático. Exploraremos bellas demostraciones del teorema de Pick empleando importantes resultados dentro de estas áreas.

El primer capítulo de este trabajo incluye una demostración elemental del teorema a través de conceptos geométricos sencillos que con herramientas del análisis nos permitirá establecer una conexión entre el área de un polígono reticular simple y el número de puntos reticulares en el interior y en la frontera

de nuestro polígono.

En segundo lugar, mostraremos una prueba del teorema de Pick a través del teorema de Euler. El planteamiento general será identificar una triangulación de un polígono como un grafo plano. Además, con la combinación de ambos teoremas en estos polígonos, conseguiremos un profundo estudio sobre la estructura y propiedades combinatorias de ellos.

En la tercera parada de este trabajo profundizaremos en la combinación de la teoría de cuerpos convexos y la geometría algebraica para la realización de una prueba alternativa del teorema de Pick mediante el teorema de Minkowski.

En el siguiente capítulo, nos trasladaremos al plano complejo, donde con resultados propios del análisis de este plano, como el teorema de los residuos, la función ζ de Weierstrass, el teorema de Green y fundamentalmente la \wp -función de Weierstrass, conseguiremos una asombrosa prueba del teorema de Pick.

La quinta etapa del trabajo será el análisis armónico. Estudiaremos propiedades de la transformada de Fourier y de la convolución de dos funciones, que nos permitirán establecer una conexión entre funciones periódicas, la distribución de puntos en el plano y el área de los polígonos reticulares simples para la prueba del teorema de Pick.

Y para concluir, presentaremos un caso particular del brillante teorema de Ehrhart, que nos permitirá establecer una relación entre coeficientes de un polinomio y la cantidad de puntos reticulares en un politopo. En particular, el coeficiente principal de dicho polinomio es el volumen del poliedro. Y así, se generaliza el teorema de Pick a dimensiones mayores que dos.

Capítulo 1

Prueba elemental

El teorema de Pick es una de las gemas poco conocidas de las matemáticas elementales. Es curioso ver que el enunciado del teorema puede llegar a ser entendido hasta por un alumno de sexto de primaria, como es el caso de Christopher Polis en su artículo [7]. Pero las hipótesis tan inocentes del teorema no nos impiden llegar a una conclusión muy sorprendente.

La mayoría de las pruebas del teorema de Pick utilizan el hecho de que un triángulo elemental¹ tiene área $\frac{1}{2}$. Nosotros en este primer capítulo, siguiendo el artículo [12], daremos una prueba directa e intuitiva que no requiere nada más que el hecho fácilmente demostrable² de que un polígono reticular se puede descomponer en una unión de triángulos reticulares.

Un punto $x = (x_1, x_2)$ es *reticular* si pertenece a \mathbb{Z}^2 , es decir, $x_1 \in \mathbb{Z}$ y $x_2 \in \mathbb{Z}$. Ahora bien decimos que un polígono es *simple* si su frontera es una curva cerrada simple³ y decimos que es *reticular* si las coordenadas de sus vértices pertenecen a \mathbb{Z} .

El teorema de Pick sirve para calcular el área de un polígono reticular simple Q . Esta área está dada por

$$A(Q) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1 = n - \frac{1}{2}n_{bd} - 1,$$

donde n_{int} y n_{bd} son respectivamente los puntos reticulares del interior y frontera de Q ; n denota el número total de puntos reticulares en él, es decir, $n = n_{int} + n_{bd}$.

Para empezar el planteamiento de la prueba asociamos a cada punto reticular P_k de Q el «peso» $w_k = \Theta_k/2\pi$, donde Θ_k mide el ángulo de «visi-

¹Decimos que un triángulo es *elemental* cuando los únicos puntos con coordenadas enteras en él son sus vértices.

²Se puede consultar en el lema 2.4.

³Una curva es *simple* si su parametrización es inyectiva en el interior del intervalo paramétrico.

bilidad» con el que desde P_k se puede ver en el interior de Q . De este modo, por ejemplo, $w_k = 1$ en un punto reticular interior de Q , $w_k = \frac{1}{2}$ en un punto reticular de la frontera de Q que no es un vértice y $w_k = \frac{1}{4}$ en un vértice con un ángulo de 90° . Pensemos en w_k como una manera de medir la contribución que hace cada punto reticular P_k al área de Q y definimos

$$W(Q) = \sum_{P_k \in Q} w_k$$

Introducimos ahora un lema que relaciona $W(Q)$ con el área de nuestro polígono, denotada por $A(Q)$.

Lema 1.1. *Sea Q un polígono reticular simple. Se tiene que $W(Q) = A(Q)$.*

Demostración. Notamos que W es aditivo en el sentido que si Q , Q_1 y Q_2 son polígonos reticulares simples de modo que si $Q = Q_1 \cup Q_2$ y Q_1 y Q_2 sólo comparten puntos de su frontera, entonces se tiene que

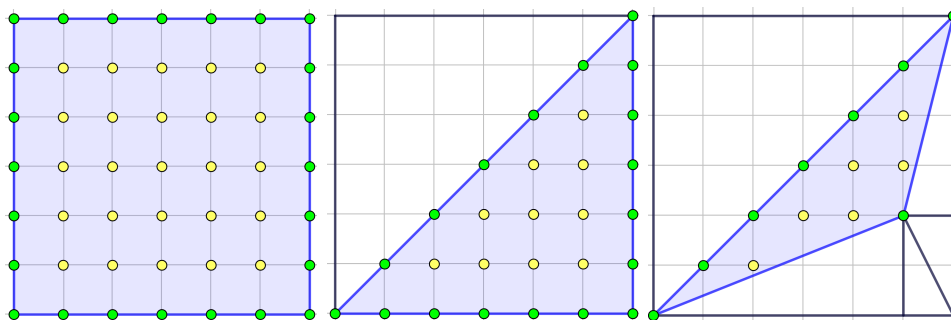
$$W(Q) = W(Q_1) + W(Q_2).$$

Esto es una consecuencia del hecho que los ángulos de «visibilidad» en Q_1 y Q_2 en un punto reticular común se suman para obtener finalmente el ángulo de «visibilidad» del punto en Q .

Ahora consideramos:

- Un rectángulo reticular con los lados paralelos al retículo.
- Un triángulo rectángulo reticular con los catetos paralelos al retículo.
- Un triángulo reticular arbitrario.

Los cuáles podemos ver representados de manera ordenada en la siguiente imagen.



El último puede ser rodeado de triángulos rectángulos para formar un rectángulo reticular con los lados paralelos al retículo.

Que $W(Q) = A(Q)$ en el primer caso es obvio ya que si las dimensiones del rectángulo son $a \times b$, entonces

$$ab = (a - 1)(b - 1) + 2\frac{1}{2}(a - 1) + 2\frac{1}{2}(b - 1) + 4\frac{1}{4},$$

donde $(a - 1)(b - 1)$ es la cantidad de puntos reticulares del interior del rectángulo, $2(a - 1) + 2(b - 1)$ es el número de puntos reticulares en la frontera del rectángulo y 4 son sus vértices. En el segundo caso se sigue el primer caso pero dividido por 2. El resultado en el tercer caso se obtiene utilizando la aditividad de W y de A . Solo nos quedaría descomponer un polígono reticular arbitrario como unión de triángulos reticulares y se aplicaría la aditividad de W . \square

Procedemos con el enunciado del teorema de Pick y su demostración ayudándonos del lema que acabamos de probar.

Teorema 1.2 (Pick). *Para un polígono simple reticular, se tiene*

$$A(Q) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1 = n - \frac{1}{2}n_{bd} - 1,$$

donde n_{int} y n_{bd} son el número de puntos reticulares del interior y de la frontera de Q ; y n representa el número total de puntos reticulares de Q .

Demostración. Para un polígono como en el enunciado del teorema con c vértices se cumple que la suma de sus ángulos interiores es $(c - 2)\pi$. Esto se prueba tomando un vértice cualquiera del polígono y trazando segmentos a cada uno de los vértices no adyacentes. De esta manera el polígono queda dividido en $c - 2$ triángulos y como la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es π , entonces la de nuestro polígono será $(c - 2)\pi$.

Se sigue que la suma de todos los ángulos de «visibilidad» en los puntos reticulares P_k en la frontera de Q es $(n_{bd} - 2)\pi$. Así pues si I y F denotan respectivamente el interior y la frontera de Q , entonces se tiene siguiendo el lema anterior

$$\begin{aligned} A(Q) &= W(Q) = \sum_{P_k \in I} w_k + \sum_{P_k \in F} w_k \\ &= n_{int} + \frac{(n_{bd} - 2)\pi}{2\pi} \\ &= n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1. \end{aligned} \quad \square$$

Ejemplo 1.3. Introducimos ahora un ejemplo del cálculo del área de una figura mediante el teorema de Pick

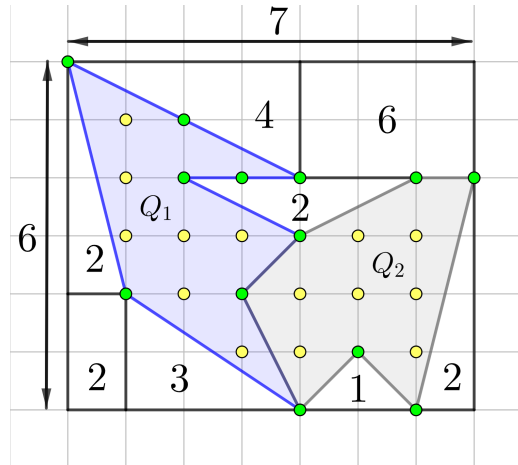


Figura 1.1: Polígono Q dividido en Q_1 y Q_2 .

Primero calculamos el área del polígono Q de la siguiente forma

$$42 - (4 + 6 + 2 + 2 + 1 + 3 + 2 + 2) = 20,$$

dónde 42 es el área del rectángulo $7 * 6$ y le restamos los áreas de las figuras que no son Q .

Ahora procedemos a calcular el área de Q mediante el teorema de Pick

$$\begin{aligned} A(Q) &= n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1 \\ A(Q_1) &= 7 + \frac{9}{2} - 1 = \frac{21}{2} \\ A(Q_2) &= 7 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{19}{2} \\ A(Q_1 \cup Q_2) &= 15 + \frac{12}{2} - 1 = \frac{21}{2} + \frac{19}{2} = 20. \end{aligned}$$

Vemos que el área es la misma.

Capítulo 2

Teorema de Euler

El teorema de Pick es un resultado bello y sorprendente de por sí, pero también es una consecuencia de la fórmula de Euler para grafos planos. Esta exhibe una bonita relación entre el número de vértices, aristas y caras de un grafo plano y es válida para cualquier tipo de grafo plano. Euler mencionó este resultado por primera vez, en una carta, a su amigo Goldbach en 1750, pero al parecer no tenía una demostración completa todavía.

El contenido en este capítulo se estructurará siguiendo los siguientes pasos: primero veremos la fórmula de Euler y una demostración de este bello resultado; avanzaremos demostrando que todo polígono reticular simple se puede triangular usando todos los puntos reticulares de su frontera e interior y por último se presentará un lema sobre el área de los triángulos elementales que será fundamental en la prueba del teorema de Pick.

En esta primera parte del capítulo vamos a presentar una demostración de la fórmula de Euler que no utiliza inducción matemática. Seguiremos la pista de los libros [1] y [13].

Recordamos que un *grafo plano* G es un par ordenado (V, E) , donde V es un conjunto de puntos en el plano, llamados *vértices* y E es un conjunto de pares ordenados de $V \times V$, que se llaman *aristas*. La arista está *orientada* si el par asociado es ordenado. Un *camino* en G es un conjunto ordenado de aristas orientadas de G tales que el punto final de una arista es el inicial de la siguiente. Ahora G es un grafo *conexo* si cada dos vértices distintos están conectados por un camino en G , o equivalentemente, si G no puede ser dividido en dos subgrafos no vacíos donde los conjuntos de vértices de ellos sean disjuntos. Por otra parte un *ciclo* en G es un camino no vacío en el que solamente el primer y último vértice son iguales.

Aclaremos que en este capítulo sólo se emplearán *grafos finitos*, es decir, grafos cuyos conjuntos de vértices y aristas son finitos.

Además, diremos que un grafo es *plano* si puede ser dibujado en el plano

\mathbb{R}^2 sin que las aristas se intersequen. Cualquier representación así divide el plano en un número finito de regiones conexas llamadas *caras* del grafo.

La formalización del concepto de *cara* de un grafo se puede hacer a partir del teorema de Jordan sobre curvas simples en el plano, que afirma que éstas dividen al plano en dos regiones, una interior a la curva y otra exterior no acotada.

A continuación, introduciremos los conceptos de *árbol* y *grafo generador* que aparecerán en nuestra prueba de la fórmula de Euler.

Definición 2.1 (Árbol). Un árbol es un grafo conexo sin ciclos.

Definición 2.2 (Grafo generador). Dado un grafo conexo G , un grafo generador H de él es un subgrafo mínimo de G que conecta todos sus vértices.

Acto seguido presentamos la fórmula de Euler y una demostración.

Teorema 2.3 (Fórmula de Euler). Si G es un grafo plano conexo con n vértices, e aristas y f caras, entonces

$$n - e + f = 2$$

Demostración. Sea $T \subseteq E$ el conjunto de aristas de un árbol generador de G . El grafo T no contiene un ciclo debido a la condición de minimalidad.

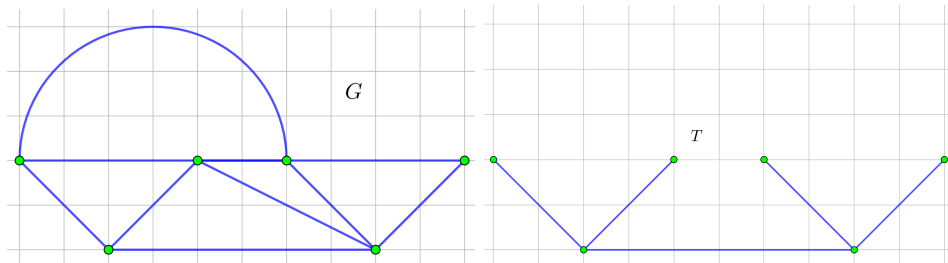


Figura 2.1: En la imagen de la izquierda observamos un grafo plano G con $n = 6$, $e = 10$ y $f = 6$. Mientras que en la imagen de la derecha vemos a un posible árbol generador T de G .

Ahora necesitamos el grafo dual G^* de G . Para construirlo, ponemos un vértice en el interior de cada cara de G y conectamos dos de esos vértices de G^* por aristas si las caras donde ellas están comparten una arista en su frontera. Si hay varias aristas fronterizas comunes, entonces dibujamos varias aristas de conexión en el grafo dual.

Sea E^* el conjunto de aristas de G^* consideramos la colección de aristas $T^* \subseteq E^*$ en el grafo dual que corresponden a las aristas en $E \setminus T$. Veamos que

T^* es también un árbol generador de G^* . Las aristas en T^* conectan todas los vértices en G^* ya que T no contiene ciclos; pero también T^* no contiene ciclos ya que si esto ocurriera, dicho ciclo separaría a los vértices que están dentro del ciclo con aquellos que están fuera de él, o sea, no existiría un camino en T que conectara los vértices dentro de un ciclo en T^* con los que están fuera del ciclo. Esto no puede ocurrir ya que T es un subgrafo generador y las aristas de T y T^* no se intersecan. Por lo tanto T^* es un árbol generador de G^* .

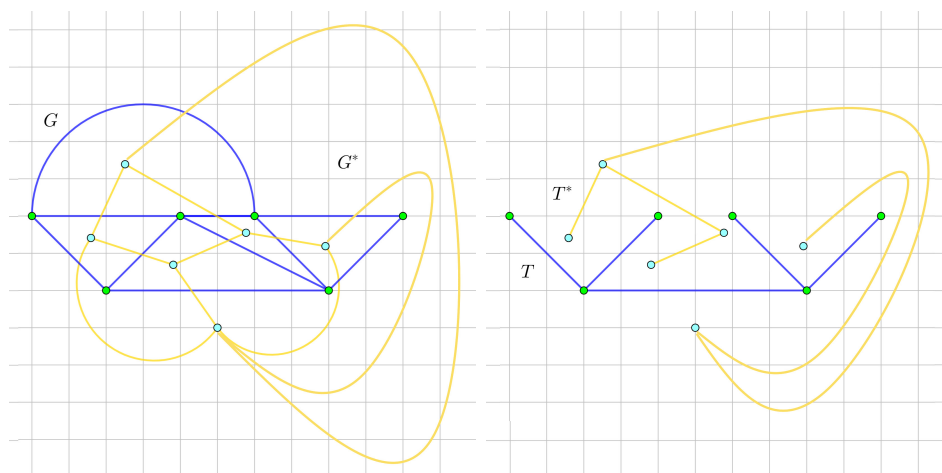


Figura 2.2: En la imagen de la izquierda, en amarillo, observamos el grafo dual G^* . En la imagen de la derecha, en amarillo, el árbol T^* .

El número de vértices de un árbol es uno más que el número de aristas en él. Para ver esto, escogemos un vértice como raíz y dirigimos todas las aristas en dirección opuesta a la raíz. Esto produce una biyección entre los vértices que no son la raíz y las aristas, emparejando cada arista con el vértice al que apunta.

Si e_T y e_{T^*} son el número de aristas de T y T^* respectivamente, aplicando lo anterior vemos que $n = e_T + 1$, mientras que para el árbol T^* tenemos que $f = e_{T^*} + 1$. Sumando ambas ecuaciones, ya que cada arista en T^* está asociada a una arista de G que no está en T , obtenemos

$$n + f = (e_T + 1) + (e_{T^*} + 1) = e + 2. \quad \square$$

La prueba del teorema de Pick en este capítulo se apoya también en la idea de la triangulación de un polígono reticular simple usando todos los puntos del retículo en su interior y en su frontera. Definimos una *triangulación* de un polígono simple como una familia finita de triángulos $\{T_j\}$, tal que $\cup_j T_j$

es el polígono y dos triángulos T_j y T_r de la familia se intersecan solamente en su frontera.

¿Pero es cierta la afirmación anterior? Veremos que sí y lo probamos a continuación.

Lema 2.4. *Todo polígono reticular simple se puede triangular usando todos los puntos del retículo \mathbb{Z}^2 que están en su interior y en su frontera.*

Demostración. Para probar que existe una triangulación del polígono plano no convexo P con las características pedidas, es decir, utilizando todos los puntos reticulares de su interior y frontera, procederemos por inducción sobre el número de vértices n de nuestro polígono.

En el caso $n = 3$, T es un triángulo y es una situación trivial. Sea la triangulación $\{T_j\}_{j=1}^N$ del triángulo T dado, tal que $N = 1$ y $T_1 = T$, describimos el procedimiento seguido para la triangulación de T .

- **Pregunta 1:** ¿Existe algún j tal que T_j tiene puntos reticulares en uno de sus lados?
 - En caso afirmativo aplicamos el paso 1. El **paso 1** consiste en unir los puntos reticulares en el lado de T_j con el vértice opuesto. De este modo obtenemos una nueva triangulación $\{T'_j\}_{j=1}^M$ de T . Entonces volvemos a la **pregunta 1**.
 - En caso negativo hacemos la segunda pregunta.
- **Pregunta 2:** ¿Existe algún j tal que T_j tiene un punto reticular en su interior?
 - En caso afirmativo aplicamos el paso 2. El **paso 2** consiste en unir el punto interior de T_j con sus vértices. De este modo obtenemos una nueva triangulación $\{T''_j\}_{j=1}^L$. Entonces volvemos a la **pregunta 1**.
 - En caso negativo hemos terminado.

Como existe un número finito de puntos reticulares en T el algoritmo anterior termina en un número finito de pasos. En la figura 2.3 se muestra un ejemplo donde se sigue el algoritmo anterior. Ahora bien, suponemos que todo polígono de $n - 1$ vértices reticulares, con $n \geq 4$, cumple que se puede triangular utilizando todos los puntos reticulares de la frontera e interior. Debemos probar que para el caso de un polígono de n vértices se cumple también.

La idea de la prueba es dividir el polígono P , por una única diagonal, en dos polígonos con menos vértices que P . Así la triangulación del polígono

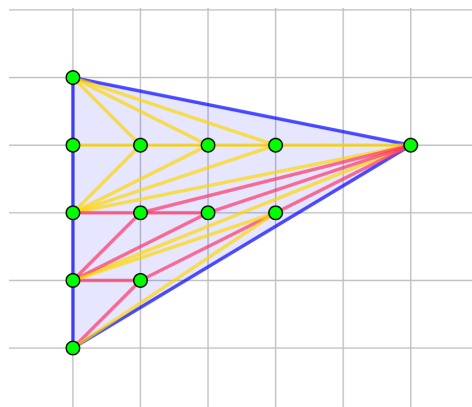


Figura 2.3: En amarillo vemos los segmentos trazados durante el **paso 1** y en rosa los trazados durante el **paso 2**.

grande será la unión de las triangulaciones de los dos polígonos más pequeños. Para orientar al lector sobre el procedimiento que seguimos hemos diseñado la figura 2.4.

Para proceder, decimos que un vértice A del polígono es convexo si su ángulo interior es menor que 180° . Como nuestro polígono P tiene n vértices, la suma de sus ángulos interiores es $(n-2)180^\circ$ y así notamos que debe existir un vértice convexo A . De hecho, por el principio del palomar, debe de haber al menos 3 vértices convexos. O también podemos considerar la envoltura convexa del polígono, que sabemos que es la intersección de todos los polígonos convexos que contienen a P , y notamos que que todos los vértices de ella son convexos y coinciden con los vértices convexos de nuestro polígono P .

Ahora nos fijamos en los vértices vecinos de A , que llamamos B y C . Si el segmento que une B y C está dentro de P , es la diagonal que buscamos. Si no, sabemos que el triángulo ABC contiene otros vértices de nuestro polígono, por lo que trazamos segmentos paralelos a BC hasta que toque el último vértice Z en ABC . Esta cumple que cualquier diagonal paralela que dibujemos por debajo de la que toca en Z va a estar en el interior de P .

La diagonal AZ , que está dentro de nuestro polígono P , es la buscada. Esta diagonal divide P en dos polígonos P_1 y P_2 con un número de vértices menor estrictamente que n . Para ambos polígonos se cumple la hipótesis de inducción, es decir, que admiten una triangulación empleando todos los puntos reticulares del interior y de la frontera.

La inducción queda terminada y hemos probado lo deseado. \square

Asimismo la prueba del teorema de Pick mediante esta bella fórmula se

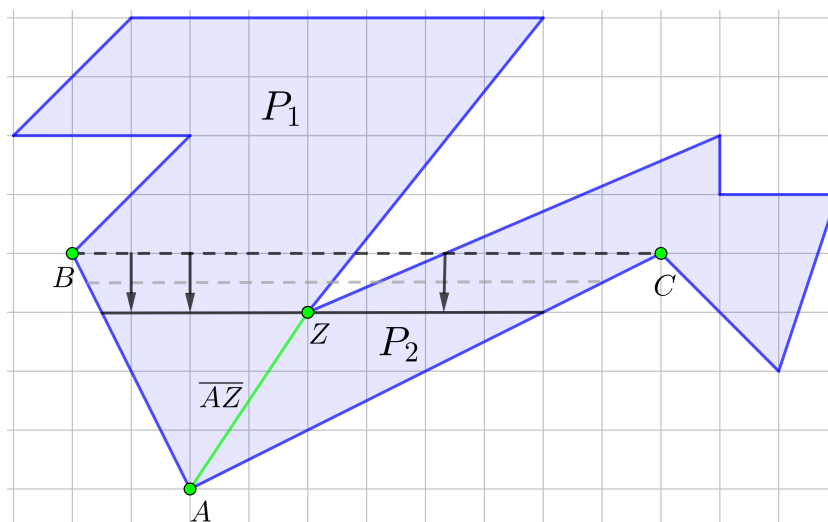


Figura 2.4: Representación del procedimiento de la demostración.

apoya fundamentalmente en la idea de que todo triángulo elemental tiene área $\frac{1}{2}$, afirmación que demostraremos a continuación ayudándonos de los lemas presentados en el apéndice A.

Antes de comenzar, definimos el concepto de polígono convexo elemental, que utilizaremos con mucha frecuencia a lo largo del trabajo.

Definición 2.5 (Polígono convexo elemental). Un polígono convexo $P \subseteq \mathbb{R}^2$ es elemental si sus vértices están en el retículo \mathbb{Z}^2 y además no contiene ningún punto reticular más, ni en su interior ni en la frontera.

Dicho esto, introducimos uno de los lemas claves en la prueba del teorema de Pick de este capítulo.

Lema 2.6. *Todo triángulo elemental $\Delta = \text{conv} \{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene área $A(\Delta) = \frac{1}{2}$*

Demostración. Probar que $A(\Delta) = \frac{1}{2}$ equivale a probar que el área del paralelogramo de vértices $p_0, p_1, p_2, p_1 + p_2 - p_0$ tiene área 1.

Introducimos una ilustración, en la figura 2.5, del paralelogramo P que utilizaremos durante la prueba para orientar al lector en el desarrollo de esta. Tanto el paralelogramo P y el retículo \mathbb{Z}^2 son simétricos con respecto a la aplicación

$$\sigma : x \mapsto p_1 + p_2 - x$$

Nuestro paralelogramo P es simétrico con respecto a σ debido a que si hacemos la imagen por σ de los vértices del paralelogramo el resultado es otro

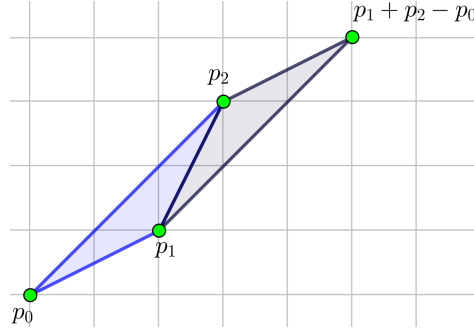


Figura 2.5: El paralelogramo P .

vértice de P :

$$\sigma(p_0) = p_1 + p_2 - p_0 \quad \sigma(p_1) = p_2 \quad \sigma(p_2) = p_1 \quad \sigma(p_1 + p_2 - p_0) = p_0.$$

Además σ es una reflexión con respecto al centro del segmento que va de p_1 a p_2 , que es $\frac{p_1+p_2}{2}$. El paralelogramo P es simétrico al punto $\frac{p_1+p_2}{2}$ ya que p_1 y p_2 lo son y el punto medio del segmento que une p_0 y $p_1 + p_2 - p_0$ es $\frac{p_1+p_2}{2}$. Para probar que σ es una reflexión con respecto al punto $\frac{p_1+p_2}{2}$, notamos que los puntos $x \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{p_1+p_2}{2}$ y $\sigma(x) = p_1 + p_2 - x$ están alineados porque

$$\begin{aligned} \frac{p_1 + p_2}{2} + \left(\frac{p_1 + p_2}{2} - x \right) &= p_1 + p_2 - x \\ \implies \left| \frac{p_1 + p_2}{2} - x \right| &= \left| p_1 + p_2 - x - \frac{p_1 + p_2}{2} \right|. \end{aligned}$$

Esto último prueba que σ es una reflexión con respecto a $\frac{p_1+p_2}{2}$.

Se tiene que nuestro paralelogramo $P = \Delta \cup \sigma(\Delta)$ es elemental y que sus traslaciones enteras teselarán el plano como podemos observar en la figura 2.6. Por tanto, dado $x \in \mathbb{Z}^2$ existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\lambda_1(p_1 - p_0) + \lambda_2(p_2 - p_0) = x,$$

y en consecuencia, $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0\}$ es una base de \mathbb{Z}^2 .

Según el lema A.2 el área del paralelogramo formado por ambos vectores es

$$\begin{aligned} A((p_1 - p_0), (p_2 - p_0)) &= |\det((p_1 - p_0), (p_2 - p_0))| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} (p_1 - p_0)_1 & (p_2 - p_0)_1 \\ (p_1 - p_0)_2 & (p_2 - p_0)_2 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

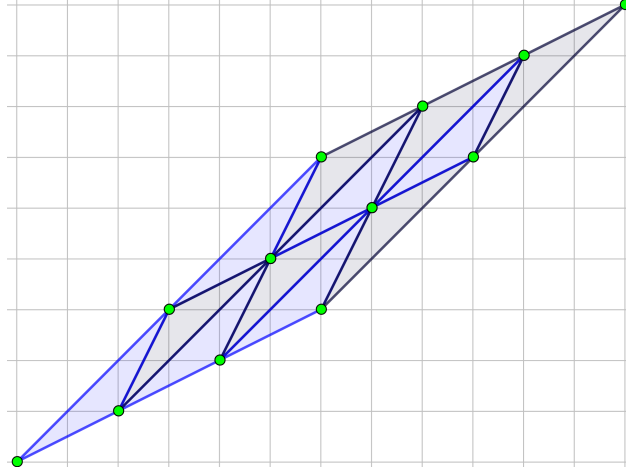


Figura 2.6: Procedimiento teselación \mathbb{Z}^2 a través de traslaciones enteras de P .

Si $f_1 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ y $f_2 = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ son otra base de \mathbb{Z}^2 , entonces existe una matriz Q de coeficientes enteros tales que se cumple

$$\begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_1 - p_0)_1 & (p_2 - p_0)_1 \\ (p_1 - p_0)_2 & (p_2 - p_0)_2 \end{pmatrix} Q. \quad (2.1)$$

De tal forma que

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = q_{11}(p_1 - p_0) + q_{21}(p_2 - p_0) \\ f_2 &= \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = q_{12}(p_1 - p_0) + q_{22}(p_2 - p_0). \end{aligned}$$

Y como los vectores $p_1 - p_0$, $p_2 - p_0$, f_1 y f_2 son vectores linealmente independientes, entonces Q tiene coeficientes enteros y Q^{-1} también.

Como $QQ^{-1} = 1$, $\det(Q) \in \mathbb{Z}$ y $\det(Q^{-1}) \in \mathbb{Z}$ se tiene que $|\det(Q)| = 1$.

Por lo tanto

$$\left| \det \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} (p_1 - p_0)_1 & (p_2 - p_0)_1 \\ (p_1 - p_0)_2 & (p_2 - p_0)_2 \end{pmatrix} \right|.$$

En particular, tomando $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ como base de \mathbb{Z}^2 en la fórmula (2.1), deducimos que

$$\left| \det \begin{pmatrix} (p_1 - p_0)_1 & (p_2 - p_0)_1 \\ (p_1 - p_0)_2 & (p_2 - p_0)_2 \end{pmatrix} \right| = 1.$$

Luego todo triángulo elemental tiene área $\frac{1}{2}$. \square

Llegados a este punto, introducimos el resultado principal, la demostración del teorema de Pick mediante la fórmula de Euler.

Teorema 2.7 (Pick). *El área de todo polígono Q reticular simple viene dado por*

$$A(Q) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1, \quad (2.2)$$

donde n_{int} y n_{bd} son el número de puntos con coordenadas enteras del interior y de la frontera de Q respectivamente.

Demostración. Según el lema 2.4, cualquier polígono de este tipo puede ser triangulado usando todos los puntos reticulares del interior n_{int} y todos los puntos reticulares de la frontera n_{bd} .

Ahora interpretamos la triangulación como un grafo plano P . Sea f el número de caras de este grafo, de modo que tenemos, según el lema 2.6, $f - 1$ triángulos de área $\frac{1}{2}$, de manera que

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f - 1). \quad (2.3)$$

Cada triángulo de la triangulación tiene tres lados, donde cada una de las aristas interiores está en la frontera de dos triángulos, mientras que cada arista de la frontera aparece en un solo triángulo. De modo que

$$3(f - 1) = 2e_{int} + e_{bd}, \quad (2.4)$$

donde e_{int} son la cantidad de aristas del grafo P que son interiores al polígono y e_{bd} son las aristas de la frontera del grafo P . Usando que

$$e_{int} + e_{bd} = e, \quad (2.5)$$

siendo e la cantidad total de aristas, sustituyendo (2.5) en (2.4) obtenemos

$$f = 2(e - f) - e_{bd} + 3. \quad (2.6)$$

Además, hay el mismo número de aristas y vértices en la frontera de Q , luego

$$e_{bd} = n_{bd}. \quad (2.7)$$

Utilizando (2.6), (2.7) y la fórmula de Euler

$$\begin{aligned} f &= 2(e - f) - e_{bd} + 3 \\ &= 2(n - 2) - n_{bd} + 3 \\ &= 2n_{int} + n_{bd} - 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por tanto, usando (2.3) y (2.8) obtenemos

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f - 1) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1. \quad \square$$

Capítulo 3

Teorema de Minkowski

El teorema de Pick empezó a llamar la atención a los matemáticos a partir del año 1969 (setenta años después de que Pick lo enunciase) tras su publicación en el libro [11] de Steinhaus. A partir de ese momento se han desarrollado diversas pruebas para este bello teorema.

La idea principal de este capítulo es demostrar que todo triángulo elemental tiene área $\frac{1}{2}$ utilizando el teorema de Minkowski y este resultado se utilizará para probar el teorema de Pick. Se hará uso del artículo [6] para el desarrollo de este capítulo.

El teorema de Minkowski es muy útil en teoría de números. Para que el capítulo sea autocontenido incluiremos una prueba del teorema de Minkowski en \mathbb{R}^d .

Sea \mathbb{Z}^d los puntos de \mathbb{R}^d con componentes enteras. Dado $\lambda \in \mathbb{Z}^d$, definimos

$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d : \lambda_j \leq x_j < \lambda_j + 1, j = 1, 2, \dots, d\};$$

aquí hemos utilizado la notación $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$.

Cada A_λ representa un cuadrado de \mathbb{R}^d determinado por los puntos con coordenadas enteras. Si $\lambda, \beta \in \mathbb{Z}^d$ son distintos, entonces

$$A_\lambda \cap A_\beta = \emptyset;$$

además,

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} A_\lambda.$$

Antes de proceder, recordemos que un *conjunto boreliano* es un elemento de la σ -álgebra de Borel, que es la menor σ -álgebra que contiene a los abiertos de la topología usual. Una definición alternativa dice que un *conjunto boreliano* es cualquier conjunto obtenido mediante uniones e intersecciones numerables de conjuntos abiertos o cerrados de la topología usual.

Ahora dado $B \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto boreliano denotamos por $|B|$ la medida de Lebesgue (volumen) de B . Sea

$$[0, 1)^d = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_j < 1, j = 1, 2, \dots, d\}.$$

Para la prueba del teorema de Minkowski necesitamos el siguiente resultado previo.

Lema 3.1. *Si $B \subset \mathbb{R}^d$ es un boreliano, entonces*

$$|B| = \int_{[0,1)^d} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \chi_B(y + \lambda) dy.$$

Demostración. Como $\mathbb{R}^d = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} A_\lambda$ se tiene que

$$B = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} (A_\lambda \cap B),$$

y

$$|B| = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} |A_\lambda \cap B|. \quad (3.1)$$

Sea χ_A la función indicadora A ; es decir, la función que toma el valor 1 en los puntos de A y cero en su complementario. De (3.1) se deduce

$$|B| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_B(x) dx = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{A_\lambda \cap B}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \chi_{A_\lambda \cap B}(x) dx;$$

si en cada una de las integrales anteriores hacemos el cambio de variable $x = y + \lambda$, entonces nos queda

$$|B| = \int_{[0,1)^d} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \chi_B(y + \lambda) dy. \quad \square$$

Procedemos al enunciado y a presentar una prueba del teorema de Minkowski.

Teorema 3.2 (Minkowski). *Un abierto acotado en \mathbb{R}^d , simétrico respecto al origen, convexo y con volumen mayor que 2^d contiene al menos un punto de coordenadas enteras distinto del origen.*

Demostración. Sea $C \subset \mathbb{R}^d$ un abierto acotado en \mathbb{R}^d , simétrico respecto al origen, convexo y con volumen mayor que 2^d . Denotemos

$$C/2 = \{x \in \mathbb{R}^d : 2x \in C\}.$$

La función $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\Phi(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \chi_{C/2}(x + \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

es una función medible y acotada; en efecto, es medible porque $C/2$ es un conjunto abierto, y por tanto boreliano, y la suma de funciones medibles es una función medible y el límite de una sucesión de funciones medibles es medible. Veamos que Φ es una función acotada. Como $C/2$ es un conjunto acotado; existe $r > 0$ tal que

$$|x| < r \quad \text{para todo } x \in C/2.$$

De donde, si $x + \lambda \in C/2$ y $x + \beta \in C/2$, con $\lambda, \beta \in \mathbb{Z}^d$, entonces, por la desigualdad triangular

$$|\lambda - \beta| \leq |x + \lambda| + |x + \beta| \leq 2r;$$

de modo que la cantidad de λ para los que $x + \lambda \in C/2$ no es mayor que la cantidad de puntos con coordenadas enteras en la bola de centro en el origen con radio $2r$.

Según el lema 3.1 se tiene

$$\int_{[0,1]^d} \Phi(x) dx = |C/2| = \frac{|C|}{2^d} > 1.$$

De donde, como Φ toma valores enteros mayores o iguales que 0, se tiene que existe $x \in [0, 1]^n$ tal que

$$\Phi(x) \geq 2.$$

En otras palabras, existen dos puntos distintos $P_1/2 = x + \lambda \in C/2$, $P_2/2 = x + \beta \in C/2$, con $\lambda, \beta \in \mathbb{Z}^d$. Entonces $\frac{P_1 - P_2}{2} \in \mathbb{Z}^d$ y $P_1, P_2 \in C$. Como C es convexo y simétrico respecto al origen, también $\frac{P_1 - P_2}{2} \in C$; es decir, $\frac{P_1 - P_2}{2}$ es un punto de C con coordenadas enteras y distinto del origen. \square

Como hemos dicho en anteriores capítulos un *triángulo elemental* es un triángulo cuyos vértices están \mathbb{Z}^2 que no contiene ningún otro punto de \mathbb{Z}^2 . Estos triángulos tienen área $\frac{1}{2}$, hecho que probaremos a continuación mediante el teorema de Minkowski.

Lema 3.3. *Todo triángulo elemental tiene área 1/2.*

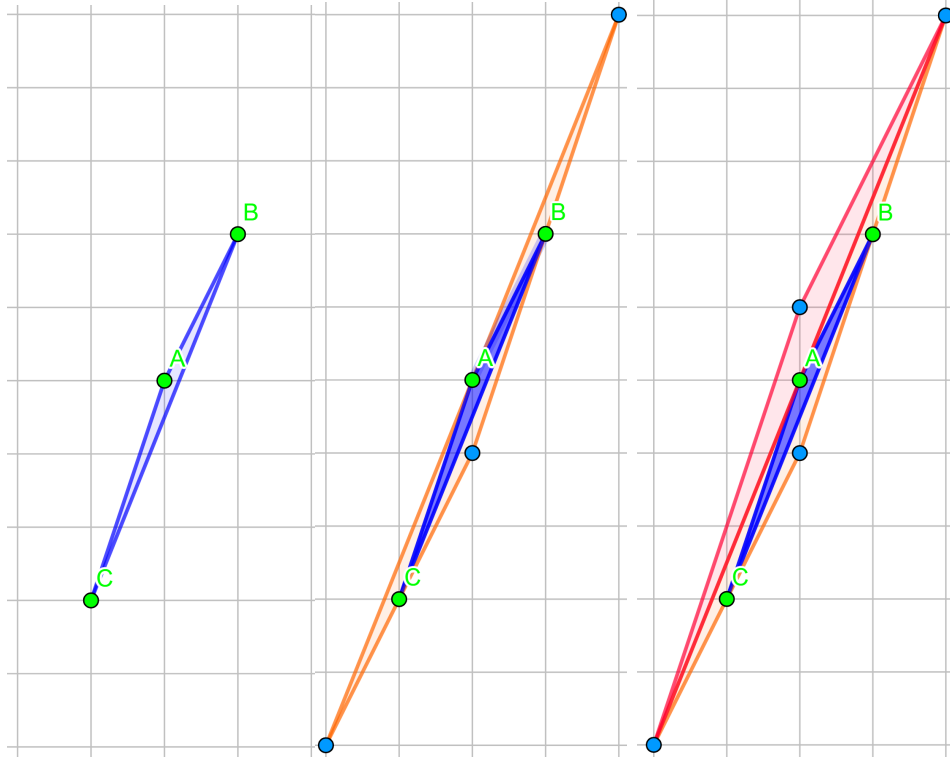


Figura 3.1: Triángulo elemental a la izquierda; en el centro, triángulo elemental transformado, a la derecha, segunda transformación de la demostración del lema 3.3.

Demostración. Sea ABC un triángulo elemental. Ver figura 3.1. Sea $A_1B_1C_1$ el triángulo que se obtiene al rotar 180° el triángulo ABC alrededor del vértice A ; es decir, si $A = (\alpha, \beta)^t$, los vértices del triángulo vértices A_1, B_1, C_1 se obtienen de A, B, C por la transformación

$$\Lambda(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix}.$$

Como el triángulo ABC es elemental, el nuevo triángulo $A_1B_1C_1$ tiene vértices en \mathbb{Z}^2 y no contiene a ningún otro punto de \mathbb{Z}^2 excepto los propios vértices. Trasladamos dicho triángulo $A_1B_1C_1$ por el vector $\overrightarrow{B_1C_1}$ (en \mathbb{Z}^2) para hacer coincidir el lado B_1C_1 con el lado CB ; este nuevo triángulo tendrá vértices en puntos de \mathbb{Z}^2 y no contendrá ningún otro punto de \mathbb{Z}^2 distinto de los vértices.

Si repetimos el procedimiento anterior en los vértices B y C obtenemos un triángulo P . El triángulo P se obtiene como unión de cuatro triángulos

congruentes con ABC , de modo que su área es cuatro veces el área de ABC . En este nuevo triángulo no tenemos puntos de \mathbb{Z}^2 en el interior de P .

El triángulo P lo rotamos 180° respecto al vértice C que está en el interior de uno de los lados del triángulo P . El nuevo polígono Q no tiene puntos de \mathbb{Z}^2 en su interior diferentes de C ; que si consideramos como origen, el interior del polígono Q es un conjunto abierto, convexo y simétrico con respecto al origen. Según el teorema de Minkowski, Q no tiene área mayor que 4; como se ha obtenido como unión de ocho triángulos congruentes con ABC , este triángulo tiene área menor o igual que $\frac{1}{2}$.

Ahora, si (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) son las coordenadas de A, B, C , el área de dicho triángulo es la mitad del área del paralelogramo determinado por los vectores $(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ y $(x_3 - x_2, y_3 - y_2)$, de modo que el área del triángulo ABC viene dada por el valor absoluto de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix},$$

como el determinante anterior es valor entero, el menor valor absoluto que puede tener es 1. Por tanto, el área del triángulo elemental ABC es $\frac{1}{2}$. \square

Para proceder con el previo a la demostración del Teorema de Pick necesitamos que todo polígono reticular cerrado simple se pueda triangular en triángulos elementales mediante todos los puntos del retículo \mathbb{Z}^2 que están en su interior y en su frontera, propiedad que probamos en el lema 2.4.

Una vez conocido esto estamos preparados para demostrar el teorema de Pick a partir de conocer que todo triángulo elemental tiene área $\frac{1}{2}$.

Teorema 3.4 (Pick). *El área de todo polígono P reticular simple viene dado por*

$$A(P) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1, \quad (3.2)$$

donde n_{int} y n_{bd} son el número de puntos con coordenadas enteras del interior y de la frontera de P respectivamente.

Demostración. Según el lema 3.3, el resultado anterior es cierto para triángulos elementales. Supongamos que el polígono P se descompone como unión de triángulos elementales. Entonces, basta ver que si tenemos una descomposición del polígono $P = P_1 \cup P_2$ en polígonos P_1 y P_2 para los que el teorema se cumple, entonces el teorema también es cierto para P . Sea n_{int}^X y n_{bd}^X los puntos de \mathbb{Z}^2 en el interior y en la frontera de un polígono X respectivamente. Observar que

$$n_{int}^P = n_{int}^P = n_{int}^{P_1} + n_{int}^{P_2} + D - 2,$$

donde D es la cantidad de puntos de \mathbb{Z}^2 en la frontera común de P_1 y P_2 . Por otra parte,

$$n_{bd} = n_{bd}^P = n_{bd}^{P_1} + n_{bd}^{P_2} - 2D + 2,$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} n_{int}^P + \frac{n_{bd}^P}{2} - 1 &= n_{int}^{P_1} + \frac{n_{bd}^{P_1}}{2} - 1 + n_{int}^{P_2} + \frac{n_{bd}^{P_2}}{2} - 1 \\ &= A(P_1) + A(P_2) = A(P). \end{aligned}$$

Como queríamos probar. □

Capítulo 4

La \wp -función de Weierstrass

En este capítulo, siguiendo el artículo [4], daremos una demostración del teorema de Pick utilizando técnicas de análisis complejo; en particular, usaremos el teorema de los residuos para funciones doblemente periódicas.

La \wp -función de Weierstrass jugará un papel fundamental debido a que se expresa como una serie donde intervienen los puntos del retículo plano, más exactamente los enteros gaussianos.

También aparecerá la función ζ de Weierstrass, que no se debe confundir con la ζ de Riemann; esta función no es periódica pero se puede transformar de modo que la nueva función, ϕ , sí sea periódica. Las técnicas de integración en el plano dadas por el teorema de Green aplicadas a esta nueva función permitirán «cerrar el círculo» para completar la prueba del teorema de Pick.

Definición 4.1. Una función meromorfa¹ en \mathbb{C} se dice *periódica* si existe $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$f(z) = f(z + w).$$

Al valor w se le llama *periodo* de f .

Es inmediato que si w_1, w_2, \dots, w_k son periodos de f , también lo serán $n_1 w_1 + n_2 w_2 + \dots + n_k w_k \in \mathbb{Z}$, donde $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$.

Lema 4.2. Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes² en \mathbb{R} . La serie

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|mw_1 + nw_2|^\lambda} \quad (4.1)$$

¹Una función f se dice *meromorfa* en \mathbb{C} si es el cociente de dos funciones enteras. De modo que las funciones meromorfas van a ser analíticas en \mathbb{C} excepto una cantidad finita o numerable de puntos que son polos de dicha función.

²Los números $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ son *linealmente independientes* en \mathbb{R} si los únicos valores $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ que cumplen que $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0$ son $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

es convergente si y sólo si $\lambda > 2$, donde la suma anterior se hace en todos los $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ que son diferentes de $(0, 0)$. Además, si $K \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto del plano y consideramos $\Omega_K = \{mw_1 + nw_2 : (m, n) \in \mathbb{Z}^2, mw_1 + nw_2 \notin K\}$, entonces

$$\sum_{(m,n) \in \Omega_K} \frac{1}{|z - (mw_1 + nw_2)|^\lambda} \quad (4.2)$$

converge uniformemente en K si y sólo si $\lambda > 2$.

Demostración. Primero prestamos atención al retículo $\Omega = \{mw_1 + nw_2 : (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ generado por w_1, w_2 . Dicho retículo está formado por puntos que están sobre paralelogramos concéntricos, $\{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con centro en origen, donde hemos ordenado dichos paralelogramos por la distancia de sus vértices al origen; en el primer paralelogramo, Δ_1 , hay 8 puntos de Ω , en el segundo hay 16, en general, en Δ_k hay $8k$ puntos del retículo. Esto se puede probar por inducción en k . En efecto, si hacemos una proyección en el paralelogramo $k+1$ de los puntos del retículo que están en el paralelogramo k -ésimo por una paralela a los lados adyacentes a aquel donde ellos están, se tiene un punto en el paralelogramo $k+1$, excepto a los vértices que le corresponden 2 y los vértices del paralelogramo $k+1$ no tiene ninguno correspondiente. De donde se obtiene que en el paralelogramo $k+1$ hay $8k+8 = 8(k+1)$ puntos del retículo Ω . Sean r, R el mínimo y el máximo, respectivamente, de la distancia del origen a Δ_1 . Entonces por semejanza, el mínimo y el máximo de la distancia del origen al paralelogramo k -ésimo será kr, kR , respectivamente. Por tanto,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{8k}{(kR)^\lambda} \leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|mw_1 + nw_2|^\lambda} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{8k}{(kr)^\lambda}.$$

Como la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^{\lambda-1}}$$

converge si y sólo si $\lambda > 2$, la misma conclusión vale para (4.1).

Ahora probaremos la segunda parte del lema. Si consideramos r_K, R_K el mínimo y el máximo de las distancias de K al primer paralelogramo de la sucesión $\{\Delta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, que contiene en su interior a K , entonces

$$\begin{aligned} C(z) + \sum_{k \geq n_0} \frac{8k}{((k - n_0 + 1)R_K)^\lambda} &\leq \sum_{(m,n) \in \Omega_K} \frac{1}{|z - (mw_1 + nw_2)|^\lambda} \\ &\leq C(z) + \sum_{k \geq n_0} \frac{8k}{((k - n_0 + 1)r_K)^\lambda}, \end{aligned}$$

donde $C(z)$ es una función que va a estar determinado por los puntos (una cantidad finita) de Ω que no están en K pero si dentro del primer paralelogramo Δ_{n_0} que contiene en su interior a K . Y la conclusión sigue inmediatamente de la convergencia de la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^{\lambda-1}}$ y del criterio M-Weierstrass.³ \square

Como nuestro objetivo es el teorema de Pick, a lo largo de este capítulo sólo nos interesará los puntos del retículo gaussiano, es decir, los puntos del plano complejo con parte real e imaginaria enteras; de modo que consideramos $w_1 = 1$, $w_2 = i$ y $\Theta = \{m + ni : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$. Del lema 4.2 cuando $\lambda = 3$ se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.3. *La función*

$$f(z) = \sum_{a \in \Theta} \frac{1}{(z-a)^3}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Theta \quad (4.3)$$

es una función meromorfa en \mathbb{C} , periódica, de períodos $1, i$, que tiene polos de orden 3 en los puntos de Θ , que tiene residuos 0 en cada punto de Θ . Además, se tiene que la serie en (4.3) converge absolutamente y uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Theta$.

Más adelante jugará un papel fundamental la \wp -función de Weierstrass que introducimos en el siguiente resultado.

Corolario 4.4. *La serie*

$$\sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (4.4)$$

converge absolutamente y uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Theta$. La \wp -función de Weierstrass,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Theta,$$

define una función par y meromorfa en \mathbb{C} , analítica en $\mathbb{C} \setminus \Theta$, con periodo $1, i$, que tiene residuos 0 en cada punto de Θ . Además, $\wp(z)$ es una función par y $\wp(iz) = -\wp(iz)$.

³El criterio M de Weierstrass afirma que si $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, son funciones tales que si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $M_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in A$, y la serie $\sum_{n \geq 1} M_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformemente en A .

Demostración. Según el corolario 4.3, la serie (4.3) converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Theta$, de modo que dicha serie se puede integrar término a término sobre curvas suaves a trozos en $\mathbb{C} \setminus \Theta$ obteniendo una serie de funciones analíticas que converge también uniformemente en compactos y su suma será una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \Theta$. Así, si $C \in \mathbb{C}$ es una constante y $z, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Theta$, se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= C + \int_{z_0}^z f(z) dz = C + \sum_{a \in \Theta} \int_{z_0}^z \frac{1}{(z-a)^3} dz \\ &= C - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z_0-a)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

De modo que $\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}$ representa una función meromorfa en \mathbb{C} , que es analítica en $z = 0$. Su valor en $z = 0$ es

$$\left(\varphi(z) + \frac{1}{2z^2} \right) \Big|_{z=0} = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(z_0-a)^2} \right) \quad (4.6)$$

Restando término a término las ecuaciones en (4.5) y (4.6) obtenemos

$$\varphi(z) = D - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right),$$

donde $D \in \mathbb{C}$ es una constante. De las propiedades de $\varphi(z)$ se obtiene que la serie que define a $\varphi(z)$ converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \Theta$ y $\varphi(z)$ es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \Theta$.

Para demostrar la convergencia absoluta de la serie en (4.4) es suficiente considerar sólo aquellos $a \in \Omega$ tales que $|a| > 2|z|$. En tal caso, como $|1 + \frac{z}{2a}| \leq 1 + \frac{|z|}{2|a|}$ y $|\frac{z}{a} - 1| \geq 1 - \frac{|z|}{|a|}$,

$$\left| \frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right| = \left| \frac{(2a-z)z}{(z-a)^2 a^2} \right| \leq \frac{2a \left(1 + \frac{|z|}{2|a|}\right) |z|}{|a|^4 \left(1 - \frac{|z|}{|a|}\right)^2} \leq \frac{16|z|}{|a|^3}.$$

Entonces del lema 4.2 se sigue la convergencia absoluta de la serie que define a $\varphi(z)$.

La convergencia absoluta de la serie (4.4) lleva a que su suma no cambia por reordenamientos, en particular, como $\Theta - 1 = i + \Theta = -\Theta = i\Theta = \Theta$, se tiene que 1 e i son periodos de $\varphi(z)$, $\varphi(-z) = \varphi(z)$ y $\varphi(iz) = -i\varphi(z)$.

La conclusión sobre el residuo de $\varphi(z)$ en $a \in \Theta$ es inmediata de observar que la parte principal del desarrollo de Laurent en dicho punto es $1/(z-a)^2$. \square

Con argumentos análogos a la prueba anterior se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.5. *La función zeta de Weierstrass*

$$\zeta(z) = z^{-1} + \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} \right)$$

es una función meromorfa en \mathbb{C} , analítica en $\mathbb{C} \setminus \Theta$,

$$\zeta'(z) = -\wp(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Theta,$$

y $\zeta(z)$ es una función impar. La función $\zeta(z)$ tiene un polo simple en cada punto de Θ y el residuo en cada uno de esos puntos es 1.

Demostración. Sean $z_0, z \in \mathbb{C} \setminus \Theta$. Si integramos término a término $-\wp(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(z) &:= C - \int_{z_0}^z \wp(\zeta) d\zeta = C + \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} - \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{(\zeta-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right) d\zeta \\ &= C + \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} + \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-a} + \frac{z}{a^2} - \left(\frac{1}{z_0-a} + \frac{z_0}{a^2} \right) \right), \end{aligned}$$

donde C es una constante en \mathbb{C} y $\int_{z_0}^z \wp(\zeta) d\zeta$ se entiende que se realiza en un camino de $\mathbb{C} \setminus \Theta$ con punto inicial z_0 y punto final z .⁴ De modo que $\varphi(z) - \frac{1}{z}$ representa una función meromorfa en \mathbb{C} , que es analítica en $\mathbb{C} \setminus (\Theta \setminus \{0\})$; en particular, en $z = 0$, porque se ha obtenido integrando término a término una serie con esas propiedades. Su valor en $z = 0$ es

$$\left(\varphi(z) - \frac{1}{z} \right) \Big|_{z=0} = C - \frac{1}{z_0} + \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{-a} - \left(\frac{1}{z_0-a} + \frac{z_0}{a^2} \right) \right)$$

Restando las dos últimas expresiones nos queda

$$\varphi(z) = D + \frac{1}{z} + \sum_{a \in \Theta \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} \right),$$

donde D es una constante. La expresión anterior es precisamente la función zeta de Weierstrass, $\zeta(z)$, más una constante. Como $\varphi(z)$ es una primitiva de

⁴Como $\zeta(z)$ tiene residuo cero en cada punto de Θ , la integral $\int_{z_0}^z \wp(\zeta) d\zeta$ es independiente del camino que se tome en $\mathbb{C} \setminus \Theta$ de z_0 a z .

$-\wp(z)$, lo mismo se tiene para $\zeta(z)$; o sea, la serie converge absolutamente en $\mathbb{C} \setminus \Theta$ porque si consideramos $a \in \Theta$ tal que $2|z| < |a|$ se tiene

$$\left| \frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} \right| = \left| \frac{z^2}{a^2(z-a)} \right| \leq \frac{|z|^2}{|a|^3(1-\frac{|z|}{|a|})} \leq \frac{2|z|^2}{a^3},$$

que según el lema 4.2 nos lleva a que la serie que define la función $\zeta(z)$ converge absolutamente en $\mathbb{C} \setminus \Theta$.

Que $\zeta(z)$ es impar sigue de observar que $-\Theta = \Theta$ y la convergencia absoluta de la serie que define a $\zeta(z)$, de modo que el valor de dicha serie no cambia si cambiamos su orden. Es trivial también que los puntos de Θ son polos simples de $\zeta(z)$ y que su residuo en cada uno de esos puntos es 1. \square

La función $\zeta(z)$ no es doblemente periódica, pero el siguiente lema se cumple.

Lema 4.6. *La función $\phi(z) = \zeta(z) - \pi\bar{z}$ satisface*

$$\phi(z) = \phi(z+1) = \phi(z+i), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Theta. \quad (4.7)$$

Demostración. Según los corolarios 4.4 y 4.5, se tiene

$$\begin{cases} (\zeta(z+1) - \zeta(z))' = \wp(z) - \wp(z+1) = 0, \\ (\zeta(z+i) - \zeta(z))' = \wp(z) - \wp(z+i) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Theta$. De donde existen constantes $\eta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, tales que

$$\zeta(z+1) - \zeta(z) = \eta_1, \quad \zeta(z+i) - \zeta(z) = \eta_2, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Theta.$$

Además,

$$\zeta(z+m+ni) - \zeta(z) = m\eta_1 + n\eta_2 \quad (4.9)$$

ya que

$$\begin{aligned} & \zeta(z+m+ni) - \zeta(z) \\ &= \zeta(z+m+ni) - \zeta(z+m-1+ni) + \zeta(z+m-1+ni) - \zeta(z) \\ &= \eta_1 + \zeta(z+m-1+ni) - \zeta(z) \\ &= m\eta_1 + \zeta(z+ni) - \zeta(z) = m\eta_1 + n\eta_2. \end{aligned}$$

Integrando $\zeta(z)$ en el cuadrado de vértices

$$-1/2 - i/2, 1/2 - i/2, 1/2 + i/2, -1/2 + i/2,$$

y utilizando (4.8) y que $\zeta(z)$ tiene residuo 1 en $z = 0$, nos queda

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_0^1 \zeta(-1/2 - i/2 + t) dt + i \int_0^1 \zeta(1/2 - i/2 + ti) dt \\ &\quad - \int_0^1 \zeta(-1/2 + i/2 + t) dt - i \int_0^1 \zeta(-1/2 - i/2 + ti) dt \\ &= -\eta_2 + i\eta_1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

También se tiene que

$$\eta_2 = -i\eta_1, \quad (4.11)$$

porque $\wp(iz) = -\wp(z)$ que lleva a

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \zeta(z + i) - \zeta(z) = - \int_0^1 \wp(z + iw)i dw \\ &= - \int_0^1 \wp(i(-iz + w))i dw = \int_0^1 \wp(-iz + w)i dw = -i\eta_1. \end{aligned}$$

Combinando (4.10) y (4.11) nos lleva a

$$2\pi i = 2i\eta_1 \Rightarrow \eta_1 = \pi, \quad (4.12)$$

que unido a la ecuación (4.9) nos da

$$\zeta(z + m + ni) - \zeta(z) = (m - ni)\pi;$$

que resulta equivalente precisamente a (4.7). \square

Del lema 4.6 podemos observar el siguiente resultado.

Lema 4.7. *Sea Γ una curva suave a trozos en \mathbb{C} tal que ϕ es integrable⁵ sobre Γ . Sea Γ_1 la curva que se obtiene al trasladar Γ por $n + mi$, $n, m \in \mathbb{Z}$; o sea, la parametrización de Γ_1 es $r(t) = r_1(t) + n + i(r_2(t) + m)$, $t \in [0, 1]$, donde $r(t)$ es la parametrización de Γ . Entonces*

$$\int_{\Gamma} \phi(z) dz = \int_{\Gamma_1} \phi(z) dz$$

Demostración. Según la definición de integral, se tiene

$$\int_{\Gamma} \phi(z) dz = \int_0^1 \phi(r(t)) r'(t) dt.$$

⁵Más adelante definiremos también la integral de ϕ sobre poligonales que pasan por un número finito de puntos reticulares.

Por la periodicidad de ϕ

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \phi(r(t))r'(t)dt \\ &= \int_0^1 \phi(r_1(t) + n + i(r_2(t) + m))((r_1(t) + n)' + (i(r_2(t) + m))')dt \\ &= \int_{\Gamma_1} \phi(z)dz. \quad \square \quad (4.13) \end{aligned}$$

Además, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.8. *Sea γ un camino cerrado en \mathbb{C} que no pasa por los puntos del retículo gaussiano recorrido en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj) y sea A el área de la región que encierra dicha poligonal. Sea n_{int} el número de puntos del retículo gaussiano en el interior de γ . Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \phi(z) dz = n_{int} - A.$$

Demostración. Según la definición de $\phi(z)$ se tiene

$$\int_{\gamma} \phi(z) dz = \int_{\gamma} (\zeta(z) - \pi\bar{z}) dz = \int_{\gamma} \zeta(z) dz - \pi \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy). \quad (4.14)$$

Como $\zeta(z)$ tiene residuo 1 en cada punto del retículo gaussiano, por el teorema de los residuos se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \zeta(z) dz = n_{int}. \quad (4.15)$$

Usando el teorema de Green⁶ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) &= \int_{\gamma} (x - iy) dx + (y + ix) dy \\ &= \iint_{\text{int}(\gamma)} ((y + ix)_x - (x - iy)_y) dx dy = 2iA. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Combinando (4.15) y (4.16) en (4.14) completamos la demostración del lema. \square

El lema anterior lo generalizamos al caso cuando el camino cerrado γ pasa por puntos del retículo gaussiano. Notamos que $\phi(z)$ tiene singularidades en dichos puntos.

⁶El teorema de Green también vale para funciones que toman valores complejos si: $P = P_1 + iP_2, Q = Q_1 + iQ_2, \int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\gamma} P_1dx + Q_1dy + i \int_{\gamma} P_2dx + Q_2dy = \iint_{\text{int}(\gamma)} (Q_x - P_y) dx dy$.

Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que los círculos $\Delta(a, \epsilon)$ de radio ϵ y centrados en los puntos reticulares a en γ no se intersequen y no contengan otros puntos de este tipo distintos a a . La integral sobre γ se define como el valor límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de la integral sobre $\gamma \setminus \cup_{a \in (\Theta \cap \gamma)} \Delta(\epsilon, a) = \gamma_\epsilon$.

Como el camino de integración γ_ϵ restante ya no es cerrado tenemos que usar el truco de introducir un arco $\gamma_a(\epsilon)$ por cada singularidad, que es la parte de $\Delta(a, \epsilon)$ dentro de la poligonal y cierra el camino de integración cerca de la singularidad a .

Con este truco satisfacemos las hipótesis del lema 4.8 y la expresión de la integral está casi acabada. Nos queda restar la integral de cada $\gamma_a(\epsilon)$ en dirección horaria (signo negativo), y la expresión queda⁷

$$\int_{\gamma} \phi(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_\epsilon} \phi(z) dz + \sum_{a \in (\Theta \cap \gamma)} \int_{\gamma_a(\epsilon)} \phi(z) dz \right).$$

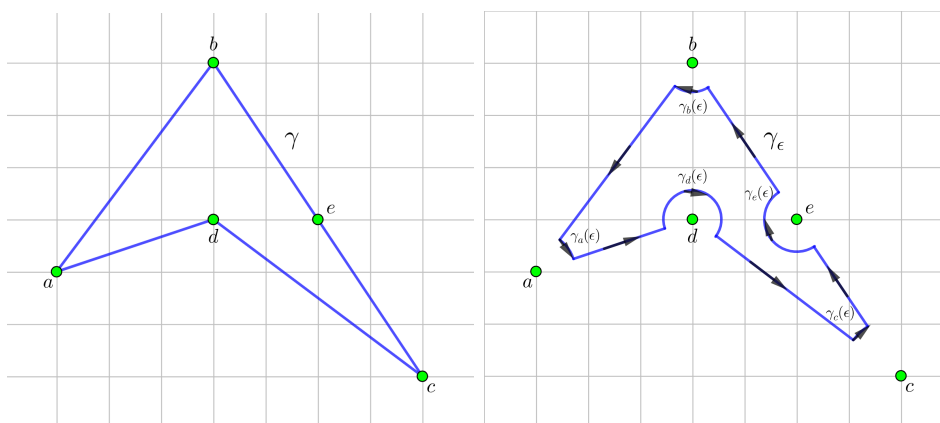


Figura 4.1: En la imagen de la izquierda γ . En la imagen de la derecha γ_ϵ .

Lema 4.9. *Sea P una poligonal en \mathbb{C} que pasa por un número finito de puntos del retículo gaussiano recorrido en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj), sea θ_j , $j = 1, 2, \dots, k$, el ángulo que forman los «lados» de la poligonal en dichos puntos medidos en sentido positivo y sea A el área de la región que encierra dicha poligonal. Sea n_{int} el número de puntos del retículo gaussiano en el interior de P . Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_P \phi(z) dz = n_{int} - A + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \theta_j.$$

⁷El signo se convierte en suma al recorrerla en sentido antihorario y utilizamos el signo para transformarlo en una suma.

Demostración. Sea $\gamma_j(\epsilon)$ el arco de centro en uno de los puntos del retículo gaussiano en P , dentro de dicha curva y radio ϵ . Entonces

$$\int_{\gamma_j(\epsilon)} \zeta(z) dz = \int_{\gamma_j(\epsilon)} \frac{dz}{z} dz + \sum_{a \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\int_{\gamma_j(\epsilon)} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma_j(\epsilon)} \frac{dz}{a} + \int_{\gamma_j(\epsilon)} \frac{z dz}{a} \right).$$

Cada una de las integrales convergerá a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$, excepto cuando a sea el punto del retículo que corresponde a $\gamma_j(\epsilon)$ que se tiene

$$\int_{\gamma_j(\epsilon)} \frac{dz}{z-a} = \theta_j.$$

En efecto, si la parametrización de $\gamma_j(\epsilon)$ es $\{a + \epsilon e^{it}, t \in \Theta_j\}$ ⁸, entonces la afirmación anterior corresponde a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_j(\epsilon)} \phi(z) dz \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_j(\epsilon)} (\zeta(z) - \pi \bar{z}) dz \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_j(\epsilon)} \frac{dz}{z-a} \right) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_j(\epsilon)} \pi \bar{z} dz \right) \end{aligned}$$

Y sabiendo que cuando $\epsilon \rightarrow 0$ la expresión $\int_{\gamma_j(\epsilon)} (\pi \bar{z}) dz$ converge a 0 y usando la parametrización de $\gamma_j(\epsilon)$ resulta que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_j(\epsilon)} \frac{dz}{z-a} \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_j} \left(\frac{e^{it} \epsilon i dt}{\epsilon e^{it}} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\theta_j} i dt \right) = \theta_j i \end{aligned}$$

Y haciendo esto en todos los puntos del retículo en la frontera de P tenemos que

$$\sum_j \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j(\epsilon)} \phi(z) dz \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_j \theta_j$$

Combinando este resultado con las cuentas del lema 4.8, se completa la prueba del resultado. \square

Lema 4.10. *Si el camino P en el lema 4.9 es un polígono reticular simple, entonces*

$$\int_P \phi(z) dz = 0.$$

Demostración. La demostración es más fácil de entender si primero elegimos un vértice V de P , de modo que él cumple que existe un semiplano cerrado

⁸ Θ_j es la amplitud del ángulo del arco $\gamma_j(\epsilon)$.

que interseca con P solamente en ese vértice. Ahora trasladamos el polígono P de tal forma que el vértice V sea el origen. Si el vértice lo denotamos como $a + bi$, $a, b \in \mathbb{Z}$ consecuentemente la traslación se denota como $P' = P - (a + bi)$, y por el lema 4.7 notamos

$$\int_P \phi(z)dz = \int_{P'} \phi(z)dz$$

Ahora consideramos el camino antipodal $z \rightarrow -z$ de P' denotado por \hat{P}' , que cumple que su interior y el de P' no se superponen y no comparten ningún punto de la frontera común salvo el origen.

Al hacer el cambio $z \rightarrow -z$ se produce la siguiente transformación.

$$\phi(-z)d(-z) = [-\phi(z)(-dz)] = \phi(z)dz$$

y usando esto tenemos la siguiente igualdad

$$\int_P \phi(z)dz = \int_{\hat{P}'} \phi(z)dz$$

que nos permite ver la subsecuente correspondencia

$$2 \int_P \phi(z)dz = \int_P \phi(z)dz + \int_{\hat{P}'} \phi(z)dz. \quad (4.17)$$

Pero debemos observar que como \hat{P}' es la simetría de P' respecto al origen, su orientación es la contraria de la de \hat{P}' y

$$\int_P \phi(z)dz = \int_{P'} \phi(z)dz = - \int_{\hat{P}'} \phi(z)dz$$

Por lo tanto en la expresión (4.17) se tiene que

$$2 \int_P \phi(z)dz = 0$$

y el resultado es cierto. \square

Habiendo visto todos estos ingredientes previos a la demostración del resultado principal, comenzamos la prueba del teorema de Pick.

Demostración. Aplicamos los lemas 4.9 y 4.10 al polígono P y deducimos que

$$A - n_{int} = \frac{1}{2\pi} \sum_j \theta_j. \quad (4.18)$$

Los ángulos suplementarios $\theta_j - \pi$, algunas veces llamados exteriores en sentido horario, suman -2π , porque como el polígono es simple el vector

tangente a él da sólo una vuelta alrededor del origen cuando recorremos el polígono.

Por tanto, la suma de los ángulos interiores es $\pi(n_{bd} - 2)$, donde n_{bd} representa el número de puntos reticulares en la frontera de P . Sustituyendo en la expresión (4.18),

$$A - n_{int} = \frac{1}{2}(n_{bd} - 2) \iff A(P) = A = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1. \quad \square$$

Capítulo 5

Análisis armónico

El análisis armónico es una de las técnicas más versátiles del análisis matemático, permite obtener resultados en ecuaciones diferenciales, teoría de números, combinatoria y teoría espectral de operadores, entre diferentes temas, pero también en otros que trascienden las matemáticas cuando se aplica a modelos que tienen una interpretación en física, química o ingeniería. En este capítulo damos una demostración del teorema de Pick utilizando análisis armónico y se basa fundamentalmente en [3].

Aunque nos hacen falta únicamente conceptos básicos de análisis armónico en \mathbb{R}^2 , para simplificar la notación, los presentaremos en el espacio euclidiano \mathbb{R}^d . Como es usual, en este espacio consideramos la topología asociada a la métrica euclidiana. Debemos destacar que no pretendemos ser exhaustivos con los resultados y sólo presentamos aquellos que serán utilizados para la demostración del teorema de Pick. El resto de propiedades básicas de la transformada de Fourier las podremos encontrar en el apéndice B.

Comenzamos con los conceptos más importantes de este capítulo. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ una función integrable, su *transformada de Fourier* se define

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Utilizaremos la notación $\mathcal{F}(f)$, \hat{f} o $(f)^\wedge$ para la transformada de Fourier, según sea la situación. La *convolución* de dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ viene dada por

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x - y) f(y) dy;$$

observar que como

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y) f(y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| dx < \infty,$$

la convolución de dos funciones de $L^1(\mathbb{R}^d)$ está bien definida en casi todo punto y representa una función que está también en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Utilizaremos la notación $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ para referirnos, como es usual, a las funciones $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ continuas en \mathbb{R}^d que cumplen

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Será muy útil en todo este capítulo el siguiente resultado sobre aproximación de la identidad.

Lema 5.1. *Sea $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1$. Para cada $\epsilon > 0$ sea*

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d} \varphi(x/\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Entonces se cumple

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\epsilon * f = f$$

en $L^p(\mathbb{R}^d)$ si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y uniformemente en \mathbb{R} si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Supongamos primero que f es una función continua de soporte compacto¹ en \mathbb{R}^d . Si $f = 0$ la conclusión es trivial. De modo que asumimos que $f \neq 0$. Según el teorema de Cantor, ella es uniformemente continua en \mathbb{R}^d . De modo que dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$ se tiene

$$|f(x-y) - f(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Por tanto, tomando $0 < \epsilon < 1$ tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_\epsilon * f(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi((x-y)/\epsilon) (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) (f(x - \epsilon y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| |f(x - \epsilon y) - f(x)| dy < \epsilon \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| dy = \epsilon. \end{aligned}$$

Que prueba que cuando f es continua y tiene soporte compacto en \mathbb{R}^d ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\epsilon * f = f$$

uniformemente en \mathbb{R} .

Si $K \subset \mathbb{R}^d$ es un compacto, el conjunto

$$K - K = \{x - y : x, y \in K\}$$

¹El *soporte* de una función f es el conjunto $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.

es también un conjunto compacto. De igual forma se puede hallar $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \epsilon.$$

Tomemos el δ además tal que

$$\int_{\{y: |y| > \delta/\epsilon\}} |\varphi(y)| dy < \frac{\epsilon}{\|f\|_p}.$$

Utilizando la desigualdad integral de Minkowski se obtiene

$$\begin{aligned} & \|\varphi_\epsilon * f - f\|_p \\ & \leq \int_{\{y: |y| \leq \delta/\epsilon\}} |\varphi(y)| \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p dy + 2\|f\|_p \int_{\{y: |y| > \delta/\epsilon\}} |\varphi(y)| dy. \end{aligned}$$

De donde se deduce lo que queremos probar para funciones continuas de soporte compacto.

Ahora consideramos la situación general cuando el soporte no es compacto. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $\epsilon > 0$, existe una función g continua de soporte compacto tal que

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

Por tanto, por la desigualdad triangular

$$\|\varphi_\epsilon * f - f\|_p \leq \|\varphi_\epsilon * (f - g)\|_p + \|\varphi_\epsilon * g - g\|_p + \|g - f\|_p.$$

De donde se deduce inmediatamente el resultado general. De forma análoga se trata la situación en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. \square

El siguiente teorema es una variación de la fórmula de sumación de Poisson clásica.

Teorema 5.2. Sean $\varphi, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto. Asumimos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1,$$

y que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\varphi_\epsilon * f)(x). \quad (5.1)$$

Entonces para todo $\epsilon > 0$ se cumple

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\epsilon m) \widehat{f}(m)| < \infty.$$

Además, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n + x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(\epsilon m) \widehat{f}(m) e^{2\pi i \langle m, x \rangle}. \quad (5.2)$$

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, como $\varphi, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, existe $C = C(\epsilon) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(x-y)f(y) dy \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_\epsilon(x-y)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$. De donde, si $\varphi, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tienen soporte compacto, $\varphi_\epsilon * f$ está acotada y tiene también soporte compacto para cada $\epsilon > 0$.

Además, la suma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\varphi_\epsilon * f)(n+x)$$

tiene una cantidad de sumandos finita independiente de ϵ . Dicha suma está acotada en el toro $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d = [0,1)^d$ y su coeficiente de Fourier m -ésimo es $\widehat{\varphi}(\epsilon m)\widehat{f}(m)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)^d} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\varphi_\epsilon * f)(n+x) \right) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1)^d} (\varphi_\epsilon * f)(n+x) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx \\ &= \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^d} n+[0,1)^d} (\varphi_\epsilon * f)(y) e^{-2\pi i \langle m, (y-n) \rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(y-s)f(s) ds e^{-2\pi i \langle m, y \rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(s) e^{-2\pi i \langle m, s \rangle} ds \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\epsilon(t) e^{-2\pi i \langle m, t \rangle} dt = \widehat{\varphi}(\epsilon m)\widehat{f}(m). \end{aligned}$$

De modo que el desarrollo de Fourier de la función

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\varphi_\epsilon * f)(n+x)$$

es

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(\epsilon m)\widehat{f}(m)e^{2\pi i \langle m, x \rangle}.$$

Como la cantidad de sumandos de $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\varphi_\epsilon * f)(n+x)$ es finito, por la condición (5.1) se tiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\varphi_\epsilon * f)(n+x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n+x).$$

Así que para obtener (5.2) es suficiente probar que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\varphi_\epsilon * f)(n+x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(\epsilon m)\widehat{f}(m)e^{2\pi i \langle m, x \rangle}. \quad (5.3)$$

Según el corolario B.6, es suficiente probar que la serie de los coeficientes de Fourier converge absolutamente; o sea,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\epsilon m) \widehat{f}(m)| < \infty.$$

Esto se puede probar utilizando una desigualdad de tipo Plancherel-Polya: si tenemos una función g integrable con soporte compacto, existe una función ψ en la clase Schwarz con soporte compacto tal que $\psi(x) = 1$ en el soporte de g . Entonces, por el lema B.3 se tiene que $\widehat{\psi}$ es rápidamente decreciente,

$$g(x) = \psi(x)g(x), \quad \widehat{g}(\xi) = \widehat{\psi} * \widehat{g}(\xi),$$

y

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\psi}(m - \xi)| \leq C,$$

para un cierto C que depende de g . De donde

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{g}(m)| &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}(m - \xi) \widehat{g}(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\psi}(m - \xi)| \right) \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{g}(\xi)| d\xi \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{g}(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad anterior a la función $g(x) = \varphi_\epsilon * f(x)$, y que la norma 2 de la transformada de Fourier coincide con la norma 2 de la función (teorema B.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi_\epsilon * f}(m)| &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\epsilon m) \widehat{f}(m)| \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\epsilon \xi) \widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\epsilon \xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= C \epsilon^{-d/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Una vez acabada con la parte introductoria desarrollaremos la demostración del teorema de Pick de este capítulo, que se obtiene como un corolario de la fórmula de sumación de Poisson probada en el teorema 5.2 aplicada a la función característica del polígono con vértices reticulares. Tal función no satisface la condición (5.1), pero ella puede ser regularizada modificando sus valores en la frontera. Tal modificación recuerda la expresión asociada al

ángulo de visión del interior del polígono de los puntos del retículo. Definimos para $x \in \mathbb{R}^2$

$$\tau_P(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin P, \\ 1, & \text{si } x \text{ está en el interior de } P, \\ 1/2, & \text{si } x \text{ está en el interior de un lado de } P, \\ \alpha/(2\pi), & \text{si } x \text{ de } P \text{ con ángulo interior } \alpha. \end{cases}$$

Vemos, en la figura 5.1, que valores toma la función $\tau_P(x)$ en los puntos reticulares de la figura.

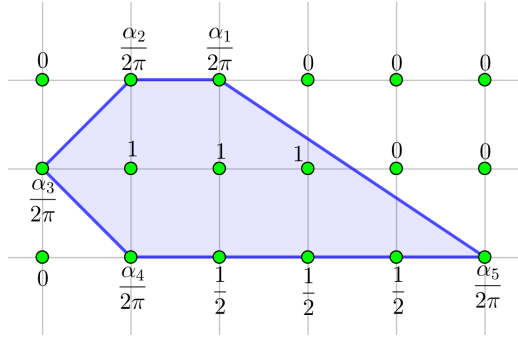


Figura 5.1: Valores que toma $\tau_P(x)$ en los puntos reticulares de esta figura.

Asumiendo que P tiene N vértices y denotamos por P_I, P_L los puntos reticulares en el interior del polígono P y en el interior de sus lados respectivamente. Como la suma de sus ángulos interiores es $2\pi(N-2)$, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \tau_P(k) &= \sum_{\text{puntos en } P_I} 1 + \sum_{\text{puntos en } P_L} \frac{1}{2} + \sum_{\text{vértices } P} \frac{\alpha}{2\pi} \\ &= n_{int} + \frac{1}{2}(n_{bd} - N) + \frac{1}{2}(N - 2) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1, \end{aligned}$$

donde n_{int} y n_{bd} representan respectivamente los puntos reticulares interiores y en la frontera de P .

Por tanto, la prueba del teorema de Pick se reduce a probar el siguiente resultado.

Teorema 5.3. *Si P es un polígono reticular simple, se tiene*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \tau_P(n) = A(P).$$

Demostración. Sea $\varphi(x)$ la función radial

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi} \chi_{\{|x| < \frac{1}{2}\}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Observar que es de cuadrado integrable, tiene soporte compacto y su integral es 1.

Para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene

$$\varphi_\epsilon * \tau_P(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\epsilon(x-t) \tau_P(t) dt = \frac{4}{\pi} \epsilon^{-2} \int_{|x-t| < \frac{\epsilon}{2}} \tau_P(t) dt = \tau_P(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

De modo que τ_P cumple las hipótesis del teorema 5.2. Por tanto,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \tau_P(n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \hat{\varphi}(\epsilon m) \hat{\tau}_P(m). \quad (5.4)$$

Observar que en la igualdad anterior podemos eliminar el límite considerando ϵ suficientemente pequeño. Además, $\hat{\tau}_P = \hat{\chi}_P$ porque $\tau_P = \chi_P$ excepto en un conjunto de medida cero, la frontera de P . Supongamos que P tiene vértices $\{P_j\}_{j=1}^N$ y lados $\{P_j + t(P_{j+1} - P_j) : 0 \leq t \leq 1\}_{j=1}^N$ con normal exterior unitaria² $\eta = \{\eta_j\}_{j=1}^N$ en cada punto diferente de los vértices. Observar que hacemos la identificación $P_{N+1} = P_1$. Utilizando el teorema de Green, si $m \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_P(m) &= \hat{\chi}(m) = \int_P e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx \\ &= \int_P \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{-m_1}{2\pi i |m|^2} e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{-m_2}{2\pi i |m|^2} e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} \right) \right) dx \\ &= \int_{\partial P} \frac{m_2}{2\pi i |m|^2} e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx_1 + \frac{-m_1}{2\pi i |m|^2} e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx_2 \\ &= -\frac{1}{2\pi i |m|^2} \int_{\partial P} \langle m, \eta \rangle e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \frac{\langle m, \eta_j \rangle}{|m|^2} |P_{j+1} - P_j| \int_0^1 e^{-2\pi i \langle m, (P_j + t(P_{j+1} - P_j)) \rangle} dt, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las notaciones $m = (m_1, m_2)$ y $x = (x_1, x_2)$. La integral unidimensional se puede calcular implícitamente

$$\int_0^1 e^{-2\pi i \langle m, (P_j + t(P_{j+1} - P_j)) \rangle} dt = \begin{cases} 0, & \text{si } \langle m, (P_{j+1} - P_j) \rangle \neq 0, \\ 1, & \text{si } \langle m, (P_{j+1} - P_j) \rangle = 0. \end{cases}$$

²Si $\gamma(t)$ es la parametrización de una curva en \mathbb{R}^2 , la normal unitaria exterior es $\frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|}$.

Recordando que $\widehat{\varphi}(0) = 1$, y que $\widehat{\chi}_P(0) = A(P)$, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \widehat{\varphi}(\epsilon m) \widehat{\chi}_P(m) &= \widehat{\chi}_P(0) + \sum_{m \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \widehat{\varphi}(\epsilon m) \widehat{\chi}_P(m) \\ &= A(P) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N |P_{j+1} - P_j| \left(\sum_{m \neq 0, \langle m, P_{j+1} - P_j \rangle = 0} \widehat{\varphi}(\epsilon m) \frac{\langle m, \eta_j \rangle}{|m|^2} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, la expresión entre paréntesis anterior se anula porque $\widehat{\varphi}$ es radial y $\widehat{\varphi}(\epsilon m) \frac{\langle m, \eta_j \rangle}{|m|^2}$ es una función impar en m .

Por tanto,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \widehat{\varphi}(\epsilon m) \widehat{\chi}_P(m) = A(P)$$

que según (5.4) es suficiente para lo que queríamos probar. \square

Capítulo 6

Teorema de Ehrhart

En anteriores capítulos hemos observado y demostrado como en dos dimensiones se puede calcular el área de un polígono reticular simple a partir de un resultado de conteo de puntos reticulares, el teorema de Pick.

Pero la pregunta que nos surge es, ¿podemos usar la misma técnica para dimensiones mayores que 2? Para responder a esto utilizaremos un ejemplo de la mano de John Reeve [8] que enseña que la idea de calcular áreas mediante el conteo de puntos reticulares no se generaliza a tres dimensiones directamente.

La imposibilidad de emplear el teorema de Pick en su forma original cuando la dimensión es mayor que dos no nos impide encontrar una relación provechosa para dimensiones superiores. Sin embargo, veremos que existe un polinomio, como función del número de puntos reticulares en el politopo, cuyo coeficiente principal es el volumen del politopo reticular. Este hecho fue obtenido por un profesor de matemáticas de instituto francés que tenía por hobby era la investigación matemática, Eugène Ehrhart. Para desarrollar este capítulo utilizaremos el artículo [9] y el libro [2] que constituyen una versión más fácil de comprender que el artículo original de Ehrhart [5].

Ejemplo 6.1. Sea T_h el tetraedro cuyos vértices son los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, h)$ para $h \in \mathbb{Z}_{>0}$; su base es el triángulo cuyos vértices son los tres primeros puntos mencionados. Vemos en la figura 6.1 un ejemplo del T_h descrito con $h = 3$. El volumen de T_h es $\frac{1}{3}$ el área de la base multiplicada por la altura, que es h . Como resultado el volumen es $\frac{h}{6}$. Los únicos puntos reticulares dentro de T_h son los vértices, ya que un punto genérico $P \in T_h$ es de la forma

$$P = a(0, 0, 0) + b(1, 0, 0) + c(0, 1, 0) + d(1, 1, h),$$

donde $a, b, c, d \geq 0$ y $a + b + c + d = 1$. Luego si $P \in \mathbb{Z}^3$, tendríamos que tener $a, b, c \in \{0, 1\}$. Pero si alguno de ellos es 1, entonces los otros tres coeficientes

deben de ser 0. Si son todos 0, P es el origen. Así que nos quedamos con el hecho de que T_h tiene 4 puntos reticulares pero el volumen crece tanto como se desee cuando h crece. Luego, para mayores dimensiones que dos, no puede existir ningún teorema análogo al de Pick.

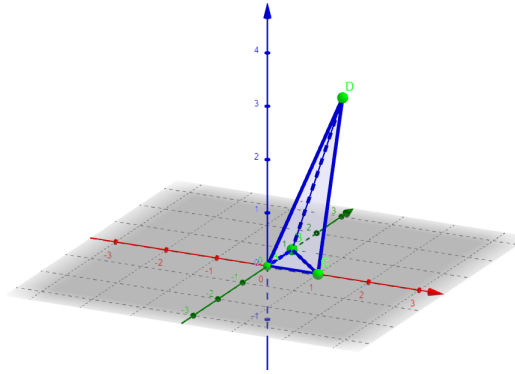


Figura 6.1: Tetraedro con vértices $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ y $(1, 1, h = 3)$.

Veamos ahora, a manera introductoria, la forma que adopta el teorema de Ehrhart en dimensión dos. Sea \mathcal{P} un polígono reticular simple y $A(\mathcal{P})$ su área. El número de puntos reticulares de la frontera de \mathcal{P} será n_{bd} mientras que el número de puntos reticulares del interior será n_{int} . Por lo tanto, la fórmula del teorema de Pick viene dada por

$$A(\mathcal{P}) = n_{int} + \frac{n_{bd}}{2} - 1. \quad (6.1)$$

Sea t un entero positivo, consideramos la homotecia de factor t ; así $t\mathcal{P} = \{tx : x \in \mathcal{P}\}$, es el polígono reticular simple que se obtiene de dicha homotecia.

Teorema 6.2. *Sea $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(t)$ el número de puntos reticulares en $t\mathcal{P}$. Entonces se tiene*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(t) = A(\mathcal{P})t^2 + \frac{n_{bd}}{2}t + 1.$$

Para probar este teorema introducimos un lema que permite establecer una relación el número de puntos de la frontera de \mathcal{P} y el de $t\mathcal{P}$.

Lema 6.3. *Sea n_{bd} la cantidad de puntos reticulares de la frontera de un polígono reticular simple \mathcal{P} . Sea $t \in \mathbb{Z}$, la cantidad de puntos reticulares en la frontera del polígono $t\mathcal{P}$ es $|t|n_{bd}$.*

Demostración. Sea J el número de vértices de \mathcal{P} y sea n_{bd}^j la cantidad de puntos reticulares en el lado j -ésimo del polígono \mathcal{P} , con $j = 1, 2, \dots, J$, entonces

$$n_{bd} = \sum_{j=1}^J n_{bd}^j - J.$$

Además, si l_j representa la longitud del lado j -ésimo de \mathcal{P} , se tiene que existe un factor α_j tal que

$$(n_{bd}^j - 1)\alpha_j = l_j; \quad \sum_{j=1}^J l_j = L$$

donde L es la longitud del polígono \mathcal{P} .

Por tanto, la longitud l_j^t del lado correspondiente a l_j en el polígono $t\mathcal{P}$ es

$$l_j^t = |t|l_j = |t|(n_{bd}^j - 1)\alpha_j.$$

Como los lados de \mathcal{P} y de $t\mathcal{P}$ son paralelos, la longitud l_j^t está relacionada con la cantidad de puntos reticulares en dicho lado por el factor α_j ; así la cantidad de puntos reticulares en dicho lado es

$$|t|(n_{bd}^j - 1)\alpha_j \frac{1}{\alpha_j} + 1 = |t|(n_{bd}^j - 1) + 1 = |t|n_{bd}^j - (|t| - 1).$$

De donde, si n_{bd}^t es la cantidad de puntos reticulares en la frontera de $t\mathcal{P}$; se tiene

$$\begin{aligned} n_{bd}^t &= \sum_{j=1}^J (|t|n_{bd}^j - (|t| - 1)) - J \\ &= |t| \sum_{j=1}^J n_{bd}^j - J(|t| - 1) - J \\ &= |t|(\sum_{j=1}^J n_{bd}^j - J) = |t|n_{bd}. \quad \square \end{aligned}$$

Demostración del teorema 6.2. Según el lema 6.3, el número de puntos reticulares de la frontera de $t\mathcal{P}$, siendo t un entero positivo, es $t n_{bd}$; además, su área es $A(\mathcal{P})t^2$. Si denotamos como $n_{int}(t)$ el número de puntos reticulares del interior de $t\mathcal{P}$, entonces, por la fórmula del teorema de Pick (6.1), se tiene

$$A(\mathcal{P})t^2 = n_{int}(t) + \frac{n_{bd}}{2}t - 1. \quad (6.2)$$

Como el número de puntos reticulares de $t\mathcal{P}$ es $n_{int}(t) + t n_{bd}$, sumando $\frac{n_{bd}}{2}t + 1$ a ambos lados de (6.2), obtenemos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(t) = n_{int}(t) + t n_{bd} = A(\mathcal{P})t^2 + \frac{n_{bd}}{2}t + 1. \quad \square$$

Previo a enunciar el teorema de Ehrhart requerimos aún varias definiciones. Dados los puntos $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$, una *combinación convexa* de ellos es una combinación lineal de la forma $a_1v_1 + \dots + a_mv_m$ donde $v_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$ y $a_1 + \dots + a_m = 1$. La *envoltura convexa* de un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de S y lo denotamos como

$$\text{conv}(S) := \{a_1x_1 + \dots + a_mx_m \mid a_i \geq 0, a_1 + \dots + a_m = 1, x_i \in S\}.$$

Un *punto reticular* en \mathbb{R}^n es un punto con coordenadas enteras. Un *politopo* $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ es la envoltura convexa de un número finito de puntos reticulares en \mathbb{R}^n . La *dimensión* del politopo \mathcal{P} es la dimensión del subespacio de vectores de \mathbb{R}^n que los vectores asociados a sus puntos generan. Si un punto $v \in \mathcal{P}$ no se puede expresar como una combinación convexa de puntos de \mathcal{P} que no incluyan a v , entonces v es un vértice de \mathcal{P} . Por último, si la dimensión de \mathcal{P} es d y este tiene $d + 1$ vértices, decimos que \mathcal{P} es un *simplex*; observar que en un simplex cada punto se puede representar de manera única como combinación lineal de sus vértices.

Procedemos con el enunciado de dos propiedades equivalentes que usaremos en la prueba del teorema de Ehrhart.

Lema 6.4. *Para la función $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ y $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Para todo $t \geq 0$,*

$$\sum_{k=0}^{d+1} (-1)^{d+1-k} \binom{d+1}{k} f(t+k) = 0.$$

2. *Hay un polinomio de grado $\leq d$ que coincide con $f(t)$ para todos los enteros no negativos.*

Demostración. La prueba consiste en hacer inducción sobre d . Si $d = 0$, entonces la equivalencia dice que f es una función constante si y sólo si $f(t+1) - f(t) = 0$, para todo $t \geq 0$; que es obviamente cierta. Ahora suponemos que $d > 0$ y que la equivalencia es cierta para $d - 1$.

Suponemos que la segunda propiedad es cierta. Entonces $g(t) = f(t+1) - f(t)$ es un polinomio de grado $\leq d - 1$, así que por la hipótesis de inducción

y utilizando $\binom{d}{k-1} + \binom{d}{k} = \binom{d+1}{k}$ se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} \binom{d}{k} (f(t+1+k) - f(t+k)) \\
&= \sum_{k=1}^{d+1} (-1)^{d-k+1} \binom{d}{k-1} f(t+k) + \sum_{k=0}^d (-1)^{d-k+1} \binom{d}{k} f(t+k) \\
&= f(t+d+1) + (-1)^{d+1} f(t) + \sum_{k=1}^d (-1)^{d-k+1} \binom{d+1}{k} f(t+k) \\
&= \sum_{k=0}^{d+1} (-1)^{d-k+1} \binom{d+1}{k} f(t+k),
\end{aligned}$$

que es la primera propiedad.

Ahora suponemos que la primera propiedad se cumple. Yendo hacia atrás en los cálculos anteriores, vemos que la función $g(t) = f(t+1) - f(t)$ satisface la primera propiedad para $d-1$ en vez de para d , luego por la hipótesis de inducción, existe un polinomio de grado $\leq d-1$ que concuerda con $g(t)$ para todo entero no negativo. Así que podemos escribir $f(t+1) = g(t) + f(t)$, y haciendo inducción en t esto se convierte en

$$f(t+1) = f(0) + \sum_{k=0}^t g(k).$$

Así que es suficiente comprobar que la suma de la derecha es un polinomio con grado máximo d . Descomponiendo g en monomios, podemos reducir la tarea a comprobar que $\sum_{k=0}^t k^r$ es un polinomio de grado $r+1$. Como t^r es un polinomio, está en el espacio vectorial con base $\binom{t}{i}$ para $i \leq r$. Así que podemos hacer una reducción y probar que $\sum_{k=0}^t \binom{k}{i}$ es un polinomio de grado $i+1$ con i fijo. Pero esto es verdad por la identidad

$$\sum_{k=0}^t \binom{k}{i} = \binom{t+1}{i+1}.$$

Para ver por qué esta identidad es cierta, notamos que el lado derecho de la identidad cuenta $(i+1)$ -subconjuntos de $\{1, \dots, t+1\}$, mientras que el lado izquierdo cuenta lo mismo si interpretamos cada $\binom{k}{i}$ como la cuenta del número de $(i+1)$ -subconjuntos de $\{1, \dots, k+1\}$ que contiene $k+1$. \square

Una vez vista esta equivalencia enunciamos el teorema de Ehrhart.

Teorema 6.5 (Ehrhart). *Si $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ es un politopo reticular de dimensión d , entonces la función que cuenta la cardinalidad del conjunto $(t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n)$, coincide con un polinomio $L_{\mathcal{P}}(t)$ de grado d para todos los enteros no negativos.*

Demostración. Mostraremos que

$$L_{\mathcal{P}}(t + d + 1) = \sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} \binom{d+1}{k} L_{\mathcal{P}}(t + k) \quad (6.3)$$

para todo $t \geq 0$; entonces del lema 6.4 se sigue que $L_{\mathcal{P}}$ es un polinomio de grado menor o igual que d . Es suficiente probar (6.3) para símlices ya que cualquier politopo reticular \mathcal{P} puede ser triangulado¹ en símlices $\{T_i\}$ de tal forma que cada vértice de cada uno de los $\{T_i\}$ es un vértice de \mathcal{P} . Por el principio de inclusión-exclusión² permite expresar $\ell_{\mathcal{P}}$ como una suma de los ℓ_{T_i} con los signos apropiados. Así que sin pérdida de generalidad, asumimos que \mathcal{P} es un simplex.

Sean $\{v_0, \dots, v_d\}$ los vértices de \mathcal{P} y fijamos un entero $t \geq 0$. Para cada vértice v_i de \mathcal{P} , definimos $Q_i := (t + d)\mathcal{P} + v_i$. Volvemos a usar el principio de inclusión-exclusión para calcular el número de puntos reticulares en $Q := \cup_i Q_i$. Para ello, sumamos el número de puntos reticulares contenidos en cada uno de los Q_i , restamos aquellos que estén contenidos en la intersección de dos Q_i y así sucesivamente. Con nuestra construcción de estos símlices, podemos describir las k -intersecciones explícitamente. La primera observación es que

$$\begin{aligned} Q_j &= (t + d)\mathcal{P} + v_j = \\ &= \left\{ v_j + \sum_{i=0}^d (t + d)c_i v_i : c_i \geq 0, \sum_{i=0}^d c_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^d a_i v_i : a_j \geq 1, a_i \geq 0 \text{ si } i \neq j, \sum_{i=0}^d a_i = t + d + 1 \right\}. \end{aligned}$$

¹La *triangulación* de un politopo \mathcal{P} es una colección finita de símlices $\mathcal{T} = \{T_i\}$ que cumplen tres propiedades. La primera es que $\cup T_i = \mathcal{P}$. La segunda dice que si T' es la cara de algún $T_i \in \mathcal{T}$ entonces $T' \in \mathcal{T}$. Por último, para $T_i, T_j \in \mathcal{T}$, la intersección de ambos es una cara tanto de T_i como de T_j .

²Sean A_1, A_2, \dots, A_n n conjuntos finitos. Entonces la cardinalidad $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$, viene dada por la fórmula, conocida como el principio de inclusión-exclusión, siguiente

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} |\cap_{i \in I} A_i|.$$

Así que para cualquier $I \subseteq D := \{0, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} Q_i &= \left\{ \sum_{i=0}^d a_i v_i : a_i \geq 1 \text{ si } i \in I, a_i \geq 0 \text{ si } i \notin I, \sum_{i=0}^d a_i = t + d + 1 \right\} \\ &= (t + d + 1 - \#I)\mathcal{P} + \sum_{i \in I} v_i, \end{aligned}$$

donde $\#I$ es la función que cuenta la cardinalidad del conjunto I .

Para cada $k = 1, \dots, d+1$, hay $\binom{d+1}{d+1-k}$ k -intersecciones, y cada una de ellas contiene $L_{\mathcal{P}}(t + d + 1 - k)$ puntos reticulares ya que los conjuntos difieren uno de otro por una traslación entera. Luego el principio de inclusión-exclusión nos dice que

$$\#(Q \cap \mathbb{Z}^n) = \sum_{k=1}^{d+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq D \\ \#I=k}} \#(\bigcap_{i \in I} Q_i \cap \mathbb{Z}^n) \quad (6.4)$$

$$= \sum_{k=1}^{d+1} (-1)^{k+1} \binom{d+1}{d+1-k} L_{\mathcal{P}}(t + d + 1 - k) \quad (6.5)$$

$$= \sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} \binom{d+1}{k} L_{\mathcal{P}}(t + k). \quad (6.6)$$

Notemos ahora que si $t = k = 0$, entonces $L_{\mathcal{P}}(0) = 1$. La parte derecha de esta ecuación coincide con la parte derecha de la ecuación (6.3). Para finalizar, notamos que $Q = (t + d + 1)\mathcal{P}$. Es claro que $Q \subseteq (t + d + 1)\mathcal{P}$. Para probar la otra inclusión, notamos que

$$(t + d + 1)\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=0}^d a_i v_i : a_i \geq 0, \sum_{i=0}^d a_i = t + d + 1 \right\}.$$

Como $t \geq 0$, se sigue que para cualquier punto $P = a_0 v_0 + \dots + a_d v_d \in (t + d + 1)\mathcal{P}$, debe existir algún j tal que $a_j \geq 1$. Así que $P \in Q_j$, luego $(t + d + 1)\mathcal{P} \subseteq Q$, de donde (6.4) prueba (6.3).

Para finalizar, debemos probar que el grado del polinomio $L_{\mathcal{P}}(t)$ es d . El trabajo que hemos hecho hasta ahora nos sirve para ver que este polinomio tiene como mucho grado d . Trasladando \mathcal{P} si fuese necesario, asumimos que uno de sus vértices es el origen. Como \mathcal{P} es d -dimensional, hay vértices v_1, \dots, v_d que son linealmente independientes cuando se consideran como vectores. Para los enteros positivos de la forma $k_1, \dots, k_d \leq t$, el punto $k_1 v_1 + \dots + k_d v_d$ está en $(t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n)$, y estos puntos son todos distintos para las diferentes elecciones de k_i por la independencia lineal de los v_i . De esta forma $L_{\mathcal{P}}(dt) \geq t^d$, que nos muestra que $L_{\mathcal{P}}(t)$ tiene al menos grado d . Luego el polinomio tiene grado d . \square

Tras ver el teorema de Ehrhart, lo único que nos falta hacer es utilizarlo para probar que el coeficiente director del polinomio es el volumen del politopo.

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de Borel, es decir, un conjunto de la σ -álgebra generada por los abiertos de \mathbb{R}^n en la topología euclídea, definimos su volumen como $\text{vol}(S) := \int_S dx$. Por la definición de integral, en el sentido Riemann, podemos pensar en calcular el volumen de S mediante la aproximación de cajas d -dimensionales que se hacen cada vez más pequeñas. Para ser más precisos, si tomamos las cajas con lados de $\frac{1}{t}$ de longitud entonces cada una de ellas tiene volumen $\frac{1}{t^d}$. Además podríamos pensar que las cajas llenan el espacio entre los puntos de la cuadrícula en el retículo $(\frac{1}{t}\mathbb{Z})^d$. Esto significa que el cálculo del volumen puede ser aproximado contando cajas, o equivalentemente, puntos reticulares en $(\frac{1}{t}\mathbb{Z})^d$:

$$\text{vol}(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^d} \#(S \cap (\frac{1}{t}\mathbb{Z})^d).$$

Es un paso corto para contar puntos reticulares en dilataciones de S , ya que

$$\#(S \cap (\frac{1}{t}\mathbb{Z})^d) = \#(tS \cap \mathbb{Z}^d).$$

Resumamos todo esto en un resultado,

Lema 6.6. *Suponemos un conjunto de Borel $S \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensional. Entonces*

$$\text{vol}(S) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^d} \#(tS \cap \mathbb{Z}^d).$$

Enfatizamos que S es d -dimensional, porque de otra manera, con nuestra definición de volumen de S , se tendría $\text{vol}(S) = 0$.

Parte de la magia del teorema de Ehrhart yace en el hecho de que para un politopo d -dimensional \mathcal{P} , no necesitamos tomar límites para calcular su volumen; necesitamos solamente calcular los $d+1$ coeficientes de un polinomio.

Teorema 6.7. *Suponemos que $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ es un politopo reticular con el polinomio de Ehrhart $c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \dots + c_1 t + 1$. Entonces $c_d = \text{vol}(\mathcal{P})$*

Demostración. Por el lema 6.6,

$$\text{vol}(\mathcal{P}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \dots + c_1 t + 1}{t^d} = c_d. \quad \square$$

Acabamos de probar que el coeficiente director del polinomio de Ehrhart corresponde al volumen del politopo \mathcal{P} pero Ehrhart también consiguió describir en términos combinatorios los otros coeficientes del polinomio. Incluir esas relaciones extendería demasiado este trabajo.

Apéndice A

Relaciones trigonométricas

En este apéndice presentaremos un par de lemas de carácter trigonométrico y geométrico para ayudarnos en la prueba del lema 2.6 en el capítulo 2.

Lema A.1. Sean $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $e_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ no nulos, se tiene la siguiente relación

$$\cos \angle(e_1, e_2) = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{|e_1||e_2|}. \quad (\text{A.1})$$

Demostración. Procedemos utilizando el teorema del coseno

$$|e_1 - e_2|^2 = |e_1|^2 + |e_2|^2 - 2|e_1||e_2| \cos \angle(e_1, e_2).$$

De donde

$$|e_1 - e_2|^2 = \langle e_1 - e_2, e_1 - e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle - \langle e_2, e_1 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle = |e_1|^2 + |e_2|^2 - 2\langle e_1, e_2 \rangle.$$

Por lo tanto sustituyendo tenemos

$$|e_1|^2 + |e_2|^2 - 2\langle e_1, e_2 \rangle = |e_1|^2 + |e_2|^2 - 2|e_1||e_2| \cos \angle(e_1, e_2).$$

Y simplificando queda:

$$\cos \angle(e_1, e_2) = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{|e_1||e_2|}. \quad \square$$

Este resultado se usa en la demostración del siguiente lema.

Lema A.2. Sean $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $e_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; el área A del paralelogramo determinado por los vectores e_1 y e_2 es

$$A(e_1, e_2) = \left\| \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right\| = |ad - bc|. \quad (\text{A.2})$$

Demostración. Si e_1 o e_2 son el vector nulo el paralelogramo determinado por ellos se reduce a un segmento que tiene área cero y la fórmula es obvia.

Ahora consideramos $e_1 \neq 0$ y $e_2 \neq 0$. Tenemos la siguiente igualdad

$$A(e_1, e_2) = |e_1| \cdot |e_2| \cdot \sin \angle(e_1, e_2). \quad (\text{A.3})$$

Además se cumple que

$$\sin \angle(e_1, e_2) = \sqrt{1 - \cos^2 \angle(e_1, e_2)}. \quad (\text{A.4})$$

Y usando el lema A.1

$$\sin \angle(e_1, e_2) = \sqrt{1 - \frac{\langle e_1, e_2 \rangle^2}{|e_1|^2 |e_2|^2}} = \sqrt{\frac{|e_1|^2 |e_2|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2}{|e_1|^2 |e_2|^2}}.$$

Por lo tanto sustituyendo (A.4) en (A.3)

$$A(e_1, e_2) = |e_1| \cdot |e_2| \cdot \sqrt{\frac{|e_1|^2 |e_2|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2}{|e_1|^2 |e_2|^2}} = \sqrt{|e_1|^2 |e_2|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2}.$$

Usando que $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A(e_1, e_2) &= \sqrt{|e_1|^2 |e_2|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\ &= \sqrt{a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + c^2 d^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2 - 2acbd} \\ &= \sqrt{a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2acbd} \\ &= \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc|. \end{aligned}$$

Por lo tanto queda probado (A.2)

$$A(e_1, e_2) = \left\| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\| = |ad - bc|. \quad \square$$

Apéndice B

Transformada de Fourier

En este apéndice encontraremos todas las propiedades de la transformada de Fourier que necesitamos para el desarrollo del capítulo 5.

Comenzamos definiendo los conceptos básicos. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ una función integrable, su *transformada de Fourier* se define

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Utilizaremos la notación $\mathcal{F}(f)$, \widehat{f} o $(f)^\widehat{}$ para la transformada de Fourier, según sea la situación. La *convolución* de dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ viene dada por

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x - y) f(y) dy;$$

observar que como

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y) f(y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| dx < \infty,$$

la convolución de dos funciones de $L^1(\mathbb{R}^d)$ está bien definida en casi todo punto y representa una función que está también en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Utilizaremos la notación $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ para referirnos, como es usual, a las funciones $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ continuas en \mathbb{R}^d que cumple

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Además, si $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ y $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, utilizamos la notación $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$.

Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

donde $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_d|$.

Seguimos con un lema que contiene algunos de los resultados básicos de la transformada de Fourier.

Lema B.1. *Supongamos que $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

(a) *Se tiene*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{B.1})$$

(b) *La transformada de Fourier conmuta con rotaciones; en particular, si una función es radial,¹ su transformada también lo es.*

(c) *Se cumple*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) g(x) dx.$$

(d) *Si para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ tal que $|\alpha| \leq k$ se tiene $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$\widehat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d), \quad y \quad D^\alpha \widehat{f} = ((-2\pi i x)^\alpha \widehat{f}),$$

(e) *Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ y $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ con $|\alpha| \leq k$, y $D^\alpha f \in \mathcal{C}_0$ para $|\alpha| \leq k - 1$, entonces*

$$(D^\alpha \widehat{f})(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

(f) *Se cumple²*

$$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d).$$

Demostración. (a) Por el teorema de Fubini y haciendo el cambio de variable $t = x - y$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) dy \right) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(y) e^{-2\pi i \langle \xi, t+y \rangle} dt \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-2\pi i \langle \xi, t \rangle} dt \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i \langle \xi, y \rangle} dy = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

¹Una función es *radial* si su valor no cambia al rotar su argumento; o sea, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es *radial* si existe una función $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \varphi(|x|)$, $x \in [0, \infty)$.

² $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ representa el espacio de las funciones continuas en \mathbb{R}^d que tienen límite cero en el infinito.

(b) Sea R una rotación en \mathbb{R}^d ; identificamos dicha transformación con su matriz asociada. Se tiene $R^t R = I_d$, donde I_d es la identidad en \mathbb{R}^d , $|R| = 1$, y

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(R))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(R(x)) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(R(x)) e^{-2\pi i \langle R(\xi), R(x) \rangle} d(R(x)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i \langle R(\xi), y \rangle} dy = \widehat{f}(R(\xi)).\end{aligned}$$

(c) Aplicando el teorema de Fubini se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(f(x) \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(y) \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx \right) dy.$$

(d) Aplicando el teorema de derivación de integrales paramétricas, como

$$\left| D_\xi^\alpha \left(f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} \right) \right| = (2\pi)^{|\alpha|} \left| x^\alpha f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} \right| \leq C |x^\alpha f(x)|,$$

se tiene

$$\begin{aligned}D^\alpha (\mathcal{F}(f))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} D_\xi^\alpha \left(f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} \right) dx \\ &= (-2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha f(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx = ((-2\pi i x)^\alpha f)(\xi).\end{aligned}$$

(e) Si $n = 1 = |\alpha|$, como $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ = -2\pi i \xi \left(f(x) e^{-2\pi i \xi x} \right) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} + 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi),\end{aligned}$$

que es la relación que queremos probar en este caso.

Si $n > 1$, $|\alpha| = 1$, y $\alpha_j = 1$, entonces se aplica el mismo argumento que antes integrando por partes en la j -ésima variable. La situación general se prueba por inducción en $|\alpha|$.

(f) Como $|e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle}| = 1$, la transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R}^d)$ está acotada; más aún,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx.$$

además, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, \widehat{f} es continua en \mathbb{R}^d . También, si $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ y tiene soporte compacto, entonces por (e) se tiene que existe una constante C tal que

$$|\xi f(\xi)| \leq C, \quad x \in \mathbb{R}^d;$$

de donde se concluye que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) = 0;$$

es decir, la afirmación en (f) es cierta para las funciones continuamente diferenciables de soporte compacto. Como ellas son densas en $L^1(\mathbb{R}^d)$, la misma conclusión es cierta en $L^1(\mathbb{R}^d)$. \square

Ejemplo B.2. Sea $a > 0$. Si $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$, donde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2$, entonces $\widehat{f}(\xi) = a^{-n/2} e^{-\pi|\xi|^2/a}$.

Es fácil deducir la fórmula para $d > 1$ del caso $d = 1$. En este último caso, por el lema B.1 (d), (e), se tiene

$$\begin{aligned} (\widehat{f}(\xi))' &= (-2\pi i x e^{-\pi a x^2})'(\xi) = \frac{i}{a} ((e^{-\pi a x^2})')(\xi) \\ &= \frac{i}{a} ((2\pi \xi) \widehat{f}(\xi)) = -\left(\frac{2\pi}{a}\right) \xi \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Resolviendo esa ecuación diferencial o viendo que $\frac{d}{d\xi} (e^{\pi \xi^2/a} \widehat{f}(\xi)) = 0$, de modo que $e^{\pi \xi^2/a} \widehat{f}(\xi)$ es constante y evaluando en $\xi = 0$, que coincide con

$$\begin{aligned} \widehat{f}(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi a x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-\pi a x^2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_1^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \Gamma(1/2) = a^{-1/2}, \end{aligned}$$

deducimos que la fórmula del ejemplo se tiene.

Sea \mathcal{S} la clase de las funciones de la clase Schwartz; es decir, $\varphi \in \mathcal{S}$ significa que φ es infinitamente diferenciable en \mathbb{R}^d tal que cualquiera sean los multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ se tiene

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty,$$

donde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ y $D^\beta \varphi = (D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_d}^{\beta_d})(\varphi)$, como hemos definido al principio del apéndice. Dentro de esta clase se encuentra \mathcal{D} , las funciones infinitamente diferenciables en \mathbb{R}^d con soporte compacto.

Lema B.3. Si $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$. En particular, si $\varphi \in \mathcal{S}$, se tiene

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(m - \xi)| < \infty. \quad (\text{B.2})$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$ y $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n > (d-1)+2$, se tiene

$$(1 + (x_1^2 + \dots + x_d^2))^n |x^\alpha \varphi(x)| \leq C, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{B.3})$$

De donde se deduce que $x^\alpha \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ porque haciendo cambio de variables a polares, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1 + (x_1^2 + \dots + x_d^2))^n} = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^n} dr < \infty,$$

donde $\sigma(\mathbb{S}^{d-1})$ representa la medida de Lebesgue superficial de la esfera $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$. Por tanto, $x^\alpha \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, y según el lema B.1 (d) y (e) eso implica que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Además, de la desigualdad (B.3) se sigue también (B.2) análogamente a como se hizo en el lema 4.2. \square

La *transformada inversa de Fourier* de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ viene dada por

$$\check{f}(x) = \widehat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{2\pi i \langle x, t \rangle} dt.$$

Teorema B.4. (a) Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$(\widehat{\check{f}}) = f \quad \text{ctp.}$$

(b) Si $f \in (L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d))$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

La condición $f \in (L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d))$ se cumple, por ejemplo, cuando $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y el soporte de f es un compacto.

Demostración. (a) Sean $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$ y la función $\phi(\xi) = e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle - \pi t^2 |\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Según el ejemplo B.2 y el lema B.1 (c), se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\phi}(y-x) f(y) dy = (g_t * f)(x),$$

donde $g(x) = e^{-\pi |x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Como $\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, según el lema 5.1 se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (g_t * f) = f \quad \text{en } L^1(\mathbb{R}^d). \quad (\text{B.4})$$

Por otra parte, como $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por el teorema de convergencia dominada, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle - \pi t^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d\xi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi = (\widehat{\check{f}})(x) \quad \text{ctp.}$$

Como la convergencia en $L^1(\mathbb{R}^d)$ implica la convergencia en casi todo punto por subsucesiones, se tiene que la relación anterior y (B.4) implican

$$f(x) = (\hat{f})^\vee(x) \quad \text{ctp.}$$

De igual forma, se puede probar que

$$f(x) = (\check{f})^\wedge(x) \quad \text{ctp.}$$

Para que esté completamente autocontenido, incluimos los detalles. Consideremos $\psi(\xi) = \phi(-\xi) = e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle - \pi t^2 |\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Como $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$, también $\check{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) \check{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \check{\psi}(y-x) f(y) dy = (g_t * f)(x),$$

donde $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Con los mismos argumentos de antes obtenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (g_t * f)(x) = f(x) \quad \text{en } L^1(\mathbb{R}^d),$$

y también

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) \check{f}(\xi) d\xi = (\check{f})^\wedge(x), \quad \text{ctp.}$$

(b) Sea $\mathcal{J} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$. Como $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por (a) tenemos que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. De donde $\mathcal{J} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ y dicho conjunto es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$ porque la clase de Schwartz $\mathcal{S} \subset \mathcal{J}$ lo es.

Si $f, g \in \mathcal{J}$ y $h = \bar{g}$, entonces por el inciso (a)

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{g}(x) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle}} dx = \overline{\hat{g}(\xi)}.$$

Otra vez usando el lema B.1 (c) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\hat{g}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{h}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) \bar{g}(x) dx.$$

En particular, si $f = g$, la igualdad anterior se transforma en

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2;$$

es decir, \mathcal{F} es una isometría de \mathcal{J} en \mathcal{J} . Como $\mathcal{F}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ por el inciso (a), se tiene que $\mathcal{F}|_{\mathcal{J}}$ se extiende como una isometría a $L^2(\mathbb{R}^d)$, en particular también $L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. \square

En las series de Fourier en varias variables juega un papel muy importante el siguiente resultado. Ver [10, p. 248, Teorema 1.7].

Teorema B.5. (i) Los polinomios trigonométricos son densos en $\mathcal{C}([0, 1]^d)$ y $L^p([0, 1]^d)$, $1 \leq p < \infty$.

(ii) Supongamos que $f \in L^1([0, 1]^d)$ y

$$\int_{[0,1]^d} f(x) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx = 0, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{Z}^d,$$

entonces $f = 0$ casi todo punto.

(iii) Supongamos que $f \in L^2([0, 1]^d)$ y

$$a_k = \int_{[0,1]^d} f(x) e^{-2\pi i \langle k, x \rangle} dx$$

representan sus coeficientes de Fourier. Entonces

$$\int_{[0,1]^d} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |a_k|^2,$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} |f(x) - \sum_{|k| \leq N} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle}|^2 dx = 0;$$

es decir, la correspondencia $f \leftrightarrow \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ de $L^2([0, 1]^d)$ en $L^2(\mathbb{Z}^d)$ es una isometría.³

Corolario B.6. Supongamos que $f \in L^1([0, 1]^d)$ y que sus coeficientes de Fourier $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ satisfacen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |a_k| < \infty. \quad (\text{B.5})$$

Entonces existe $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$f(x) = g(x), \quad \text{casi todo punto de } [0, 1]^d,$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle} = g(x) \quad (\text{B.6})$$

uniformemente en compactos de \mathbb{R}^d .

³Una transformación lineal entre espacios de Hilbert se dice que es una *isometría* si conserva las normas.

Demostración. Observar que si $M, N \in \mathbb{N}$ y $M \leq N$, entonces

$$\left| \sum_{|k| \leq N} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle} - \sum_{|k| \leq M} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle} \right| = \left| \sum_{M \leq |k| \leq N} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle} \right| \leq \sum_{M \leq |k| \leq N} |a_k|$$

que converge a cero cuando $M, N \rightarrow \infty$, según la hipótesis (B.5), uniformemente en $x \in \mathbb{R}^k$; o sea, $\{\sum_{|k| \leq N} a_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle}\}_{N \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de las funciones continuas y periódicas, con la norma uniforme. Como este espacio es de Banach, entonces existe $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ tal que tiene lugar (B.6). Está claro que

$$\int_{[0,1]^d} g(x) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} \left(\sum_{|k| \leq N} a_k e^{2\pi i \langle m, x \rangle} \right) e^{-2\pi i \langle k, x \rangle} dx = a_m,$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^d$. De modo que los coeficientes de Fourier de $g - f$ son cero. Según (ii) en el teorema B.5, se tiene que

$$g(x) = f(x), \quad \text{casi todo punto de } [0, 1]^d. \quad \square$$

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo de fin de grado me ha permitido observar la enorme extensión del mundo de las matemáticas y lo relacionadas que están las áreas que lo componen.

Al comenzar a investigar sobre el teorema de Pick me llevé la impresión de que era un resultado con unas hipótesis bastante sencillas, pero a medida que avanzaba con el estudio teórico me iba dando cuenta del potencial de este inocente resultado. Las pruebas que hemos podido observar durante este trabajo usan profundos conocimientos e importantes herramientas de distintas áreas de las matemáticas. Este teorema es fundamental en la geometría combinatoria, pero hemos conseguido, capítulo a capítulo, vincularlo con otras disciplinas de esta ciencia. Por tanto, ha sido un trabajo de estudio denso y complejo que en parte he sido capaz de llevar adelante gracias a lo aprendido durante la carrera.

Me hubiese encantado seguir el estudio sobre este bello resultado, ya que sigue siendo objeto de investigación actualmente, explorando sus generalizaciones a casos más complejos.

Esta tesis me ha servido para darme cuenta de muchas cosas a nivel personal. A pesar de lo duras que se ponían las cosas en ciertos momentos de la realización de este trabajo, la gran ayuda de mi tutor, la constancia y el esfuerzo que he conseguido tener en todo momento, han hecho posible la superación de muchas de esas dificultades. Además observar la labor de un investigador de las matemáticas, como mi tutor, ha conseguido que evolucione en mi rigurosidad y claridad a la hora de escribir los conocimientos de esta ciencia.

En conclusión, este trabajo representa mi mayor orgullo como estudiante de esta preciosa carrera.

Bibliografía

- [1] Martin Aigner y Günter M. Ziegler. *Proofs from the Book*. Vol. 1. Springer, 1999.
- [2] Matthias Beck y Sinai Robins. *Computing the continuous discretely*. Vol. 61. Springer, 2007.
- [3] Luca Brandolini et al. “Pick’s theorem and convergence of multiple Fourier series”. En: *The American Mathematical Monthly* 128.1 (2020), págs. 41-49.
- [4] Ricardo Diaz y Sinai Robins. “Pick’s formula via the Weierstrass \wp -function”. En: *The American Mathematical Monthly* 102.5 (1995), págs. 431-437.
- [5] Eugene Ehrhart. “Sur un problème de géométrie diophantienne lineaire. 2. Systèmes diophantiens linéaires”. En: *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* 227 (1967), págs. 25-49.
- [6] M. Ram Murty y Nithum Thain. “Pick’s theorem via Minkowski’s theorem”. En: *The American Mathematical Monthly* 114.8 (2007), págs. 732-736.
- [7] Christopher Polis. “Pick’s Theorem extended and generalized”. En: *The Mathematics Teacher* 84.5 (1991), págs. 399-401.
- [8] John E Reeve. “On the volume of lattice polyhedra”. En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.1 (1957), págs. 378-395.
- [9] Steven V. Sam. “A bijective proof for a theorem of Ehrhart”. En: *The American Mathematical Monthly* 116.8 (2009), págs. 688-701.
- [10] Elias M. Stein y Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Vol. 1. Princeton university press, 1971.
- [11] Hugo Steinhaus. *Mathematical snapshots*. Courier Corporation, 1999.
- [12] Dale E. Varberg. “Pick’s theorem revisited”. En: *The American Mathematical Monthly* 92.8 (1985), págs. 584-587.
- [13] Karl Georg Christian Von Staudt. *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Vol. 1. Bauer und Raspe, 1856.

