DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA

Alexandra Sofia Pimenta Carvalho

Licenciada em Matemática

Relatório de estágio – A articulação entre as diferentes representações de funções e as suas derivadas num contexto com calculadora gráfica

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO E NO ENSINO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa

Julho, 2023

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Relatório de estágio – A articulação entre as diferentes representações de funções e suas derivadas num contexto com calculadora gráfica

Alexandra Sofia Pimenta Carvalho

Licenciada em Matemática

Orientadora: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Arguentes: Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu,
Professor Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho

Orientador: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha,
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Membros: Licenciada Teresa Maria Pássaro Amendoeira,
Professora do Agrupamento de Escolas Daniel Sampaio

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO E NO SECUNDÁRIO
Universidade NOVA de Lisboa
Julho, 2023

Relatório de estágio - A articulação entre as diferentes representações de funções e suas derivadas num contexto com calculadora gráfica

A ti, pai

AGRADECIMENTOS

À professora cooperante da turma principal, por todo o apoio e partilha de experiências e de conhecimento diário, bem como a confiança no meu trabalho e dedicação.

À professora cooperante da turma do 8.º ano de escolaridade, pela disponibilidade e atenção manifestada durante o estágio pedagógico.

À professora Doutora Helena Rocha, por me acompanhar ao longo destes dois anos e, principalmente pela orientação e motivação que demonstrou pelo meu primeiro trabalho de investigação.

Aos meus primeiros alunos, obrigado por me receberem tão bem durante o ano letivo e de estarem dispostos a colaborarem comigo.

À Mariana, minha colega de estágio. Obrigada pelo companheirismo, partilha de conhecimento e de ajuda ao longo desta experiência.

À Carolina, Joana, Margarida e Mélanie por me ouvirem quando necessito, mas também por celebrarem comigo as minhas conquistas.

À minha Ritinha, por todos estes anos de amizade, e por me ajudar a superar as minhas fragilidades.

Ao Tiago, por acompanhar todos os meus passos e por me amparar sempre que necessitei, motivando-me a alcançar os meus objetivos.

À minha irmã, que é um exemplo de dedicação e trabalho.

À minha mãe e ao meu pai, por nunca duvidarem das minhas capacidades e por estarem sempre disponíveis para tudo o que necessito.

A toda a minha família, obrigado pelo vosso apoio incondicional.

RESUMO

O presente relatório subdivide-se em duas partes: a primeira parte que descreve o trabalho desenvolvido no âmbito do estágio pedagógico no ano letivo 2022/23, e a segunda parte que apresenta a investigação realizada a alunos do 12.º ano.

Na primeira parte, é abordado o trabalho desenvolvido na prática de ensino supervisionada, com duas turmas, uma do 12.º e outra do 8.º ano, bem como uma descrição da prática não letiva e uma reflexão crítica sobre as atividades desenvolvidas ao longo do ano. Na segunda parte, a investigação realizada visa caracterizar a capacidade dos alunos em articular diferentes representações de funções perante a realização de exercícios sobre o tema de funções derivadas. Para dar resposta a estes objetivos, foram traçadas as seguintes questões de investigação:

1. Quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir entre uma abordagem algébrica ou gráfica, no âmbito das funções derivadas?
2. Qual o papel e como se caracteriza a articulação das diferentes representações de funções, no estudo das funções derivadas?
3. Quais as fragilidades manifestadas pelos alunos na resolução de tarefas, no âmbito das funções derivadas?
4. Quais as problemáticas reveladas pelos alunos, na escolha da janela de visualização, na calculadora gráfica, no estudo das funções derivadas?

A investigação desenvolvida seguiu uma metodologia qualitativa, através de três estudos de caso. Utilizou-se técnicas de recolha como entrevistas semiestruturadas, observação e análise das produções dos alunos durante a resolução das tarefas propostas.

Do presente estudo, é possível concluir que os alunos recorrem às diferentes representações de funções, contudo é de salientar uma complexidade em interligarem as informações provenientes de todas as representações. Destaca-se o recurso à representação gráfica como instrumento de verificação e para análise do comportamento do gráfico de uma função. A falta de capacidade em analisar o gráfico de uma função e de relacionar a função com as respetivas funções derivadas, foram algumas das limitações evidenciadas pelos alunos. Adicionalmente, salienta-se a incapacidade em realizar um ajuste adequado da janela de visualização para análise do gráfico da função.

Palavras chave: Estágio Pedagógico, Representações, Funções Derivadas, Calculadora Gráfica, Janela de Visualização.

ABSTRACT

This dissertation is divided into two parts: the first part that describes the work developed in the scope of the pedagogical internship in the academic year 2022/23, and the second part that presents the research carried out to students of the 12th grade.

In the first part, the work developed in the supervised teaching practice is addressed, with two classes, one of the 12th and the other of the 8th grade, as well as a description of the non-teaching practice and a critical reflection on the activities developed throughout the year. In the second part, the research carried out aims to characterize the students' ability to articulate different representations of functions when performing exercises on the subject of derivative functions. To meet these objectives, the following research questions were outlined:

1. What criteria do students rely on, to decide between an algebraic or graphical approach, within the scope of derived functions?
2. What is the role and how is the articulation of different representations of functions characterized, in the study of derived functions?
3. What are the weaknesses manifested by the students in the resolution of tasks within the scope of the derived functions?
4. What are the problems revealed by the students, in choosing of the visualization window, in the graphing calculator, in the study of the derived functions?

The research developed followed a qualitative methodology, through three case studies. Collection techniques such as semi-structured interviews, observation and analysis of the students' productions were used during the resolution of the proposed tasks.

From the present study, it is possible to conclude that the students resort to the different representations of functions, however it is worth noting a complexity in interconnecting the information from all representations. We highlight the use of graphic representation as an instrument of verification and for analysis of the behavior of the graph of a function. The lack of ability to analyze the graph of a function and to relate the function with the respective derived functions, were some of the limitations evidenced by the students. Additionally, the inability to make an adequate adjustment of the visualization window for the analysis of the graph of the function, is highlighted.

Keywords: Pedagogical Internship, Representations, Derived Functions, Graphing Calculator, Visualization Window

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

PRIMEIRA PARTE

1. INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como objetivo analisar o trabalho desenvolvido pela professora estagiária durante o estágio pedagógico realizado no ano letivo 2022/23, numa escola de 3.º ciclo e de ensino secundário, localizada na Área Metropolitana da Grande Lisboa.

A primeira parte encontra-se dividida em quatro subcapítulos, em que a primeira corresponde à presente introdução. Na segunda parte é apresentada a prática de ensino supervisionada que consiste no acompanhamento de duas turmas na disciplina de Matemática, de 8.º ano e de 12.º ano e, na terceira parte, a prática não letiva que tem como objetivo apresentar as atividades em que a professora estagiária participou. Por fim, é exposta uma reflexão sobre a experiência do estágio pedagógico.

2. PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

No presente ano letivo, a professora estagiária acompanhou as aulas lecionadas pelas professoras orientadoras das duas turmas: a principal, do 12.º ano, e a secundária, do 8.º ano. Na turma do 3.º ciclo, participou em 80% das aulas, e na turma do ensino secundário, participou na totalidade das aulas, tendo colaborado na monotorização das tarefas propostas de ambas as turmas durante as aulas. Adicionalmente, lecionou o apoio do 12.º ano com a professora titular e assegurou, em conjunto com a outra professora estagiária do núcleo de estágio, o apoio de uma turma do 11.º ano. Ambos os apoios decorriam uma vez por semana.

2.1 Planos de aula

Para a realização de cada aula, a professora estagiária elaborou uma planificação, de forma estruturada e detalhada. Ao longo do ano, compreendeu-se que o plano realizado pode não ser totalmente cumprido e pode ser ajustado, pois depende de diversos aspetos emergentes durante a aula, como as dúvidas dos alunos.

As aulas lecionadas, o tema e a metodologia a adotar foram escolhidas livremente pela professora estagiária. No final de cada aula lecionada, a professora titular de cada turma e as professoras estagiárias refletiam sobre os pontos positivos e os aspetos a melhorar. Os professores Alexandra Rodrigues e António Domingos, da FCT NOVA, assistiram a algumas aulas da turma do 12.º ano, lecionadas pela professora estagiária, participando também na discussão das aulas em que estiveram presentes.

2.2 Prática pedagógica no 12.º ano

A turma do 12.º ano é constituída por 23 alunos, sete do sexo masculino e dezasseis do sexo feminino. No geral, é uma turma com bom comportamento em sala de aula, no entanto é caracterizada por ser pouco participativa.

2.2.1 Aulas lecionadas

Ao longo do ano letivo, foram lecionadas dezassete aulas de 45 minutos, assistidas pela professora titular da turma e a outra professora estagiária, sempre que possível. As primeiras aulas foram lecionadas nos dias 23 e 24 de novembro, cujo tema foi funções reais de variável real e no dia 25 de janeiro sobre funções exponenciais. No 2.º semestre, a professora estagiária lecionou as restantes aulas nos dias 6, 7, 8 e 22 de março onde lecionou tópicos de cálculo combinatório e nos dias 25 e 29 de maio sobre números complexos. Em alguns dos casos, como referido de seguida, as aulas lecionadas encontravam-se agrupadas em blocos perfazendo 90 minutos. O manual adotado foi o Novo Ípsilon 12.º ano, da Raiz Editora.

2.2.1.1 Aulas de 23 de novembro

Nas primeiras aulas lecionadas, a planificação estabelecida (Anexo A) pretendia que os alunos percebessem a necessidade de analisar as propriedades de uma função (Tabela 1).

Tabela 1 - Resumo da planificação das aulas de 23 de novembro

Tema	Funções reias de variável real.
Duração	90 minutos.
Recursos	Manual e PowerPoint.
Sumário	Estudo de funções e esboço de gráficos.
Objetivos	- Reconhecer a importância dos conceitos já estudados para o estudo de funções. - Desenvolver a capacidade de esboçar o gráfico de uma função.
Estratégias	1. Esboço da função $\frac{1}{x^2+1}$ para concluir da necessidade de diversos conceitos para o estudo de uma função: domínio, continuidade, paridade, zeros, interseção do gráfico com o eixo Oy, intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos, sentido das concavidades do gráfico, pontos de inflexão do gráfico e assíntotas ao gráfico. 2. Resolução do exercício 65.4 da página 57 do manual adotado.

Durante a primeira parte da aula, surgiram momentos em que foi necessário recordar determinados conceitos, como o domínio e o cálculo da derivada de uma função racional. Estas são situações que não tinham sido planeadas, mas que facilmente foram esclarecidas. Devido ao número de questões colocadas pelos alunos, o cumprimento da totalidade da planificação das aulas foi comprometido, tendo sido a gestão de tempo um dos aspetos a melhorar, para que tivesse sido possível terminar a resolução do último exercício, pois a sua resolução foi terminada na aula seguinte.

Considera-se a melhorar também o rigor e o cuidado quando é desenvolvido um trabalho para os alunos, uma vez que ao longo do PowerPoint, encontrava-se escrito f' em vez de f'' e, no penúltimo slide, em que era feita uma síntese das propriedades da função $\frac{1}{x^2+1}$, não estavam descritas as assíntotas ao gráfico da função em estudo. Estes foram dois aspetos inconvenientes e reportados pelos alunos, para além do desconforto sentido pela professora estagiária perante estes acontecimentos ocorridos nas duas primeiras aulas lecionadas, o facto de poderem induzir o aluno em conclusões incorretas é uma situação a ter em atenção.

O acompanhamento da turma durante as aulas da professora cooperante auxiliou a interação com os alunos durante as primeiras aulas, proporcionando um ambiente de trabalho harmonioso e participativo.

2.2.1.2 Aulas de 25 de janeiro

Nestas aulas, estudou-se as propriedades algébricas da função $f(x) = a^x\ (a > 0)$, definida nos números racionais (Anexo B). Para começar esta matéria, analisou-se a sucessão 2^n, $n \in \mathbb{N}_0$, de forma a concluir qual o gráfico da função $f(x) = 2^x$ (Tabela 2).

Tabela 2 - Resumo da planificação das aulas de 25 de janeiro

Tema	Funções Exponenciais.
Duração	90 minutos.
Recursos	Calculadora gráfica, PowerPoint e interativo do *Geogebra*.
Sumário	Propriedades da função definida nos números racionais por $f(x) = a^x\ (a > 0)$:monotonia, continuidade, limites e propriedades algébricas.
Objetivos	- Reconhecer a importância das propriedades da função $f(x) = a^x\ (a > 0)$ definida no conjunto dos números racionais. - Desenvolver a capacidade de concluir resultados por iniciativa própria.
Estratégias	1. Analisar o número de elementos da árvore genealogia por linha, concluindo que se tata de uma sucessão de termo geral $2^n, n \in \mathbb{N}_0$. 2. Projetar a calculadora gráfica para representar os pontos coordenados obtidos pela sucessão e para visualizar a função 2^x. 3. Interpretar o gráfico das funções 2^x e $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ para analisar as suas propriedades, com o objetivo de generalizá-las a uma função $f(x) = a^x$, quando $a > 1$ e quando $0 < a < 1$. 4. Resolução de um exercício para analisar a influência dos parâmetros a e b numa função definida por $f(x) = ba^x$. 5. Resolução de dois exercícios.

No início das aulas, percebeu-se que devido a uma falha de ligação entre o computador e o projetor não era possível partilhar o *software* da calculadora gráfica. Perante esta impossibilidade, a professora estagiária, optou por utilizar o *Geogebra*.

Quanto aos aspetos a melhorar considera-se o rigor e a linguagem matemática, pois quando foram analisadas as propriedades dos limites da função através do gráfico, quando x tende para mais infinito, é de ter em atenção a dependência das variáveis x e y, guiando o comportamento da função ao mesmo tempo que os valores do eixo Ox aumentam. Ainda a referir que, no primeiro exercício, ao analisar os parâmetros a e b foi afirmado que a "função sobe" quando o valor de b aumenta, sendo uma afirmação incorreta, pois a transformação existente é uma contração. Esta situação não contribui negativamente para o restante funcionamento da aula, contudo após se aperceber da incorreção feita, houve um momento em que não soube como reagir, dado que já se tinha avançado nos exercícios. Considerou-se continuar com a aula, uma vez que foi apenas um curto momento, no entanto é de realçar o cuidado necessário ao realizar afirmações e também a importância de reconhecer quando são verbalizadas ou escritas considerações incorretas. Outro aspeto a melhorar diz respeito à organização do quadro ao longo da resolução dos exercícios, dado que é através dele que os alunos analisam o que está a ser resolvido e extraem a informação. Se este não estiver sistematizado e estruturado prejudica o desempenho e a compreensão dos alunos nos conteúdos lecionados.

Quanto à ideia da árvore genealógica, considerou-se uma iniciativa que suscitou interesse aos alunos e auxiliou-os a relacionarem as duas variáveis de uma função e a criação da lista na calculadora. A proposta de explicar a função exponencial, através de um exemplo, foi muito positivo, pois os alunos a partir da função 2^x facilmente generalizaram as propriedades desta função a uma função do tipo a^x definida no conjunto dos números racionais. Por fim, destaca-se a importância de uma planificação bem estruturada para o desenvolvimento das aulas, bem como o cuidado de auxiliar nas dúvidas dos alunos.

2.2.1.3 Aulas de 8 de março

Na sequência das aulas lecionadas (6 e 7 de março), o dia 8 de março corresponde às últimas aulas (Anexo C) em que se aborda as propriedades dos conjuntos (Tabela 3).

Tabela 3 - Resumo da planificação das aulas de 8 de março

Tema	Cálculo combinatório.
Duração	90 minutos.

Recursos	Manual, tarefa de exploração e baralho de cartas (um por par).
Sumário	Correção do trabalho de casa. Distributividade do produto cartesiano relativamente à união. Cardinal de um conjunto, conjuntos equipotentes e disjuntos e cardinal do produto cartesiano: realização de uma tarefa de exploração.
Objetivos	- Promover o trabalho em grupo. - Desenvolver a capacidade de concluírem resultados por iniciativa própria. - Reconhecer as propriedades do cardinal de conjuntos através de uma tarefa de exploração.
Estratégias	1. Apresentar a definição de produto cartesiano de A e B e a distributividade do produto cartesiano relativamente à união. 2. Resolução do exercício 13 da página 15, do manual adotado. 3. Realização de uma tarefa de exploração, a pares: 30 minutos para a 1.ª parte, seguida de partilha de respostas, e a 2.ª parte realizada em discussão com toda a turma.

A iniciativa de realizar uma tarefa de exploração nestas aulas, deve-se à intenção de aplicar uma metodologia diferente das utilizadas nas últimas aulas. Esta tarefa teve em atenção o facto de os alunos não estarem habituados a aprenderem conceitos e/ou propriedades desta maneira, tendo-se estruturado e guiado a tarefa para o objetivo de cada pergunta. Apesar deste cuidado, existiram diversas dúvidas na compreensão das questões, tendo a professora estagiária duvidado da tarefa planeada e realizada. Após o cumprimento das aulas, considera-se que o balanço final foi positivo, pois os alunos compreenderam os objetivos da tarefa, interligando as questões da 1.ª parte com as conclusões da 2.ª parte, concluindo-se que a primeira reação dos alunos se deve à sua inexperiência com tarefas deste tipo.

A concluir, nestas aulas, realça-se a necessidade de após ter sido tomada uma decisão, a realização da tarefa, a professora deve ter capacidade de analisar e de perceber se o trabalho proposto está a ser eficaz para os objetivos das aulas, tendo a competência de alterar o que propôs, caso necessário. Nestas aulas, não foi necessário tomar essa decisão, dado que após um esclarecimento, os alunos compreenderam o pretendido. Desta forma, foram aulas que possibilitaram tanto analisar criticamente, como estimular a confiança pelo trabalho realizado.

2.2.1.4 Aulas de 22 de março

Para estas aulas (Anexo D), foi planeado a realização de uma atividade que possibilitasse aos alunos realizar a distinção entre combinação e arranjos sem repetição (Tabela 4).

Tabela 4 - Resumo da planificação das aulas de 22 de março

Tema	Cálculo combinatório.
Duração	90 minutos.
Recursos	PowerPoint, cartas da atividade e calculadora gráfica.
Sumário	Combinações. Realização de uma atividade sobre combinações e arranjos sem repetição.
Objetivos	- Promover o trabalho em grupo. - Reconhecer a distinção entre combinação e arranjos. - Promover a articulação entre as diferentes apresentações de uma combinação e de um arranjo sem repetição.
Estratégias	1. Breve revisão sobre permutações, arranjos com e sem repetição. 2. Apresentação de um exemplo para introduzir o conceito de combinação, seguido da resolução de um exercício. 3. Realização de uma atividade com o objetivo de realçar a distinção entre combinação e arranjos sem repetição: 11 grupos de trabalho (pares), 11 questões sobre cálculo combinatório que devem ser respondidas através de três cartas: ${}^{n}C_p$ ou ${}^{n}A_p$; $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $\frac{n!}{(n-p)!}$; e o resultado que responde à pergunta. 4. Discussão com toda a turma ao longo da atividade. 5. Conclusão sobre a existência ou não de repetição e se a ordem é ou não relevante quando se trabalha com combinações. 6. Uso da calculadora gráfica para obter o valor da combinação.

Relativamente a estas aulas, destaca-se uma incorreta gestão do espaço do quadro e alguns aspetos que podem ser melhorados na implementação da tarefa. A noção de combinação foi introduzida num local reduzido do quadro, o que implicou pouca organização do que se encontrava escrito. Consequentemente, escreveu-se a fórmula da combinação na vertical em vez de na posição horizontal, situação que dificulta a interpretação por parte do aluno. O aspeto do quadro estava a ser trabalhado e melhorado nas últimas aulas lecionadas, tendo esta fragilidade sido novamente evidenciada.

Quanto à atividade realizada, é possível redefinir algumas situações que não foram planeadas anteriormente. Primeiramente, considera-se a não recolha das cartas assim que era respondida uma questão, dado que possibilitava os alunos a estarem sempre atentos se a carta já usada podia ou não responder a outra pergunta. Para além disso, adicionar-se perguntas diferentes que respondessem às mesmas cartas tornaria a atividade mais desafiante e, consequentemente, mais complicada. Para as primeiras aulas, em que é implementada uma atividade com estas características, considera-se uma escolha assertiva, dado que os alunos mostraram-se empenhados em responder às perguntas ao mesmo tempo que estavam também a aprender conteúdos matemáticos, contudo os aspetos referidos são de considerar para melhorar a atividade.

Por fim, de salientar a capacidade da professora estagiária em organizar os momentos em que cada aluno se podia expressar, por forma a obter um ambiente de trabalho adequado ao desenvolvimento da atividade.

2.2.2 Avaliação e classificação

Ao longo do ano letivo, as professoras estagiárias realizaram duas versões de um teste de avaliação sumativo para a turma do 12.º ano e a respetiva distribuição da cotação. Nestas, foram incluídas perguntas do tema de funções: continuidade, primeira e segunda derivada de uma função, assíntotas ao gráfico de uma função e funções trigonométricas. Adicionalmente, durante o estágio, foram elaboradas duas propostas de perguntas para momentos de avaliação sumativa e ainda, a realização de um enunciado e respetivos critérios de avaliação para um trabalho no âmbito do domínio de história da matemática.

No contexto de classificação, a professora estagiária, no primeiro teste do ano letivo, realizou o exercício de classificar e definir os critérios de avaliação que posteriormente foram discutidos com a professora cooperante, por forma a perceber-se o que se pretendia avaliar em cada item. Durante os restantes momentos de avaliação, as professoras estagiárias classificaram, em cada um deles, entre quatro a dez testes e/ou mini testes.

2.3 Prática pedagógica no 8.º ano

A turma do 8.º ano é constituída por 28 alunos, dos quais doze são do sexo masculino e dezasseis do sexo feminino. Caracteriza-se por ser uma turma bastante participativa, contudo apresenta um comportamento agitado na sala de aula, caracterizado por conversas entre colegas e de interrupções constantes.

2.3.1 Aulas lecionadas

Ao longo do estágio, foram lecionadas seis aulas (três blocos de 90 minutos) que foram assistidas pela professora titular da turma e, sempre que possível, pela outra professora estagiária. No 1.º semestre foram lecionadas duas aulas cujo tema foi números e operações, no dia 6 de dezembro, e no 2.º semestre foram lecionadas aulas nos dias 27 de abril e 16 de maio, sobre os temas: álgebra, e geometria e medida, respetivamente. O manual adotado pela escola foi o Xis 8.º ano da editora Texto.

2.3.1.1 Aulas de 6 de dezembro

As primeiras aulas lecionadas (Anexo E) na turma do 8.º ano apresentaram como temática as operações com raízes quadradas e a simplificação de números irracionais (Tabela 5).

Tabela 5 - Resumo da planificação das aulas de 6 de dezembro

Tema	Números e operações.
Duração	90 minutos.
Recursos	Manual e ficha de trabalho (tarefa).
Sumário	Correção do trabalho de casa. Tarefa sobre operações com raízes quadradas (revisão) e simplificação das mesmas.
Objetivos	- Consolidar as operações com raízes quadradas. - Desenvolver a capacidade de simplificar números irracionais.
Estratégias	1. Correção do trabalho de casa (exercícios 20 e 21, página 94) 2. Revisão no quadro sobre o índice, o radical e o radicando. 3. Resolução da ficha de trabalho: adição, multiplicação e divisão de raízes quadradas e simplificação de números irracionais. 4. Discussão com toda a turma sobre a resolução da tarefa: feita no quadro, pergunta por pergunta. 5. Exemplos relativos à simplificação de raízes quadradas.

Os alunos mostraram-se bastante participativos tanto na correção do trabalho de casa como durante a realização da tarefa, tendo sido necessário uma gestão da turma por parte da professora estagiária. Este era um receio sentido previamente antes das aulas serem lecionadas, devido ao barulho característico da turma. A estratégia aplicada foi explicar que apenas devem participar quando é solicitada a sua participação ou é dada a palavra ao aluno, contudo nem sempre foi possível manter um ambiente equilibrado entre o barulho existente e o desejado.

Quanto à implementação da ficha de trabalho, considera-se que devia ter sido feita uma melhor explicação do objetivo da mesma, pois alguns alunos só perceberam quando a segunda questão foi resolvida. O objetivo 1 da tarefa foi o mais difícil de explicar, dado que o raciocínio utilizado não foi compreendido por todos os alunos: $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}=1\sqrt{2}+1\sqrt{2}+1\sqrt{3}=(1+1)\sqrt{2}+1\sqrt{3}=2\sqrt{2}+1\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$, desta forma, recorreu-se a diversos métodos para explicar o referido acima, tendo sido o mais eficaz explicar que: se $3+3=2\times 3$ então $\sqrt{2}+\ \sqrt{2}=2\sqrt{2}$. Esta foi uma complexidade sentida ao longo da tarefa, dado que os alunos não se recordam com facilidade de conceitos apreendidos em anos anteriores, sendo a apresentação de exemplos uma ferramenta utilizada e considerada eficaz para auxiliar os alunos. Devido à quantidade de dúvidas, a duração estipulada para a realização da tarefa foi ultrapassada, não tendo sido possível apresentar os três exemplos planeados, dado que se optou por esclarecer todas as dúvidas existentes em vez de avançar com a planificação.

Uma estratégia que se tornou eficiente foi a organização das fórmulas no quadro, obtidas ao longo da tarefa, pois promoveram uma síntese final da matéria.

2.3.1.2 Aulas de 16 de maio

Para as últimas aulas lecionadas (Anexo F), foi proposta a realização de uma tarefa caracterizada por ter diversos tipos de exercícios (Tabela 6).

Tabela 6 - Resumo da planificação das aulas de 16 de maio

Tema	Geometria e medida.
Duração	90 minutos.
Recursos	PowerPoint e tarefa.
Sumário	Realização de uma tarefa sobre isometrias.
Objetivos	- Promover o conhecimento da noção de reflexão deslizante. - Desenvolver a capacidade visual dos alunos para o tema das isometrias. - Proporcionar o contacto de padrões e regularidades.
Estratégias	1. Resolução de uma tarefa dividida em três partes, começando por se resolver a 1.ª parte sobre reflexão deslizante. 2. Definição do conceito de reflexão deslizante. 3. Visualização de um vídeo que abordava as quatro isometrias: reflexão axial, translação, rotação e reflexão deslizante. 4. Resolução da parte II da tarefa que relaciona a ida ao Museu Nacional dos Azulejos com o descobrimento de isometrias. 5. Realização dos exercícios um e dois da 3.ª parte da tarefa.

	6. Auxiliar os alunos a interpretarem as questões.

Na 1.ª parte da tarefa, os alunos demoraram mais tempo a realizar a primeira pergunta e, desta forma, o cumprimento da restante planificação das aulas foi comprometida. Dada a situação, foi tomada a decisão dos alunos não resolverem o exercício 2 da 2.ª parte da tarefa, priorizando-se os exercícios da parte três, dado serem de consolidação da matéria.

Notou-se uma evolução no envolvimento que os alunos tiveram para resolverem a tarefa, possivelmente por já terem realizado uma com características semelhantes. De notar que, futuramente é importante um trabalho contínuo por parte da professora estagiária com uma turma, quanto a propostas de trabalho diferentes, de forma a se garantir um ambiente de trabalho que não prejudique a aula.

2.3.2 Avaliação e classificação

No âmbito de avaliação, as professoras estagiárias propuseram e realizaram um enunciado para um trabalho relativamente ao tema organização e tratamento de dados, assim como os respetivos critérios de avaliação e classificação. Foram também desenvolvidas duas propostas de perguntas para englobarem dois mini testes realizados ao longo do ano. Quanto à classificação, a professora estagiária realizou o exercício de classificar um teste de avaliação de quatro alunos.

3. PRÁTICA NÃO LETIVA

Durante o ano de estágio, houve a presença em diversas reuniões por parte da professora estagiária. Para além da participação nas reuniões, foram desenvolvidas atividades para a comunidade escolar, assim como o acompanhamento das turmas em visitas de estudo.

3.1 Reuniões assistidas

3.1.1 Reuniões de estágio

A presença nas reuniões de estágio incluiu as duas professoras estagiárias e a professora cooperante titular da turma do 12.º ano. Nestas reuniões, foi permitido definir as aulas a serem lecionadas pelas professoras estagiárias, as propostas de momentos de avaliação e respetivos critérios de avaliação, e o planeamento de atividades não letivas.

3.1.2 Reuniões de departamento e de ano

As reuniões de departamento possibilitaram conhecer informações gerais da escola e aspetos relevantes quanto ao ensino de matemática. Para além destas reuniões, a professora estagiária participou também em reuniões de ano, tanto do 8.º ano como do 12.º ano. Estas contaram com a presença dos professores de matemática dos respetivos anos onde foram discutidas as planificações dos semestres, os momentos de avaliação e suas cotações.

3.1.3 Reuniões de direção de turma

No presente ano letivo, a professora estagiária acompanhou a direção da sua turma do 8.º ano. A participação de reuniões dedicadas aos diretores de turma permitiu conhecer informações de gestão pedagógica e administrativa.

Desta forma, este acompanhamento possibilitou aprender e também realizar as práticas desempenhadas por um diretor de turma, tais como: funcionamento da plataforma digital adotada pela escola, preparação e elaboração da ata de uma reunião de Conselho de Turma, preenchimento de documentos essenciais e o contacto com Encarregados de Educação, de forma a partilhar informações sobre o seu educando. Neste sentido, a professora estagiária participou também numa reunião de pais, onde foram abordados assuntos relativamente ao aproveitamento e comportamento da turma, informações quanto às provas de aferição e às atividades que iriam decorrer durante o ano letivo, como a realização de uma visita de estudo.

3.1.4 Reuniões do Conselho de Turma

No âmbito das reuniões do Conselho de Turma, foram realizadas quatro reuniões intercalares e quatro reuniões de final de semestre (um total de quatro reuniões por turma). Nas reuniões intercalares, realizadas a meio de cada semestre, foram discutidas estratégias para melhorar o ambiente em sala de aula, bem como analisar o ponto de situação de determinados alunos. No início destas reuniões, estão presentes os delegados, subdelegados e representantes dos pais, com o objetivo de identificarem aspetos que consideravam relevantes. Após esse momento, a reunião decorre apenas com os professores da turma. As reuniões de final de semestre, tinham por objetivo fazer um balanço do comportamento da turma e a confirmação da proposta das classificações a atribuir em cada disciplina.

3.1.5 Reuniões de disseminação de formação das AE 7.º ano

Ao longo do ano letivo, a professora estagiária participou nas reuniões destinadas a conhecer e a trabalhar em tarefas relativas às aprendizagens essenciais do 7.º ano, que entraram em vigor no presente ano letivo.

3.2 Projeto “MensalMat”

O projeto “MensalMat” foi desenvolvido pelas duas professoras estagiárias, sob a orientação das professoras cooperantes, com o objetivo de promover o pensamento lógico na área da matemática. Este projeto consistia em propor um desafio matemático todos os meses, de janeiro (Anexo G) a junho, adequado aos anos escolares da escola: do 3.º ciclo ao ensino secundário. Quanto à execução do mês de março, mês em que se celebra o Dia Internacional da Matemática, foram propostos três desafios, um para cada ciclo de escolaridade, por forma a englobar os anos escolares de todas as escolas do agrupamento: 2.º e 3.º ciclo, e ensino secundário (Anexo H). Todos os meses, os desafios foram publicados no jornal da escola, assim como um exemplo de resolução feito por aluno ou alunos.

3.3 Dia da Matemática

Para a celebração do Dia Internacional da Matemática, as professoras estagiárias desenvolveram, planearam e organizaram as atividades a elaborar nesse dia, sob o acompanhamento da professora orientadora do 12.º ano. As atividades desenvolvidas foram: momentos de truques de magia com cartas, realizados pelas professoras estagiárias, que relacionavam processos matemáticos para a sua elaboração; realização de jogos e desafios matemáticos; exposição de curiosidades matemáticas, de padrões e regularidades, e dos desafios do “MensalMat”. Adicionalmente, estiveram presentes alunos da FCT NOVA que estudam diferentes áreas da matemática: atuariado, investigação operacional, estatística e ensino de matemática, para partilharem a sua experiência e exemplos da matemática no quotidiano. A celebração deste dia e as respetivas iniciativas, foram efetuadas em duas das escolas do agrupamento, uma de manhã e outra da parte da tarde.

3.4 Visitas de estudo

3.4.1 12.º ano

A professora estagiária acompanhou a turma de 12.º ano em diversas visitas de estudo. No dia 23 de fevereiro, no percurso de “Fernando Pessoa: Lisboa em Pessoas(s) e ao vivo” e no dia 17 de abril à visita guiada ao convento de Mafra, ambas as visitas de estudo no âmbito da disciplina de português.

A terceira visita de estudo, consistiu na ida à Expo FCT no dia 19 de abril, com o objetivo de dar a conhecer aos alunos as diversas áreas de estudo das ciências e tecnologias da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa. Esta é uma visita de estudo que a escola realiza todos os anos, tendo sido planeada com professores de diversas disciplinas, incluindo a disciplina de matemática.

3.4.2 8.º ano

No 8.º ano, as professoras estagiárias planearam uma visita de estudo ao Museu Nacional do Azulejo, com o auxílio da professora orientadora das turmas do 8.º ano, de ambas as estagiárias. Esta visita de estudo englobou todas as turmas do 8.º ano e foi realizada no dia 26 de abril do presente ano letivo. Através desta proposta, foi implementado um projeto interdisciplinar que tinha como objetivo o reconhecimento de regularidades e padrões, intitulado: arte, simetria e padrões no planeta. No âmbito do projeto, os alunos elaboraram um *site* sobre a visita de estudo para a disciplina de Tecnologias de Informação e Comunicação.

4. REFLEXÃO SOBRE O ESTÁGIO PEDAGÓGICO

O presente ano de estágio, demonstrou ser muito enriquecedor, quer a nível profissional, como a nível do desenvolvimento de conhecimentos e aptidões pessoais. Foi possível ter contacto com o trabalho realizado por um professor durante a prática letiva, bem como com atividades não letivas. O acompanhamento das aulas das professoras cooperantes, possibilitou desenvolver uma postura adequada e a constituição de uma boa interação com os alunos.

Na turma do 12.º ano, turma principal, a presença nas aulas foi diária ao longo de todo o estágio, proporcionando uma maior colaboração nos trabalhos desenvolvidos e interligação com os alunos, comparativamente com a turma do 8.º ano. O acompanhamento de duas turmas, de ciclos diferentes, permitiu perceber a necessidade de adotar posturas distintas em cada uma das turmas. Na turma do 12.º ano, a maioria dos alunos são trabalhadores e empenhados em aprender, contudo foi necessário incentivar diversas vezes os alunos a participar no desenvolvimento das tarefas no quadro, pois preferiam não serem solicitados durante a aula. Enquanto no 8.º ano verificava-se o oposto, pois eram muito participativos. Porém, era necessário incentivá-los a realizar as tarefas propostas. Para além destes aspetos, foi sentida uma maior facilidade em lecionar a matéria do 12.º ano do que a do 8.º ano, pelo que é necessário futuramente arranjar ferramentas que auxiliem a amenizar a dificuldade sentida.

Ao longo do ano letivo, houve a possibilidade de lecionar aulas com metodologias bastantes distintas, tais como a realização de tarefas em que os alunos concluíam os conceitos pretendidos, o recurso a aulas expositivas e a utilização de uma atividade que tinha características de um jogo. Através desta experiência, foi possível reconhecer o gosto por desenvolver iniciativas para lecionar conteúdos matemáticos, pré-concebidas e planeadas de raiz pela professora estagiária, sendo a sua execução bastante gratificante. Porém, é necessário que estas sejam claras o suficiente para que os alunos compreendam o objetivo da atividade, sendo este um dos aspetos a ter em consideração.

Durante esta experiência, destaca-se a organização do quadro e o rigor a expressar-se matematicamente como aspetos que foram melhorados, mas que necessitam de um cuidado por parte da professora estagiária. Quanto às estratégias utilizadas, é de notar a importância de circular pela sala de forma a auxiliar todos os alunos, assim como a interpretação que é feita através de expressões faciais que podem indicar que o aluno apresenta uma dúvida. Além disso, o início de uma aula é um aspeto bastante relevante, pois se os alunos estão demasiados agitados torna-se difícil que a aula comece rapidamente e de forma tranquila. No 8.º ano o registo do sumário foi uma prática bastante eficaz para combater esta situação. Por fim, de salientar que numa turma é recorrente existirem diferentes níveis de desempenho e de rapidez na realização das tarefas propostas, sendo a existência de trabalhos extras uma aposta eficiente.

Quanto às restantes atividades desenvolvidas, de referir que foi o primeiro contacto com a definição de critérios de avaliação e a classificação de testes, sendo esta uma tarefa bastante exigente e cuidadosa. Adicionalmente, a oportunidade de planear uma visita de estudo e o acompanhamento do trabalho desenvolvido de um diretor de turma, foram duas experiências também realizadas este ano. Num outro contexto, o estágio permitiu um primeiro contacto com o ambiente escolar enquanto professora durante um ano letivo, assim como a preparação de atividades para a comunidade escolar.

Em suma, de realçar que o presente estágio contribuiu positivamente para o desenvolvimento de competências profissionais, na realização de tarefas e atividades nos diferentes anos escolares, e de aptidões pessoais, nomeadamente a gestão de tempo e a capacidade de expressar claramente os conteúdos programados.

SEGUNDA PARTE

A articulação entre as diferentes representações de funções e suas derivadas num contexto com calculadora gráfica

1. INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e pertinência do estudo

A implementação de tarefas que contemplam o tema das derivadas e a articulação de diferentes representações foi a principal motivação para este estudo. O recurso à calculadora gráfica tornou-se indispensável, dado este ser um tópico integrado no estudo de funções. Agregado a este fator, a possibilidade de descobrir as problemáticas enfrentadas pelos alunos na escolha da janela de visualização, impulsionou ainda mais a realização desta investigação.

A derivada de uma função faz parte dos programas dos 11.º e 12.º anos de escolaridade. Em particular, salienta-se a importância da resolução de problemas que caracterizem e interpretem graficamente a função derivada de uma função (MEC, 2018). A compreensão deste conceito implica o recurso a diferentes representações, interligação extremamente complexa para o aluno (Orhun, 2012; Viseu, 2017). Para tal, é necessário um ambiente que promova a utilização de diversas representações (Friedlander & Tabach, 2001).

Rocha (2020), argumenta a necessidade de os alunos articularem informações provenientes das calculadoras gráficas, especialmente relativamente à janela de visualização. Assim, nesta investigação, pretendeu-se analisar como os alunos escolhem a janela de visualização quando pretendem analisar o comportamento da função e da sua derivada.

1.2 Objetivos e questões de investigação

O presente trabalho tem como objetivo caracterizar a forma como alunos do 12.º ano de escolaridade relacionam diferentes representações de funções e a sua função derivada. Além disso, procura-se estudar as complexidades manifestadas pelos alunos na resolução de exercícios, no âmbito das funções derivadas, e compreender qual o impacto da escolha da janela de visualização, na calculadora gráfica. Por forma a cumprir com estes objetivos, foram consideradas as seguintes questões de investigação:

1. Quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir entre uma abordagem algébrica ou gráfica, no âmbito das funções derivadas?
2. Qual o papel e como se caracteriza a articulação das diferentes representações de funções, no estudo das funções derivadas?

3. Quais as fragilidades manifestadas pelos alunos na resolução de tarefas, no âmbito das funções derivadas?
4. Quais as problemáticas reveladas pelos alunos, na escolha da janela de visualização, na calculadora gráfica, no estudo das funções derivadas?

1.3 Organização do relatório de investigação

O relatório desta investigação encontra-se organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo, dedica-se à motivação e pertinência do estudo implementado, assim como às questões de investigação a que se pretende responder. No segundo capítulo, dá-se relevância à revisão de literatura, começando por expor as diferentes representações no estudo de funções, focando-se, de seguida, na articulação das representações de funções e, consequentemente, nas fragilidades dos alunos no estudo da derivada de uma função. Por fim, é apresentado um subcapítulo relativo à escolha da janela de visualização na calculadora gráfica.

No terceiro capítulo, é realizada a contextualização da metodologia, nomeadamente a investigação qualitativa, o estudo de caso, os instrumentos de recolha de dados e, por fim, quais os procedimentos metodológicos adotados para esta investigação. No quarto capítulo, são expostos os estudos de caso e a respetiva análise dos dados. Por fim, o último capítulo, diz respeito às conclusões do estudo efetuado, assim como possíveis sugestões para trabalhos futuros.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1 As representações no estudo de funções

"As representações matemáticas constituem um importante meio para o desenvolvimento de uma aprendizagem matemática com compreensão, uma vez que podem potenciar o acesso de todos os alunos a ideias abstratas, à linguagem e ao raciocínio matemático" (Pires et al., 2015, p. 3). De facto, a aprendizagem da matemática deve contribuir para o desenvolvimento das capacidades de análise, raciocínio e visualização dos alunos (Duval, 2006).

Segundo Goldin (2008), uma representação "é uma configuração que pode representar algo de alguma forma" (p. 178). Vários autores (Couco, 2001; Duval, 2006; Goldin, 2008) realizam a distinção entre dois tipos de representações: as representações internas e as representações externas. As representações internas são consideradas imagens mentais que criamos, individualmente, sobre os objetos e processos matemáticos. Dado serem uma descrição mental, apenas são inferidas através da verbalização do próprio indivíduo. Enquanto as segundas, dizem respeito à comunicação com os outros perante uma dada situação matemática, através de desenhos, esquemas, notações e gráficos. Assim, através de conceitos matemáticos, construímos imagens mentais, representações internas e, comunicamo-las através de representações externas (Almeida & Viseu, 2002), pois "a única forma possível de aceder e de trabalhar com os objetos matemáticos é através das representações" (Pires et al., 2015, p. 3).

No estudo de funções, o uso de representações é privilegiado através de tabelas de funções, de gráficos e de expressões analíticas (Pires et al., 2015). Friedlander e Tabach (2001) consideram quatro tipos de representações: a representação verbal, a representação numérica, a representação gráfica e a representação algébrica.

A representação verbal é usualmente utilizada num ambiente natural para a compreensão e comunicação de um dado contexto, pois é possível realizar a conexão entre a matemática e o mundo real. Este tipo de representação é menos universal e depende do estilo pessoal de cada um, considerando-se um obstáculo na comunicação matemática, devido à criação de ambiguidades e associações irrelevantes ou enganosas (Friedlander & Tabach, 2001).

A representação numérica permite os alunos usarem objetos familiares para demonstrar relações e analisar casos específicos. Contudo, carece de generalidade, pois a sua utilidade é muito limitada, dado recorrer ao uso de números para determinar casos particulares (Friedlander & Tabach, 2001). Para estes autores, a representação tabular faz parte integrante da representação numérica. Outros autores (Brown & Mehilos, 2010; Couco, 2001; Rocha, 2019) consideram a representação tabular como um outro tipo de representação. Brown e Mehilos (2010) consideram que através desta representação é possível listar vários exemplos que permitem aos alunos perceber que o valor da variável varia. Inclusive, defendem que a utilização da tabela tem um papel crucial para os alunos que ainda não entenderam as expressões algébricas e os gráficos de uma função, argumentando que as tabelas atribuem significado aos símbolos abstratos.

A representação gráfica promove uma visualização da função, pois é de uma vasta utilização e transcende do conhecimento algébrico dos alunos, sendo considerada mais universal que a algébrica. Tal como Friedlander e Tabach (2001) afirmam, a representação gráfica permite a resolução de determinados problemas que a representação algébrica não permite solucionar, como é o exemplo da determinação dos zeros de uma função polinomial, independentemente do seu grau. Contudo, através de uma abordagem visual apenas uma parte do domínio é visível, pelo que a sua utilização necessita de capacidades de manipulação da calculadora gráfica (Friedlander & Tabach 2001; Rocha, 2016).

Por fim, a representação algébrica é considerada a mais eficaz e abrangente na apresentação de padrões e modelos matemáticos (Friedlander & Tabach, 2001). A manipulação desta representação é muitas vezes o único método possível para justificar afirmações. Porém, o seu uso exclusivo pode dificultar a compreensão de conceitos, devido à utilização de símbolos algébricos que podem obstruir o significado matemático e, consequentemente, a interpretação por parte dos alunos (Friedlander & Tabach, 2001; Rocha, 2016).

Os conceitos devem ser representados numericamente, algebricamente, graficamente e verbalmente, sempre que possível, pois só assim é possível os alunos estabelecerem conexões entre as diferentes representações (Haciomeroglu et al., 2010; Viseu, 2017). Apesar de ser um processo difícil, possibilita aos alunos lidar com diversas formas de recolher informação (Viseu, 2017).

Friedlander e Tabach (2001) defendem que a apresentação de uma determinada tarefa em diferentes representações dá legitimidade ao aluno para escolher o processo de resolução. A escolha da representação a utilizar pelos alunos pode depender da natureza da tarefa, da preferência pessoal, do estilo de pensamento ou pelo facto do aluno ter tentado utilizar outra representação que não funcionou, tendo a necessidade de optar por outra (Friedlander & Tabach, 2001). Além disso, argumentam que a maioria dos alunos transita entre representações de forma frequente e que esta transição se deve a “uma necessidade natural e não a uma exigência” (p. 178). Contrariamente, Rocha (2002) afirma que um dos grandes problemas evidenciados pelos alunos tem por base a interligação da informação obtida por processos algébricos com a obtida a partir da calculadora gráfica.

A promoção a múltiplas representações permite colmatar as limitações que cada representação tem, possibilitando uma aprendizagem mais eficiente do objeto de estudo (Friedlander & Tabach, 2001; Kaput, 1992). O aluno através da utilização de múltiplas representações tem a possibilidade de compreender todo o conceito que não teria sido compreendido apenas com o recurso de uma das representações, verificando as relações existentes entre cada uma das representações (Friedlander & Tabach, 2001; NCTM, 2007; Viseu, 2017).

2.2 As representações no estudo da derivada de uma função

O conceito de derivada de uma função é um tópico que faz parte dos programas do 11.º e 12.º ano de escolaridade, tendo estado contemplado nas sucedidas reformas curriculares do ensino de Matemática (Almeida & Viseu, 2002). Inicialmente, este conceito foi introduzido nos programas de 1905 do ensino secundário e, à exceção da reforma de 1936, o estudo das derivadas tem-se encontrado presente nos programas de Matemática (MEC, 2018; Pinto et al., 2014).

Quando os conceitos básicos de um determinado tema em estudo não são adquiridos, os alunos apresentarão diversas dificuldades de interpretação ao longo do resto do percurso académico. O estudo das funções derivadas, é exemplo de tal, pois os alunos tornam-se ignorantes das aplicações e da interpretação da função derivada (Orhun, 2012). A tendência em memorizar e mecanizar a matemática é tão grande que os alunos compreendem o estudo de funções derivadas algebricamente, desvalorizando a interpretação gráfica (Orhun, 2012).

Viseu (2017) considera a necessidade do "recurso a múltiplas representações para a promoção da compreensão do conceito de derivada de uma função pelo aluno, tendo sempre em consideração os conceitos que lhe estão subjacentes" (p. 6). O conceito de derivada pode ser definido de inúmeras formas, através de diferentes representações: o declive da reta tangente a uma curva num dado ponto (representação gráfica); a taxa de variação instantânea (representação verbal); o limite da razão incremental quando o incremento tende para zero (representação simbólica) e até pode ter um significado físico, como a velocidade instantânea (Viseu, 2017).

No ensino da noção de derivada, através da representação gráfica, os alunos desenvolvem a capacidade de expressar a sua compreensão matemática, pois é através de uma abordagem gráfica que é possível adquirir a aprendizagem do conceito de declive de uma reta, taxa de variação, limite e reta tangente (Viseu, 2017). Assim, o recurso a uma representação gráfica para a compreensão deste conceito, deve ser indispensável (Viseu, 2017). Por outro lado, afirma-se que a perceção de uma abordagem gráfica pode contribuir para o esquecimento de aspetos analíticos, como a relação do grau de uma função polinomial e a sua função derivada (Almeida & Viseu, 2002; Aspinwall et al., 1997). A representação gráfica tem vindo a ter uma elevada enfâse ao longo dos currículos de matemática, no entanto, para se verificar um progresso na sua utilização e compreensão, devem ser adotadas atividades que permitam os alunos serem capazes de se expressar matematicamente ao longo da sua experiência escolar (Aspinwall et al., 1997). "Os alunos que interpretam o significado matemático nessas atividades formam conceções matemáticas cada vez mais sofisticadas" (Aspinwall et al., 1997, p. 14).

A representação algébrica tende a ser a representação mais utilizada pelos alunos (Viseu, 2017). Contudo, segundo Viseu (2017) verifica-se o uso da representação numérica para determinar a imagem de um dado objeto, neste caso, os extremos, e a utilização da representação gráfica para comparar visualmente a função e a sua derivada ou analisar a imagem global do comportamento da função. Relativamente ao uso do quadro de sinal, apesar deste não ser uma representação de uma função, Viseu (2017) considera que este representa uma análise do comportamento e variação de uma função, então é considerado parte integrante da representação tabular. Assim, esta última representação é utilizada no estudo da monotonia e existência de extremos de uma função e, em alguns dos casos, na conversão entre a representação algébrica e gráfica (Viseu, 2017).

Um estudo realizado por Orhun (2012) a 102 alunos do 12.º ano do ensino secundário, pretendeu avaliar quão bem os alunos aprenderam os procedimentos das conexões e propriedades entre o gráfico da função e o da função derivada. Conclui-se que os alunos apresentam ausência de utilização de linguagem matemática para descrever o gráfico da função derivada e falta de capacidade para interpretar e argumentar a partir do gráfico.

Num outro estudo, de Almeida e Viseu (2002), realizado a 19 professores estagiários de Matemática, que visou investigar como é que estes analisam, relacionam e interpretam a informação explícita nos gráficos de uma função e das suas primeira e segunda derivadas, verificou-se que estes apresentam diversas dificuldades. Em termos gráficos, verifica-se uma inexistência da relação entre a função e as respetivas derivadas, assim como da relação entre o gráfico da primeira derivada com o gráfico da segunda derivada. Perante funções mais complexas, considera-se uma maior dificuldade a interpretar e a analisar o que é pretendido. Segundo Almeida e Viseu

(2002) as principais complexidades em relacionar a primeira com a segunda derivada são: relacionar os intervalos de monotonia da primeira derivada com o sinal da segunda derivada; considerar os zeros da primeira derivada como extremos da função e os zeros da segunda derivada como extremos da primeira derivada; considerar os pontos de inflexão do gráfico da primeira derivada como extremos locais da segunda derivada; e, esboçar o gráfico da segunda derivada a partir do gráfico da primeira, e vice-versa.

Segundo vários autores (Almeida & Viseu, 2002; Aspinwall et al., 1997; Orhun, 2002), os alunos têm dificuldades em realizar conexões entre o gráfico da função derivada e a sua função, chegando até a interpretar o gráfico da função derivada como o gráfico da função original (Orhun, 2012). Em ambos os estudos referidos, conclui-se que tanto os alunos como os professores estagiários têm uma pobre capacidade visual, uma enorme incapacidade em interligar múltiplas condições perante cada problema apresentado e uma falta de capacidade de ligar a informação gráfica aos conhecimentos analíticos (Almeida & Viseu, 2002; Orhun, 2012).

2.3 A utilização da calculadora gráfica e a escolha da janela de visualização

No ensino de matemática, a utilização de tecnologia é uma recomendação dos programas de matemática em vigor (MEC, 2018) e é um dos princípios para a matemática escolar, dado que influencia o que é ensinado e melhora a aprendizagem dos alunos (NCTM, 2007). O uso da calculadora gráfica é um dos instrumentos tecnológicos que possui as capacidades computacionais desejadas e é acessível à maioria dos alunos portugueses, dado ser de uso obrigatório em sala de aula. O estudo de funções é um tema que se encontra presente no currículo do ensino secundário e cujas orientações metodológicas visam a valorização da exploração de materiais tecnológicos que possibilitem a utilização de diferentes representações sobre o mesmo conceito (MEC, 2018; Viseu, 2017).

Ruthven (1992) considera que os alunos demonstram ter tendência a usar as abordagens semelhantes às que usavam antes de disporem do uso da calculadora gráfica. O uso mais frequente da calculadora aumenta à medida que os alunos se sentem mais confortáveis em utilizá-la. Segundo um estudo realizado por Rocha (2002), que pretendeu analisar a utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica, é verificado o uso desta ferramenta tecnológica para substituir o recurso a “rotinas mentais e escritas” (p. 19) para representar o gráfico de uma função. Neste estudo, os alunos demonstraram recorrer à calculadora, mesmo quando no enunciado não especificava a sua utilização. Contudo, não significa que os alunos recorreram à calculadora gráfica na totalidade das tarefas propostas.

Tendo por base o estudo de Rocha (2002), os critérios que levam os alunos a optar por recorrer à calculadora gráfica devem-se à sua simplicidade e rapidez. Ruthven (1992) defende que a utilização frequente da calculadora gráfica se deve à aprendizagem de um processo mecanizado para resolver o que é pedido através desta ferramenta. Ainda Consciência (2013) argumenta que os alunos recorrem à calculadora gráfica para resolver casos que não conseguem resolver analiticamente e para analisar situações problemáticas. Esta autora defende também, a necessidade de os alunos utilizarem esta ferramenta de trabalho como um instrumento de confirmação dos resultados obtidos algebricamente.

No estudo das derivadas, o uso da calculadora permite a realização do cálculo da derivada e, segundo García (2000), esta possibilidade pode provocar a desvalorização da aprendizagem das regras de derivação. Por outro lado, uma abordagem gráfica deste conceito, com a utilização da calculadora gráfica, permite a realização de conexões entre a função e a sua derivada (García, 2000). Para tal, é necessário o conhecimento por parte dos alunos relativamente ao que é transmitido no ecrã da calculadora gráfica (García, 2002; Rocha 2002).

Dado se recorrer ao gráfico de uma função, é inevitável a necessidade de alteração da janela de visualização aquando do uso da calculadora gráfica, sendo esta uma tarefa exigente e difícil para os alunos (Rocha, 2020). Ruthven (1996) afirma que os alunos demonstram ter grandes problemas em compreender as mudanças nos valores da janela de visualização, pois não conseguem interligá-los com o aspeto do gráfico.

Rocha (2020) argumenta a existência de dois grandes casos relativamente à janela de visualização. No primeiro caso, em que é visível o gráfico da função, mas é difícil de analisar o seu comportamento devido a este estar comprimido, por exemplo quando o gráfico da função coincide com o eixo. O segundo caso, refere-se quando não é possível ver o gráfico na sua maioria, argumentando que estamos perante uma visualização incompleta ou parcial. A visualização incompleta diz respeito à inexistência de uma parte do gráfico fora da janela de visualização, por exemplo, quando num gráfico de uma função de grau quatro é apresentado um espaço vazio entre duas parábolas. Enquanto a segunda, se refere à inexistência de uma parte do gráfico relevante, por exemplo uma parábola que parece ser uma reta por apenas ser visível uma linha. Por fim, a autora, indica ainda a existência de um último caso: visão incompleta e parcial, que se deve às limitações do ecrã da calculadora gráfica que impossibilita obter o gráfico na sua integra.

Tendo em conta estas situações, Rocha (2020) apresenta as diferentes problemáticas enfrentadas pelos alunos quando estes estão perante cada um dos tipos de gráfico, na janela de visualização *standard*, aos quais intitulou de: comportamento oculto, visualização incompleta, visualização parcial, visualização parcial e incompleta e, a situação complexa. O comportamento oculto do gráfico diz respeito a uma visualização do ecrã em que é fácil de perceber que existe um problema relativamente à visualização do gráfico e não é difícil resolvê-lo, pois basta um simples ajuste na janela de visualização. No caso de se tratar de uma visão incompleta, os alunos têm mais dificuldade em entender como podem agir para obter a parte relevante do gráfico que não aparece. Na visualização parcial, os alunos consideram o gráfico da função apenas como se encontra apresentado, não se apercebendo que parte do gráfico está fora da janela de visualização. Na visualização parcial e incompleta, é claro para os alunos verificarem que não é visível a maioria do gráfico da função, no entanto, nem sempre é simples solucionarem este problema. Por fim, a situação complexa, diz respeito a quando estamos limitados pelas dimensões do ecrã da calculadora gráfica, não sendo possível obter uma visão global do gráfico.

"A representação gráfica está intimamente ligada à janela de visualização, o que pode conduzir a representações que não incluam as características importantes do gráfico da função" (Consciência, 2013, p. 116). Segundo esta autora, para se obter uma janela razoável do gráfico da função é necessário realizar uma manipulação direta dos valores da janela de visualização, alterando $x_{min}, x_{max}, y_{min}$ e y_{max}. Contudo, afirma a existência de outras opções, como os diferentes tipos de *zooms* disponíveis nas diversas calculadoras gráficas.

Os alunos nem sempre estão habituados a identificar os erros apresentados na janela de visualização, tendendo a aceitar o que é apresentado, demonstrando uma grande falta de espírito crítico e dificuldade em interpretar a informação transmitida no ecrã da calculadora gráfica (Rocha, 2020).

3. METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentadas as características da investigação qualitativa adotada, bem como as técnicas de recolha de dados utilizadas para a elaboração do estudo de caso, dado que esta investigação pretende descrever o desempenho dos alunos no tema da investigação.

3.1 Investigação Qualitativa

A investigação qualitativa é utilizada quando se pretende descrever o que é observado em um determinado ambiente em que o investigador, por vezes, apresenta e gera novas hipóteses (Johnson & Christensen, 2014). Este tipo de estudo é frequentemente usado quando se pretende descobrir mais sobre um determinado tema que se desconhece (Johnson & Christensen, 2014). Tal como afirma Amado (2014, p. 41):

> a investigação qualitativa assenta numa visão holística da realidade (ou problema) a investigar, sem a isolar do contexto ‘natural’ (histórico, socioeconómico e cultural) em que se desenvolve e procurando atingir a sua ‘compreensão’ através de processos inferenciais e indutivos (construindo hipóteses durante e depois da análise dos dados). Pode dizer-se que este é o aspeto central e nuclear da investigação qualitativa.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), investigação qualitativa é “um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características” (p.16). Estes autores, argumentam que a investigação qualitativa possui cinco características, afirmando que nem todos os estudos qualitativos as apresentam na totalidade:

- Fonte direta de dados é o ambiente natural: o investigador é o instrumento principal que procura manter a envolvência natural de um determinado contexto, pois “as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48);
- Dados descritivos: a recolha de dados qualitativos deve ser “em forma de palavras ou imagens e não de números” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48). Estes incluem as transições de entrevistas, as notas de campo, as fotografias, os vídeos, os documentos pessoais, os memorandos e outros registos oficiais;
- Importância é dada ao processo e não aos resultados ou aos produtos: o investigador deve procurar traduzir os procedimentos ocorridos e compreender o porquê de estes terem sido feitos;
- Análise indutiva: os dados recolhidos devem ser analisados de forma indutiva, pois o investigador não procura inferir hipóteses, em contrapartida, pretende

interrelacionar a informação recolhida, uma vez que "as abstrações são contruídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50);

- Importância do significado: numa abordagem qualitativa, o investigador está "continuamente a questionar os sujeitos de investigação" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 51), uma vez que pretende compreender e interpretar as diferentes perspetivas relativamente ao objeto de estudo.

Vários autores identificam a existência de diversos métodos utilizados para realizar uma investigação qualitativa: a etnografia, a narrativa, a teoria fundamentada, a investigação-ação, o estudo de caso, etc. (Bogdan & Biklen, 1994; Johnson & Christensen, 2014). Relativamente aos instrumentos de recolha utilizados numa investigação qualitativa, destaca-se a observação participativa e a entrevista em profundidade (Bogdan & Biklen, 1994; Johnson & Christensen, 2014).

3.2 Estudo de Caso

O estudo de caso é dos métodos mais comuns na investigação qualitativa (Aires, 2015; Bogdan & Biklen, 1994; Johnson & Christensen, 2014). Segundo Johnson e Christensen (2014), este método consiste numa "pesquisa qualitativa que se foca na descrição detalhada de um ou mais casos" (p. 105). O estudo de caso é usado com o objetivo de contribuir para o conhecimento de determinados fenômenos, sejam estes, individuais, de grupo, organizacionais, sociais, políticos ou fenómenos relacionados (Yin, 2003).

De acordo com Ponte (2006), os estudos de caso têm sido uma estratégia utilizada na investigação em Educação Matemática, pois pretendem investigar questões de aprendizagem dos alunos. Um estudo de caso pode assumir uma perspetiva interpretativa, que tem como objetivo compreender o ponto de vista dos participantes, ou assumir uma perspetiva pragmática, cujo objetivo é descrever uma perspetiva global do objeto em estudo, do ponto de vista do investigador (Ponte, 2006). Para além destas perspetivas, Ponte (2006) refere-se a um estudo de caso como um design de investigação, argumentando que este apresenta diversas características de uma investigação de natureza empírica (trabalho de campo ou análise documental); tem um caráter fortemente descritivo e também pode ser analítico (interrogando a situação com outras teorias já existentes); e não é uma investigação experimental (o investigador não pretende modificar a situação, mas sim compreendê-la).

Segundo Stake (1995, citado em Johnson & Christensen, 2014), existem três tipos de estudos de caso: o estudo de caso intrínseco, o estudo de caso instrumental e o estudo de caso coletivo. O primeiro, refere-se a um investigador que pretende descrever em profundidade e com detalhe um caso específico que deseja explorar, um método bastante usado em educação. O estudo de caso instrumental pretende a compreensão de um fenómeno diferente do caso particular. Este tipo de estudo é usualmente utilizado por investigadores que pretendem generalizar as descobertas em literaturas de pesquisa sobre vários tópicos. Em comparação com o anterior, este pretende ser um estudo mais universal e não particular. Por fim, o estudo de caso coletivo, também intitulado como múltiplo, pretende estudar vários casos em apenas um caso coletivo, pois o investigador pretende analisar um tópico que considere ser mais vantajoso fazê-lo ao estudar simultaneamente vários casos. Por exemplo, em educação, em vez de estudar os resultados em uma única sala de aula, o investigador estudará em várias salas de aula diferentes.

Os autores Bogdan e Biklen (1994) distinguem também a existências de diversos tipos de estudo de caso, entre os quais mais relevantes: estudos de caso de organizações numa perspetiva histórica, estudos de caso de observação e histórias de vida. Um estudo de caso de observação considera a observação participativa e centra-se numa organização particular ou nalgum aspeto dessa organização (Bogdan & Biklen, 1994).

Para elaborar um estudo de caso, o investigador deve considerar o local, como seleciona os participantes que serão objeto de estudo, considerando as características dos mesmos, para que, de seguida, procure realizar a recolha de dados que será posteriormente analisada e interpretada ao detalhe (Bogdan & Biklen, 1994; Johnson & Christensen, 2014; Ponte, 2006).

3.3 Instrumentos de recolha de dados

Numa metodologia qualitativa, a informação predominante advém de dois tipos de técnicas: técnicas diretas ou interativas e as técnicas indiretas ou não-interativas (Aires, 2015). Segundo esta autora, as técnicas diretas contemplam a observação participante, as entrevistas qualitativas e as histórias de vida. Por outro lado, nas técnicas indiretas considera os documentos oficiais (registos, documentos internos, dossiers, estatutos, registos pessoais, etc.) e os documentos como diários, cartas, autobiografias, etc.

Devido ao carácter holístico de um estudo de caso, este é tanto melhor quanto maior são as técnicas de recolha de dados utilizadas, uma vez que, o investigador recorre a um conjunto amplo e variado de instrumentos (Amado, 2014; Yin, 2003). As técnicas de recolha de dados devem fornecer uma grande diversidade de informação que permita uma descrição detalhada do objeto de estudo. Segundo Yin (2003), a observação direta e participativa, as entrevistas, a recolha documental, os registos de arquivo e os artefactos físicos são as principais fontes de recolha de dados de um estudo de caso.

3.3.1 Observação

"A observação consiste na recolha de informação, de modo sistemático, através do contacto direto com situações específicas" (Aires, 2015, pp. 24-25). Este instrumento de recolha de dados permite ao investigador reunir dados reais aquando da ocorrência das situações, tendo a possibilidade de observar o comportamento dos agentes em estudo e de descobrir características dos participantes que não tinham sido reveladas nas entrevistas (Cohen et al., 2007).

A observação é uma poderosa ferramenta de investigação quando é orientada, planificada, fundamentada e validada. Olabuenaga (1996) considera que uma observação deve ser primeiramente direcionada em torno do objeto em estudo; de seguida, deve ser sistematizada em fases, lugares e pessoas. Posteriormente, a recolha de dados deve ser relacionada através de teorias científicas e, por fim, deve ser submetida ao controlo de veracidade, objetividade, credibilidade e precisão.

Segundo Olabuenaga (1996), as observações podem distinguir-se de acordo com: i) as estratégias de observação (grau de participação do observador – participante ou não participante); ii) os níveis de sistematização e estruturação da informação (fixação, ou não, dos grupos, das categorias, etc.); iii) os graus de controlo (manipulação ou não da situação).

Relativamente à estruturação da observação, Cohen et al. (2007) categoriza três tipos: a observação altamente estruturada, a semiestruturada e a não estruturada. A primeira corresponde a uma observação que pretende procurar o que previamente foi planeado; a observação semiestruturada baseia-se em um conjunto de questões definidas, mas é menos pré-estipulada que a anterior, possibilitando uma maior liberdade na recolha de dados; por fim, a observação não estruturada consiste numa observação que não antecede nem determina o que pretende investigar e, portanto, perante a situação que observa, o investigador decide o seu objeto de estudo. Assim, os dois últimos tipos de observação ao contrário do primeiro, possibilitam criar e gerar hipóteses em vez de testá-las.

Yin (2003) considera dois tipos de observação: a observação direta e a observação participante. Na observação direta o investigador analisa os comportamentos tendo em conta a realidade e o contexto em que o estudo está inserido. Enquanto, na observação participante, o investigador adota um comportamento de observador ativo e não de observador passivo. Assim, o investigador assume diversos papéis no estudo de caso, podendo mesmo participar nas atividades e nos acontecimentos a serem estudados. Vários autores (Cohen et al., 2007; Yin, 2003) destacam como principal vantagem da observação participante o facto de os investigadores terem a possibilidade de discernir o comportamento em curso à medida que ocorre, manipulando os acontecimentos menos importantes. Como desvantagens a observação participante caracteriza-se por ser menos reativa, pois a investigação depende de respostas verbais para perguntas estruturadas e de ter pouco tempo para realizar anotações ou fazer perguntas. Contudo, a participação do investigador pode variar consoante a necessidade e as circunstâncias, podendo ser mais alta nuns momentos e mais baixa noutros (Bogdan & Biklen, 1994).

3.3.2 Entrevista

A entrevista é um método que consiste numa conversa intencional entre duas pessoas, o entrevistador e o entrevistado, embora haja a possibilidade de envolver mais (Bogdan & Biklen, 1994). A interação criada entre o investigador e o participante no estudo deve ser tal que permita a recolha de dados que o entrevistador esteja disposto a fornecer (Johnson & Christensen, 2014).

"A entrevista é uma das técnicas mais comuns e importantes no estudo e compreensão do ser humano." (Aires, 2015, p. 27). Em investigação qualitativa, as entrevistas podem ser utilizadas de duas formas: como estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com outros instrumentos, como a observação participante e a análise de documentos (Bogdan & Biklen, 1994). Independentemente da situação, a entrevista pretende recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como o entrevistando interpreta os aspetos em investigação (Bogdan & Biklen, 1994).

Segundo Aires (2015), podemos caracterizar a entrevista de acordo com o número de pessoas (uma pessoa ou um grupo de pessoas), a quantidade de temas e relativamente à sua estrutura. Vários autores (Amado, 2014; Bogdan & Biklen, 1994) classificam as entrevistas no contínuo estruturada/ não estruturada. A entrevista estruturada centra-se num determinado tema restrito, enquanto a entrevista não estruturada caracteriza-se por ser uma entrevista aberta, dado que o investigador procura entender o entrevistado sem que para tal avance categorias prévias e delimitadoras da investigação. Inclusive, numa entrevista não estruturada

> as perguntas derivam da interação, não existindo, portanto, qualquer grelha prévia de questões, respeitando-se, pelo contrário, a lógica do

> discurso do entrevistado — o que exige muita competência e sensibilidade por parte do investigador (Amado, 2014, p. 209).

Numa entrevista semiestruturada, o entrevistando não tem tanta liberdade como numa entrevista não estruturada, pois o entrevistador define um plano prévio da entrevista, contudo, a interação existente entre os sujeitos permite obter elementos para a investigação. Este último tipo de entrevista é um dos principais instrumentos da pesquisa de natureza qualitativa (Amado, 2014).

3.3.3 Recolha documental

A recolha documental é uma técnica bastante distinta das apresentadas anteriormente, pois "até agora consistem em materiais em que os investigadores têm um papel principal na produção. Eles escrevem as notas de campo e conduzem as entrevistas que se tornam transcrições" (Bogdan & Biklen, 1997, p. 176). Apesar de menos frequente, o recurso a documentos é utilizado como uma fonte de informação para o estudo de caso.

Vários autores (Amado, 2014; Bogdan & Biklen, 1997; Yin, 2003) distinguem os documentos em duas categorias: documentos pessoais e documentos não pessoais ou oficiais. Os documentos pessoais caracterizam-se pela relação estabelecida com o seu autor (Amado, 2014), pois são narrações produzidas pelos sujeitos que descrevem os seus próprios atos, experiências ou ideais (Yin, 2003). São produções em formato escrito, oral ou gráfico (ex: diários íntimos, cartas pessoais, autobiografias, evocações de sonhos, portefólio, etc.) (Amado, 2014; Bogdan & Biklen, 1997). Por outro lado, a utilização dos documentos não pessoais possibilita a análise e compreensão de um conjunto, fenómeno ou organização (Amado, 2014; Yin, 2003). O investigador facilmente recorre a este tipo de recolha documental, contudo podem existir alguns ficheiros que estejam protegidos por serem privados ou secretos (Bogdan & Biklen, 1997). São exemplos de documentos oficiais as atas, os regulamentos, dados estatísticos, textos oficiais, registos sobre o aluno, entre outos (Amado, 2014; Bogdan & Biklen, 1997).

3.4 Procedimentos metodológicos adotados

O presente estudo segue uma investigação qualitativa baseada num estudo de caso segundo a definição de Bogdan e Biklen (1994). Esta investigação foi implementada numa turma do 12.º ano do ensino secundário, do Curso Científico-humanístico de Ciências e Tecnologias no ano letivo 2022/23. A turma é constituída por 23 alunos, dos quais dezasseis são raparigas e sete são rapazes.

O objetivo desta investigação é compreender o papel dos diferentes tipos de representação de uma função no âmbito do estudo das funções derivadas. Além disso, pretende-se investigar as fragilidades manifestadas pelos alunos na resolução de exercícios e compreender o impacto da escolha da janela de visualização, no âmbito das funções derivada. Assim, com vista a atingir os objetivos traçados, pretende-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. Quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir entre uma abordagem algébrica ou gráfica, no âmbito das funções derivadas?
2. Qual o papel e como se caracteriza a articulação das diferentes representações de funções, no estudo das funções derivadas?
3. Quais as fragilidades manifestadas pelos alunos na resolução de tarefas, no âmbito das funções derivadas?
4. Quais as problemáticas reveladas pelos alunos, na escolha da janela de visualização na calculadora gráfica, no estudo das funções derivadas?

Para tal, o estudo apresentado envolveu três alunos, escolhidos de entre os sete voluntários, tendo por base os critérios explicitados de seguida. Os três alunos selecionados realizaram três tarefas durante três sessões de trabalho. Em todas as sessões de trabalho, os alunos foram acompanhados pela investigadora e, durante a realização de cada tarefa, a investigadora colocou questões aos participantes por forma a compreender as suas escolhas para resolver o que é pedido e as suas dificuldades no âmbito das funções derivadas. Assim, durante as sessões de trabalho, a investigadora adotou uma observação não participante e participante, sempre que necessário, e recorreu à entrevista semiestruturada, tido por base um guião.

3.4.1 Escolha dos participantes

A escolha dos participantes para esta investigação foi realizada em diversas fases. Primeiramente, procurou-se convidar os alunos a participar no estudo, tendo-se voluntariado sete alunos. De seguida, a segunda fase de escolha, teve em conta três critérios: a entrevista semiestruturada realizada aos alunos, a capacidade e diversidade dos alunos em resolver problemas e as classificações obtidas no 10.º ano, 11.º ano e no 1.º semestre do ano corrente.

O primeiro critério consiste na realização de uma pequena entrevista aos alunos, na qual estes devem responder a três perguntas que podem ser consultadas no Anexo I. Pretende-se com este primeiro momento perceber o interesse dos alunos em participar na investigação e, principalmente, compreender como os alunos decidem adotar a representação gráfica ou algébrica, analisar o que consideram de cada uma delas e que uso fazem da calculadora gráfica para a resolução de exercícios.

O segundo critério deve-se à observação da investigadora durante as aulas por forma a analisar as capacidades dos alunos no tema das funções derivadas e a diversidade de raciocínios matemáticos.

Por fim, o último critério tem em conta as classificações dos alunos, pois pretendeu-se participantes com diferentes níveis de aproveitamento à disciplina de Matemática A. Na Tabela 7 são apresentadas as classificações dos sete alunos relativamente ao 10.º e 11.º anos e a classificação obtida no 1.º semestre do 12.º ano:

Tabela 7 - Classificações dos sete voluntários no 10.º ano, 11.º ano e 1º semestre do 12.º ano

Alunos	**10.º ano**	**11.º ano**	**12.º ano 1º semestre**
Afonso	19	18	16
Carminho	17	16	14
Maria	19	17	16
Marcus	16	14	14
Pedro	10	9	9
Rita	14	12	14
Sofia	10	8	8

Após a análise da investigadora às respostas dos alunos nas entrevistas e tendo em conta os outros dois critérios referidos, foram selecionados três alunos: Afonso, Carminho e Sofia. A participação de todos os alunos neste projeto de investigação, foi devidamente autorizada pelos seus Encarregados de Educação (Anexo J). De forma a preservar a identidade dos alunos, os participantes escolheram nomes fictícios.

3.4.2 Recolha de dados

Para a recolha de dados neste estudo recorreu-se à observação participante e não participante, à realização de entrevistas semiestruturadas e à recolha documental produzida pelos alunos ao longo das sessões.

3.4.2.1 Observação

A observação foi realizada pela investigadora durante todas as sessões de trabalho. Enquanto os alunos resolviam as tarefas propostas, a investigadora adotou, maioritariamente, uma observação não participante, com objetivo de compreender em profundidade a resolução do aluno perante os diferentes exercícios de cada tarefa e de forma a analisar eventuais bloqueios que surgiram durante a realização das mesmas. O recurso à observação participante deveu-se quando era necessário intervir para que o aluno pudesse avançar na resolução das tarefas.

3.4.2.2 Entrevista semiestruturada

A primeira entrevista foi realizada no dia 22 de fevereiro, a todos os alunos que se voluntariaram a participar no projeto. Esta consistiu em realizar três perguntas aos alunos relativamente ao tema desta investigação (Anexo I).

Durante as sessões de trabalho, foram realizadas entrevistas semiestruturadas de forma a compreender a resolução dos exercícios dos três alunos selecionados. Assim, a investigadora auxiliou-se do guião planeado com possíveis questões a fazer aos alunos (Anexo I).

3.4.2.3 Recolha documental

Com o objetivo de recolher informação relativa aos alunos, foram facultadas pela escola as classificações na disciplina de Matemática A ao longo do ensino secundário. Para além disso, foram recolhidas as produções escritas dos alunos em todas as sessões de trabalho.

3.4.2.4 Sessões de trabalho

Cada aluno participou em três sessões de trabalho, tendo sido realizadas no total nove sessões de trabalho. Todas as sessões foram realizadas integralmente em horário extra letivo combinado com os alunos participantes e decorreram numa sala de aula da escola. No início de cada sessão de trabalho, foram dadas algumas informações aos alunos relativamente à realização das tarefas e foi reforçado que têm liberdade de recorrer à calculadora gráfica durante a resolução de toda a tarefa, pois os alunos tendem a usá-la apenas quando é indicado no enunciado. As informações referidas podem ser consultadas no Anexo K.

Cada sessão teve uma duração máxima de 90 minutos e a calendarização das sessões de trabalho decorreu de acordo com a disponibilidade dos alunos e da investigadora. As primeiras sessões de trabalho decorreram nos dias 21 de março (Afonso e Sofia) e no dia 22 de março (Carminho), onde foi aplicada a primeira tarefa. As segundas sessões de trabalho realizaram-se no dia 23 de março para todos os alunos, na qual foi proposta a segunda tarefa. Por fim, as últimas sessões de trabalho, onde foi aplicada a terceira tarefa, decorreram nos dias 28 de março (Carminho) e 29 de março (Afonso e Sofia). Na Tabela 8 encontra-se a calendarização e horário das sessões de trabalho por aluno.

Tabela 8 - Calendarização e horário das sessões de trabalho

Alunos	**1.ª sessão**	**2.ª sessão**	**3.ª sessão**
Afonso	21/03 - 09h40	23/03 - 15h20	29/03 - 09h00
Carminho	22/03 - 13h30	23/03 - 12h40	28/03 - 15h00

Sofia	21/03 - 16h00	23/03 - 13h50	29/03 - 15h00

3.4.3 As tarefas

Durante este estudo, cada aluno realizou três tarefas, sendo que cada tarefa, caracteriza-se por um conjunto de exercícios que apelam tanto ao uso de diversas representações, como à utilização da calculadora gráfica. Primeiramente, promovem a transição entre representações e, consequentemente, a interligação das conexões entre cada representação, no âmbito das funções derivadas. Em segundo lugar, promovem a liberdade dos alunos recorrerem a uma ferramenta tecnológica, concedendo a uma maior diversidade para responder às questões.

A escolha de três tarefas para esta investigação pretende proporcionar aos alunos uma experiência de aprendizagem do conceito de função derivada através do uso de diversas representações. Cada tarefa consiste numa lista de três a quatro exercícios que pretendem dar resposta às questões de investigação que impulsionaram este estudo (Tabela 9). Para além da distribuição apresentada abaixo, é possível obter conclusões para responder às questões um e dois de investigação em diversos exercícios. Quanto à terceira questão de investigação, esta não se encontra associada a um exercício específico, dado que pretende compreender as maiores dificuldades dos alunos no estudo das funções derivadas. Por fim, os últimos exercícios de cada tarefa, referem-se à quarta questão, dado que esta aborda a escolha da janela de visualização.

Tabela 9 - Distribuição das questões de investigação

Exercícios	**Tarefa 1**	**Tarefa 2**	**Tarefa 3**
1	Questões 1 e 2	Questão 2	Questão 1 e 2
2	Questões 1 e 2	Questões 1 e 2	Questões 1 e 2
3	Questão 2	Questão 4	Questão 2
4	Questão 4	-	Questão 4

Na primeira tarefa (Anexo L), são propostos quatro exercícios, sendo que os dois primeiros pretendem responder às questões um e dois, o terceiro à segunda questão e o último à questão número quatro. Para a segunda tarefa (Anexo M), foram apenas implementados três exercícios, dado que o último exercício apresenta duas alíneas. Assim, o primeiro exercício analisará respostas à questão dois de investigação, o exercício 2 às questões um e dois e o exercício 3 à questão quatro. Por fim, a última tarefa (Anexo N) apresenta uma distribuição igual à primeira tarefa.

A distribuição implementada deveu-se a pretender observar a evolução dos alunos na forma como realizam as tarefas e a analisar se apresentam ou não um processo mecanizado para a resolução de tarefas no âmbito das funções derivadas, assim como verificar se este é alterado durante a realização do estudo. As tarefas pretendem promover um olhar crítico perante as diversas representações, pois ao longo destas são abordadas as representações: gráfica, algébrica, numérica e tabular, dado que se pretendeu estudar a forma como os alunos as conseguem articular. O último exercício de todas as tarefas pretendeu analisar as problemáticas relativamente ao ajuste da janela de visualização quando esta se encontra em formato *standard*. Nestes exercícios são abordados: a visualização parcial (tarefa 1), a visualização incompleta (tarefa 2) e a visualização parcial e incompleta (tarefa 3), segundo a classificação de Rocha (2020).

4. ESTUDOS DE CASO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo são apresentados os três estudos de caso realizados na presente investigação. Os envolvidos do estudo, são alunos de uma turma do 12.º ano de escolaridade, turma que foi acompanhada durante todo o ano letivo.

Para cada um dos estudos de caso, é efetuada uma breve apresentação das características dos alunos e uma análise dos elementos recolhidos, tendo por base as entrevistas realizadas e a resolução das três tarefas propostas, durante as sessões de trabalho. Na transcrição dos diálogos, os alunos são identificados pela letra inicial do seu nome fictício e a investigadora pela letra "I".

4.1. Estudo de caso: Afonso

Afonso é um aluno atento às aulas e com uma enorme capacidade visual. Tem grande aptidão para interligar diversos conhecimentos, de forma rápida e eficaz. Durante as aulas, realiza as tarefas propostas com uma elevada velocidade e está sempre predisposto a participar e a voluntariar-se para qualquer iniciativa. Nos dois anos letivos anteriores, 10.º e 11.º ano, obteve a classificação de dezanove e de dezassete valores, respetivamente e, no 1.º semestre do 12.º ano de escolaridade, obteve a classificação de dezasseis valores.

Durante a primeira entrevista realizada, o aluno mostrou-se bastante descontraído e interessado no tema das derivadas e afirmou que o facto de ser um "tema algébrico" é um aspeto que lhe agrada. Quando questionado como estudaria a monotonia de uma função, o aluno afirmou que o iria fazer de forma analítica e que posteriormente iria confirmar o resultado recorrendo à calculadora gráfica. Enquanto, quando questionado sobre uma situação em que é apresentado um gráfico de uma função e é também pedido o estudo da monotonia de uma função, o aluno afirmou que utilizaria a representação gráfica, não referindo o uso da representação algébrica. Contudo, estabelece incorretamente a relação entre a função e a primeira derivada.

I: A forma como a pergunta está apresentada influencia como a resolves? Por exemplo, é dado a expressão da função e o gráfico da primeira derivada e é pedido a monotonia da função. Como resolves esta questão?

A: Sim, muda. Neste exemplo, quando o gráfico da primeira derivada é decrescente ou crescente, a função é negativa ou positiva.

4.1.1. Tarefa 1

Afonso realizou a primeira sessão de trabalho no dia 21 de março, com uma duração de 45 minutos. A tarefa consistia na resolução de quatro exercícios distintos, sendo que nos exercícios 2 e 4 o aluno demorou mais tempo, dado serem exercícios mais extensos (Anexo L).

No primeiro exercício, o aluno adotou uma abordagem analítica: derivar a função e calcular os seus zeros algebricamente. De seguida, recorreu ao quadro de sinal para analisar a monotonia da função (representação tabular) e, consequentemente, determinar a existência do extremo pedido (Figura 1).

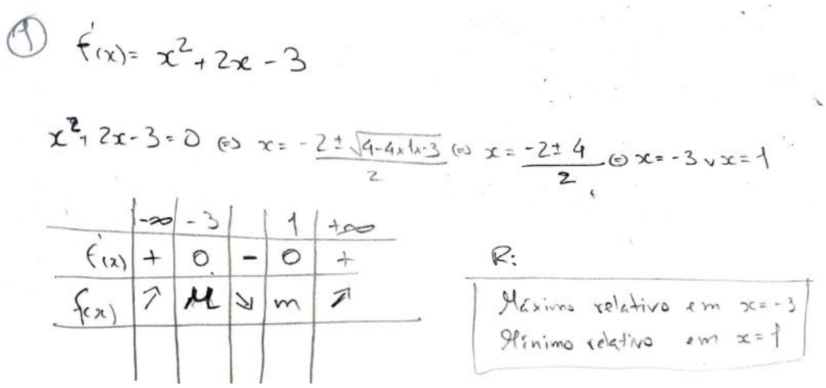


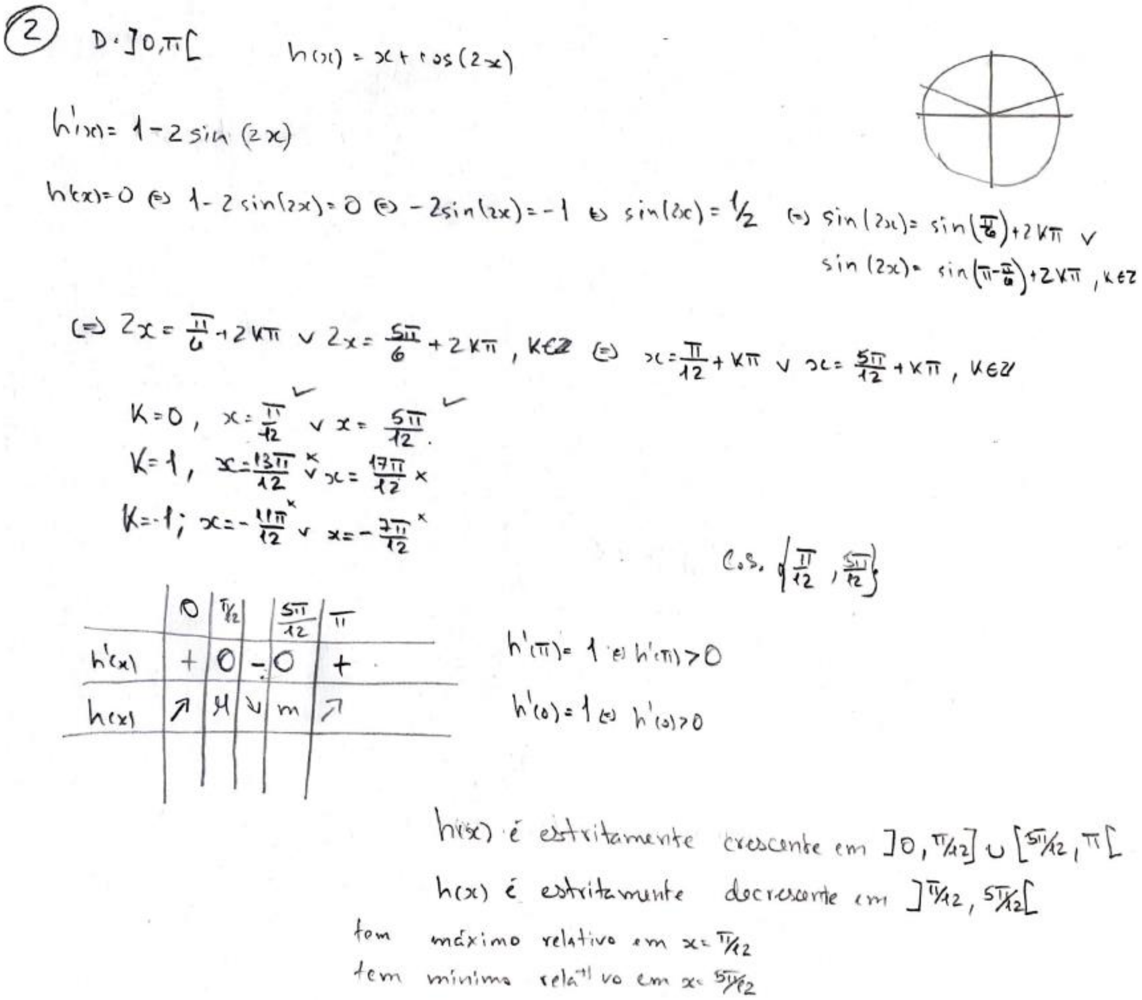
Figura 1 - Resolução do exercício 1, tarefa 1

> I: Como chegaste à conclusão de que a função derivada é positiva, negativa e depois volta a ser positiva?
>
> A: Como a primeira derivada é de segundo grau e o seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima, então é negativa entre os zeros e positiva fora.

O aluno recorreu à representação gráfica e algébrica da função derivada para analisar o seu sinal, pois relacionou a expressão analítica da função derivada com o seu gráfico (excerto transcrito). A investigadora questionou o aluno relativamente à sua resolução, tendo este constatado que o que fez é uma verificação da informação já dada. O aluno afirmou ter resolvido desta maneira porque não relacionou, no início, que os zeros do gráfico da função derivada seriam os extremos da função, o que atribuiu ser o processo que está habituado a fazer.

No segundo exercício, o aluno recorreu a diferentes representações para a sua resolução (Figura 2): algébrica (função derivada e cálculo dos zeros), numérica (determinar a imagem de objetos na função derivada por forma a analisar o seu sinal), tabular (quadro de sinal para estudar a monotonia da função).

Afonso conseguiu manipular todo o seu conhecimento, pois redigiu uma resposta completa, interligando a informação proveniente das diferentes representações. No entanto, por esquecimento, não determinou os extremos da função, considerando apenas as suas abcissas. De salientar ainda a utilização de uma linguagem matemática incorreta, como o uso de equivalente para analisar o sinal da função derivada, de união quando descreve a monotonia da função e referir-se à função como $h(x)$.



② $D:]0,\pi[$ $\quad h(x) = x + \cos(2x)$

$h'(x) = 1 - 2\sin(2x)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(2x) = -1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \vee \sin(2x) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0, \ x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$

$k = 1, \ x = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{17\pi}{12}$

$k = -1; \ x = -\frac{11\pi}{12} \vee x = -\frac{7\pi}{12}$

C.S. $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$

	0	$\pi/12$		$\frac{5\pi}{12}$	π
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	M	↘	m	↗

$h'(\pi) = 1 \Leftrightarrow h'(\pi) > 0$

$h'(0) = 1 \Leftrightarrow h'(0) > 0$

$h(x)$ é estritamente crescente em $]0, \pi/12] \cup [5\pi/12, \pi[$

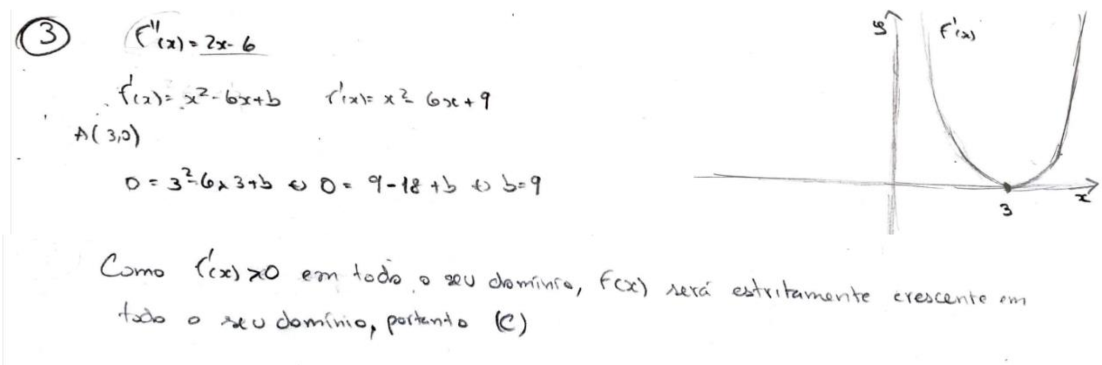
$h(x)$ é estritamente decrescente em $]\pi/12, 5\pi/12[$

tem máximo relativo em $x = \pi/12$

tem mínimo relativo em $x = 5\pi/12$

Figura 2 - Resolução do exercício 2, tarefa 1

No exercício 3 desta tarefa, o aluno optou por analisar o gráfico da primeira derivada, percebendo que o vértice da parábola é o ponto (3,0). Contudo, não concluiu que a primeira derivada era positiva em todo o seu domínio, sentindo necessidade de descobrir a expressão da primeira derivada. Chegou à expressão que pretendia, mas rapidamente compreendeu que não era necessário para responder ao exercício, optando pela análise gráfica da função derivada. Assim, percebeu que a única opção possível era o gráfico da alínea C (Figura 3).



③ $f''(x) = 2x - 6$

$f'(x) = x^2 - 6x + b \quad f'(x) = x^2 - 6x + 9$

$A(3,0)$

$0 = 3^2 - 6 \times 3 + b \Leftrightarrow 0 = 9 - 18 + b \Leftrightarrow b = 9$

Como $f'(x) \geq 0$ em todo o seu domínio, $f(x)$ será estritamente crescente em todo o seu domínio, portanto (C)

Figura 3 - Resolução do exercício 3, tarefa 1

I: Sabias por onde começar?
A: Não, mas comecei a tentar analisar a informação que me davam e inclusive percebo que há informação que nem utilizei para resolver o exercício.

Neste exercício, o aluno afirma não saber por onde começar, pois foi realizando diferentes abordagens até concluir que pela interpretação do gráfico da primeira derivada, era possível responder ao que era pedido.

Por fim, no último exercício, que estava relacionado com a escolha da janela de visualização, o aluno optou por inserir na calculadora a função para analisar o seu gráfico. Compreendeu que era necessário alterar a janela de visualização para ver grande parte do gráfico da função, tendo alterado a janela para: $x \in [-10{,}40]$ e $y \in [-50{,}10]$.

I: Porque vais manter -10 no x mínimo? E porque necessitas de diminuir o valor do y mínimo?
A: Eu sei que a função é uma quadrática, com concavidade voltada para cima, portanto necessito de ver o vértice da função, daí diminuir o y mínimo. O x mínimo não preciso de alterar porque o vértice terá abcissa positiva.

Após a alteração da janela de visualização, o aluno percebeu que necessitava de fazer um pequeno ajuste: $y \in [-58{,}10]$, pois afirmava querer obter o vértice da função, que seria o ponto mínimo (Figura 4).

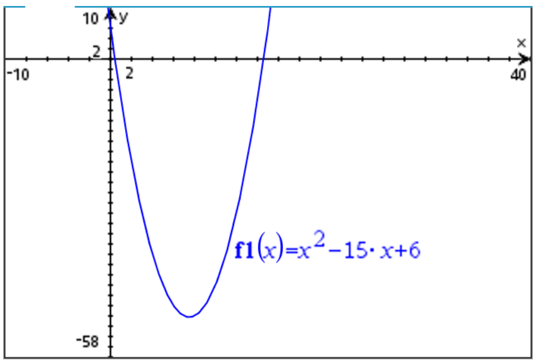


Figura 4 - Representação gráfica da função do exercício 4, tarefa 1

Como Afonso não se recordava de nenhuma forma de manipular a calculadora para obter as coordenadas do mínimo da função, assim recorreu a um processo analítico: determinar as abcissas dos pontos que são zeros da função e calcular o ponto médio destes dois pontos. Posto isto, descobriu a abcissa do mínimo da função e, com base numa representação numérica, obteve a sua ordenada, apercebendo-se de seguida que não era necessária (Figura 5).

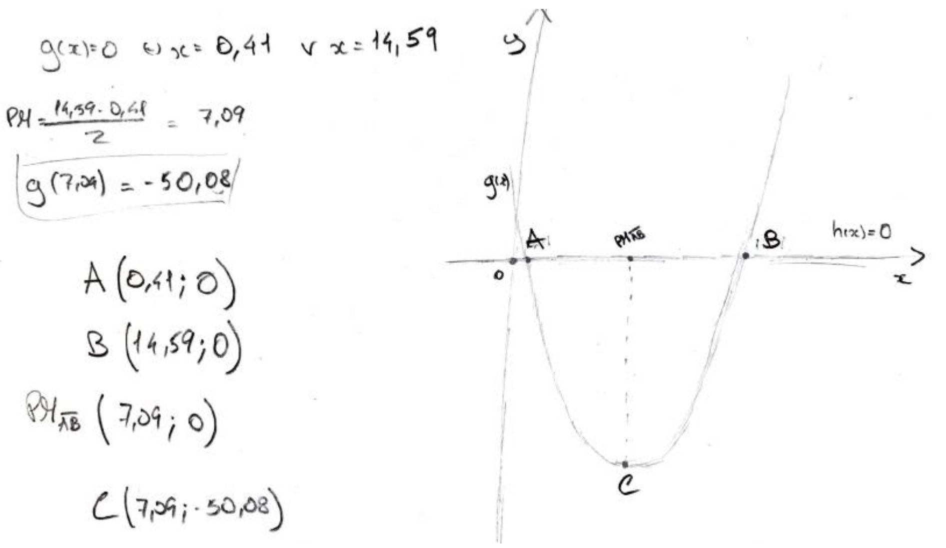


Figura 5 - Esboço do gráfico e determinação das coordenadas do mínimo da função do exercício 4, tarefa 1

O aluno analisou a monotonia da função (Figura 6), contudo, relativamente ao sentido das concavidades, não soube responder de imediato que o gráfico da função tinha a concavidade voltada para cima, questionando:

> A: Nas concavidades é que não sei ver muito bem (…) eu diria que tem sempre a concavidade voltada para cima.
> I: Que relação é que temos de estabelecer?
> A: Uma parábola tem sempre uma concavidade ou para cima ou para baixo, não é?

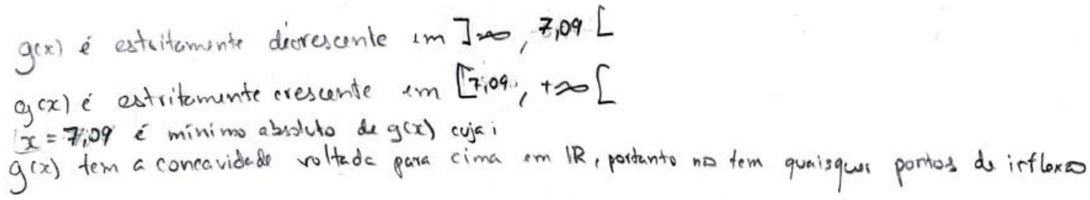


Figura 6 - Análise da monotonia, sentido das concavidades, extremo e pontos de inflexão do gráfico da função do exercício 4, tarefa 1

Afonso é um aluno que procura sempre uma solução para poder responder ao que é pedido. Para concluir, o aluno foi questionado sobre se mudaria alguma das suas resoluções, afirmando que alterava a resolução do exercício 1, explicando que bastava analisar o gráfico. O aluno acrescenta que "poderia resolver praticamente todas as perguntas na calculadora (…) eu acho que é necessário habituar-me a ver na calculadora, porque seria muito mais rápido, não estou é habituado a saber como extrair a informação assim, por isso demorei mais tempo na última pergunta".

4.1.2. Tarefa 2

A segunda tarefa foi realizada no dia 23 de março e teve uma duração de 46 minutos.

No primeiro exercício, tal como aconteceu na tarefa anterior, o aluno decidiu obter a expressão da função através da função da primeira derivada que é dada. Para tal, a investigadora teve de auxiliar o aluno, informando que era necessário adicionar uma constante b, pois só assim teríamos certeza da expressão da função. Através do ponto de coordenadas (0,0), o aluno facilmente obteve a expressão final da função e, posteriormente, obteve o valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (Figura 7).

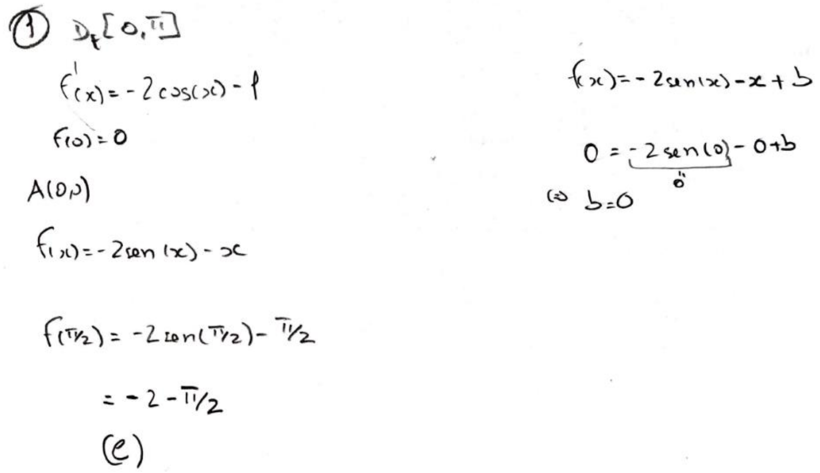


Figura 7 - Resolução do exercício 1, tarefa 2

I: Irias sempre resolver este exercício desta maneira?
A: Sim, normalmente faço assim (…) Não me surge outra forma de resolver, como era?
I: Qual é a relação entre a função e a sua primeira derivada?
A: Eu pensei nisso (função é crescente ou decrescente quando a sua primeira derivada é positiva ou negativa, respetivamente), mas depois como é que se sabe?

Assim, a investigadora auxiliou o aluno a perceber que no intervalo em que $\frac{\pi}{2}$ está inserido a função era decrescente, contudo o aluno não conseguiu concluir que: $f(0) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Relativamente ao segundo exercício, contrariamente ao que Afonso fez no exercício 2 da tarefa 1, em que adotou uma abordagem analítica, neste exercício tentou realizá-lo através da calculadora gráfica. Começou por analisar o gráfico da função na calculadora gráfica e percebeu que necessitava de ajustar a janela de visualização, alterou-a para os valores: $x \in [-10,30]$ e $y \in [-5,50]$. De seguida, afirmou que precisava de "determinar o vértice do gráfico da função", na Figura 8 é apresentada o gráfico da função que obteve na calculadora gráfica. Após diversas tentativas para alterar a janela de visualização, com o objetivo de visualizar um vértice que não existe, o aluno decidiu optar por uma abordagem analítica. O método que acabou por utilizar para estudar a monotonia e a existência de extremos, foi o mesmo do segundo exercício da primeira tarefa, mas neste caso a opção deveu-se à sua incapacidade de relacionar o gráfico de uma função racional com a sua expressão algébrica.

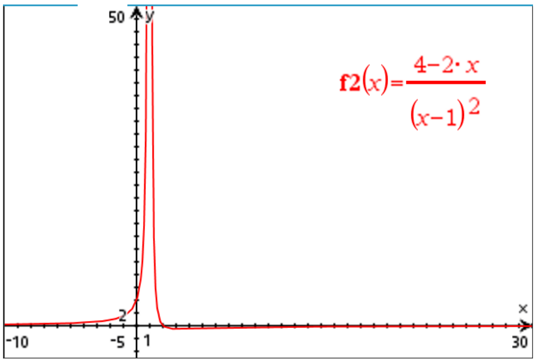


Figura 8 - Representação gráfica da função do exercício 2, tarefa 2

Na sua resolução, é possível constatar que transita facilmente entre a representação algébrica e a representação tabular, e auxilia-se da representação gráfica para analisar o sinal da função do denominador da primeira derivada (Figura 9).

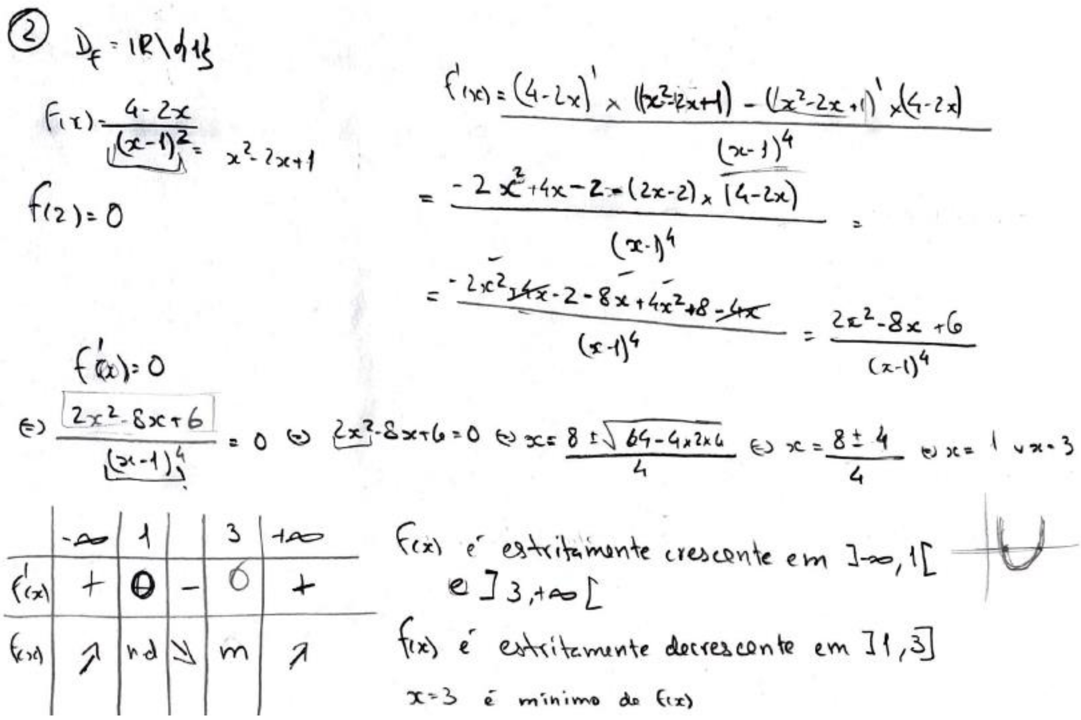


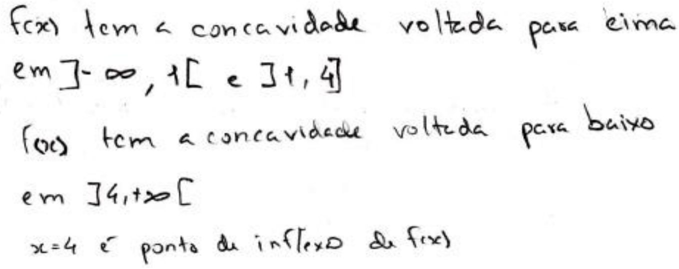
Figura 9 - Representação algébrica e tabular, e análise da monotonia e extremos da função do exercício 2, tarefa 2

Relativamente ao sentido das concavidades, o aluno através da representação gráfica já obtida na calculadora e da informação dada no enunciado quanto ao ponto de inflexão, concluiu o sentido das concavidades da função, sem necessitar de recorrer a um quadro de sinal (Figura 10).

I: Porque resolveste a pergunta algebricamente?

A: Porque não estava a conseguir fazer na calculadora e algebricamente eu sei fazer.

Afonso, optou por recorrer a uma abordagem analítica, pois não teve a capacidade de interligar diferentes conceitos, condicionando a resolução do exercício como inicialmente pretendia, através da calculadora gráfica.



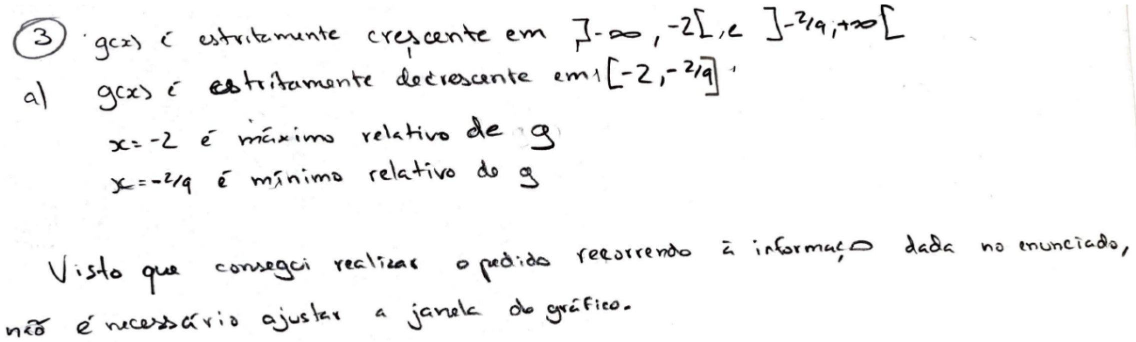
f(x) tem a concavidade voltada para cima
em $]-\infty, 1[$ e $]1, 4]$
f(x) tem a concavidade voltada para baixo
em $]4, +\infty[$
$x=4$ é ponto de inflexão de f(x)

Figura 10 - Descrição do sentido das concavidades do gráfico da função do exercício 2,

Por fim, no último exercício da tarefa, o aluno mostrou-se apreensivo relativamente à primeira alínea, pois não considerou a informação dada no enunciado, apenas analisou o gráfico dado e concluiu que não conseguia descrever a monotonia e os extremos da função. Contudo, não estando satisfeito com a sua resposta, continuou a observar o exercício e percebeu que conseguia responder. Assim, concluiu acerca da monotonia e os extremos da função através da informação do enunciado e da análise do gráfico (Figura 11).

I: Dado não ser possível visualizar parte importante da função, para poderes observar o seu comportamento, qual o ajuste na janela de visualização que realizarias?

A: Diria que colocaria y máximo a 15, mas não tenho bem certeza. Depois na calculadora iria andar a ajustar a janela até a conseguir ver.



3 a) g(x) é estritamente crescente em $]-\infty, -2[$, e $]-2/9, +\infty[$
g(x) é estritamente decrescente em $[-2, -2/9]$
$x=-2$ é máximo relativo de g
$x=-2/9$ é mínimo relativo de g

Visto que consegui realizar o pedido recorrendo à informação dada no enunciado, não é necessário ajustar a janela do gráfico.

Figura 11 - Resolução do exercício 3a), tarefa 2

Na alínea b) do exercício 3, o aluno começou por introduzir na calculadora gráfica a função derivada, contudo, não a usou durante a resolução do exercício. De seguida, pretendeu visualizar o gráfico da função g na calculadora e alterou a janela de visualização com o ajuste que considerou no diálogo com a investigadora, y máximo igual a 15. Afonso, revelou-se interessado em determinar os extremos da função na calculadora gráfica (Figura 12), no entanto mostrou ter algumas dúvidas relativo a como se fazia, tendo a investigadora auxiliado o aluno na manipulação das potencialidades da calculadora. Posto isto, o aluno percebeu que as conclusões que considerou relativamente à monotonia e extremos da função, exercício 3 alínea a), estavam corretas.

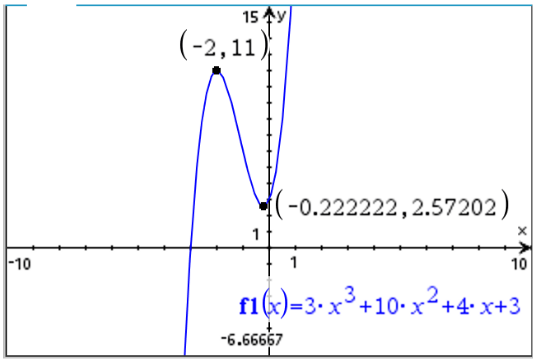


Figura 12 - Representação gráfica e determinação de extremos da função do exercício 3b), tarefa 2

Quanto ao sinal da função derivada, o aluno confundiu-o com o sinal da função g, tendo questionado à investigadora:

A: Como assim o que concluo do sinal?
I: Qual é o sinal e os zeros da função da primeira derivada.
A: Então é negativa e depois positiva (apontando para o gráfico da função g na calculadora) (…) Ah, da função derivada.

Após a investigadora reforçar que se pedia informação da função derivada, o aluno percebeu o que era pedido e realizou-o corretamente. Afonso, neste exercício não teve necessidade de adotar uma abordagem algébrica nem de visualizar a representação gráfica da função derivada, dado que realizou as conexões entre ambas as funções apenas através do gráfico da função g (Figura 13).

R: A resposta da alínea a) confirma-se! Quando a função g(x) é crescente, a sua derivada (g'(x)) é positiva, quando g(x) é decrescente a sua derivada é negativa. O(s) extremos da função g são zeros da sua derivada (g'(x)).

Figura 13 - Resolução do exercício 3b), tarefa 2

I: O que achaste do exercício 3?
A: Foi diferente, não é uma pergunta muito vulgar e fez-me pensar relativamente à janela de visualização, que de facto é necessário adaptá-la para poder analisar o gráfico.

4.1.3. Tarefa 3

Na última tarefa, o aluno demorou menos tempo comparativamente com as outras tarefas, 38 minutos. Esta foi realizada no dia 29 de março e é possível notar que Afonso utilizou processos diferentes daqueles que usou nas últimas tarefas, como a utilização mais frequente da calculadora gráfica e, consequentemente, da representação gráfica de uma função.

No primeiro exercício, Afonso relacionou a função com a função da segunda derivada representada graficamente (Figura 14). Este é um exercício semelhante à primeira pergunta da tarefa 1, em que o aluno adotou uma abordagem analítica, enquanto nesta resolução recorre a uma resolução através da interpretação do gráfico dado.

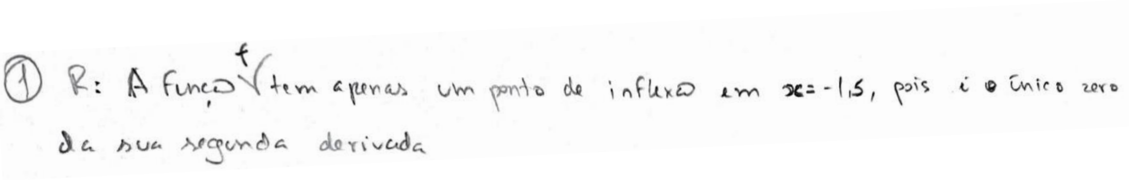

① R: A função f tem apenas um ponto de inflexão em x = -1,5, pois é o único zero da sua segunda derivada

Figura 14 - Resolução do exercício 1, tarefa 3

Relativamente ao exercício 2, o aluno optou por resolver o exercício graficamente, com recurso à calculadora. Contrariamente ao que aconteceu na tarefa anterior, conseguiu estudar a monotonia e determinar os extremos da função auxiliando-se apenas da representação gráfica da função e da manipulação da calculadora (Figura 15).

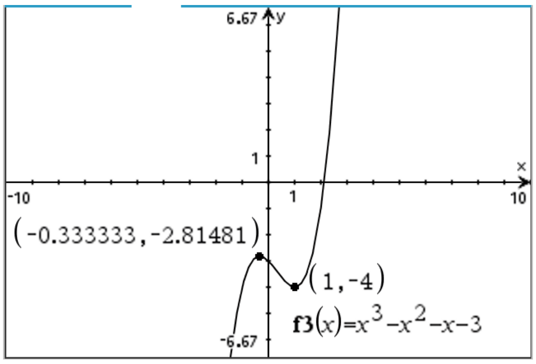


Figura 15 - Representação gráfica e determinação dos extremos da função do exercício 2, tarefa 3

Contudo, sentiu necessidade de desenhar o gráfico da função e de marcar os pontos que considerou relevantes, pois afirmou que desta forma conseguia visualizar melhor a monotonia da função (Figura 16).

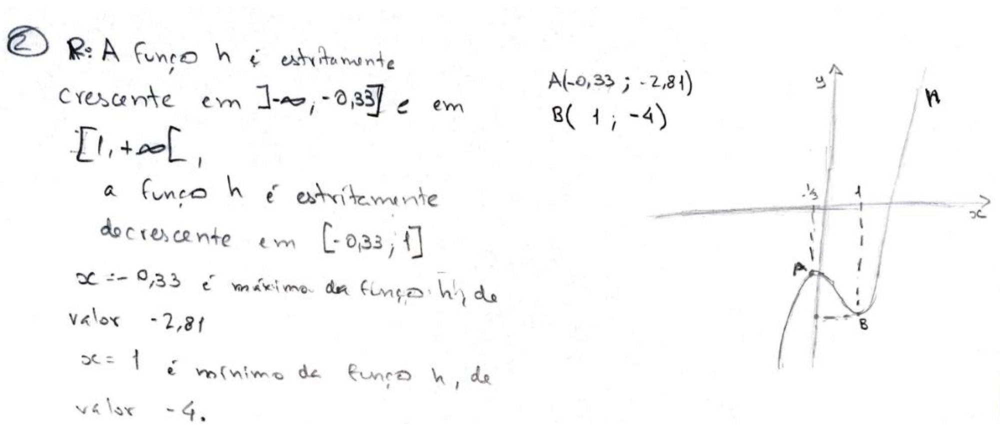

② R: A função h é estritamente crescente em]-∞, -0,33] e em [1, +∞[,
a função h é estritamente decrescente em [-0,33 ; 1]
x = -0,33 é máximo da função h, de valor -2,81
x = 1 é mínimo da função h, de valor -4.
A(-0,33 ; -2,81)
B(1 ; -4)

Figura 16 - Descrição da monotonia e apresentação dos extremos da função do exercício 2, tarefa 3

I: Porque é que neste exercício, comparativamente com os exercícios 2 das outras tarefas, optaste por recorrer à calculadora gráfica?
A: Primeiro porque já sei fazer na calculadora e depois porque me apercebi que é mais rápido e mais fácil de entender, pois bastou analisar o gráfico. Nesta pergunta a função não tem pontos que não pertencem ao domínio, sendo mais acessível de analisar.

Para realizar o exercício 3, o aluno começou por desenhar um referencial cartesiano e registar os pontos que são zero da função. De seguida, decidiu estudar a monotonia da função, optando por introduzir a função da primeira derivada na calculadora. Através do gráfico da função derivada, relacionou o seu sinal com a monotonia da função, sem necessitar de se auxiliar de um quadro de sinal. Posto isto, desenhou o gráfico da função através dos zeros que são dados e da monotonia da função que obteve.

I: Porque é que estás a considerar que o máximo tem abcissa negativa e não positiva?
A: Sei que a função cresce até $y = 2$, depois decresce até $y = -2$ e tem de intersetar a origem do referencial, por isso tem de ser assim a sua representação.

Apesar de ser uma relação implícita e de o aluno ter demonstrado saber estabelecer, tendo em conta o diálogo com a investigadora, no seu esboço (Figura 17) não indicou as coordenadas dos extremos, pois bastava perceber que a abcissa do zero da função derivada é a abcissa do extremo da função.

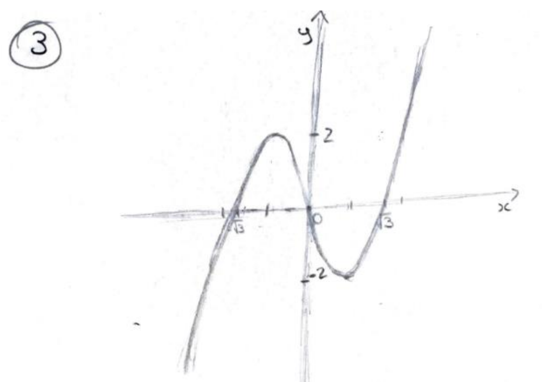


Figura 17 - Esboço do gráfico da função do exercício 3, tarefa 3

Por fim, no último exercício da tarefa 3, o aluno optou por analisar o gráfico da função g. Dado não aparecer nenhuma representação no ecrã da calculadora, voltou a introduzir a expressão da função, pois considerou que poderia não tê-lo feito. Após a segunda vez em tentar visualizar o gráfico da função, Afonso percebeu que não ia ser possível ver o gráfico da função com a janela *standard* e que necessitava de a mudar. Para tal, optou por utilizar a opção *zoom*-reduzir da calculadora gráfica, por forma a visualizar parte da função e “para saber que valores considerar em cada eixo de coordenadas”.

A: Eu sei [que a função sobe] 15 porque é mais 15 [$g(x) = 15 + 2sin(x + 1)$] e vai influenciar no eixo das ordenadas.

Assim, o aluno tomou $x \in \left[-0{,}5;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ e $y \in [\ 13{,}5;\ 15{,}5]$ e percebeu que era necessário voltar a alterar a janela, dado que não era possível visualizar parte importante da função (Figura 18). O ajuste considerado foi $y \in [12, 17]$. Deste modo, Afonso considerou que já era possível determinar o mínimo e o máximo da função (Figura 19).

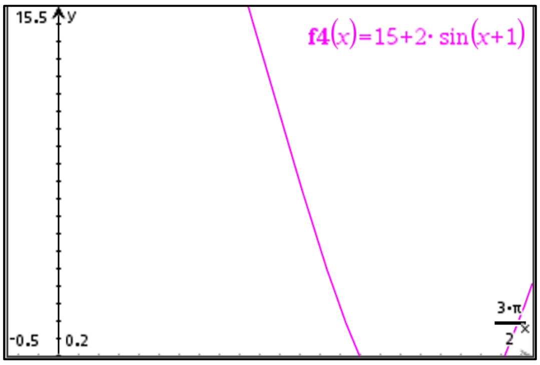


Figura 18 - Primeira tentativa de ajustar a janela de visualização do exercício 4, tarefa 3

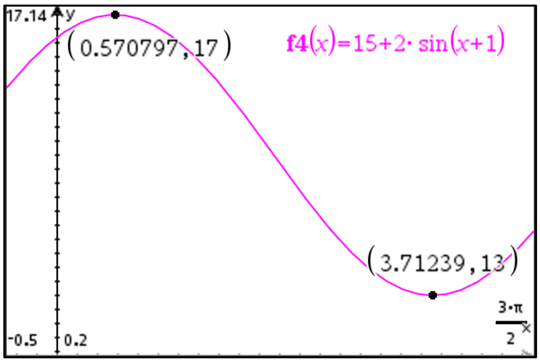


Figura 19 - Representação e determinação dos extremos da função do exercício 4, tarefa 3

Através da análise da representação gráfica da função, conseguiu compreender a monotonia da função e, inclusive, teve o cuidado de verificar se o valor da abcissa do mínimo obtido pertencia ou não ao domínio da função, pois considerou um intervalo maior que o domínio para os valores do eixo das abcissas (Figura 20).

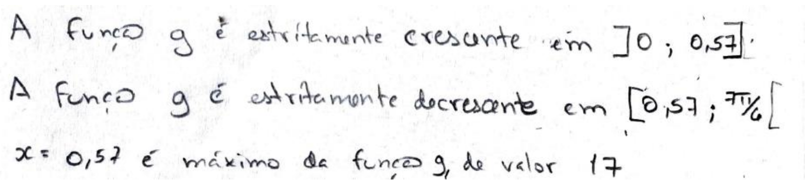

A função g é estritamente crescente em]0 ; 0,57].
A função g é estritamente decrescente em [0,57 ; 7π/6[
x = 0,57 é máximo da função g, de valor 17

Figura 20 - Análise da monotonia e apresentação do extremo da função do exercício 4, tarefa 3

No que diz respeito ao sentido das concavidades, o aluno percebeu que necessitava de estudar o sinal e de determinar os zeros da segunda derivada da função.

A partir do gráfico da função da segunda derivada realizou o pretendido (Figura 21), tendo associado ao sinal e aos zeros da função da segunda derivada, o sentido das concavidades e os pontos de inflexão do gráfico da função, respetivamente (Figura 22).

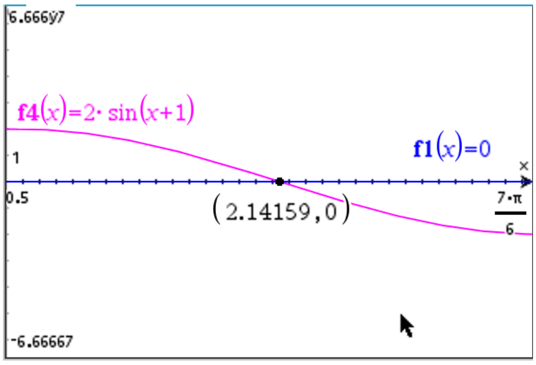


Figura 21 - Representação gráfica e determinação do zero da segunda derivada da função do exercício 4, tarefa 3

A função g tem a concavidade voltada para baixo em]0; 2,14]

A função g tem a concavidade voltada para cima em [2,14 ; 7π/6[

x = 2,14 é ponto de inflexão da função g.

Figura 22 - Descrição do sentido das concavidades e apresentação do ponto de inflexão do gráfico da função do exercício 4, tarefa 3

Ao longo da realização das tarefas, o aluno foi alertado para corrigir a sua linguagem matemática, principalmente quando se refere à função “f” como “$f(x)$” e de referir que “a função f tem concavidade…”, em vez de “o gráfico da função f tem concavidade …”. O rigor matemático é um dos aspetos a salientar nas resoluções de Afonso, apesar de ser notório na última tarefa, um maior cuidado por parte do aluno relativamente ao uso de “$f(x)$”.

4.1.4. Considerações finais

Ao longo das diversas tarefas, Afonso revelou autonomia em desenvolver o que era proposto e demonstrou a sua capacidade de se adaptar aos diferentes tipos de exercícios. Pretendeu responder sempre ao que era pedido, mesmo que implicasse mudar o método como estava a resolver, evidenciando por vezes alguns equívocos no raciocínio. O aluno mostrou-se empenhado em realizar as tarefas e interessado em aprender outras formas de resolver os exercícios, para além daquela a que recorreu e, principalmente, em conhecer como manipular a calculadora gráfica para responder às questões.

Quais os critérios em que o aluno se baseia para decidir entre uma abordagem algébrica ou gráfica, no âmbito das funções derivadas?

O aluno, no início do estudo, demonstrou recorrer mais à representação algébrica, tendo posteriormente alterado a sua perspetiva para uma abordagem gráfica.

Em exercícios semelhantes, como o exercício 1 da primeira e última tarefa, o aluno alterou o uso de uma abordagem algébrica (tarefa 1), para gráfica (tarefa 3), por perceber que, a partir da segunda, a resolução do exercício torna-se mais rápida.

Quanto ao exercício 2 de todas as tarefas, é possível constatar que Afonso na primeira tarefa recorre ao processo mecanizado para resolver este tipo de exercícios (algébrica), tendo alterado o seu critério de utilização, dado que na tarefa 2 optou por tentar resolver o exercício graficamente, mas devido à incompreensão do gráfico apresentado (função racional), alterou para uma abordagem algébrica (tarefa 2). Quanto a esse exercício, mas da tarefa 3, o motivo que levou o aluno a escolher uma abordagem gráfica deveu-se a ter ganho confiança em manipular a calculadora gráfica e ao tipo de função em estudo (função cúbica). No exercício 3 da tarefa 1, é possível concluir que o aluno optou por uma resolução gráfica, após tentar resolver o exercício analiticamente.

Assim, o uso de uma abordagem algébrica deve-se à existência de um método sistematizado, à desvalorização de informação que torna a resolução mais simples e à incapacidade de resolver o exercício através da calculadora gráfica.

Qual o papel e como se caracteriza a articulação das diferentes representações de funções, no estudo das funções derivadas?

Afonso revelou uma enorme facilidade em transitar a informação proveniente de cada uma das representações. Quando recorreu a um processo (determinação da função derivada, cálculo dos seus zeros e quadro de sinal) para resolver os exercícios, é percetível que o aluno não revela dificuldades a transitar entre representações algébricas, gráficas, tabular e numérica (ex.1 e 2 e tarefa 1; ex.2 tarefa 2).

No tema das funções derivadas, revelou saber interpretar gráficos de funções, pois relacionou o gráfico da função da primeira derivada com a monotonia da função, sem necessitar de recorrer ao quadro de sinal (ex.3 tarefa 1; ex.3 tarefa 3), que tem por base uma representação tabular. E ainda, estudou a monotonia (ex.4 tarefa 1; ex.3a) tarefa 2; ex.2 e 4 tarefa 3) e o sentido das concavidades do gráfico de uma função (ex.4 tarefa1; ex.2 tarefa 2), através da observação do seu gráfico.

Relativamente ao uso da representação algébrica, o aluno demonstrou saber interligá-la com as diferentes representações e, é de salientar, que reconheceu que necessitava de obter a expressão da segunda derivada, por forma a determinar o ponto de inflexão pedido (ex.4 tarefa 3). Desta forma, comprovou recorrer à representação algébrica da função da segunda derivada para, de seguida, analisar graficamente o seu sinal e os seus zeros para relacioná-los com o sentido das concavidades do gráfico e pontos de inflexão da função (ex.3 e 4 tarefa 3). Assim, Afonso mostrou saber relacionar correntemente a expressão algébrica de diversas funções (quadráticas, cúbicas e trigonométricas) com o respetivo gráfico, apenas se notou uma fragilidade relativamente à função racional, em que o aluno até alterou o método de resolução (ex.2 tarefa 2).

Por fim, para analisar o sinal das funções derivadas, Afonso recorreu tanto à representação gráfica como à numérica, para estudar os zeros das funções derivadas utilizou tanto métodos analíticos como gráficos e, para concluir relativamente ao estudo da monotonia e/ou ao sentido das concavidades, começou por recorrer a uma abordagem mais algébrica, terminado a utilizar a representação gráfica mais frequentemente.

Quais as fragilidades manifestadas pelo aluno na resolução de tarefas, no âmbito das funções derivadas?

No âmbito do tema das funções derivadas, observou-se que o aluno apresentou dúvidas na manipulação da calculadora gráfica quanto à determinação de extremos da função (ex.4 tarefa 1; ex.3b tarefa 2), mostrando combater esta problemática na tarefa três (ex.2 e 4). Além disso, é de notar que não relacionou que a abcissa dos zeros da função da primeira derivada é também a abcissa dos extremos da função (ex.3 tarefa 3), assim como o uso incorreto de linguagem matemática (ex.2, 3 e 4, tarefa1; ex.2 e 3a), tarefa 2; ex. 4, tarefa 3).

Quais as problemáticas reveladas pelo aluno, na escolha da janela de visualização, na calculadora gráfica, no estudo das funções derivadas?

Quanto à escolha da janela de visualização, o aluno revelou saber ajustá-la quando está perante os diversos casos dos comportamentos de funções abordados nas tarefas (ex.4 tarefa1; ex.3b) tarefa2; ex.4 tarefa 3).

É de salientar a resolução do exercício 2, da tarefa 2, em que o aluno, por não reconhecer o gráfico de uma função racional, considerou sempre que a janela estava incorreta, dado não visualizar o vértice que afirmou existir. De destacar também a resolução do exercício 4, da tarefa 3, onde Afonso volta a introduzir a expressão da função para visualizar o seu gráfico, por considerar que não o tinha feito. Neste mesmo exercício, recorreu à ferramenta *zoom*-reduzir para que pudesse averiguar o comportamento da função, por forma a alterar corretamente a janela de visualização.

4.2. Estudo de caso: Carminho

Carminho é uma aluna dedicada e esforçada em melhorar o seu desempenho na disciplina de Matemática A. Durante as aulas, participa moderadamente, mostrando interesse por compreender os conteúdos programáticos e por resolver as tarefas propostas. No 10.º e 11.º anos, a aluna obteve uma classificação de dezassete e desaseis valores, respetivamente. Concluiu o 1.º semestre do 12.º ano com catorze valores.

Durante a primeira entrevista, a aluna mostrou-se empenhada em participar na investigação, notando que é um tema pelo qual tem curiosidade e gosto. Afirmou que utiliza o gráfico da função como confirmação dos valores obtidos analiticamente:

> I: Perante um exercício de derivadas, como decides que abordagem adotar?
> C: Deve-se mais a como estou habituada a fazer, pois costumo usar as expressões analíticas, mas se me fizer sentido usar o gráfico, uso-o para confirmar o que obtive.
> I: Só para confirmar? E para resolver através da calculadora gráfica, sabes fazer? Por exemplo, para estudar a monotonia de uma função.
> C: Eu acho que sei, teria de determinar os extremos da função e depois analisava o gráfico, não é? Mas não recorro à calculadora para tal, porque não é tão frequente pedirem para fazer assim, nem me sinto segura a fazer pela máquina.

Dado ao diálogo apresentado, é possível constatar que Carminho é uma aluna que sabe o que fazer na calculadora gráfica para analisar a monotonia de uma função, contudo mostra alguma insegurança em a utilizar, dado que "utiliza um processo mecanizado para responder às perguntas". Contudo, considera que a representação gráfica é a que mais a ajuda a perceber qual é o comportamento da função e, evidencia a importância da representação tabular, tendo por base o quadro de sinal e, da representação numérica:

> I: Para analisar a monotonia ou o sentido das concavidades do gráfico de uma função, que representações te auxiliam a compreender o que é pedido?
> C: Acho que é o gráfico, pois ajuda-me a ver se a função está a crescer ou a decrescer e a visualizar as concavidades, mas normalmente não recorro à sua análise para concluir a monotonia ou as concavidades.
> I: Então recorres a quê?
> C: Utilizo o quadro de sinal, pois ajuda-me a relacionar as funções [derivadas com a função] (…) para ver o sinal das funções [derivadas] costumo calcular as coordenadas dos pontos

4.2.1. Tarefa 1

A tarefa 1 foi realizada no dia 22 de março e Carminho realizou-a em 55 minutos.

No primeiro exercício, a aluna recorreu a diversas abordagens para resolver o pretendido. Auxiliou-se da representação algébrica para a determinação da expressão e dos zeros da primeira derivada. Após a obtenção dos zeros, afirmou que estes estavam errados “porque no gráfico não aparece estes zeros. Assim, a aluna encontrou o erro efetuado para obter o valor correto dos zeros e, de seguida, recorreu ao desenho do gráfico da função derivada para concluir acerca do seu sinal. Por fim, através do quadro de sinal, que tem por base a representação tabular, analisou a monotonia da função (Figura 23).

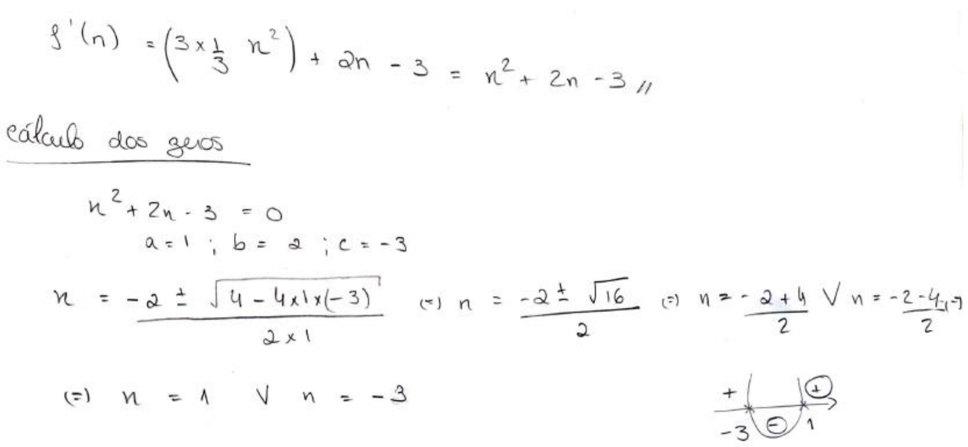


Figura 23 - Resolução do exercício 1, tarefa 1

Carminho, acrescentou ainda “eu percebi que os zeros da função eram os extremos, mas eu gosto de confirmar, assim faz-me mais sentido a resolução do exercício”. É possível constatar que a aluna soube estabelecer a relação entre as funções de imediato, contudo sentiu necessidade de recorrer ao processo a que está habituada, para resolver o que era pedido.

No segundo exercício, a aluna adotou uma resolução análoga à do exercício anterior, abordagem algébrica, para determinação da expressão algébrica e cálculo dos zeros da primeira derivada. Adicionalmente, recorreu ao cálculo dos valores de k, dado tratar-se de uma equação trigonométrica, por forma a obter os valores dos zeros da função derivada: $x = \frac{\pi}{12}$ e $x = \frac{5\pi}{12}$. Quanto ao preenchimento do quadro de sinal, utilizou a calculadora gráfica para visualizar o gráfico da função f e, consequentemente, analisar a sua monotonia (Figura 24).

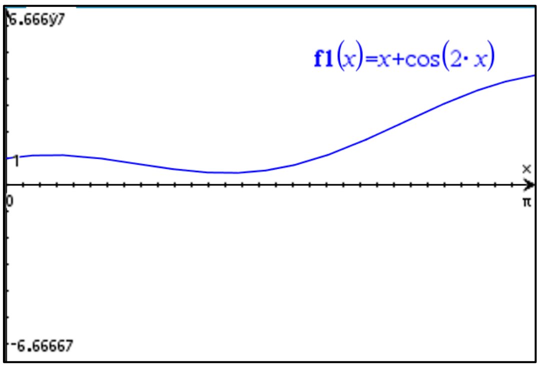


Figura 24 - Representação gráfica da função do exercício 2, tarefa 1

Relativamente à janela de visualização utilizada, a aluna não considerou o domínio da função, tendo analisado o gráfico da função para além do pedido. É possível notar que não soube interpretar o comportamento do gráfico da função, dado que não reconheceu que, no intervalo considerado, a função começa por crescer e não decrescer.

> C: [A função] decresce, depois sobe e, por fim, volta a crescer.
> I: Então, recorreste ao gráfico da função para analisar a monotonia da função e preencheres o quadro de sinal?
> C: Sim, mas eu acho que está mal, porque está a crescer aqui e aqui [apontando para o quadro de sinal (Figura 25)]

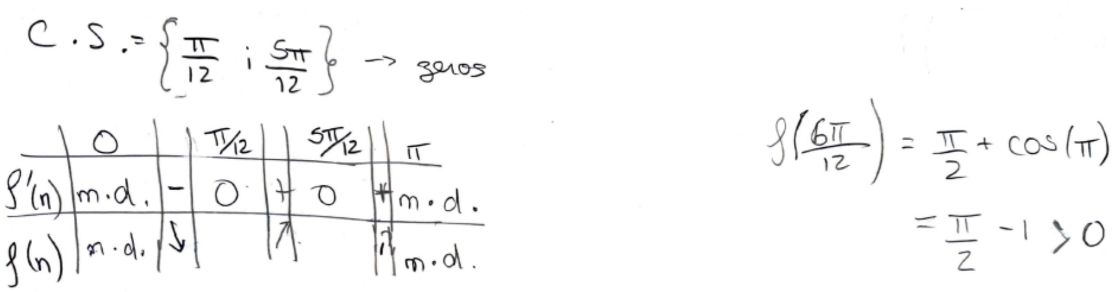


Figura 25 - Quadro de sinal para analisar a monotonia da função do exercício 2, tarefa 1

Por forma a contornar esta adversidade, optou por recorrer à representação numérica, para determinar a imagem de um valor pertencente a $\left[\frac{5\pi}{12}, +\infty\right[$. Apesar do raciocínio de Carminho estar correto, pois pretendeu perceber se no intervalo a função derivada era positiva ou negativa, a aluna calculou $f\left(\frac{6\pi}{12}\right)$, comprometendo o resto da resolução, dado que devia de ter determinado a imagem na função derivada. Por fim, através do sinal da primeira derivada, descreveu a monotonia da função e recorreu à representação numéria para determinar o valor dos extremos da função (Figura 26).

• $h\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)$

$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1,13$

• $h\left(\frac{5\pi}{12}\right) \simeq 0,44$

$f(n)$ é decrescente de $\left]0;\frac{\pi}{12}\right[$ e crescente $\left]\frac{\pi}{12};\pi\right[$; tem um mínimo absoluto em 1,13 e um máximo relativo em 0,44

Figura 26 - Análise da monotonia e determinação do extremo da função do exercício 2, tarefa 1

É possível constatar que a aluna decidiu recorrer ao gráfico da função para analisar a sua monotonia, contudo não soube interpretar corretamente o seu comportamento. Adicionalmente, é de observar uma mudança de resolução quando a aluna teve dúvida pelo facto de a função ser crescente em intervalos consecutivos. Perante esta situação, Carminho optou por recorrer à abordagem numéria para se esclarecer.

Relativamente ao exercício 3, a aluna começou por analisar toda a informação dada, concluindo que a função da segunda derivada tem um zero de coordenadas $(3,0)$ e o seu gráfico é uma reta de declive positivo (Figura 27), mostrando capacidade em relacionar a expressão de uma função afim com o seu gráfico.

• $f''(3) = 0$

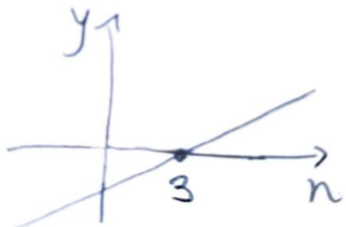


Figura 27 - Relação da expressão algébrica da segunda derivada da função com o seu gráfico, exercício 3, tarefa 1

De seguida, através dos gráficos das funções derivadas, a aluna analisou os seus sinais, recorrendo ao quadro de sinal para sistematizar a informação recolhida (Figura 28). Através do sinal da função da primeira derivada, obtido pelo quadro de sinal, a aluna concluiu que a função em estudo era crescente no seu domínio. Assim, considerou como resposta a opção C (Figura 28).

	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(n)$	—	—	0	+	+
$f'(n)$	+	+	0	+	+

R.: Opção C, porque de acordo com a 1ª derivada que é sempre positiva $f(n)$ será sempre crescente.

Figura 28 - Justificação da escolha do gráfico da função do exercício 3, tarefa1

Quanto ao último exercício da tarefa, Carminho mostrou-se bastante apreensiva quando leu que devia resolver o exercício “com recurso à calculadora”. Decidiu introduzir a expressão da função na ferramenta tecnológica para visualizar o seu gráfico, tendo apresentado alguma estranheza, concluindo que necessitava de ajustar a janela de visualização:

> C: Vou fazer *zoom*- reduzir para ver como é o gráfico, porque parece ser uma reta, mas não é uma reta porque é uma [função] quadrática (...) então vai ter dois zeros e um já está a aparecer.

Após analisar a função, a aluna considerou que alterar a janela de visualização para $x \in [-5,25]$ e $y \in [-30,6]$, tendo verificado que:

> C: Já parece mais uma função quadrática, cuja monotonia é decrescente até ao vértice (…) que é mínimo e eu não sei quanto. Tenho de alterar a janela outra vez (..) vou meter no [eixo dos] y de -60 a 6 (…) já dá para ver.

De seguida, e sem complicações, recorreu à potencialidade da calculadora para determinar o ponto de coordenadas que é mínimo da função (Figura 29). Desta forma, a aluna respondeu ao exercício, essencialmente, através da análise do gráfico obtido na Figura 29, dado que apenas necessitou de recorrer à expressão da primeira e da segunda derivada (Figura 30) para verificar a interpretação que fez do gráfico da função, analisando oralmente o sinal das funções derivadas.

> C: A primeira [derivada] tem um zero em 7,5, pois dá 15-15 [$2 \times 7{,}5 - 15 = 0$], e é negativa e depois positiva. A segunda derivada é uma constante [$f''(x) = 2$], logo é sempre positiva.

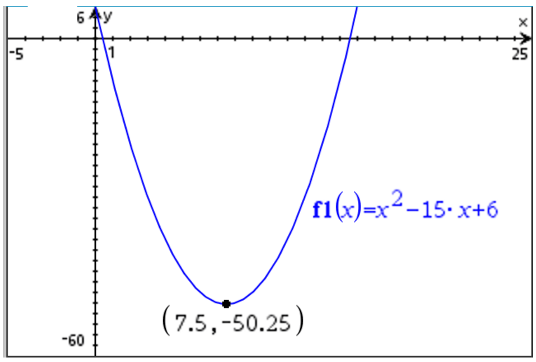


Figura 29 - Representação gráfica e determinação do extremo da função do exercício 4, tarefa 1

Na sua resolução, é possível constatar que efetuou uma incorreção aquando da monotonia da função, utilizando a ordenada do ponto mínimo, em vez da sua abcissa. Carminho, demonstrou ter capacidade tanto para manipular a calculadora gráfica para obtenção do que pretendia, como para interligar a informação proveniente das diferentes representações que utilizou com a função e as suas funções derivadas.

monotonia

decrescente em $]-\infty; -50,25[$ e crescente em $]-50,25; +\infty[$

$f'(x) = 2x - 15$

Mínimo absoluto em $x = 7,5$ $(7,5; -50,25)$

sentidos das concavidades

A concavidade de $f(x)$ é sempre voltada para cima, em todo o seu domínio.

$f''(x) = 2 > 0$

não existem pontos de inflexão

Figura 30 - Resolução do exercício 4, tarefa 1

4.2.2. Tarefa 2

A segunda tarefa foi realizada no dia a seguir à realização da primeira tarefa, tendo tido uma duração de 58 minutos.

No exercício 1, a aluna optou por determinar algebricamente os zeros da função derivada (Figura 31). De seguida, Carminho demonstrou não saber o que realizar para responder ao pedido, recorrendo ao quadro de sinal, simplesmente por ter considerado que era algo que podia ajudar:

> C: Eu não sei o que fazer (…) não tenho nada da função, só sei que é zero em zero (…) vou fazer o quadro de sinal, uma vez que se costuma fazer.

Cálculo dos zeros de $f'(x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

valores de k

$k = 0$

$\underbrace{x = \frac{2\pi}{3}}_{\text{único zero}} \vee x = -\frac{2\pi}{3}$

	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	-3 (−)	$-$	0	$+$	1 (+)
$f(x)$	0	↘	Mín	↗	↗

• $f'(0) = -3$

• $f'(\pi) = 1$

$\frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Figura 31 - Resolução do exercício 1, tarefa 2

Para preencher o quadro de sinal, recorreu à representação numérica por forma a preencher a linha relativa ao sinal da primeira derivada (Figura 31). A aluna percebeu que o valor do objeto pedido pertencia a um dos intervalos considerados no quadro de sinal e que nesse intervalo a função era decrescente. No entanto, faltou-lhe concluir a resolução do exercício, pois afirmou que não sabia o que fazer. Bastava-lhe relacionar a informação que retirou do quadro de sinal com a que era dada no enunciado, isto é, $f(0) < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Por fim, Carminho demonstrou que considerou o exercício complicado de resolver:

> I: O que achaste deste exercício? E porquê?
> C: Para mim é difícil, porque falta-me a expressão da função (…) poderia ajudar se tivesse um gráfico da função, mas eu preferia a [sua] expressão.

Quanto ao exercício 2, a aluna, no início, decidiu resolvê-lo na calculadora, afirmando “consegui resolver o outro [exercício 4 da tarefa anterior], portanto vou ver se também consigo este”. Ao observar o gráfico da função na calculadora, verificou que este admitia uma assíntota vertical em $x = 1$ e decidiu descrever a monotonia da função (Figura 32) através da análise do gráfico (Figura 33), sem recorrer a nenhuma potencialidade da calculadora gráfica para determinar os seus pontos extremos. Deste modo, Carminho não interpretou corretamente a monotonia da função, dado que esta apresenta um mínimo em $x = 3$.

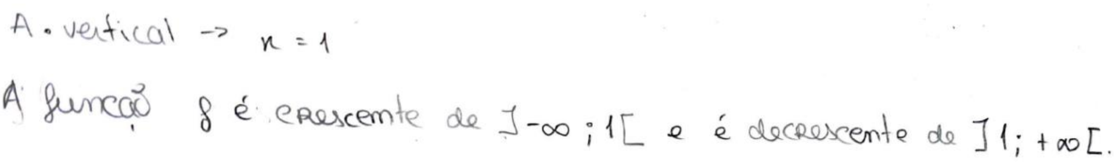


Figura 32 - Descrição da monotonia da função do exercício 2, tarefa 2

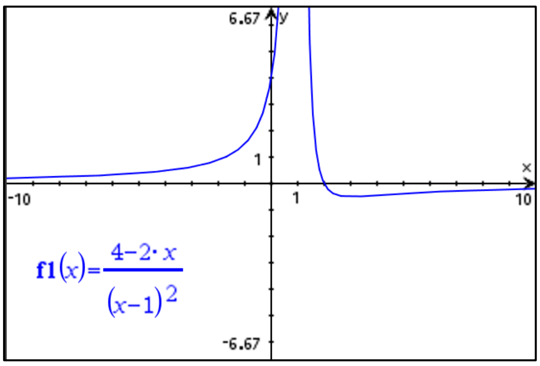


Figura 33 - Representação gráfica da função do exercício 2, tarefa 2

Para determinar os extremos da função, a aluna, de imediato, concluiu que estes são os zeros da primeira derivada, tendo necessidade de determinar a sua expressão e, posteriormente, calculá-los (Figura 34). Assim, é possível constatar que apenas recorreu ao gráfico da função para analisar a monotonia, pois não relacionou os pontos extremos com a monotonia que acabava de concluir. Deste modo, ao verificar os valores dos zeros da primeira derivada, Carminho percebeu que monotonia descrita anteriormente (Figura 32) estava incorreta. Assim, a aluna optou por recorrer à representação gráfica da expressão do numerador da primeira derivada ($2x^2 - 8x + 6$) para concluir acerca do sinal da função derivada (Figura 34).

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)^2 - (4-2x) \times (2x-2)}{((x-1)^2)^2} = \frac{-2x^2+4x-2-8x+8+4x^2-4x}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2-8x+6}{(x-1)^4} \; //$$

$\cdot \; f'(x) = 0$

$2x^2 - 8x + 6 = 0$

$x = 1 \vee x = 3$

x = 1 não pode ser um extremo da função f porque não pertence ao domínio

Figura 34 - Recurso à representação algébrica da função do exercício 2, tarefa 2

Através do sinal da função da primeira derivada, a aluna conclui o estudo da monotonia e determinação dos extremos da função (Figura 35). Para estudar a função quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico, Carminho considerou que bastava interpretar o gráfico da função obtido anteriormente (Figura 33), desvalorizando a nota informativa apresentada no enunciado ("$x = 4$ é o único ponto de inflexão").

I: Qual o motivo, de neste exercício, utilizares outra abordagem comparando com a utilizada na tarefa anterior?

C: Porque o uso da calculadora facilita, mas mesmo assim eu errei a analisar a monotonia da função.

I: E não só, o sentido das concavidades do gráfico da função também, pois é dito que tem um único ponto de inflexão.

A função f é crescente de $]-\infty;1[$ e de $]3;+\infty[$, e é decrescente de $]1;3[$. Tem um mínimo relativo em $x = 3$.

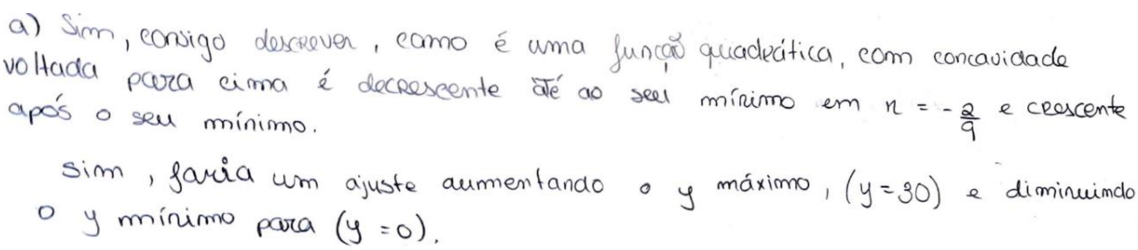
Analisando o gráfico da função f ela tem concavidade voltada para cima em $]-\infty;1[$ e em $]1;+\infty[$. Não existem pontos de inflexão.

Figura 35 - Análise da monotonia, sentido das concavidades e apresentação do extremo e pontos de inflexão do gráfico da função do exercício 2, tarefa 2

C: Ah pois é (…) Por isso é que recorro menos à calculadora, eu não vejo isso.

É possível constatar que o motivo pelo qual a aluna tentou resolver o exercício pela calculadora se deveu a ter conseguido resolver um exercício na tarefa anterior pela calculadora. É de salientar a ausência de espírito critico para perceber se é ou não necessário realizar alteração da janela de visualização, por forma a analisar ao pormenor o comportamento da função, pois esta foi uma das implicações da resolução deste exercício, dado que comprometeu o estudo tanto da monotonia como o sentido das concavidades do gráfico da função.

No exercício 3 alínea a), a aluna considerou que conseguia descrever a monotonia ao analisá-la através do gráfico apresentado. Contudo, Carminho não considerou parte do gráfico da função, concluindo até que se tratava de uma função quadrática (Figura 36).


a) Sim, consigo descrever, como é uma função quadrática, com concavidade voltada para cima é decrescente até ao seu mínimo em $x = -\frac{2}{9}$ e crescente após o seu mínimo.

Sim, faria um ajuste aumentando o y máximo, (y = 30) e diminuindo o y mínimo para (y = 0).

Figura 36 - Resolução do exercício 3a), tarefa 2

Quanto à janela de visualização, estabeleceu que era necessário realizar o ajuste para “ver melhor a parábola da função, pois está muito pequena”. Tendo em conta o objetivo que a aluna pretendia, pode afirmar-se que a alteração considerada para a janela de visualização (Figura 36), adequava-se.

Relativamente à alínea b) do exercício 3, assim que a aluna visualizou o gráfico da função na calculadora, tomou consciência que desconsiderou parte do gráfico.

C: Ah, eu ignorei aquele bocado do gráfico.
I: Então e porquê?
C: Eu achava que era uma assíntota ao gráfico da função.

Após realizar a alteração da janela de visualização considerada na alínea anterior ($y \in [0,30]$), a aluna conclui, de imediato, que a monotonia da função descrita no exercício 3 alínea a) se alterava. Através do gráfico obtido pela calculadora, recorreu à determinação dos extremos da função (Figura 37), por forma a finalizar o estudo da monotonia (Figura 38).

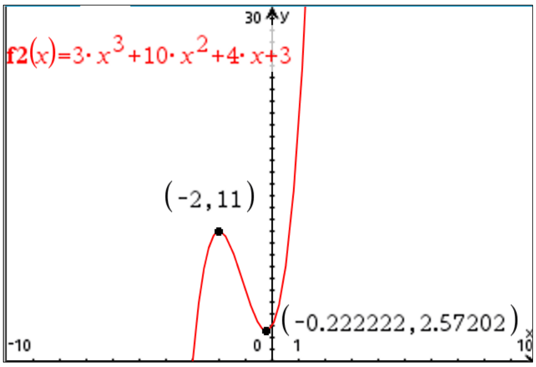


Figura 37 - Representação gráfica e determinação dos extremos da função do exercício 3b), tarefa 2

b) A monotonia indicada na alínea a) não se mantém.

A função g é crescente de $]-\infty; -2[$ e de $]-\frac{2}{9}; +\infty[$ e é decrescente de $]-2; -\frac{2}{9}[$.

Figura 38 - Análise da monotonia da função do exercício 3 b), tarefa 2

No que diz respeito ao estudo do sinal e zeros da função derivada, a aluna necessitou de determinar a sua expressão para visualizar a representação gráfica na calculadora. Ao fazê-lo na mesma página do gráfico da função, necessitou de alterar a janela de visualização, y mínimo igual -7 (Figura 39).

Ao observar os dois gráficos das funções em estudo, Carminho concluiu prontamente que os zeros da derivada são os extremos da função que considerou anteriormente. Assim, percebeu que através da monotonia descrita (Figura 38) que conseguia concluir o sinal da função da primeira derivada (Figura 40).

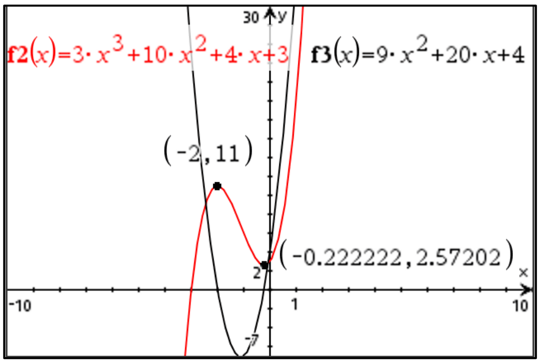


Figura 39 - Representação gráfica da função e da primeira derivada da função do exercício 3b), tarefa 2

A derivada de g é positiva de $]-\infty; -2[$ e de $]-\frac{2}{9}; +\infty[$ e negativa em $]-2; -\frac{2}{9}[$

Os zeros da derivada são $x = -2$ e $x = -\frac{2}{9}$, porque são os extremos da função g.

Figura 40 - Descrição do sinal e indicação dos zeros da primeira derivada da função do exercício 3b), tarefa 2

4.2.3. Tarefa 3

A última tarefa foi realizada no dia 28 de março, com uma duração de 41 minutos.

Quanto ao primeiro exercício, Carminho relacionou o sinal da segunda derivada com o ponto de inflexão do gráfico da função, através da análise do gráfico dado, sem recorrer à representação algébrica. Teve o cuidado de esclarecer que o zero da segunda derivada nem sempre é ponto de inflexão, mas que no caso apresentado, como a função da segunda derivada é negativa e depois tem sinal positivo, então é considerado ponto de inflexão (Figura 41).

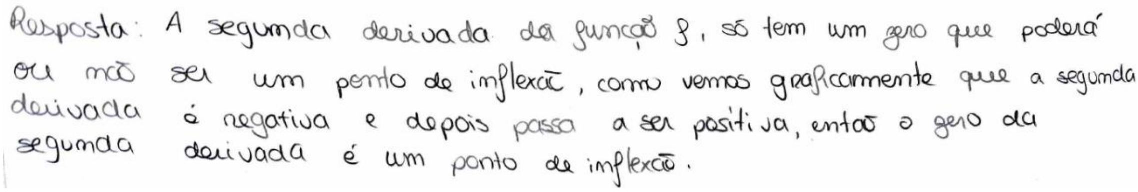
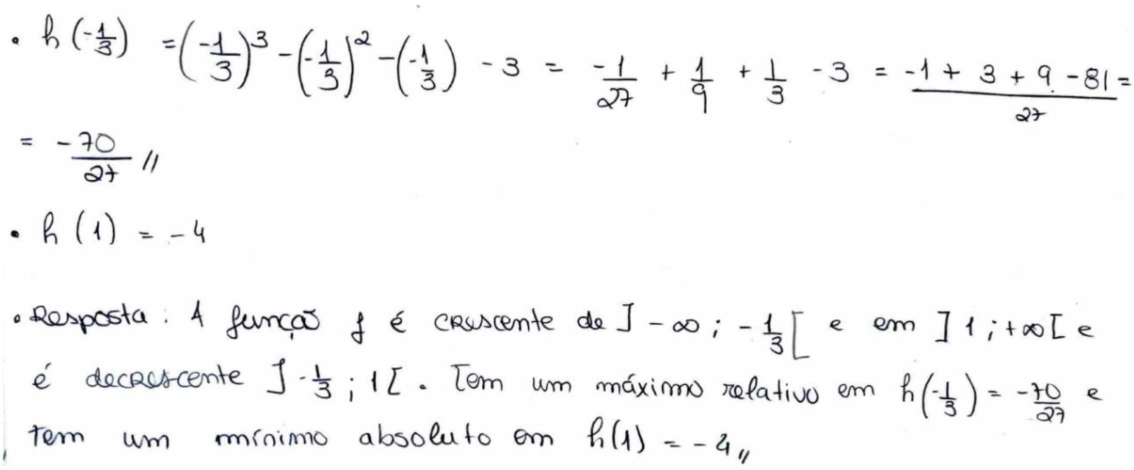

Resposta: A segunda derivada da função f, só tem um zero que poderá ou não ser um ponto de inflexão, como vemos graficamente que a segunda derivada é negativa e depois passa a ser positiva, então o zero da segunda derivada é um ponto de inflexão.

Figura 41 - Resolução do exercício 1, tarefa 3

I: Porque realizaste o exercício desta maneira?
C: Comecei a analisar mais os gráficos do que antes e a perceber que a informação que é interpretada pelo gráfico é relevante.

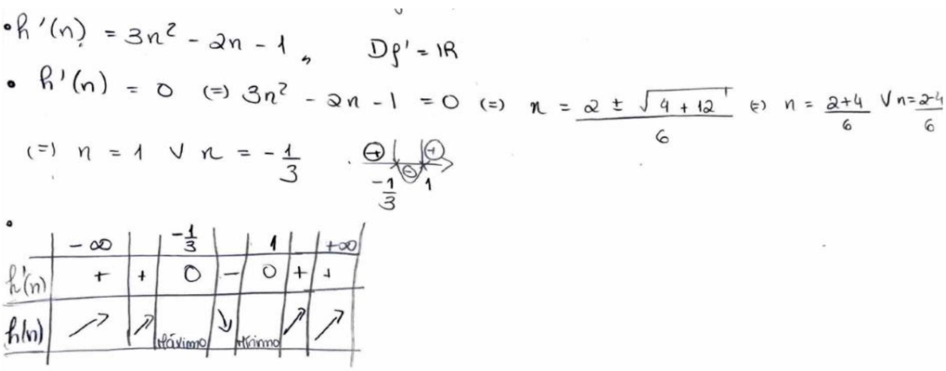
No exercício 2, Carminho recorreu a todas as abordagens. Utilizou a representação algébrica para determinar a expressão e os zeros da primeira derivada, enquanto para as abordagens gráfica e tabular utilizou-as em simultâneo para analisar o sinal da primeira derivada, por forma a concluir a monotonia da função (Figura 42).


• $h(-\frac{1}{3}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 3 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 3 = \frac{-1+3+9-81}{27} =$
$= -\frac{70}{27}$ //
• $h(1) = -4$

• Resposta: A função f é crescente de $]-\infty; -\frac{1}{3}[$ e em $]1;+\infty[$ e é decrescente $]-\frac{1}{3}; 1[$. Tem um máximo relativo em $h(-\frac{1}{3}) = -\frac{70}{27}$ e tem um mínimo absoluto em $h(1) = -4$ //

Figura 42 - Descrição da monotonia e determinação dos extremos da função do exercício 2, tarefa 3

É possível observar que a aluna soube interligar a informação proveniente de todas as representações que utilizou. Para a determinação dos extremos da função, recorreu ainda à representação numérica (Figura 43).



• $h'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $D_{h'} = \mathbb{R}$

• $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{2+4}{6} \vee x = \frac{2-4}{6}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$

	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$h'(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$h(x)$	↗	↗	Máximo	↘	Mínimo	↗	↗

Figura 43 - Representação algébrica, gráfica e tabular da função do exercício 2, tarefa 3

Quando questionada pela investigadora relativamente às diferentes perspetivas de resolução entre este e o exercício anterior, a aluna considerou que o facto de lhe ser dado o gráfico de uma função impulsiona que o analise, comparativamente a ser ela a elaborar o gráfico:

> I: No exercício 1, recorreste mais à abordagem gráfica, enquanto neste exercício apenas a utilizaste para analisar o sinal da função derivada. Porquê?
>
> C: No exercício anterior o gráfico já me era dado e neste [exercício] teria de ser eu fazê-lo.

No exercício 3, a aluna começa por interpretar a informação do enunciado, demonstrando incertezas relativamente aos extremos da função, pois não soube se 2 e -2 se referia à abcissa ou à ordenada, tendo a investigadora auxiliado essa interpretação. Posto isto, decidiu recorrer ao quadro de sinal apresentado para concluir acerca do sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão do gráfico da função (Figura 44). Assim, constatou que tinha todas as informações necessárias para desenhar o gráfico da função (Figura 44).

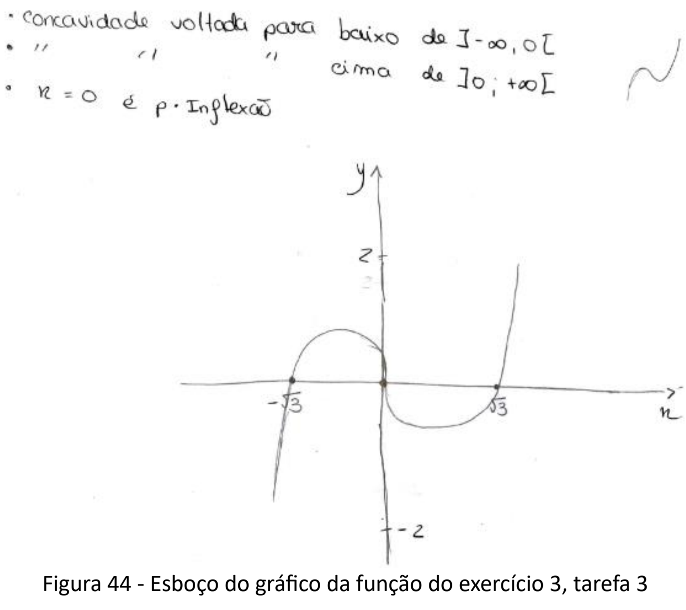


Figura 44 - Esboço do gráfico da função do exercício 3, tarefa 3

Analisando o gráfico obtido pela aluna, é possível constatar que esta não apresentou rigor em identificar corretamente os pontos, pois apesar de considerar 2 e -2 no eixo das ordenadas, o esboço apresentado não tem máximo e mínimo com essas ordenadas. Tendo por base esta situação, a aluna, consequentemente, não obteve a abcissa dos pontos extremos da função.

A terminar, no exercício 4, a aluna após analisar o gráfico da função na calculadora gráfica e a expressão algébrica da função, percebeu que necessitava de alterar a janela de visualização, dado não ser possível visualizar qualquer gráfico no ecrã. Assim, realizou a alteração $y \in [0,30]$, demonstrando que sabia que a função seno sofre uma transformação, contudo não soube explicar qual:

> C: O seno varia entre 1 e -1, portanto, o contradomínio muda (…) não sei, para mim o 15 da função $[g(x) = 15 + \sin{(x+1)}]$ faz qualquer coisa e faz-me sentido este intervalo.

Carminho, após realizar o ajuste da janela de visualização, percebeu que necessitava de alterar também o eixo das abcissas, dado que no enunciado é afirmado que tem domínio de $\left]0, \frac{7\pi}{6}\right[$. Assim, considerou que através do gráfico obtido (Figura 45) conseguia descrever o que é pedido.

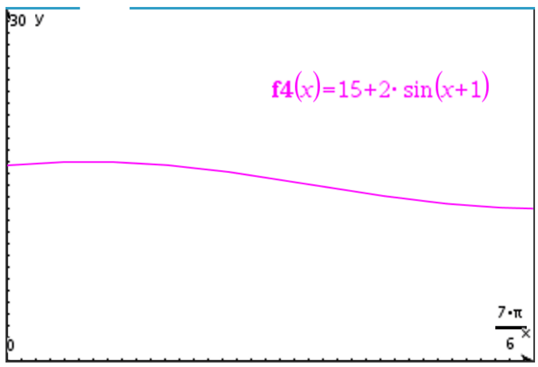


Figura 45 - Representação da função do exercício 4, tarefa 3

Por forma a concluir a resolução do exercício, a aluna, não recorreu às funcionalidades da máquina de calcular e, desta forma, deduziu a monotonia, sentido das concavidades, existência de extremos e pontos de inflexão através da análise do gráfico (Figura 46).

A função g no intervalo de $]0; \frac{7\pi}{6}[$ é decrescente, com concavidade voltada para baixo e não tem extremos nem pontos de inflexão.

Figura 46 - Resolução do exercício 4, tarefa 3

A investigadora questionou a aluna quanto à forma como esta resolveu o exercício, perguntado se não era possível determinar os extremos através das potencialidades da calculadora:

> C: Sim dá, mas não parece ter.
> I: Se calhar a janela de visualização que consideraste não é adequada para visualizar o comportamento. O que achas que poderíamos fazer?
> C: Aumentar o y [máximo], talvez para 45 [testou o ajustamento e não concluiu nada acerca do mesmo].

Quando questionada pela investigadora, Carminho revelou incapacidade para alterar a janela de visualização para uma que tenha sido possível analisar a função devidamente, pois aumentou o valor de y máximo em vez de o diminuir. Inclusive, é de salientar que, pela aluna, não seria necessário ajustar a janela de visualização, dado que considerou descrever a monotonia através do gráfico apresentado no ecrã da calculadora gráfica.

4.2.4. Considerações finais

Carminho, ao longo da investigação, revelou ter capacidade em resolver os exercícios propostos. É possível constatar que soube relacionar a informação, tendo em conta aquilo que era pedido, e é de notar que recorreu à calculadora gráfica para se auxiliar na realização das tarefas. Contudo, a interpretação incorreta do que é apresentado no ecrã desta ferramenta tecnológica, provocou falhas na análise das funções.

Quais os critérios em que a aluna se baseia para decidir entre uma abordagem algébrica ou gráfica, no âmbito das funções derivadas?

Durante a realização das tarefas, Carminho mostrou várias vezes alterar a abordagem a adotar para resolver os exercícios. Nos primeiros exercícios é visível a escolha pela representação algébrica face à representação gráfica, dado ser o processo que mais está habituada a fazer (ex.1 e 2 tarefa 1; ex.1 tarefa 2). Contudo, recorreu ao gráfico de funções para analisar que a obtenção dos zeros analiticamente estava incorreta (ex.1 tarefa 1).

Com o recurso à calculadora gráfica na tarefa 1, exercício 4, a aluna ultrapassou um pouco o receio e construiu confiança para que resolvesse o exercício 2 da segunda tarefa graficamente. No entanto, necessitou de recorrer à representação algébrica para confirmar a monotonia analisada pelo gráfico da função, tendo percebido que se tinha engando. Desta forma, a aluna retrocedeu quanto ao uso da abordagem gráfica, pois esta situação impulsionou a que posteriormente (ex.2 tarefa 3) não recorresse a esta representação. É de notar que apesar desta observação, na mesma tarefa (três) a aluna no primeiro exercício prioriza a abordagem gráfica, pelo facto do gráfico da função já ser facultado.

Assim, conclui-se que Carminho começou por recorrer à abordagem algébrica e gráfica (tarefa 1), tendo na segunda tarefa priorizado a representação gráfica, terminando (tarefa 3) a recorrer ambas, novamente.

Qual o papel e como se caracteriza a articulação das diferentes representações de funções, no estudo das funções derivadas?

Carminho demonstrou, na maioria dos exercícios, saber interligar a informação proveniente das diferentes representações, contudo é de notar algumas interpretações incorretas.

Quanto à articulação da representação algébrica e gráfica, a aluna revelou saber relacionar a expressão algébrica de diversas funções com os seus gráficos: afim (ex.3 tarefa 1), quadrática (ex.4 tarefa 1), racional (ex.2 tarefa 2). No entanto, quando apresentado o gráfico de uma função cúbica, a aluna não demonstrou relacioná-lo com o de uma função cúbica (ex.3a) tarefa 2), pois desvalorizou parte relevante do gráfico, assumindo que se tratava de uma função quadrática.

Através do gráfico da função, a aluna não foi concisa em interpretar a informação pretendida através deste, dado que por vezes soube analisar a monotonia da função (ex.3 e 4 tarefa 1; ex.3b) tarefa 2) e noutros não soube (ex.2 tarefa 1; ex.2 tarefa 2; ex.4 tarefa 3); analogamente, soube em alguns exercícios interpretar o sentido das concavidades (ex.4 tarefa 1) e noutros não (ex.2 tarefa 2; ex.4 tarefa 3). É de salientar que foi nos mesmos exercícios (à exceção de um) que a aluna analisou incorretamente tanto a monotonia da função, como o sentido das concavidades do seu gráfico, dado que a aluna nestes exercícios analisou o gráfico da função através da calculadora gráfica, com uma janela de visualização inadequada.

O uso da representação gráfica é ainda visível quando a aluna pretende analisar o sinal das funções derivadas (ex.1 tarefa 1; ex.2 tarefa 3; ex.3 tarefa 3) articulando essa informação com o quadro de sinal, representação tabular. Para além disso, a aluna recorre a esta última representação para poder sistematizar a informação relativa às funções derivadas (ex.3 tarefa 1). Quanto à representação numérica, demonstrou recorrer a esta para saber preencher o quadro de sinal (ex.2 tarefa 1; ex.1 tarefa 2) e para obter coordenadas dos pontos extremos da função, através da calculadora gráfica (ex.4 tarefa 1; ex.3b) tarefa 2) e analiticamente (ex.2 tarefa 3).

Quais as fragilidades manifestadas pela aluna na resolução de tarefas, no âmbito das funções derivadas?

Carminho não revelou apresentar muitas fragilidades na resolução dos exercícios propostos. No entanto, é de notar que a aluna usou incorretamente a representação numéria para analisar o sinal da função, pois determinou a imagem de um ponto na função em vez de na sua derivada (ex.2 tarefa 1); não estabeleceu a relação de que se a função é decrescente, então é possível concluir o exercício 1 da segunda tarefa; desvalorizou a informação relativa à existência de ponto de inflexão, tendo descrito incorretamente o sentido das concavidades (ex.2 tarefa 2); e não interligou a monotonia descrita com a análise do sinal da função derivada (ex.3b) tarefa 2).

Por fim, a aluna revelou uma incompreensão pela interpretação dos extremos da função, uma vez que apresentou incorretamente os intervalos de monotonia, dado que recorreu à ordenada do extremo em vez da abcissa (ex.4 tarefa 1) e não demonstrou saber se os extremos indicados no exercício 3 da última tarefa se referiam à abcissa do ponto ou à sua ordenada. Adicionalmente, e tendo em conta este último exercício indicado, Carminho revelou incapacidade em identificar corretamente os pontos extremos, no gráfico esboçado. Deste modo, é de notar que o conceito de extremos de uma função não está totalmente apreendido pela aluna.

A concluir, e tendo por base o que já foi referido anteriormente, é de salientar a falta de aptidão da aluna para analisar e interpretar os gráficos da função.

Quais as problemáticas reveladas pela aluna, na escolha da janela de visualização, na calculadora gráfica, no estudo das funções derivadas?

Relativamente ao reconhecimento de ser necessário alterar a janela de visualização, a aluna demonstrou percebê-lo: recorreu à potencialidade de *zoom*-reduzir para reconhecer que ajuste ia considerar, tendo esta potencialidade ajudado a aluna a reconhecer a alteração a fazer (ex.4 tarefa 1); para analisar o gráfico de uma função "quadrática" recorreu a um bom ajuste (ex.3a) tarefa 2), assim como na necessidade de voltar a configurar a janela de visualização para descrever o sinal da função derivada a partir do gráfico (ex.3b) tarefa 2), dado que introduziu a função e a sua derivada na mesma página da calculadora gráfica; e, revelou perceber que necessitava de alterar a janela de visualização tendo em conta a função trigonométrica apresentada (ex.4 tarefa 3), no entanto não reconheceu a influência dos parâmetros na respetiva função.

Apesar de reconhecer a necessidade de alteração da janela de visualização, a aluna não teve precisão para escolher uma janela adequada que permitisse uma análise detalhada da função (ex.2 e 3b) tarefa 2; ex.4 tarefa 3) nem para ajustar o domínio considerado no enunciado (ex.2 tarefa 1). Assim, esta situação, proporcionou tanto a elaboração de formulações incorretas face às funções consideradas, como a análise errada da monotonia e do sentido das concavidades e, consequentemente, a existência de extremos e pontos de inflexão do gráfico de uma função.

Por fim, é de salientar que foi no primeiro exercício (tarefa 1) relativo à janela de visualização que a aluna não apresentou fragilidades, pois nos restantes revelou ausência de espírito critico para perceber se a alteração da janela de visualização se adequava ou não para o que pretendia analisar, e não apenas para poder visualizar a função.

4.3. Estudo de caso: Sofia

Sofia é uma aluna muito trabalhadora e empenhada nas aulas de matemática. No momento de realização das tarefas é uma aluna que começa a concretizá-las de imediato, mostrando a sua dedicação pelo trabalho que é proposto. Contudo, apresenta diversas dúvidas na realização das mesmas, uma vez que mostra ter algumas dificuldades nesta disciplina. No 10.º ano obteve uma classificação de dez valores e, tanto no 11.º ano, como no 1.º semestre do 12.º ano, oito valores, na disciplina de matemática.

Na primeira entrevista, a aluna revelou-se bastante participativa em responder às questões feitas pela investigadora:

> I: O que te fez voluntariar para participar nesta investigação?
> S: Gostava de saber o que a professora queria explorar nas derivadas e fiquei curiosa em saber o que iremos fazer.
> I: Tens interesse no tema?
> S: Eu gosto de derivadas, devido a serem exercícios mecanizados e terem uma ordem, pois agrada-me saber o que tenho de fazer em cada exercício (…) é o tema que gosto mais este ano, até agora.

Quando a aluna foi questionada relativamente ao tipo de abordagem que adota nos exercícios afirmou priorizar o uso da representação algébrica, referindo que o quadro de sinal foi das representações que mais a ajudou:

> S: Eu prefiro fazer primeiro a parte analítica e depois confirmar no gráfico, apesar de que no gráfico via logo a função (…) eu prefiro fazer os passinhos todos [derivada, zeros, quadro de sinal, monotonia e extremos] e depois confirmar no gráfico.
> I: Tendo em conta as diferentes representações existentes neste tema, o que achas de cada uma delas?
> S: Pela expressão é mais fácil perceber, porque tem algumas regras e fui treinando para perceber. Depois o gráfico ajuda a analisar a função e o quadro de sinal é o que mais me auxilia para relacionar as funções.

A aluna, considera que compreende tanto a representação algébrica como a gráfica para responder aos exercícios deste tema, contudo, quando questionada relativamente ao uso da calculadora gráfica, Sofia afirmou utilizá-la apenas como instrumento de verificação.

4.3.1. Tarefa 1

A primeira tarefa foi realizada no dia 21 de março, com uma duração de uma hora e vinte e um minutos. A aluna demorou mais tempo a resolver o exercício 2, devido a demonstrar diversas fragilidades durante a resolução do mesmo.

No primeiro exercício da tarefa, começou por determinar a expressão da primeira derivada da função dada, apresentando algumas dúvidas na regra de derivação do produto de duas funções. A investigadora auxiliou a aluna por forma desta saber utilizar a regra pretendida. De seguida, recorreu ao cálculo dos zeros da primeira derivada, através da fórmula resolvente, obtendo $x = 3$ ou $x = -1$. Sofia, através do gráfico dado no enunciado, verificou que tinha determinado incorretamente os zeros da função derivada e, deste modo, optou por utilizar os valores que extraiu dos zeros da função derivada obtidos pelo gráfico, apagando o que tinha escrito anteriormente. A aluna adotou uma abordagem analítica para a resolução deste exercício, tendo apenas recorrido à representação gráfica para verificar a falha na resolução algébrica e os valores dos zeros da função derivada (Figura 47).

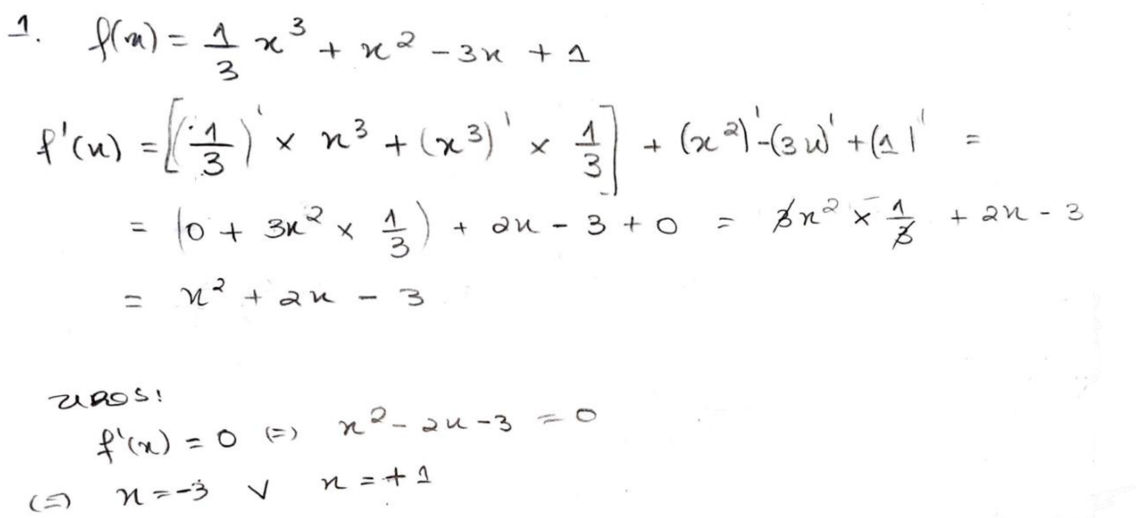


Figura 47 - Abordagem algébrica para realização do exercício 1, tarefa 1

A representação tabular, foi utilizada através do quadro de sinal. Para analisar o sinal da primeira derivada, a aluna recorreu à representação gráfica da função derivada. Contudo, em vez de relacionar o sinal da primeira derivada com a monotonia da função, a aluna relacionou-o com o sentido das concavidades do gráfico da função (Figura 48).

Sofia demonstrou uma incompreensão relativamente à primeira e segunda derivadas, quando interligadas com a função. Por fim, a aluna apresentou incorretamente os extremos da função, dado tê-los considerado na forma de intervalo (Figura 48).

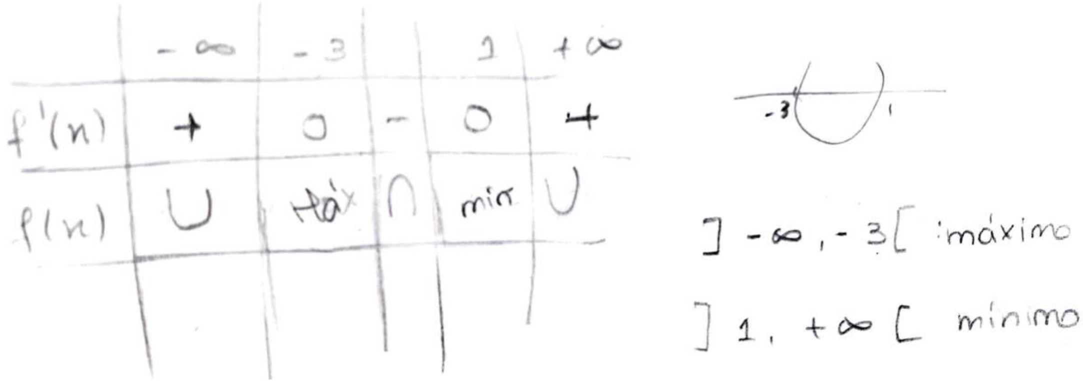


Figura 48 - Representação tabular e gráfica para a realização do exercício 1, tarefa 1

> I: Porque começaste por determinar a função da primeira derivada?
> S: Aqui dava-nos o gráfico da primeira derivada, se calhar não precisávamos. Mas eu gosto de confirmar sempre, faço a primeira derivada, zeros e quadro de sinal.
> I: Então, mas nos zeros seriam 3 e -1 segundo a tua resolução e depois alteraste. Porquê?
> S: Sim, foram erros de contas. Vi os zeros da primeira derivada através do gráfico dado.

É possível constatar que Sofia apresentou não ter os conceitos bem estruturados, dado ter cometido diversas incorreções: cálculo e determinação dos zeros da função derivada e preenchimento do quadro de sinal. Para além disso, verificou-se uma mudança no método de resolução, pois percebeu que os valores obtidos algebricamente eram diferentes quando analisou os zeros da função derivada no gráfico, desvalorizando o que determinou analiticamente.

Relativamente ao segundo exercício, a aluna iniciou a sua resolução de forma análoga ao exercício anterior, abordagem algébrica, tendo apresentado também dúvidas relativamente à derivada, neste caso, da função cosseno.

Para determinar os zeros da função derivada, apresentou algumas incorreções, pelo facto de se tratar de uma função trigonométrica, pois considerou que: $sin(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow sin(2x) = sin\left(-\frac{1}{2}\right)$, tendo comentado que estava a obter valores "um bocado estranhos". A investigadora optou por reler o que a aluna fez, por forma a que Sofia refletisse sobre o que obteve. Neste momento, a investigadora auxiliou-a a interpretar o que significa $sin(2x) = -\frac{1}{2}$ (existência de um ângulo com seno igual a $-\frac{1}{2}$).

A aluna apercebeu-se que o que fez não estava correto, optando por determinar, de novo, os zeros da função derivada (Figura 49). Sofia obteve um dos zeros da função derivada, contudo, não soube que podia existir outro ângulo que era também solução da equação trigonométrica.

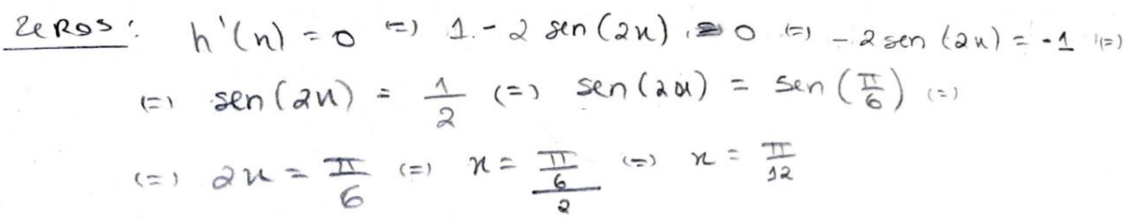


Figura 49 - Cálculo dos zeros da função do exercício 2, tarefa 1

Apesar de não ter concluído a existência de outro ângulo no círculo trigonométrico, a aluna afirmou que necessitava de determinar os valores de k, demonstrando a tendência quanto à mecanização para realizar exercícios sobre funções derivadas. Sofia não apresentou espírito crítico para perceber em que consiste os valores de k:

I: Que valores de k?
S: Quando k é zero, um, dois…
I: Mas que k é que tens na tua resolução?
S: Pois… nenhum.

Através do único zero determinado, a aluna recorreu à representação tabular e à representação gráfica para preencher o quadro de sinal. Para tal, introduziu a função derivada na calculadora gráfica afirmando que o ia fazer “para ver quando a função é positiva e negativa”. A aluna alterou o domínio da função, por forma a analisar a função no intervalo considerado (Figura 50).

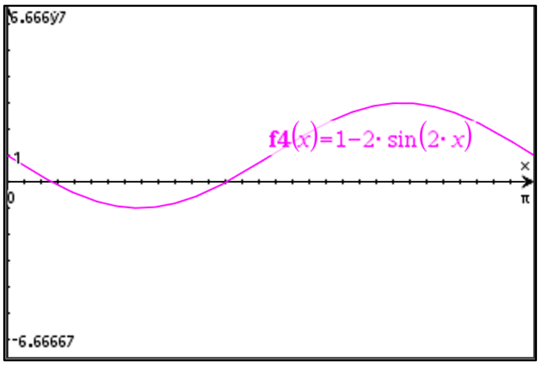


Figura 50 - Representação gráfica da primeira derivada função do exercício 2, tarefa 1

Sofia mostrou ter algumas incertezas em concluir o sinal da primeira derivada, afirmando que não sabia como fazer. Decidiu que a função era negativa e depois positiva (Figura 51), desconsiderando uma parte do gráfico da função.

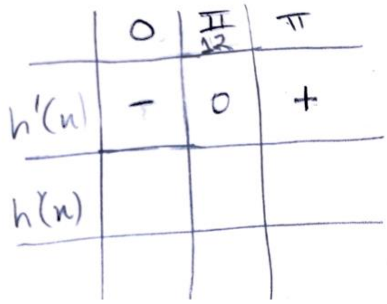


Figura 51 - Abordagem tabular para realização do exercício 2, tarefa 1

A investigadora interveio por forma a perceber como a aluna concluiu o sinal da função da primeira derivada:

I: Como obtiveste que a derivada é negativa e depois positiva?
S: Aqui é negativa (assinalou corretamente) e aqui é positiva (assinalou corretamente.
I: A derivada é positiva onde?
S: Aqui e aqui (assinalou corretamente).
I: Então é positiva em dois casos, o que é que isso significa?
S: Pois, não sei. (…) Apenas me deu um zero da função derivada.

Sofia não concluiu que a função derivada apresentava dois zeros, apesar de ter analisado o sinal da função derivada acertadamente. A aluna, demonstrou interesse em não terminar o exercício por não saber como continuar e de não perceber como chegar à conclusão da monotonia e extremos da função, pois afirmou que “o sinal da função derivada no quadro não está correto com o gráfico”.

Para a resolução do exercício número 3, Sofia optou por determinar os zeros da segunda derivada (abordagem algébrica). Posteriormente, preencheu o quadro de sinal (representação tabular) para o relacionar com o sentido das concavidades da função com o sinal da segunda derivada (Figura 52), recorrendo à análise da representação gráfica da função derivada, através da calculadora.

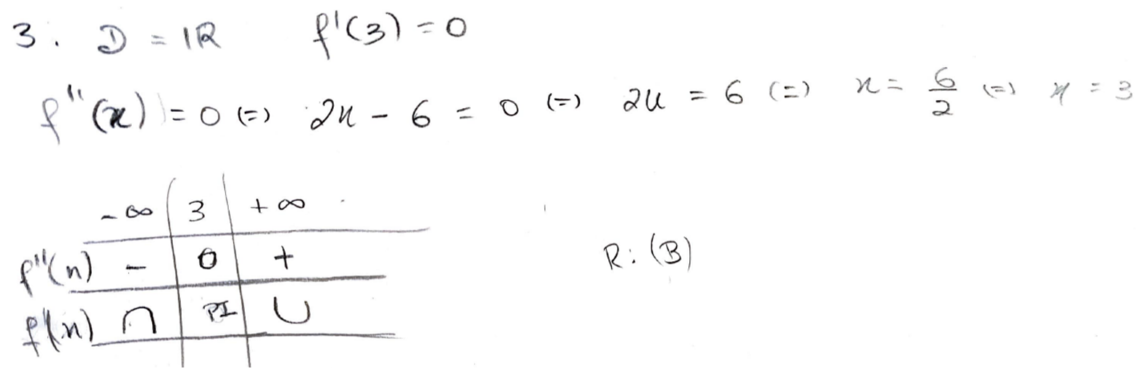


Figura 52 - Resolução do exercício 3, tarefa 1

Posto isto, a aluna mostrou ter grandes dificuldades em responder à questão, afirmando várias vezes que não sabia. A investigadora pediu à aluna para analisar cada opção e perceber qual pode ser o gráfico da função:

S: Na opção A as concavidades tinham de estar ao contrário. A opção B é a única que tem concavidade voltada para baixo e depois para cima.
I: Então e as opções C e D?
S: Essas não têm concavidades. A opção B não me parece correta porque não tem ponto de inflexão em 3, mas não estou a ver outra opção.

Na escolha do gráfico da função, a aluna revelou uma enorme incompreensão relativamente à visualização do sentido das concavidades do gráfico de uma função através da análise dos gráficos apresentados, optando por escolher a opção B, pela justificação do excerto transcrito.

Quanto ao último exercício, a aluna mostrou-se bastante apreensiva em ter de resolver o exercício na calculadora gráfica. Começou por introduzir a expressão da função na calculadora para visualizar o seu gráfico (Figura 53), com a janela *standard*, afirmando que obteve uma reta e que esta tem um zero, não tendo recorrido às ferramentas da calculadora gráfica.

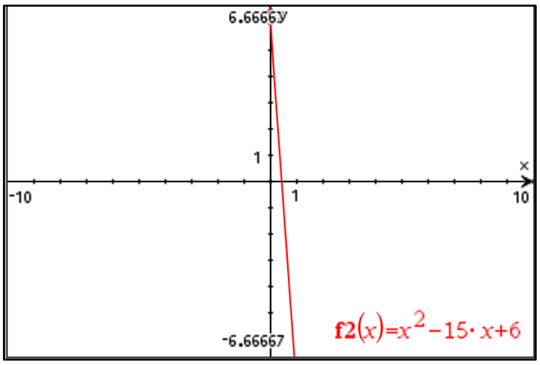


Figura 53 - Representação gráfica da função do exercício 4, tarefa 1

Posto isto, a aluna decidiu recorrer às potencialidades da calculadora gráfica para obter o máximo da função, sem alterar a janela de visualização. Assim, estabeleceu um intervalo por forma a obtê-lo através da ferramenta da calculadora *Máximo* e, desta forma, o ecrã da calculadora gráfica alterou automaticamente para que tenha sido possível visualizar o "máximo" que a aluna considerou (Figura 54). De seguida, como a aluna reconheceu que o gráfico afinal era uma parábola, decidiu determinar o seu ponto mínimo através da ferramenta da calculadora (Figura 54).

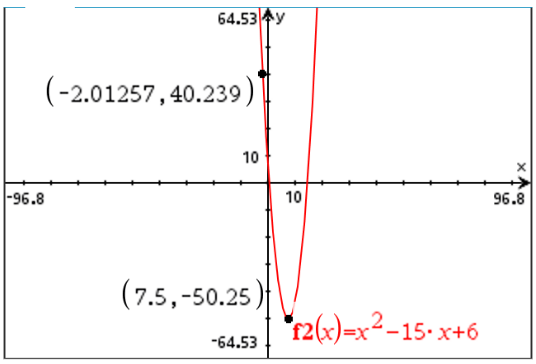


Figura 54 - Determinação dos extremos da função do exercício 4, tarefa 1

Se a aluna não tivesse realizado este processo, não considerava que o gráfico da função era uma parábola. Tendo em conta a sua resolução, é possível notar a incapacidade de relacionar a representação algébrica de uma função e a sua representação gráfica, pois considerou que uma função quadrática era uma reta e que tinha um máximo.

Relativamente à existência de pontos de inflexão, a aluna percebeu que o gráfico tinha sempre concavidade voltada para cima, concluindo a inexistência de pontos de inflexão (Figura 55). Sofia não relacionou a monotonia que descreveu com o extremo considerado, pois para se considerar um ponto de coordenadas máximo, então a função é crescente até esse ponto e depois decrescente (Figura 55).

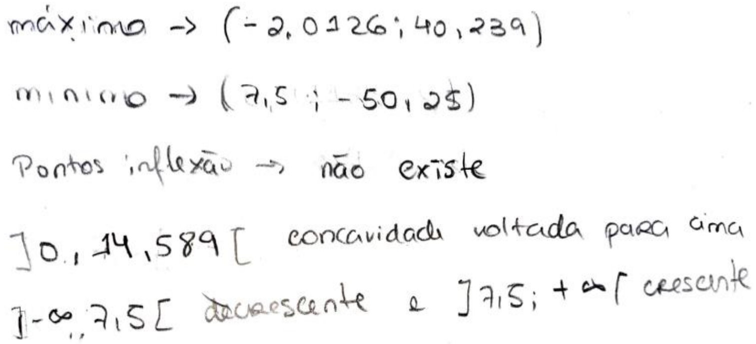

máximo -> (-2,0126; 40,239)
mínimo -> (7,5 ; -50,25)
Pontos inflexão -> não existe
]0, 14,589[concavidade voltada para cima
]-∞; 7,5[decrescente e]7,5; +∞[crescente

Figura 55 - Análise da monotonia e sentido das concavidades do gráfico da função do exercício 4, tarefa 1

I: Tendo em conta o gráfico da função apresentado na calculadora (na janela *standard*), como seria a monotonia desta função?

S: Seria decrescente, nem iria considerar que a função era uma parábola.

I: Temos de ir alterar a janela de visualização para ser possível ver grande parte da função. Que alteração irias fazer?

S: Não sei como fazer (…) Teria de aumentar os valores do x , vou meter -20 e 20.
(visualizou o gráfico obtido)
Ainda não dá para ver tudo (…) vou colocar 100 e -100 [valores de x]
(visualizou o gráfico obtido)
Não consigo ver o eixo do y, vou alterar para -10 o y mínimo.
(visualizou o gráfico obtido)
Já estou farta, vou colocar -100 [y mínimo] também.

A aluna demonstrou grande incapacidade em determinar uma boa janela de visualização para conseguir analisar o comportamento da função, pois quando questionada afirmou que não alterava mais a janela de visualização e trabalhava com a obtida (Figura 56).

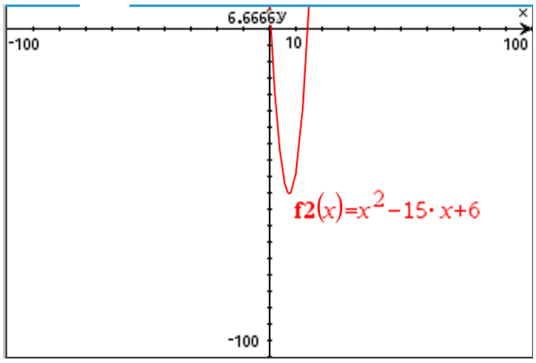


Figura 56 - Alteração da janela de visualização do exercício 4, tarefa 1

4.3.2. Tarefa 2

Sofia realizou a segunda tarefa no dia 23 de março. Esta foi uma tarefa em que a aluna demorou uma hora e vinte e seis minutos para a executar.

No primeiro exercício, a aluna demonstrou não saber por onde começar a resolver, afirmando que "era mais fácil se fosse dada a expressão da função f". A investigadora questionou a aluna sobre o que é que se pode fazer com a expressão da função derivada:

> S: Posso sempre calcular os zeros e o quadro de sinal, mas não estou a ver o que vai dar (..) não sei como da derivada passo para a função, porque normalmente tem-se a função e depois calcula-se a derivada. Vou ver os zeros da derivada.

Para realizar o que pretendia, a aluna optou por utilizar a calculadora gráfica, tendo sido recordada acerca do domínio da função, pois Sofia não estava a conseguir analisar o sinal da função derivada sem alterar a janela (Figura 57). O uso da representação gráfica deveu-se a poder "visualizar o gráfico desta função que não sei como é", palavras da aluna.

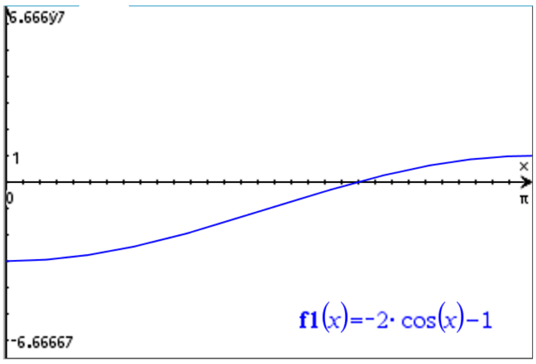


Figura 57 - Representação gráfica da função do exercício 1, tarefa 2

Deste modo, a aluna conseguiu determinar o zero da primeira derivada e, de seguida, preencher na tabela o sinal da função derivada e a monotonia da função (Figura 58). A partir deste momento a aluna não sabia o que fazer para resolver o exercício, apenas concluiu que $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

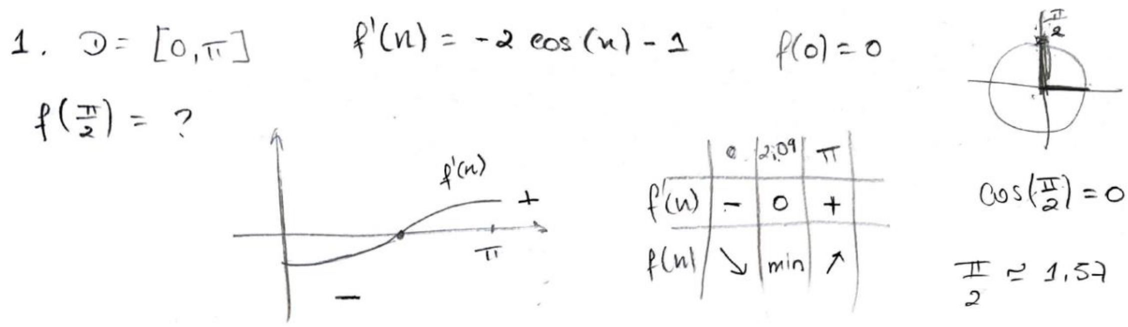


Figura 58 - Resolução do exercício 1, tarefa 2

A aluna sentiu-se bastante desorientada, pois não soube como continuar a resolução do exercício. A investigadora auxiliou-a por forma a esta perceber em que intervalo estava inserido $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 \in [0; 2{,}09]$, contudo a aluna demonstrou uma grande incapacidade em perceber o que significa a função ser decrescente num dado intervalo, não tendo relacionado com a informação do enunciado.

No exercício 2, Sofia adotou uma abordagem algébrica (Figura 59), perspetiva igual ao exercício da tarefa 1 que é semelhante a este. Analogamente ao que aconteceu, a aluna apresentou algumas dúvidas nas regras de derivação, neste caso relativamente à regra da potência, tendo sido necessária a intervenção da investigadora.

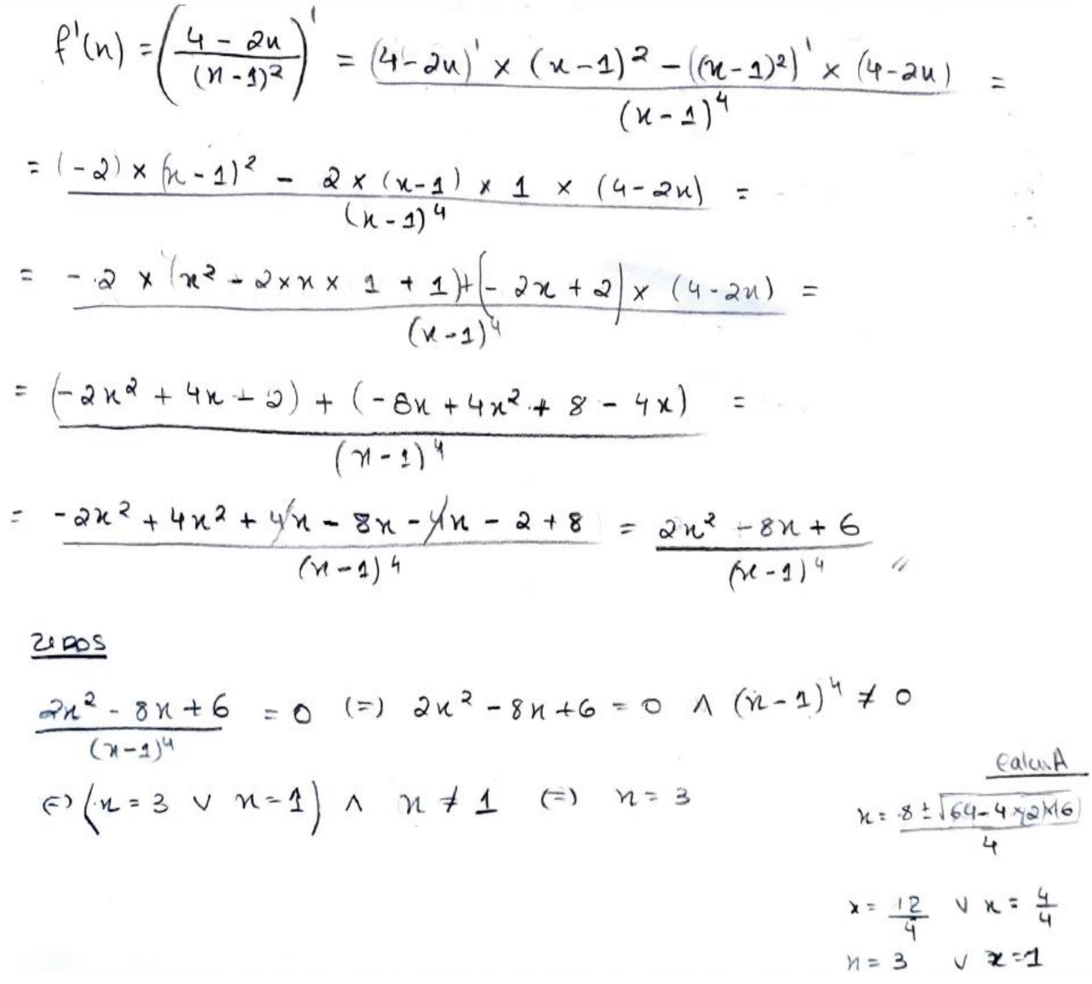


Figura 59 - Abordagem algébrica para a realização do exercício 2, tarefa 2

Posto isto, a aluna recorreu à calculadora gráfica para analisar o comportamento da função, afirmando que ia alterar a janela de visualização, pois não conseguia “ver o fim da função”, referindo-se a um vértice, que não existe. É de notar uma incompreensão em relacionar a expressão de uma função racional com o seu gráfico. Assim, a aluna alterou o eixo das ordenadas para [-10,100] (Figura 60):

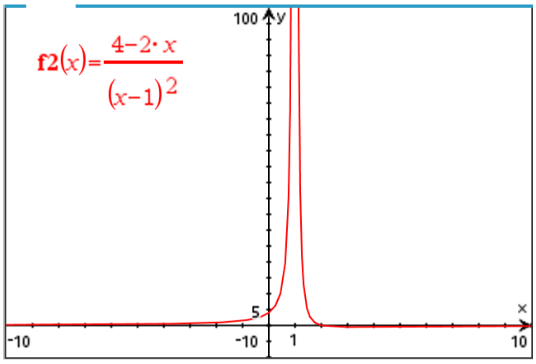


Figura 60 - Representação gráfica da função do exercício 2, tarefa 2

Ao observar o gráfico da calculadora, a aluna argumentou que “3 não é zero da função, mas sim 2”, apesar de ser uma afirmação verdadeira, é possível constatar uma pequena confusão entre os zeros da função e da sua função derivada, dado que assimilou que $x = 3$, determinado anteriormente (Figura 59), era zero da função, sendo que era zero da função derivada. Sofia tentou interligar a informação que obteve algebricamente com a informação que obteve a partir gráfico da função, mas devido à incorreção acerca dos zeros, não o conseguiu fazer. Assim, recorreu à análise do gráfico da função (Figura 60) para concluir o estudo da monotonia da função e considerou o zero da função derivada como extremo da função (Figura 61), apesar de ter afirmado que “a função não devia ter um máximo em três, pois não aparece no gráfico”.

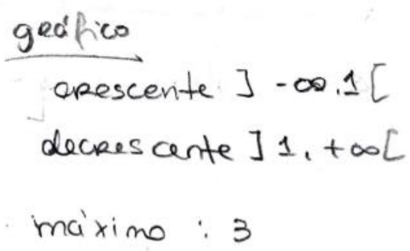


Figura 61 – Descrição da monotonia e extremo da função do exercício 2, tarefa 2

Tendo em conta a janela de visualização adotada pela aluna, não era percetível a monotonia da função, pois esta é crescente em $]-\infty, 1[$ e em $[3, +\infty[$ e decrescente em]1,3]. A aluna graficamente não concluiu corretamente o estudo da monotonia, devido à escolha de uma janela de visualização que não permitiu essa análise e à não utilização de ferramentas que a auxiliassem, como o quadro de sinal e/ou a determinação dos extremos.

Quanto ao sentido das concavidades, a aluna começou por obter a expressão da função da segunda derivada e, de seguida, determinou os zeros da função algebricamente, tal como fez no estudo da monotonia. Posteriormente, considerou que devia introduzir a expressão da função da segunda derivada na calculadora e, ao contrário ao que fez anteriormente, analisa o sinal da segunda derivada para o relacionar com sentido das concavidades do gráfico da função (Figura 62).

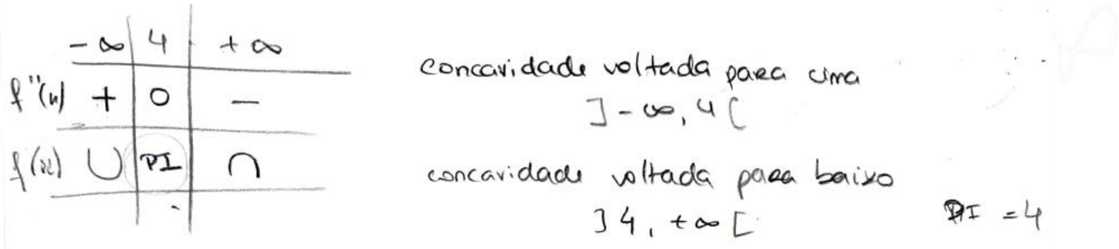


Figura 62 - Análise do sentido das concavidades do gráfico da função do exercício 2, tarefa 2

Após ter concluído o exercício, a investigadora questionou a aluna acerca da sua resolução:

> I: Quanto à monotonia, da função, recorreste ao seu gráfico para a analisar. Contudo, encontras advertências relativamente à determinação dos extremos da função. Sabes porquê?
>
> S: Não me estava a dar certo, eu devo-me ter enganado em algum lado, porque é obvio que a calculadora está correta. Não sei o que está mal, e não sei porque [$x =$] 3 é máximo.

É de salientar a interpretação gráfica incorreta que fez acerca da monotonia da função que, por consequência, originou conclusões distintas quando comparado com a resolução algébrica. Quanto ao sentido das concavidades, é possível constatar que Sofia não demonstrou fragilidades na sua resolução, devido ao uso de um método mecanizado.

Por fim, no último exercício, na alínea a), Sofia considerou que necessitava da expressão da função para poder responder à pergunta (Figura 63). Verifica-se a necessidade do uso contínuo pela representação algébrica da função. Relativamente ao ajuste da janela de visualização, Sofia teve a capacidade visual de perceber que era importante aumentar o valor do y máximo:

> I: Porque consideras que não consegues descrever a monotonia e os extremos da função?
>
> S: Precisava que me dessem a função para ir fazer as derivadas e os zeros para confirmar a informação que já me dão.

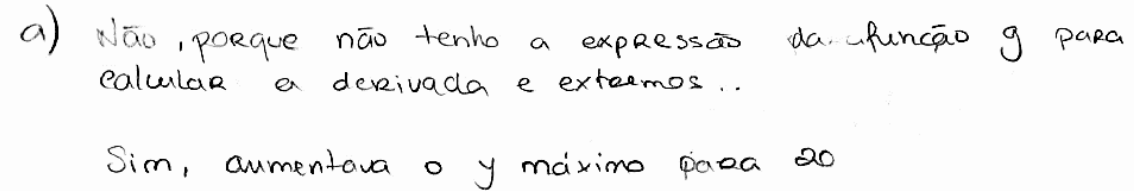


Figura 63 - Resolução do exercício 3a), tarefa 2

Na alínea b), a aluna introduziu a expressão da função na calculadora para visualizar o seu gráfico e ajustou a janela de visualização: $y\ máximo = 20$. De seguida, pretendeu obter os zeros da função na calculadora gráfica:

I: Porque foste ver os zeros?
S: Porque pedia a monotonia e os zeros da função (..) ah não, mas isto é a função, os zeros não são para nada.

Posto isto, a aluna através das ferramentas da calculadora obteve o máximo e o mínimo da função (Figura 64) e descreveu corretamente a monotonia da função e a existência de extremos, a partir do seu gráfico (Figura 65).

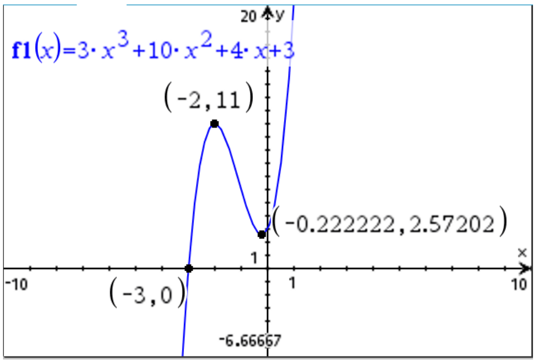


Figura 64 - Representação gráfica e determinação dos extremos e zero da função do exercício 3b), tarefa 2

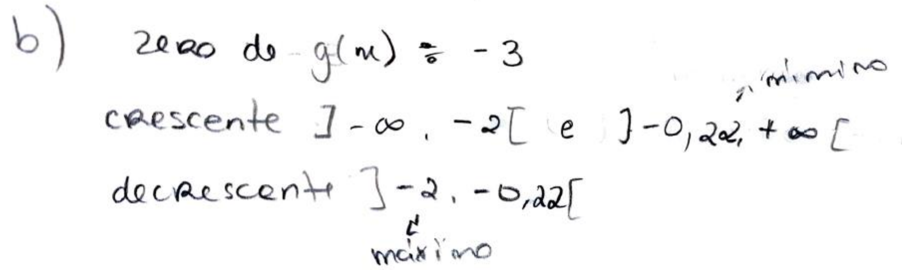
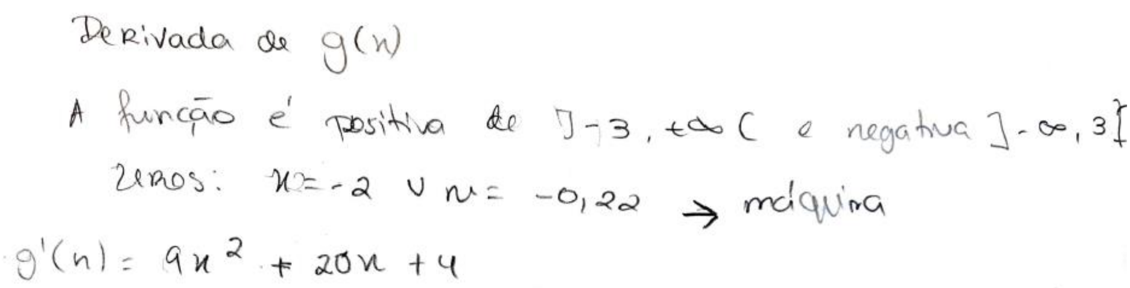


Figura 65 - Análise da monotonia e apresentação dos extremos da função do exercício 3b), tarefa 2

Para responder ao sinal e aos zeros da função da primeira derivada, a aluna demonstrou não saber o que significava o estudo do sinal da função derivada, tendo a investigadora referido que se pretendia saber quando a função é positiva e/ou negativa. Posto isto, Sofia não relacionou o sinal da função derivada com a monotonia da função, tendo analisado o sinal da função g em vez do sinal da função derivada (Figura 66).

Quanto aos zeros da função derivada, a aluna necessitou de saber a expressão da primeira derivada (Figura 66) para, de seguida, determinar os seus zeros. Para tal, recorreu à calculadora gráfica e às suas potencialidades (Figura 67).


Derivada de $g(n)$

A função é positiva de $]-3, +\infty[$ e negativa $]-\infty, 3[$

Zeros: $x = -2 \vee x = -0{,}22 \rightarrow$ máquina

$g'(n) = 9x^2 + 20x + 4$

Figura 66 - Análise do sinal e zeros da derivada da função do exercício 3b), tarefa 2

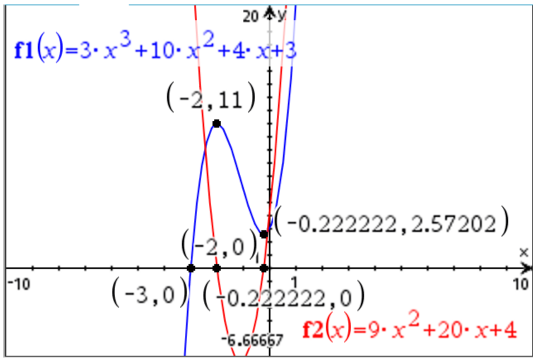


Figura 67 - Representação gráfica e determinação dos zeros da derivada da função do exercício 3b), tarefa 2

A aluna compreendeu o sinal da função derivada como o sinal da função, contudo a determinação dos zeros fê-la de forma correta. É de salientar uma inexistência de espírito crítico e uma incapacidade de interligar conceitos por parte da aluna, pois nem se apercebeu que a monotonia descrita acima não estava de acordo com a análise já realizada do sinal da função derivada.

4.3.3. Tarefa 3

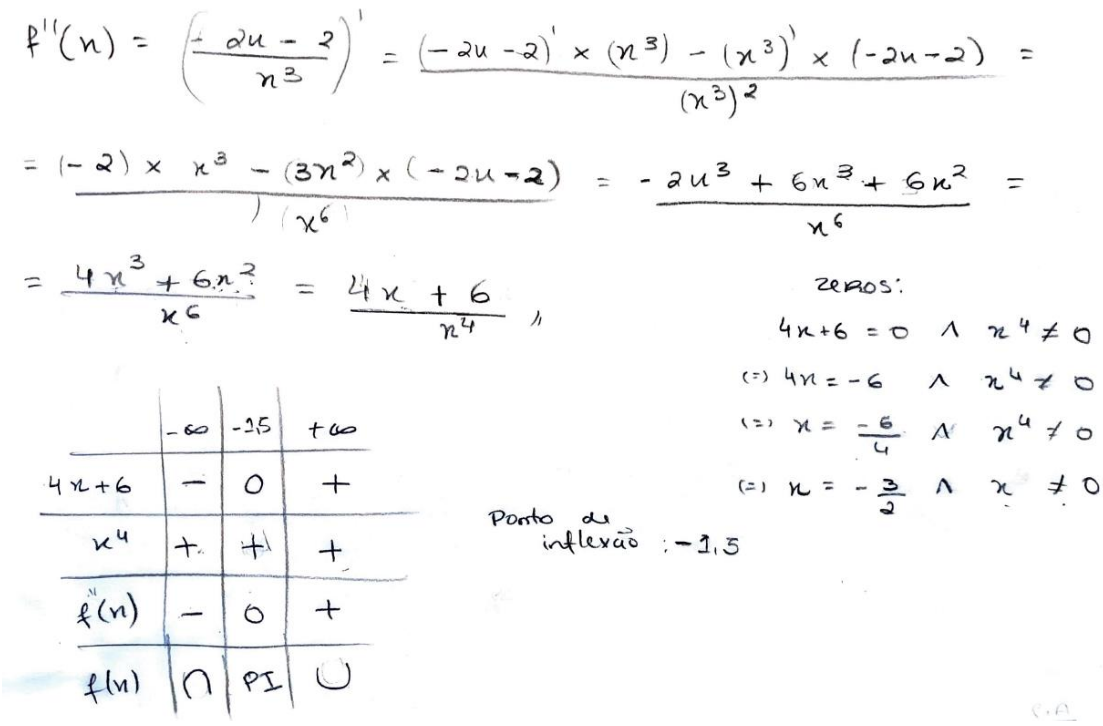
Sofia realizou a última tarefa da investigação no dia 29 de março, tendo esta uma duração de uma hora e dezoito minutos.

Para o exercício 1, a aluna facilmente analisou o gráfico da função da segunda derivada e concluiu que esta tem zero em $x = 1{,}5$. Considerou que seria relevante realizar um quadro de sinal onde relacionava f'' com f, através da análise do gráfico da segunda derivada. Porém, quando o comparou com o gráfico dado no enunciado verbalizou:

> S: Então [o gráfico da] função tem concavidade voltada para baixo e depois para cima, mas no gráfico não tenho isso (…) é melhor fazer as derivadas.

Apesar de ter utilizado o gráfico da segunda derivada para analisar o seu sinal, de seguida recorreu também a este para concluir que as concavidades da tabela não estavam de acordo com o gráfico. Sofia confundiu o sentido das concavidades do gráfico de f com as de f'', tendo esta situação alterado a abordagem que optou para resolver o exercício, pois a partir deste momento considerou que devia de obter a expressão da função da segunda derivada, algebricamente.

De seguida, a aluna recorreu à calculadora para representar graficamente a expressão obtida no numerador e a expressão obtida no denominador, da segunda derivada, com objetivo de analisar o seu sinal e, consequentemente, o sentido das concavidades do gráfico da função (Figura 68).



$$f''(x) = \left(\frac{-2x-2}{x^3}\right)' = \frac{(-2x-2)' \times (x^3) - (x^3)' \times (-2x-2)}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{(-2) \times x^3 - (3x^2) \times (-2x-2)}{x^6} = \frac{-2x^3 + 6x^3 + 6x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{4x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{4x+6}{x^4},$$

zeros:

$4x+6 = 0 \wedge x^4 \neq 0$

$\Leftrightarrow 4x = -6 \wedge x^4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6}{4} \wedge x^4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \wedge x \neq 0$

	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
$4x+6$	$-$	0	$+$
x^4	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$

Ponto de inflexão: $-1,5$

Figura 68 - Abordagem algébrica e tabular para a realização do exercício 1, tarefa 3

Após concluir o quadro de sinal, a aluna afirmou que afinal não precisava de ter revolvido assim o exercício, dado que já tinha concluído anteriormente o ponto de inflexão do gráfico da função. É de salientar que quando recorreu a um processo mecanizado de resolução, a aluna não demonstrou ter dificuldade.

No segundo exercício, em que se pedia para estudar a monotonia e a determinação de extremos, a aluna começou por determinar a função da primeira derivada e os seus zeros (Figura 69). De seguida, recorreu às ferramentas da calculadora gráfica para confirmar que são apenas dois zeros, sem os determinar (Figura 70). Sofia, recorreu ao quadro de sinal (Figura 69) para concluir acerca da monotonia e dos extremos, auxiliando-se da representação gráfica da função da primeira derivada.

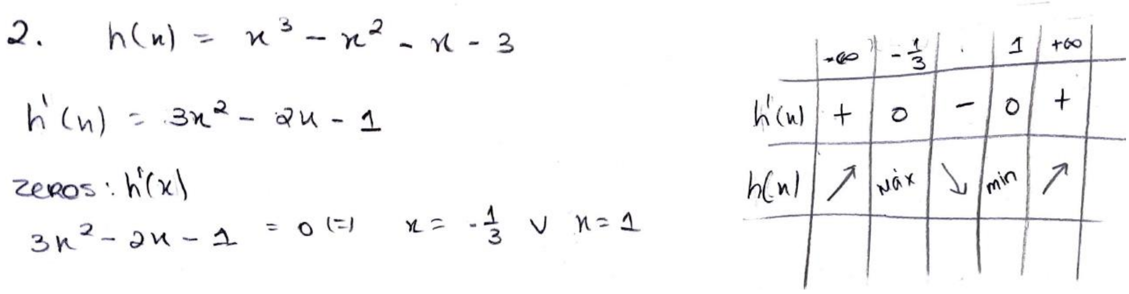


Figura 69 - Uso da representação algébrica e tabular para a realização do exercício 2, tarefa 3

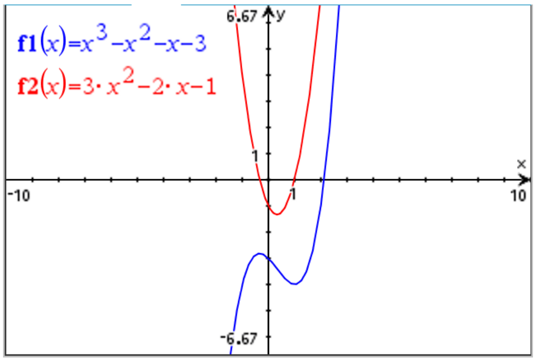


Figura 70 - Representação gráfica da função e da função derivada da função do exercício 2, tarefa 3

A aluna, utilizou a representação tabular como um processo intermédio e necessário, pois afirmou que a ajuda a "conseguir relacionar as funções", descrevendo de seguida a monotonia da função através das conclusões retiradas pelo quadro de sinal (Figura 71).

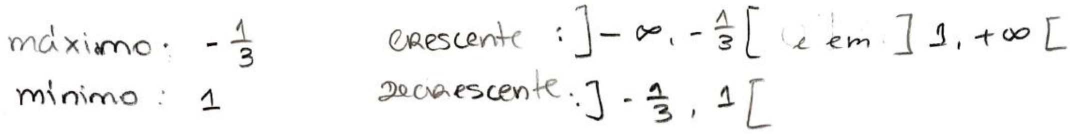


Figura 71 - Resolução do exercício 2, tarefa 3

Quanto ao uso da calculadora gráfica, Sofia apenas a utilizou como uma ferramenta de visualização de gráficos, pois não recorreu às suas potencialidades:

> I: Porquê recorrer apenas à calculadora para analisar o comportamento das funções?
>
> S: O gráfico ajuda-me só a perceber como a função é (..) eu gosto mais de ter a certeza algebricamente.

Relativamente ao exercício 3, a aluna optou por completar o quadro de sinal dado no enunciado relativamente ao sentido das concavidades (Figura 72).

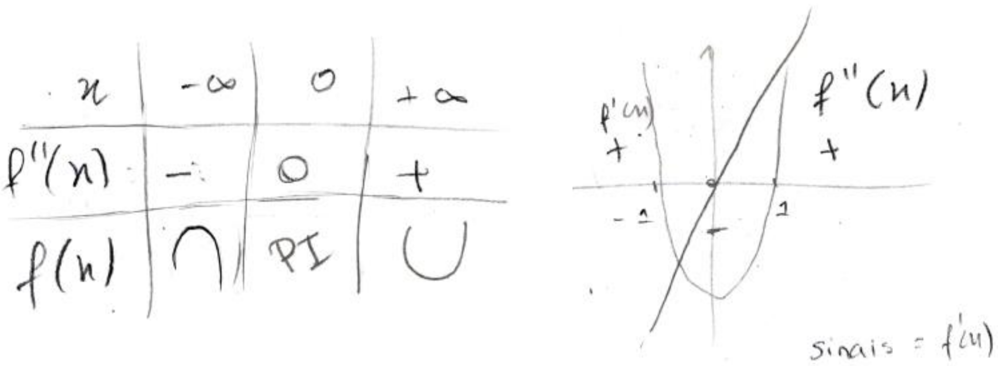


Figura 72 - Quadro de sinal e representação gráfica das derivadas da função do exercício 3, tarefa 3

Posto isto, Sofia sentiu necessidade de determinar a expressão da função da segunda derivada para, de seguida, representar o seu gráfico. Quanto à primeira derivada, a aluna esboça o seu gráfico para fazer o estudo do seu sinal no papel (Figura 73). Para esboçar o gráfico da função, a aluna começou por assinalar os zeros da função e, de seguida, os seus extremos. Por fim, relacionou a existência do ponto de inflexão do gráfico da função, tendo demonstrado capacidade para obter o gráfico pretendido.

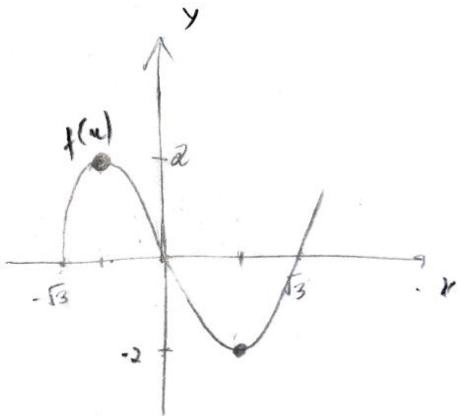


Figura 73 - Esboço do gráfico da função do exercício 3, tarefa 3

A investigadora, quis compreender melhor o raciocínio e a interpretação que a aluna fez ao longo deste exercício, uma vez que o resolveu sem complicações, pois soube interligar tanto as informações dadas no enunciado, como as que extraiu das representações gráfica e tabular. Assim, questionou a aluna sobre quais eram as coordenadas do ponto máximo. A sua resposta demonstra incapacidade em perceber que esse ponto corresponde a um dos zeros da primeira derivada:

S: É (0,2).
I: Assinala no gráfico onde é o ponto máximo.
(A aluna assinala corretamente)
I: Então que coordenadas tem esse ponto?
S: Não sei, é qualquer coisa e 2.
I: Então as [coordenadas] do mínimo?
S: É qualquer coisa e -2 (…) Não sei. Falta a expressão da função f .

No último exercício, pretendia-se a resolução do mesmo através da calculadora gráfica, com necessidade de ajuste na janela de visualização. A aluna após analisar o gráfico da função, na calculadora, na janela *standard* afirmou “não apareceu nada (…) ah afinal tenho que colocar o intervalo dado”, tendo alterado o eixo das abcissas para o domínio da função. Contudo, continuou sem saber o que fazer, tendo em conta o ecrã obtido na calculadora gráfica (Figura 74).

Sofia, demonstrou incapacidade de ajustar a janela de visualização. Perante esta adversidade, apresentou interesse em resolver a questão analiticamente, tendo a investigadora esclarecido que a aluna podia determinar expressões analíticas de funções, caso necessitasse. Após este momento, optou por trabalhar com as funções derivadas na calculadora por forma a responder ao que é pedido.

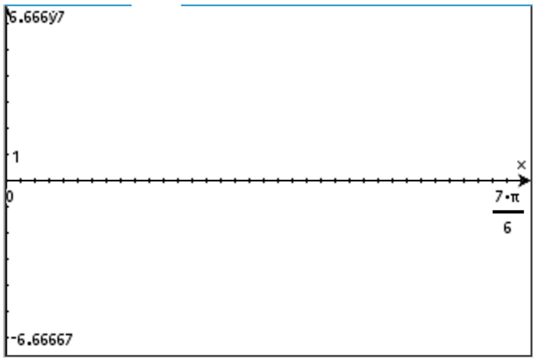


Figura 74 - Ecrã da calculadora gráfica obtido no exercício 4, tarefa 3

Assim, a aluna começou por determinar a função da primeira derivada e apresentou diversas dúvidas relativamente à derivada da função trigonométrica, tendo a investigadora auxiliado a aluna. Posto isto, Sofia recorreu à calculadora gráfica para determinar os zeros da primeira derivada (Figura 75) e, foi através da representação gráfica, que analisou o sinal da função derivada para preencher o quadro de sinal (Figura 76). A aluna procedeu de forma análoga para a segunda derivada.

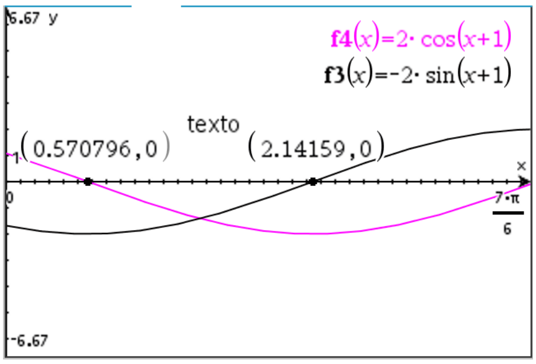
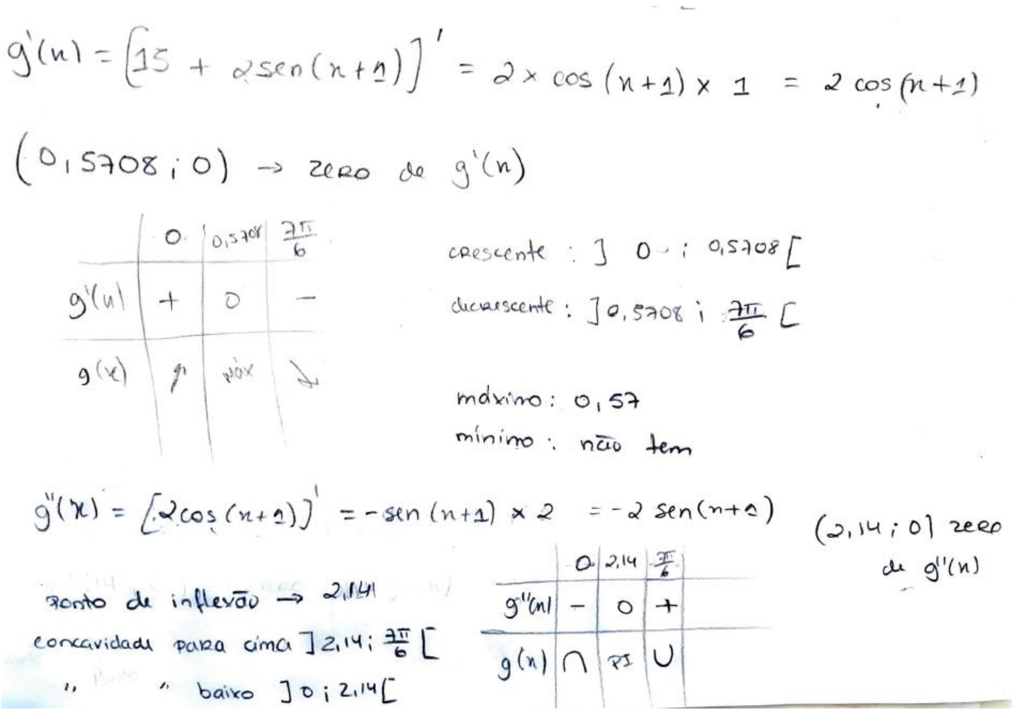


Figura 75 - Representação gráfica das derivadas das funções do exercício 4, tarefa 3

Tanto para o estudo da monotonia e extremos como para o sentido das concavidades e pontos de inflexão, a aluna necessitou de recorrer à representação tabular por forma a conseguir relacionar com o sinal e zeros das funções derivadas, obtidos pelas representações gráficas (Figura 76).

Após a aluna dar por concluída a sua resolução, a investigadora quis perceber como a aluna ajustaria a função no ecrã obtido inicialmente:

I: Porque optaste por não continuar com a função g ?
S: Porque ela não aparecia.
I: Então como a fazemos aparecer?
S: Pois não sei.
I: Está mais para cima, mais para a esquerda, direita e/ou para baixo?
S: Não sei, acho que subiu, ela não pode ser negativa (…) porque não tem valores negativos.
I: Como assim não pode ser negativa?
S: Está tudo a somar.
I: A função seno toma que valores?
S: Entre -1 e 1.
I: Então se adicionamos 15, o que podemos fazer à janela de visualização?
S: y mínimo igual a -15 e y máximo igual a 15.



$g'(x) = [15 + 2\,sen(x+1)]' = 2 \times \cos(x+1) \times 1 = 2\cos(x+1)$

(0,5708 ; 0) → zero de $g'(x)$

	0	0,5708	$\frac{7\pi}{6}$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	máx	↘

crescente :] 0 ; 0,5708 [
decrescente :] 0,5708 ; $\frac{7\pi}{6}$ [

máximo : 0,57
mínimo : não tem

$g''(x) = [2\cos(x+1)]' = -sen(x+1) \times 2 = -2\,sen(x+1)$

(2,14 ; 0) zero de $g''(x)$

ponto de inflexão → 2,141
concavidade para cima]2,14 ; $\frac{7\pi}{6}$[
" " baixo]0 ; 2,14[

	0	2,14	$\frac{7\pi}{6}$
$g''(x)$	−	0	+
$g(x)$	∩	PI	∪

Figura 76 - Resolução do exercício 4, tarefa 3

A aluna apresentou enormes fragilidades em relacionar a expressão de uma função trigonométrica com a sua representação gráfica, tendo por consequência complicações em ajustar a janela de visualização. Sofia depois da conversa com a investigadora, alterou a janela de visualização para o intervalo que afirmou. Após observar o gráfico, percebeu que ainda era necessário voltar a ajustar a janela de visualização, no entanto não soube que alteração fazer.

4.3.4. Considerações finais

Durante a realização das tarefas, Sofia demonstrou incapacidade em trabalhar autonomamente na resolução dos exercícios, dado apresentar diversas fragilidades no tema em estudo. De salientar que tanto as intervenções da investigadora como o espírito de dedicação da aluna para com o trabalho proposto, possibilitaram a que esta continuasse a resolução dos exercícios.

Quais os critérios em que a aluna se baseia para decidir entre uma abordagem algébrica ou gráfica, no âmbito das funções derivadas?

Sofia revelou ter preferência pelo uso da representação algébrica, dado que recorreu à representação gráfica apenas para verificar se as conclusões obtidas algebricamente estavam de acordo com o gráfico (ex.1 e 2 tarefa 1; ex.2 tarefa 3). Em muitos dos exercícios a aluna realizou diversas incorreções de raciocínio e confundiu as relações existentes entre as funções derivadas e a função, tendo estas situações alterado o método de resolução da aluna: algébrico para gráfico (ex.2 tarefa 2) e gráfico para algébrico (ex.1 e 3 tarefa 3).

O recurso a uma abordagem gráfica, foi visível quando necessitou de analisar o sinal de uma função trigonométrica (ex.1 tarefa 2), dado que não soube associar o respetivo gráfico. Na maioria das vezes, esta representação foi utilizada como um auxílio para analisar o sinal e confirmar o número de extremos e zeros das funções.

Qual o papel e como se caracteriza a articulação das diferentes representações de funções, no estudo das funções derivadas?

Quanto à articulação da representação algébrica e gráfica é de referir que perante um erro algébrico no cálculo dos zeros da função da primeira derivada, a aluna a partir do seu gráfico reconheceu a incorreção da sua resolução (ex.2 tarefa 1), enquanto no exercício 2, da mesma tarefa, não concluiu a partir do gráfico que a função derivada tinha dois zeros e não um, verificando-se uma desconsideração de uma parte relevante do gráfico da função trigonométrica. Adicionalmente, é de salientar que a aluna não evidenciou saber relacionar a expressão algébrica de funções trigonométricas (ex.2 tarefa 1; ex.1 tarefa 2), quadrática (ex.4 tarefa 1) e racional (ex.2 tarefa 2) com os respetivos gráficos. No caso do uso da representação tabular com a algébrica, a aluna comprovou saber como interligá-las.

Relativamente ao uso simultâneo da representação gráfica e tabular, quadro de sinal, a aluna demonstrou saber associar a análise do sinal das funções derivadas a partir do gráfico com o preenchimento do quadro de sinal na maioria dos exercícios (ex.1 e 3 tarefa 1; ex.1 e 2 tarefa 2; ex.1, 2 e 4 tarefa 3). Apenas é de notar que no exercício

2 da primeira tarefa, a aluna não soube relacionar ambas as abordagens corretamente, tal como já mencionado.

No caso da representação gráfica, é de notar que Sofia recorreu por vezes ao gráfico das funções para analisar a informação que pretendia. Verificou-se que tanto na análise da monotonia de uma função (ex.2 tarefa 1; ex.3b) tarefa 2), como no sentido das concavidades (ex.4 tarefa 1), a aluna não demonstrou ter problemas em concluí-las. Contudo, quando necessitou de escolher o gráfico da função que apresentava determinadas características acerca do sentido das concavidades, a aluna apresentou algumas fragilidades a visualizá-las, tendo considerado que o gráfico de uma função cúbica não tinha concavidades (ex.3 tarefa 1).

Quanto à representação numérica, utilizou-a na determinação de pontos coordenadas, a partir da calculadora gráfica. Contudo, em nenhum dos exercícios 2, de todas as tarefas, aplicou esta representação para determinar os extremos das funções, dado ter considerado que apenas bastava definir a abcissa dos pontos que são extremos.

Por fim, é de salientar o exercício 3, da tarefa 1 e 3, pois implicavam articular informação através de todas as representações. Sofia, em ambos os exercícios demonstrou relacionar a informação sem grandes adversidades, à exceção da conclusão do exercício da tarefa 1, como já referido.

Desta forma, é de concluir a inexistência de espírito crítico ao articular a representação algébrica com a representação gráfica por parte da aluna ao longo das tarefas realizadas. O uso da representação gráfica e tabular, não apresenta ser uma fragilidade de Sofia, pelo facto de recorrer a uma mecanização para resolver os exercícios e de se auxiliar do quadro de sinal para extrair a informação que pretendia. Quanto a analisar informação a partir do gráfico, a aluna não recorreu tanto a este método, comparativamente ao anterior, contudo através da investigação feita, constata-se uma evolução positiva quanto à análise do sentido das concavidades dos gráficos das funções.

Quais as fragilidades manifestadas pela aluna na resolução de tarefas, no âmbito das funções derivadas?

Sofia é uma aluna que demonstrou apresentar diversas incorreções e dificuldades na resolução das tarefas. No tema das funções derivadas, é de notar que a investigadora teve de auxiliar a aluna relativamente às regras de derivação do produto (ex.1 tarefa 1), da função cosseno (ex.2 tarefa 1), da potência (ex.2 tarefa 2) e da função seno (ex.4 tarefa 3).

A aluna cometeu diversos erros relativamente às relações existentes entre a função e as funções derivadas, dado que associou o sinal da primeira derivada com o sentido das concavidades do gráfico da função (ex.1 tarefa 1); considerou os zeros da primeira derivada como os zeros da função (ex.2 tarefa 2); entendeu o sinal da função derivada como o sinal da função (ex.3b) tarefa 2); não relacionou os extremos da função como os zeros da função derivada (ex. 3b) tarefa 2; ex.3 tarefa 3) e confundiu o sentido das concavidades do gráfico da função com o da função da segunda derivada (ex.1 tarefa 3).

Para concluir, é possível constatar que a aluna apresenta diversos conceitos que não estão consolidados e, consequentemente, as relações entre eles bem explícitas. Deste modo, são evidenciadas diversas fragilidades aquando da resolução dos exercícios, levando até à não conclusão dos mesmos (ex.2 tarefa 1; ex.1 tarefa 2).

Quais as problemáticas reveladas pela aluna, na escolha da janela de visualização, na calculadora gráfica, no estudo das funções derivadas?

Quanto à escolha da janela de visualização, é de salientar uma grande incapacidade por parte de Sofia para obter um gráfico que permita analisar adequadamente o seu comportamento. É de notar uma falta de espírito critico ao considerar que o gráfico de uma função quadrática é uma reta, pois quando questionada sobre a janela de visualização, a aluna não demonstra intenção em alterá-la, trabalhando com a janela *standard* (ex.4 tarefa 1). Por sua vez, quando tentou realizar ajustes na janela de visualização, é percetível que a alteração considerada pela aluna, não é adequada para visualizar o comportamento da função (ex.4 tarefa 1), chegando mesmo a comprometer a resolução do exercício (ex.2 tarefa 2).

Relativamente ao exercício 4 da tarefa 3, a aluna recorreu ao gráfico das funções derivadas por forma a responder ao que é solicitado. Perante uma visualização parcial e incompleta do gráfico da função, é de notar incapacidade de ajustar a janela de visualização. Além disso, é de salientar que a aluna não realizou nenhuma alteração na janela de visualização pelo facto de não saber a influência que os parâmetros de uma função trigonométrica têm no gráfico da função.

Por fim, resta analisar o exercício 3b) da tarefa 2, pois foi o único exercício em que a aluna conseguiu ajustar a janela de visualização, por forma a analisar corretamente o gráfico da função. Pode afirmar-se que esta concretização se deve ao facto de se tratar de um exercício direcionado e guiado para que os alunos reflitam sobre o ajuste da janela de visualização. Em comparação aos restantes exercícios, onde não existia esta orientação, a aluna revelou incompreensão em realizar a alteração da janela de visualização.

5. CONCLUSÕES

A presente investigação, visa compreender e caracterizar a articulação das diversas representações de funções, as fragilidades e a escolha da janela de visualização dos alunos do 12.º ano, no estudo das funções derivadas. Para tal, adotou-se uma metodologia qualitativa, tendo sido feitos três estudos de caso, em que cada aluno apresenta diferentes níveis de desempenho nos conteúdos matemáticos.

Desta forma, foram implementadas três tarefas com o objetivo de dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. Quais os critérios em que os alunos se baseiam para decidir entre uma abordagem algébrica ou gráfica, no âmbito das funções derivadas?
2. Qual o papel e como se caracteriza a articulação das diferentes representações de funções, no estudo das funções derivadas?
3. Quais as fragilidades manifestadas pelos alunos na resolução de tarefas, no âmbito das funções derivadas?
4. Quais as problemáticas reveladas pelos alunos, na escolha da janela de visualização, na calculadora gráfica, no estudo das funções derivadas?

5.1 Critérios na escolha entre uma abordagem algébrica ou gráfica

Quanto à escolha entre o uso da representação algébrica ou gráfica, os alunos demonstraram, na primeira tarefa, a preferência por adotarem uma abordagem algébrica (Viseu, 2017). No estudo efetuado, é possível analisar três perspetivas: tentativa de recorrer à representação gráfica, alteração do método de realização dos exercícios e permanência em utilizar a abordagem algébrica.

O primeiro caso ocorreu quando os alunos tentaram utilizar a representação gráfica, mas devido a diversas complicações, não concluem o pretendido, optando por uma abordagem algébrica. No caso do Afonso é visível esta resolução quando não compreendeu que o gráfico correspondia ao de uma função racional e, no caso da Carminho, por demonstrar incapacidade em analisar o gráfico de uma função.

Quanto à alteração da abordagem escolhida, deve-se aos alunos terem percebido que a resolução do exercício pela representação gráfica se torna mais rápida e simples pela análise do gráfico, ganhando confiança em manipular a calculadora gráfica (Ruthven, 1992; Rocha 2002). Desta forma, na última tarefa, comparativamente à primeira, é visível um uso recorrente à abordagem gráfica, mesmo quando não é pedido a sua utilização (Afonso e Carminho), o mesmo é verificado nas conclusões do estudo realizado por Rocha (2002). Esta utilização deve-se à aprendizagem de um processo mecanizado para resolver os exercícios pela calculadora gráfica (Ruthven, 1992).

A última abordagem ocorreu no caso de Sofia, uma vez que recorreu sempre à representação algébrica para resolver os exercícios, a menos que fosse exigida a utilização da calculadora gráfica. Dado ser uma aluna com dificuldades na disciplina de matemática, o recurso a uma mecanização sistematizada para resolver exercícios sobre funções derivadas foi bastante visível, impulsionando uma incompreensão na resolução de exercícios acerca das funções derivadas (Orhun, 2012).

Por fim, a escolha de uma abordagem gráfica foi também visível quando os alunos pretendiam confirmar os resultados obtidos algebricamante, assim como interpretar situações problemáticas que consideravam pertinentes, tal como defende Consciência (2013). Adicionalmente, recorrem a esta representação quando desejam visualizar o gráfico de uma função que não conhecem (Rocha, 2002).

5.2 Articulação das diferentes representações

No que diz respeito à articulação das diferentes representações, no âmbito das funções derivadas, é de reconhecer as conclusões defendidas por Viseu (2017).

O uso da representação numérica para determinar a imagem de um dado objeto, neste caso, os extremos, e a utilização da representação tabular quando recorrem ao quadro de sinal da função derivada, para obter conclusões acerca da monotonia ou sentido das concavidades do gráfico da função (Viseu, 2017).

Quanto à representação gráfica, esta é privilegiada para comparar a função e a sua função derivada, para analisar a monotonia da função e interpretar o sinal da função derivada (Viseu 2017). Tal como defende Orhun (2012), é notória uma falta de capacidade por parte dos alunos para argumentarem a partir do gráfico de uma função, dado que na maioria das vezes a investigadora necessitou de os auxiliar. Na articulação da representação algébrica e gráfica, foi evidenciada uma incompreensão em relacionar a expressão algébrica com o respetivo gráfico, com especial atenção para funções racional e trigonométrica.

Por fim, é de salientar que foi extremamente complexo para os alunos interligarem as informações provenientes de todas as representações (Orhun, 2012). Dos alunos envolvidos no estudo, Afonso foi o único que não revelou fragilidades em exercícios onde era exigido relacionar diversas abordagens, dado que revelou ter muita capacidade em fazê-lo. Os restantes participantes demonstraram não saber como começar a resolução destes exercícios e reconheceram a necessidade de ser fornecida mais informação algébrica para puderem responder aos exercícios.

5.3 Fragilidades no estudo das funções derivadas

Durante a realização do presente estudo, foram visíveis diversas complexidades demonstradas pelos alunos relativamente ao estudo das funções derivadas.

As principais fragilidades manifestadas vão ao encontro de muitas das que foram apresentadas por diversos autores (Almeida & Viseu, 2002; Aspinwall et al., 1997; Orhun, 2012), pois focam-se na falta de capacidade em analisar e argumentar a partir do gráfico da função e da inexistência de relacionar a função com as respetivas funções derivadas.

É de notar que, no estudo de funções derivadas, os alunos facilmente tendem a ter dúvidas e até mesmo, considerar o gráfico da função como gráfico da função derivada, tal como argumenta Orhun (2012) e, consequentemente, estabelecer os zeros da função como os zeros da função derivada. Além disso, foi possível verificar uma incompreensão quanto aos extremos da função, uma vez que foi visível que os alunos não relacionaram estes como os zeros da primeira derivada. Desta forma, é possível concluir que os alunos têm dúvidas em realizar as conexões existentes entre o gráfico da função e o da sua função derivada. (Almeida & Viseu, 2002; Aspinwall et al., 1997; Orhun, 2012).

Por fim, resta destacar três aspetos observados durante este estudo: as regras de derivação, o uso de funções mais complexas e a utilização da calculadora gráfica. Contrariamente ao que é afirmado por García (2000), verificou-se que a aluna que recorreu menos à representação gráfica, Sofia, foi a que apresentou mais dúvidas relativamente às regras de derivação. Quanto ao uso de funções mais complexas, funções trigonométricas e racionais, os alunos mostraram ter mais dificuldades em interpretar, analisar e responder ao que é pedido, tal como argumentam Almeida e Viseu (2002). Relativamente à manipulação da calculadora gráfica, os alunos inicialmente demonstraram receio em utilizar as suas funcionalidades e incompreensão em determinar os zeros e os extremos da função através das mesmas, tendo sido esta uma fragilidade que foi ultrapassada por alguns alunos.

5.4 Escolha da janela de visualização

Quanto à escolha da janela de visualização, nas três tarefas implementadas, foram consideradas as visualizações: parcial, incompleta e, parcial e incompleta, pela ordem indicada, segundo a categorização de Rocha (2020).

Perante uma visualização parcial todos os alunos, à exceção de Sofia, reconheceram que deveriam alterar a janela de visualização para interpretarem o que era pedido através da análise do gráfico da função. Tal como defende Rocha (2020), Sofia considerou o gráfico da função apenas como lhe foi apresentado, não percebendo que parte do gráfico estava fora da janela de visualização. Relativamente à visualização incompleta, verificou-se que os alunos reconheceram a necessidade da alteração da janela, enquanto na visualização parcial e incompleta reagiram com estranheza perante o ecrã apresentado na calculadora, não percebendo de imediato que ajuste realizar, tal como afirma Rocha (2020).

Para a escolha de uma janela de visualização, todos os alunos recorreram à alteração dos valores de $x_{min}, x_{max}, y_{min}$ e y_{max}, tal como aconselhado por Consciência (2013). Contudo, os alunos nem sempre consideraram uma razoável janela de visualização para responder aos exercícios, pois foram visíveis incertezas relativamente aos valores de alteração, dado que não interligam a modificação da janela de visualização com o aspeto do gráfico (Ruthven, 1996). É de notar que dois dos participantes, Afonso e Carminho, recorreram à ferramenta de *zoom*-reduzir para interpretar o comportamento do gráfico da função, antes de realizarem a alteração por eles próprios. Das duas vezes em que esta potencialidade foi utilizada, foi notório que a sua utilização auxiliou os alunos a ajustarem corretamente a janela de visualização.

No tema das funções derivadas, para analisar a monotonia, o sentido das concavidades e a existência de extremos e pontos de inflexão do gráfico de uma função através da calculadora gráfica, é necessário a obtenção de uma janela de visualização adequada que permita analisar o comportamento do gráfico da função (Consciência, 2013). Por fim, ao longo desta investigação os alunos revelaram uma grande ausência de espírito critico para compreender se a janela de visualização é adequada ou não (Rocha, 2020).

5.5 Considerações finais

A realização da presente investigação permitiu caracterizar a articulação de diferentes representações de funções e o desempenho dos alunos perante a realização de exercícios sobre o tema das funções derivadas.

Salienta-se o recurso à representação gráfica ao longo do estudo, embora tenha desempenhado um papel diferente, na elaboração das tarefas, nos três alunos em estudo. Esta foi utilizada pelos alunos para interpretarem o comportamento do gráfico de uma função, através da sua visualização, e como meio de verificação do que determinaram algebricamente. Para tal, o uso da calculadora gráfica foi indispensável para a resolução das mesmas.

Relativamente às problemáticas manifestadas pelos alunos no âmbito do estudo das funções derivadas, estas centram-se na falta de destreza em analisar e argumentar a partir do gráfico da função e na pouca capacidade em relacionar a função com as respetivas funções derivadas. De referir ainda a escolha da janela de visualização, que revelou ser um aspeto muito importante no estudo das funções derivadas, dado que apesar dos alunos se consciencializarem que um ajuste da janela seria necessário, a alteração efetuada nem sempre foi adequada.

Para trabalhos futuros, destaca-se a necessidade de expor os alunos a diversos tipos de funções, de forma a evidenciar se as fragilidades apresentadas no estudo de funções derivadas são transversais ou limitadas a funções específicas. Adicionalmente, propõem-se a realização de tarefas que incentivem um olhar crítico sobre a representação gráfica, possibilitando aos alunos realizarem uma análise e interpretação do comportamento das funções, no âmbito das funções derivadas, e a escolherem a janela de visualização adequada ao que pretendem obter, através da calculadora gráfica.

REFERÊNCIAS

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Universidade Aberta.

Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 15*(1), 193-219.

Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Universidade de Coimbra.

Aspinwall, L.; Shaw, K. L. & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 301-317.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Brown, S., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532–538.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário* (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cuoco, A. (2001). Preface. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. ix–xiii). NCTM.

Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics*. Educational Studies in Mathematics. (pp.103-131). Springer.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173–185). NCTM.

García, A. (2000). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-200).

Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting Cases of Calculus Student's Understanding of Derivative Graphs. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 152-176.

Johnson, R. B., & Christensen, L. (2014). *Educational research quantitative, qualitative, and mixed approaches*. Sage publications.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). Springer.

MEC (2018). *Aprendizagens Essenciais ensino secundário matemática A 12*. Lisboa: MEC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Olabuenaga, J. I. R. (1996): *Metodologia de la investigación cualitativa*. Bilbao: Universidad de Deusto.

Orhun, N. (2012). *Graphical understanding in mathematics education: derivate functions and students' difficulties*. Procedia – Social and Behavioral Sciences, 55, 679-684.

Pinto, M. M., Viseu, F., Cunha, M. C. & Martins, P. M. (2014) *A resolução de problemas na aprendizagem de derivada de uma função de alunos de 11.º ano de escolaridade*. ProfMat.

Pires, V.M., Ferreira, R. T, Domingos, A., Martins, C., Martinho, H., Vale, I., Amado, N., Carreira, S., Pimental, T. & Santos, L. (2015). *Representações matemáticas, Investigação em Educação Matemática.* SPIEM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 5, 105-132.

Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante*, *11*(2), 3–27.

Rocha, H. (2016). Teacher's representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *35*(2), 53–64.

Rocha, H. (2019). The impact of technology on the teachers' use of different representations. In V. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, Dm, Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME 11* (pp.2731-2738). ERME.

Rocha, H. (2020). Graphical representation of functions using technology: a window to teacher knowledge. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 39(2), 105-126.

Ruthven, K. (1992). Personal technology and classroom change: a british perspective. Em J. Fey e C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education*, (pp.91-100). Reston, Va.: NCTM.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. Em A. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp.435-468). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Viseu, F. (2017). Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. *Zetetiké*.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: designs and methods*. Sage.

ANEXOS

Anexo A – Planificação das aulas de 23 de novembro, 12.º ano

Escola __________

Plano de aula de **Matemática A**

12.º__ – 23/11/2022 – 90min

Capítulo: Funções reais de variável real	
Sumário: Estudo de funções e esboço de gráficos.	**Recursos Disponíveis:** Manual. PowerPoint.

OBJETIVOS	**AÇÕES A DESENVOLVER COM OS ALUNOS**
Reconhecer a importância dos conceitos já estudados para o estudo de funções.	Participação ativa dos alunos quando solicitada e por iniciativa própria.
Desenvolver a capacidade de esboçar o gráfico de uma função.	Resolução dos exercícios no quadro e na carteira.

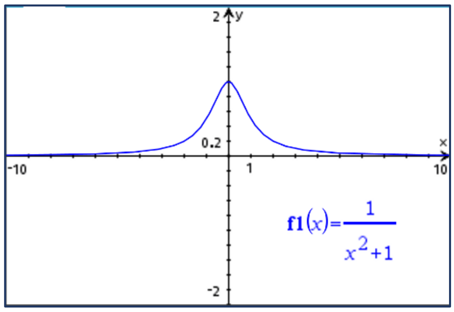
Desenvolvimento da aula/Estratégias:

A aula iniciará a pedir-se o esboço da função $\frac{1}{x^2+1}$, sem recorrer à calculadora e, com a colaboração dos alunos, analisar quais os conceitos pelos quais se auxiliaram para efetuar a representação da função. Por fim, será comparado o esboço que efetuaram com a representação gráfica da calculadora e explicado a necessidade de aplicar todos os conceitos estudados para o estudo de uma função.

De seguida, será concluído e resolvido, passo a passo, as diversas propriedades analíticas: domínio, continuidade, paridade, zeros, interseção do gráfico com o eixo Oy, intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos, sentido das concavidades do gráfico, pontos de inflexão do gráfico e assíntotas ao gráfico da função, através da participação dos alunos no quadro, um para cada conceito. No PowerPoint planeado para a aula, encontra-se a resolução de todas as propriedades.

- A escolha dos alunos que são chamados ao quadro é pré-planeada;
- Os restantes alunos, quando não chamados a irem ao quadro, devem resolver cada propriedade na carteira;
- Utilizar tanto métodos analíticos como gráficos, através da calculadora gráfica para a sua resolução.

Por fim, será realizado o esboço do gráfico da função $\frac{1}{x^2+1}$ e uma síntese final das propriedades necessárias para esboçar o gráfico de uma função.



Realização do exercício 65.4 pág. 57:

Exercício 65. 4

Esboça o gráfico das funções reais de variável real a seguir definidas, tendo por base um estudo analítico das mesmas:

65.4 $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}}$

Proposta de resolução:

A função f é uma função racional, logo é contínua no seu domínio ($D_f = \mathbb{R}$).

Como $f(-x) = f(x)$, a função f é par.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$ e $f(0) = -4$

$f'(x) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

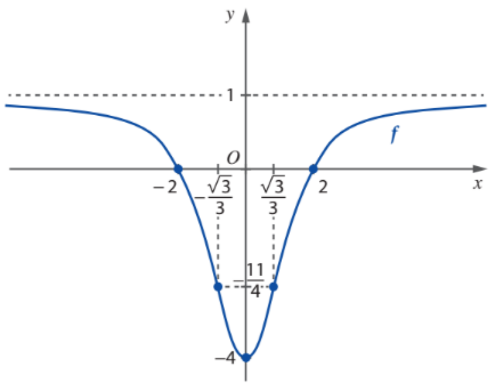
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	-4 Mín. abs.	$\nearrow$

$$f''(x) = \frac{-30x^2+10}{(x^2+1)^3} \text{ e } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2+10}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	$-\frac{11}{4}$ PI	$\cup$	$-\frac{11}{4}$ PI	$\cap$

Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, não tem assíntotas verticais.

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e $b = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, então $y = 1$ é assíntota horizontal quando $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.



Observações/Aprendizagem complementar

- Auxiliar a resolução de algumas propriedades.
- Espera-se que sejam os alunos mais desinibidos a participar, portanto a escolha dos alunos tem em conta este aspeto, de forma a não se sentirem desconfortáveis, mas que a grande maioria participe.
- A nível de conceitos, prevê-se que alguns alunos tenham tendência a confundir a primeira e a segunda derivada, no que toca aos intervalos de monotonia e o sentido das concavidades.

Escola __________

Plano de aula de **Matemática A**

12.º__ – 25/01/2023 – 90min

Capítulo: Funções exponenciais	
Sumário: Propriedades da função definida nos números racionais por $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, monotonia, continuidade, limites e propriedades algébricas.	**Recursos Disponíveis:** Calculadora Gráfica; PowerPoint; Interativo *Geogebra*.

OBJETIVOS	**AÇÕES A DESENVOLVER COM OS ALUNOS**
Reconhecer a importância das propriedades da função $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ definida no conjunto dos números racionais; Desenvolver a capacidade de concluírem resultados por iniciativa própria.	Participação ativa dos alunos quando solicitada e por iniciativa própria. Resolução dos exercícios no quadro e no lugar.

Desenvolvimento da aula/Estratégias:

A aula começará com a professora a questionar os alunos relativamente à árvore genealógica pedida na última aula para trazerem. A árvore em questão apenas deve incluir os alunos, os pais, os avós, os bisavós, etc (no mínimo até aos bisavós), ou seja, os pais dos pais, tal como ilustra a figura abaixo:

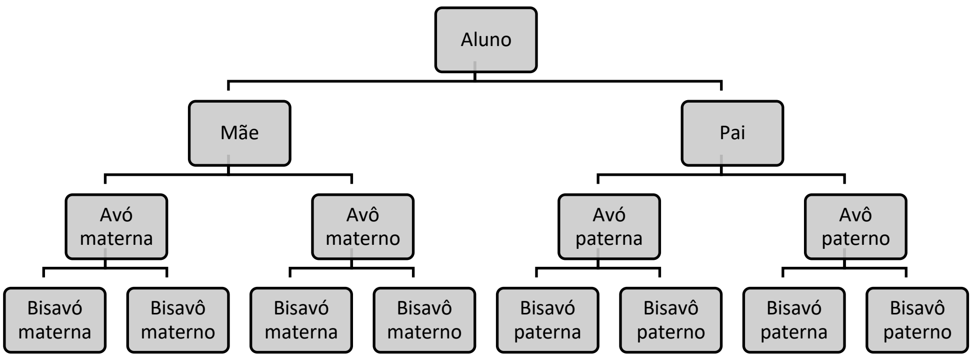
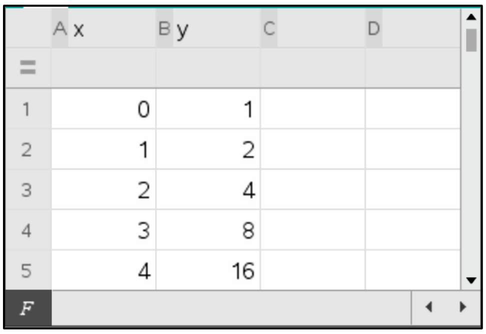


Figura 1

Será analisado número de elementos da árvore genealógica linha por linha: 1, 2, 4, 8,16, 32, *etc.* e verificar que se pode escrever como uma sucessão de termo geral $2^n, n \in \mathbb{N}_0 (2^0 = 1; 2^1 = 2; 2^2 = 4, \dots)$. De seguida, será pedido aos alunos para listar os valores obtidos na calculadora gráfica, dependendo do valor do n, figura 2. Este momento será acompanhado pela projeção da calculadora gráfica *TI-Nspire,* modelo utilizado pela maioria dos alunos da turma. Posteriormente, será pedido para representar graficamente os pontos coordenados obtidos e, de seguida, a união dos pontos, figura 3, de forma a interligar tanto a visualização gráfica da função 2^x como as propriedades dadas de seguida.



	A x	B y	C	D
1	0	1		
2	1	2		
3	2	4		
4	3	8		
5	4	16		

Figura 2

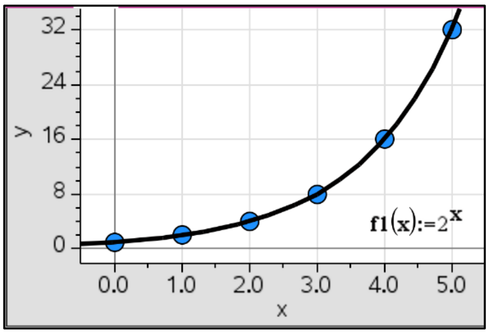
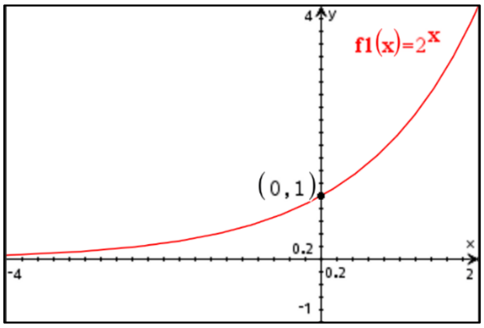


Figura 3

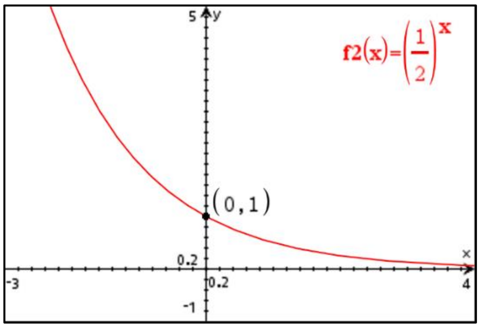
Assim, através deste exemplo, que se inicia a partir dos números naturais, é possível introduzir o estudo de uma função definida nos números racionais definida por $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ e, na próxima aula, iniciar a sua extensão ao caso real.

Definição: Dado um número real $a > 0$, está definida a função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que, para $x \in \mathbb{Q}$: $f(x) = a^x$.

De seguida, pedir-se-á aos alunos para representarem na calculadora gráfica as funções definidas nos números racionais: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, de forma que se conclua as propriedades:



- Crescente
- $\lim\limits_{x \to 0} \mathbf{2}^x = 1$ e contínua
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{2}^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{2}^x = 0$



- Decrescente
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ e contínua
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$

Questionar-se-á se é possível generalizar estas propriedades a qualquer função $f(x) = a^x, a > 0$, definida no conjunto dos números racionais, dando liberdade aos alunos experimentarem na calculadora gráfica outras funções.

Posteriormente, será projetado o seguinte material interativo do *Geogebra*: https://www.geogebra.org/m/pXz2ARxW que auxiliará a obtenção das seguintes propriedades pretendidas:

1. Dado um número real $a > 0$, a função definida no conjunto dos números racionais $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$, e decrescente se $a < 1$.
2. Dado um número real $a > 0$, a função definida no conjunto dos números racionais $f(x) = a^x$ tem-se que:
    - $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$;
    - A função f é contínua.
3. Dado um número real $a > 0$, a função definida no conjunto dos números racionais $f(x) = a^x$ tem-se que:

$\boldsymbol{a > 1}$	$\boldsymbol{0 < a < 1}$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

De seguida, será proposta a resolução dos exercícios abaixo com a participação ativa dos alunos na carteira e no quadro, com o intuito de perceberem a influência dos parâmetros a e b numa função definida por $f(x) = ba^x$:

Exercício 1:

Determina os valores reais de a e b de modo que a função f definida em $\mathbb{Q}$ por $f(x) = ba^x$ seja:

a) Crescente e o seu gráfico passe no ponto de coordenadas $(0, 2)$.

b) Decrescente e o seu gráfico passe no ponto de coordenadas $(0, 3)$.

<u>Proposta de resolução:</u>

a) $a > 1$, pois f é crescente;

Como $(0, 2)$ pertence ao gráfico de f, então $b \times a^0 = 2 \Leftrightarrow b = 2$

b) $0 < a < 1$, pois f é decrescente;

Como $(0, 3)$ pertence ao gráfico de f, então $b \times a^0 = 3 \Leftrightarrow b = 3$

Exercício 2:

Considera a função f definida no conjunto dos números racionais por $f(x) = ba^x, a, b \in \mathbb{R}$. Determina os valores de a e b de modo que o gráfico de f contenha os pontos de coordenadas $(2, 12)$ e $(3, 24)$. Qual o ponto de interseção com o eixo Oy?

Proposta de resolução:

Como $(2, 12)$ e $(3, 24)$ pertencem ao gráfico de f, então a função f é crescente, logo $a > 1$ e:

$$\begin{cases} b \times a^2 = 12 \\ b \times a^3 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{12}{a^2} \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Logo $f(x) = 3 \times 2^x$, portanto o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,3)$.

Por fim, será explicado como se resolve equações exponenciais no conjunto dos números racionais, através de dois exemplos resolvidos no quadro: $25^x = \frac{1}{125}$ e $5^{x+1} - 5^{2x} = 0$. Posteriormente, e no caso de não haver dúvidas, será proposta a resolução do seguinte exercício:

Exercício 3:

Resolve em $\mathbb{Q}$, as seguintes equações:

a) $4^{2x-1} = 16$

b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 2^{3-2x^2}$

c) $2 \times 3^{5x} - 4 \times 3^{3x} = 6 \times 3^x$

Proposta de resolução:

a) $4^{2x-1} = 16 \Leftrightarrow 4^{2x-1} = 4^2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ C.S=$\left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 2^{3-2x^2} \Leftrightarrow 8^{-x+1} = 2^{3-2x^2} \Leftrightarrow 2^{-3x+3} = 2^{3-2x^2} \Leftrightarrow -3x + 3 = 3 - 2x^2 \Leftrightarrow x(-3 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$ C.S=$\left\{\frac{3}{2}\right\}$

c) $2 \times 3^{5x} - 4 \times 3^{3x} = 6 \times 3^x \Leftrightarrow 2 \times 3^{5x} - 4 \times 3^{3x} - 6 \times 3^x = 0$

$\underset{y=3^x}{\Leftrightarrow} 2y^5 - 4y^3 - 6y = 0 \Leftrightarrow y(2y^4 - 4y^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y^4 - 2y^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{3^x = 0}_{Impossível} \vee y = -\sqrt{3} \vee y = \sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{3^x = -\sqrt{3}}_{Impossível} \vee 3^x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

C.S=$\left\{\frac{1}{2}\right\}$

A terminar a aula, será questionado se há dúvidas e é indicado o trabalho de casa.

Nota: As propriedades e os enunciados dos exercícios serão apresentados no PowerPoint desenvolvido.

Observações/Aprendizagem complementar

- Espera-se que os alunos participem na aula, contudo prevê-se a necessidade de incentivar a que haja participação, dado ser uma turma menos participativa;
- Relativamente à calculadora, espera-se que os alunos tenham facilidade de a manipular nas condições em que é necessária;
- No caso de não ser possível concluir a resolução do exercício 3, este será enviado também para trabalho de casa;
- Prevê-se algumas dificuldades a resolver o exercício 3 alínea c).

Trabalho autónomo (TPC)

Exercício 23 e 25 da página 145 do manual.

Escola __________

Plano de aula de **Matemática A**

12.º__ – 08/03/2023 – 90min

Capítulo: Cálculo combinatório	
Sumário: Correção do trabalho de casa. Distributividade do produto cartesiano relativamente à união. Cardinal de um conjunto, conjuntos equipotentes e disjuntos e cardinal do produto cartesiano: realização de uma tarefa de exploração.	**Recursos Disponíveis:** Manual; Tarefa de exploração; 1 baralho de cartas por carteira, pelo menos.

OBJETIVOS	**AÇÕES A DESENVOLVER COM OS ALUNOS**
Promover o trabalho em grupo; Desenvolver a capacidade de concluírem resultados por iniciativa própria; Reconhecer as propriedades do cardinal de conjuntos através de uma tarefa de exploração.	Participação ativa dos alunos quando solicitada e por iniciativa própria. Resolução da tarefa com o colega de carteira.

Desenvolvimento da aula/Estratégias:

A aula iniciar-se-á com o esclarecimento de dúvidas relativamente ao trabalho de casa e, para os alunos que não tenham dúvidas, será colocado no quadro um exercício extra relativamente ao uso das propriedades, sendo realizadas apenas as alíneas que suscitarem dúvidas:

Exercício 3 (TPC)

Usa as propriedades das operações com conjuntos para mostrar que:

3.1 $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

3.2 $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) = B$

3.3 $A \cup (\overline{A \cap B}) = U$

3.4 $\overline{\bar{A} \cup B} \cup B = A \cup B$

<u>Proposta de resolução:</u>

3.1 $\overline{A \cup B \cup C} \underset{\text{Leis de De Morgan}}{=} \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

3.2 $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) \underset{(1)}{=} (\bar{A} \cup A) \cap B \underset{(2)}{=} U \cap B \underset{(3)}{=} B$

(1) Propriedade distributiva da interseção em relação à união

(2) Propriedade da união de complementares

(3) Elemento neutro da interseção

3.3 $A \cup (\overline{A \cap B}) \underset{(1)}{=} A \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) \underset{(2)}{=} (A \cup \bar{A}) \cup \bar{B} \underset{(3)}{=} U \cup \bar{B} \underset{(4)}{=} U$

(1) Leis de De Morgan

(2) Propriedade associativa da união

(3) Propriedade da união de complementares

(4) Elemento absorvente da união

3.4 $\overline{\bar{A} \cup B} \cup B \underset{(1)}{=} (A \cap \bar{B}) \cup B \underset{(2)}{=} (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) \underset{(3)}{=} (A \cup B) \cap U \underset{(4)}{=} A \cup B$

(1) Leis de De Morgan

(2) Propriedade distributiva da união em relação à interseção

(3) Propriedade da união de complementares

(4) Elemento neutro da interseção

Exercício (Extra)

Sejam A e B subconjuntos de um universo U. Mostra que:

a) $(B \cap A) \cup \left(\overline{\bar{B} \cup A}\right) = B$

b) $\overline{A \cap (B \cup \bar{A})}$=$\overline{A \cap B}$

c) $\bar{A} \cap \left(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}\right) = B \backslash A$

Proposta de resolução:

a) $(B \cap A) \cup \left(\overline{\bar{B} \cup A}\right) \underset{(1)}{=} (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) \underset{(2)}{=} B \cap (A \cup \bar{A}) \underset{(3)}{=} B \cap U \underset{(4)}{=} B$

(1) Leis de De Morgan

(2) Propriedade distributiva da interseção em relação à união

(3) Propriedade da união de complementares

(4) Elemento neutro da interseção

b) $\overline{A \cap (B \cup \bar{A})} \underset{(1)}{=} \bar{A} \cup \left(\overline{B \cup \bar{A}}\right) \underset{(2)}{=} \bar{A} \cup (\bar{B} \cap A) \underset{(3)}{=} (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup A) \underset{(4)}{=} (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap$

U

$$\underset{(5)}{=} \bar{A} \cup \bar{B} \underset{(6)}{=} \overline{A \cap B}$$

(1) Leis de De Morgan

(2) Leis de De Morgan

(3) Propriedade distributiva da união em relação à interseção

(4) Propriedade da união de complementares

(5) Elemento neutro da interseção

(6) Leis de De Morgan

c) $\bar{A} \cap \left(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}\right) \underset{(1)}{=} \bar{A} \cap (A \cup B) \underset{(2)}{=} (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) \underset{(3)}{=} \emptyset \cup (\bar{A} \cap B) \underset{(4)}{=} \bar{A} \cap B = B \backslash A$

(1) Leis de De Morgan

(2) Propriedade distributiva da interseção em relação à união

(3) Propriedade da interseção de complementares

(4) Elemento neutro da união

De seguida, será lecionado a distributividade do produto cartesiano relativamente à união e, para tal, será inicialmente recordado em que consiste o produto cartesiano de dois conjuntos:

Produto cartesiano de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

Se $a \in A$ e $b \in B$ então $(a, b) \in A \times B$

Distributividade do produto cartesiano relativamente à união: Num dado universo, dados conjuntos A, B e C, tem-se que:

- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$

Exemplo:

Sejam $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$ e $C = \{d\}$

$A \times C = \{(a, d)\}$ e $B \times C = \{(b, d), (c, d)\}$ então $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) \cup (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \{(a, d), (b, d), (c, d)\}$

$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \{a, b, c\} \times \{d\} = \{(a, d), (b, d), (c, d)\}$

Posteriormente, será indicado para os alunos resolverem o exercício 13 da página 15 do manual, volume 1.

Exercício 13

Sejam $A = \{a, b\}, B = \{1,2,6\}$ e $C = \{11\}$. Representa em extensão:

13.1 $A \times B$ e $B \times A$

13.2 $(A \cup C) \times B$

<u>Proposta de resolução:</u>

13.1 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 6), (b, 1), (b, 2), (b, 6)\}$

$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (6, a), (6, b)\}$

13.2 $(A \cup C) = \{a, b, 11\}$

$(A \cup C) \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 6), (b, 1), (b, 2), (b, 6), (11,1), (11,2), (11,6)\}$

Posto isto, será apresentada a noção de cardinal de um conjunto e, consequentemente, os conceitos de conjuntos equipotentes, conjuntos disjuntos, cardinal da união de conjuntos disjuntos e cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos. Para tal, será proposto a realização de uma tarefa de exploração na qual os alunos, através de um baralho de cartas, criam conjuntos, desenvolvem o conceito de distributividade do produto cartesiano relativamente à união e trabalham com o conceito de cardinal, por forma de chegarem às conclusões pretendidas. Inicialmente, será analisado com os alunos os exemplos apresentados na ficha com o objetivo de estes perceberem o intuito da atividade.

A tarefa será realizada a pares, com o colega de carteira e, na aula anterior é necessário pedir aos alunos que tragam um baralho de cartas, pelo menos um por grupo de trabalho. Para a realização da primeira parte da tarefa será dado trinta minutos e, posteriormente, serão discutidas as resoluções dos alunos, pois é possível obter inúmeras respostas diferentes. Por fim, a última parte será realizada com a professora e a participação ativa dos alunos. A correção será feita no quadro pela professora.

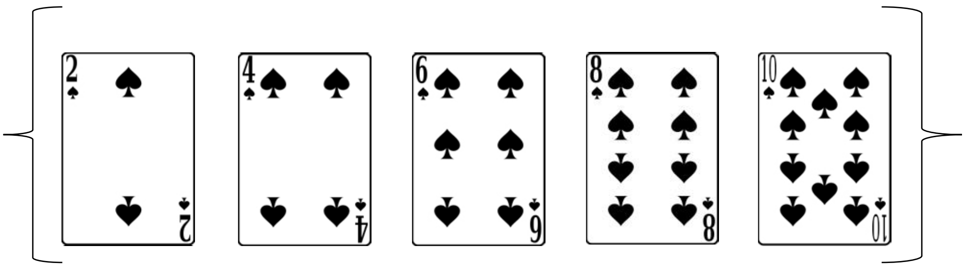
Segue-se o enunciado da tarefa, com a proposta de resolução a azul:

Tarefa de Exploração: #Cartas

8 março 2023 – 12º__

Exemplo 1: Seja $\boldsymbol{A}$ **o conjunto das cartas dos números pares até ao número 10 (inclusive) do naipe de espadas.** Tem-se que

$A =$



O conjunto A tem cinco elementos, diz-se que o cardinal do conjunto A é cinco:

$$\#A = 5$$

Definição: Ao número (natural) de elementos de um conjunto A chama-se **cardinal** de A e simboliza-se por $\#\boldsymbol{A}$.

Exemplo 2: Sejam $B = \{2,4,6,8,10\}$ e $C = \{espadas\}$, então o produto cartesiano de B e C corresponde o conjunto A:

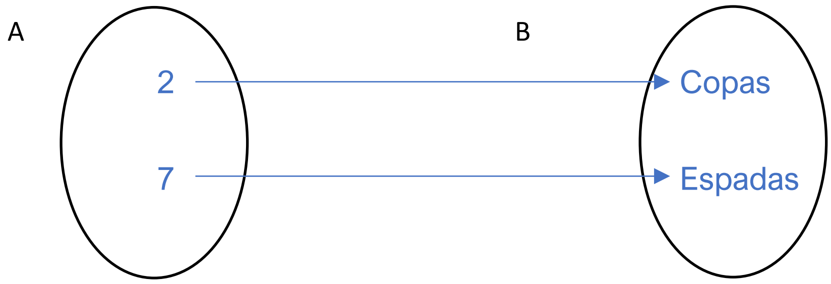
$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \{(2, espadas), (4, espadas), (6, espadas), (8, espadas), (10, espadas)\} = \boldsymbol{A}$$

Parte I

Responde a cada uma das seguintes questões:

1. Através do teu baralho de cartas, cria dois conjuntos A e B, tais que

- Exista uma bijeção de A sobre B;
- O produto cartesiano de $A \times B$ corresponda a um conjunto formado por cartas;
- Cada conjunto tenha, no máximo, quatro elementos.

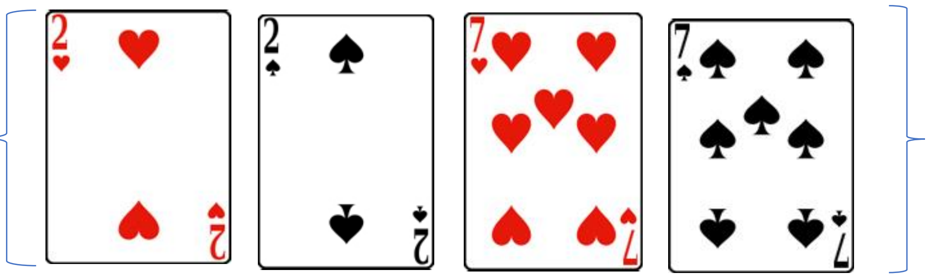


a) O que concluis do cardinal do conjunto A e do conjunto B?

$$\#A = \#B = 2$$

b) Representa em extensão e através das cartas o produto cartesiano de A e B.

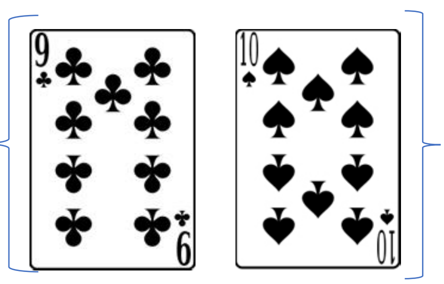
$$A \times B = \{(2, copas), (2, espadas), (7\ copas), (7, espadas)\}$$

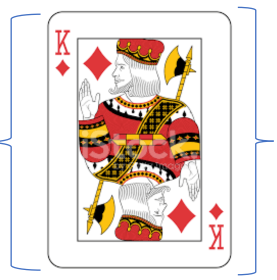
$A \times B =$ 

c) O que concluis do cardinal do conjunto formado pelo produto cartesiano de A e B?

$$\#(A \times B) = 4 = \#A \times \#B$$

2. Considera dois conjuntos C e D, tais que $C \cap D = \emptyset$. Através do teu baralho de cartas, desenvolve os conjuntos C e D e conclui acerca do cardinal da união de C e D.

$C =$ 

$D =$ 

$$\#(C \cup D) = 3 = \#C + \#D$$

Parte II

Conclusões – Cardinal de conjuntos

- Dados dois conjuntos A e B, $\#A = \#B$ se e só se existir uma bijeção de A sobre B. Identificamos os conjuntos, nesse caso, como equipotentes.
- Dados dois conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$,
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$
O cardinal da união de conjuntos disjuntos é a soma dos cardinais dos conjuntos.
- Sejam A e B dois conjuntos, $\#(A \times B) = \#A \times \#B$
O úmero de elementos do produto cartesiano de A por B é $\#A \times \#B$.
- $\#(A \times B \times C) = \#A \times \#B \times \#C$, então
$$\#(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \#A_1 \times \#A_2 \times \ldots \times \#A_n$$

A terminar a aula, a professora indicará exercícios que os alunos devem resolver e o trabalho de casa.

Exercícios para trabalho autónomo:

- Página 15 exercícios 7, 8, 9, 10, 11 e 12;
- Página 44 exercício 1.

Observações/Aprendizagem complementar

- Prevê-se que haja dúvidas no trabalho de casa, pois os alunos na última aula tiveram diversas dúvidas.
- Espera-se a necessidade de realizar a alínea c) do exercício extra pois poderão ter dúvidas a concluírem que $\bar{A} \cap B = B \backslash A$.
- Prevê-se que seja necessário explicar algumas vezes o intuito da tarefa, dado ser uma atividade fora da zona de confronto dos alunos e no qual estes se possam sentir desconfortáveis.
- A professora circulará pela sala por forma a auxiliar cada par de trabalho ao longo da realização da tarefa.
- A duração de realização da tarefa poderá ser excedida, dependendo das dúvidas que serão suscitadas em torno desta.

Trabalho autónomo (TPC)

Página 13 exercício 4 e página 19 exercício 14 do manual, volume 1.

Anexo D – Planificação das aulas de 22 de março, 12.º ano

Escola _____

Plano de aula de **Matemática A**

12.º__– 22/03/2023 – 90min

Capítulo: Cálculo combinatório	
Sumário: Combinações. Realização de uma atividade sobre combinações e arranjos sem repetição.	**Recursos Disponíveis:** PowerPoint; Cartas – Atividade; Calculadora gráfica.

OBJETIVOS	**AÇÕES A DESENVOLVER COM OS ALUNOS**
Promover o trabalho em grupo; Reconhecer a distinção entre combinação e arranjos; Promover a articulação entre as diferentes apresentações de uma combinação e de um arranjo sem repetição.	Participação ativa dos alunos quando solicitada e por iniciativa própria; Discussão com o grupo de trabalho e com toda a turma relativamente à atividade.

Desenvolvimento da aula/Estratégias:

A aula iniciar-se-á através de uma breve revisão relativamente à matéria lecionada nas aulas anteriores: permutações e arranjos com e sem repetição. Para tal, começar-se-á a rever o conceito de permutação e, de seguida, a criação de uma tabela que será concluída no final da aula:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1$$

		Repetição	**Ordem**
Arranjos com repetição $^{n}A'_{p}$	n^p	Sim	Sim
Arranjos sem repetição $^{n}A_{p}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$	Não	Sim

Posteriormente, será explicado o conceito de combinações, começando por questionar os alunos do seguinte problema:

Exemplo

A Margarida pretende comer uma taça de gelado com três sabores diferentes. Em sua casa tinha gelado de morango, de baunilha, de chocolate, de nata e de limão.

a) Quantas maneiras diferentes tem a Margarida para conjugar os gelados?

Espera-se que haja alunos a resolverem o problema através de arranjos e também elaborando um esquema de forma a obter os conjuntos possíveis de três gelados. A professora irá questionar como os alunos resolveram o problema e, caso haja alunos a resolverem-no através de arranjos sem repetição, a professora colocará o valor do arranjo obtido, que à partida será o arranjo ${}^{5}A_{3} = 60$. A partir desse momento, será registado no quadro todas as conjunções de três sabores de gelados possíveis e, concluir-se-á que, através dos arranjos sem repetição estão a contabilizar-se conjuntos de gelado repetidos. Desta forma, a resposta ao problema é $\frac{60}{3!} = 10 = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = {}^{5}C_{3}$.

De seguida, explicar-se-á o conceito de combinações, apresentar-se-á mais uma alínea do exemplo anterior e, por fim, será proposto a realização de um exercício de forma autónoma:

Definição: Dado um conjunto de $n \in \mathbb{N}_0$ elementos, o número de subconjuntos com p elementos ($0 \leq p \leq n$) designa-se por **combinações de $\boldsymbol{n}$ elementos $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{p}$** e representa-se por ${}^{n}C_{p}$, $\binom{n}{p}$ ou C_{p}^{n}, tal que:

$$ {}^{n}C_{p} = \frac{{}^{n}A_{p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} $$

Exemplo - continuação

A Margarida pretende comer uma taça de gelado com três sabores diferentes. Em sua casa tinha gelado de morango, de baunilha, de chocolate, de nata e de limão.

a) Quantas maneiras diferentes tem a Margarida para conjugar os gelados?

b) Quantas maneiras diferentes tem a Margarida para conjugar os gelados, sabendo que vai comer o gelado de chocolate?

<u>Proposta de resolução:</u>

b) ${}^{4}C_{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

Exercício 1

Um clube de teatro de uma escola é constituído por 6 raparigas e 4 rapazes. Para uma atuação é necessário selecionar quatro alunos para formar uma coreografia.

De quantas maneiras se pode selecionar os alunos se:

a) não houver qualquer restrição?

b) o grupo for formado só por raparigas?

c) o grupo for formado por três rapazes e uma rapariga?

Proposta de resolução:

a) ${}^{10}C_4 = \frac{10!}{4!\times 6!} = \frac{10\times 8\times 9\times 7}{4\times 3\times 2} = 210$

b) ${}^{6}C_4 = \frac{6!}{4!\times 2!} = 15$

c) ${}^{4}C_3 \times\ {}^{6}C_1 = \frac{4!}{3!}\times\frac{6!}{5!} = 4\times 6 = 24$

De seguida, será realizada uma atividade que pretende que os alunos se consciencializem, mais uma vez, da distinção entre combinação e arranjos sem repetição. Assim, a turma será dividida em grupos de trabalho de dois elementos e dado que são número ímpar, existirá um trio. O par de trabalho será o colega de carteira e para cada grupo serão entregues três cartas que corresponderão a respostas de perguntas que serão feitas.

As cartas entregues a cada grupo será uma do tipo a), outra do tipo b) e, por fim, um número natural (resultado da questão), tipo c), por forma a que haja igualdade em todos os pares:

a) ${}^{n}C_p$ ou ${}^{n}A_p$

b) $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $\frac{n!}{(n-p)!}$

c) Resultado

Para além da diferença entre combinação/arranjo, esta atividade pretende promover a articulação entre a representação da combinação/arranjo e a sua respetiva fórmula. Relativamente à carta com o número natural, cada par terá sempre de perceber se perante a pergunta efetuada, essa carta pode ou não responder à questão. Assim, a cada pergunta estão associadas três cartas, pois todas elas representam uma resposta ao problema proposto.

Para a realização da atividade, os alunos não terão acesso à calculadora gráfica, possibilitando o desenvolvimento e melhoramento do cálculo mental dos alunos que, em muitos casos, é reduzido. A atividade decorrerá de forma dinâmica e, após se questionar sobre cada problema apresentado, serão dados alguns minutos para que cada grupo analise as cartas que tem na mão. Após esse tempo, será pedido aos alunos que consideram que têm cartas que respondem às perguntas que se dirijam para a frente da sala para que em conjunto discutam o seu ponto de vista, tanto com os colegas como com a professora.

Dado serem 23 alunos, existem 11 grupos de trabalho o que implica a existência de 11 questões. As perguntas planeadas visam promover o conhecimento de diversas situações em que é abordado combinações ou arranjos e estas serão projetadas através do PowerPoint realizado para a aula. Segue-se abaixo as questões a serem perguntadas aos alunos:

Questões

1. A Inês foi à Feira do Livro e o dinheiro que levou só lhe permite comprar dois dos seis livros que gostou. De quantas maneiras pode a Inês escolher os livros que vai comprar?
2. De um saco com um conjunto de cinco bolas, numeradas de 1 a 5, pretende-se retirar duas bolas uma a seguir à outra e sem reposição. Quantas sequências diferentes são possíveis formar?
3. De um saco com um conjunto de cinco bolas, numeradas de 1 a 5, pretende-se retirar, simultaneamente, duas bolas. Quantos conjuntos é possível formar sabendo que não há qualquer restrição?
4. No passado dia 14 de março, apenas seis alunos do 12.º ano terminaram o desafio MensalMat da escola Daniel Sampaio. De quantas maneiras diferentes podem ser distribuídas os dois primeiros lugares entre os que terminaram o desafio?
5. De um baralho de cartas, pretende-se formar uma sequência com dois reis. Como há quatro reis num baralho, quantas sequências são possíveis formar?
6. O Miguel tem oito berlindes todos diferentes e prometeu dar dois à sua irmã. Quantos conjuntos diferentes de dois berlindes pode o Miguel dar à irmã?
7. Para uma um concurso de fotografias, pretendeu-se escolher dois dos oito candidatos para tirar uma fotografia. De quantas maneiras diferentes se podem dispor na fotografia?
8. A mãe do Afonso preparou um saco com quatro sandes diferentes para ele comer na escola. De quantos modos diferentes pode o Afonso tirar, simultaneamente, duas sandes do saco?
9. Considera, num plano, uma circunferência no qual estão marcados 4 pontos. Quantos triângulos é possível formar com esses pontos?
10. Um grupo de quatro amigos pretendeu formar uma comissão com três elementos. De quantas maneiras é possível formar a comissão, sabendo que tem de haver um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro?

11. Um grupo de cinco amigos pretendeu formar uma comissão com quatro elementos. De quantas maneiras é possível formar a comissão, sabendo que não há qualquer distinção de cargos?

Dado que cada grupo de trabalho terá três cartas, na tabela abaixo encontra-se as respostas a cada uma das questões e a distribuição de cartas por grupo de trabalho (uma cor por grupo). O grupo de três alunos ficará com a cor ,pois apresenta resultados finais maiores. A restante distribuição por grupo é feita de forma aleatória.

Questão	${}^{n}C_{p}$ ou ${}^{n}A_{p}$	$\frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $\frac{n!}{(n-p)!}$	Resultado
1.	${}^{6}C_{2}$	$\frac{6!}{2!\,4!}$	15
2.	${}^{5}A_{2}$	$\frac{5!}{3!}$	20
3.	${}^{5}C_{2}$	$\frac{5!}{2!\,3!}$	10
4.	${}^{6}A_{2}$	$\frac{6!}{4!}$	30
5.	${}^{4}A_{2}$	$\frac{4!}{2!}$	12
6.	${}^{8}C_{2}$	$\frac{8!}{2!\,6!}$	28
7.	${}^{8}A_{2}$	$\frac{8!}{6!}$	56
8.	${}^{4}C_{2}$	$\frac{4!}{2!\,2!}$	6
9.	${}^{4}C_{3}$	$\frac{4!}{3!}$	4
10.	${}^{4}A_{3}$	$4!$	24
11.	${}^{5}C_{4}$	$\frac{5!}{4!}$	5

Quando terminar a atividade, será reforçada a distinção entre arranjo e combinação utilizando como exemplo as perguntas 10 e 11. Em anexo encontra-se um exemplar de como serão as cartas entregues aos alunos.

Após a realização desta atividade, com duração prevista de 40/45 minutos, será concluída a tabela realizada no início da aula com a ajuda dos alunos:

		Repetição	Ordem
Arranjos com repetição $^{n}A'_{p}$	n^p	Sim	Sim
Arranjos sem repetição $^{n}A_{p}$	$\frac{n!}{(n-p)!}$	Não	Sim
Combinações $^{n}C_{p}$	$\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$	Não	Não

A terminar a aula, a professora explicará como se obtém o valor da combinação de n elementos p a p através da calculadora gráfica, auxiliando os alunos que a solicitarem. Por fim, será informado do trabalho de casa para a próxima aula e da ficha de trabalho que será disponibilizada no Classroom sobre combinações, arranjos e permutações para trabalho autónomo.

Observações/Aprendizagem complementar

- Prevê-se que os alunos sintam alguma dificuldade a interpretar o conceito de combinação, pois estes já apreenderam, anteriormente, diversos conceitos que podem induzir em erro;
- Os exemplos e exercícios resolvidos antes da atividade permitem os alunos perceberem o conceito de combinação e também de resolverem problemas sem recurso à calculadora gráfica, utilizando apenas a fórmula de combinação, sendo este um processo importante para a atividade realizada de seguida;
- Pretende-se que os alunos realizem as contas mentalmente, recordando todos os conceitos já lecionados e desenvolvendo o conceito dado. Para tal, devem manter-se no quadro as fórmulas de permutação, arranjos sem repetição e combinações.
- A atividade a ser realizada, para além de consolidação de conceitos matemáticos, proporciona os alunos a saírem da zona de confronto ao terem de se dirigir para a frente da sala, o que poderá ser um momento de apreensão por parte dos alunos. Contudo, é necessário que sejam confrontados com este tipo de iniciativas por forma a ganharem autoconfiança tanto do seu conhecimento como neles próprios.

Trabalho autónomo (TPC)

Página 27 exercícios 43, 44 e 45 do manual, volume 1.
Para trabalho autónomo, foi realizado uma ficha de trabalho com exercícios sobre arranjos e combinações.

$$^{6}C_{2}$$

Anexo E – Planificação das aulas de 6 de dezembro, 8.º ano

Escola _______-

Plano de aula de **Matemática**

8.º__– 06/12/2022 – 90min

Capítulo: Números e operações.	
Sumário: Correção do trabalho de casa. Tarefa sobre operações com raízes quadradas (revisão) e simplificação das mesmas.	**Recursos Disponíveis:** Manual. Ficha de trabalho -Tarefa.

OBJETIVOS	**AÇÕES A DESENVOLVER COM OS ALUNOS**
Consolidar as operações com raízes quadradas. Desenvolver a capacidade de simplificar números irracionais.	Participação ativa dos alunos quando solicitada e por iniciativa própria. Resolução da tarefa proposta.

Desenvolvimento da aula/Estratégias:

A aula iniciar-se-á pela correção do trabalho de casa, exercícios 20 e 21 da página 94, no quadro. Antes de iniciar a correção, será questionado quem fez o trabalho de casa e se houve dúvidas, prosseguindo de seguida à sua correção. Serão feitas questões aos alunos a partir do lugar, de forma que estes participem ativamente na aula.

Para o exercício 20, para além do pedido, será dada importância à justificação da classificação atribuída para cada uma das dízimas.

Exercício 20

Classifica a dízima que corresponde a cada um dos números seguintes.

$$\sqrt{5}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{10}{8}, \quad -\frac{5}{6}, \quad -\frac{1}{2}$$

Proposta de resolução:

$\sqrt{5}$ Dízima infinita não periódica, pois é um número irracional.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ Dízima infinita não periódica, pois $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071067811865475\ldots$

$\frac{\pi}{3}$ Dízima infinita não periódica, pois $\frac{\pi}{3} = 1{,}0471975511965977\ldots$

$\frac{10}{8}$ Dízima finita, pois é equivalente a uma fração decimal $\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = \frac{5}{2^2} = \frac{5\times5^2}{2^2\times5^2} = \frac{125}{100}$.

$-\frac{5}{6}$ Dízima infinita periódica, pois $-\frac{5}{6} = 0{,}833333 \ldots = 0{,}8(3)$.

$-\frac{1}{2}$ Dízima finita, pois é equivalente a uma fração decimal $-\frac{1}{2} = -\frac{1\times 5}{2\times 5} = \frac{5}{10}$.

Antes da correção do exercício 21, será feita uma revisão relativamente ao conjunto dos números reais, no quadro.

Exercício. 21

Considera o seguinte conjunto dos números reais: $\left\{-\sqrt{2}\,, \sqrt{3}, \sqrt{4} - \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{5}, \frac{6}{2}, -2, 1\right\}$

21.1 Dos números que compõem o conjunto, indica:

a) os números naturais;

b) os números inteiros;

c) os números racionais fracionários;

d) os números irracionais.

21.2 Escreve o conjunto de números por ordem crescente.

<u>Proposta de resolução:</u>

21.1 a) $1, \sqrt{4}$ e $\frac{6}{2}$; b) $-2, 1, \sqrt{4}$ e $\frac{6}{2}$; c)$-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ e $\frac{9}{5}$; d) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$

21.2 $\left\{-2, -\frac{3}{2}, -\sqrt{2}, 1, \frac{4}{3}, \sqrt{3}, \frac{9}{5}, \sqrt{4}, \frac{6}{2}\right\}$

Após a realização da correção do trabalho de casa, seguir-se-á para o segundo momento da aula, a resolução da tarefa sobre operações e simplificação com raízes quadradas. Será entregue um enunciado por aluno e, antes de se dar início à resolução, será feito no quadro uma revisão relativamente ao índice, radical e radicando.

A resolução desta ficha será feita em conjunto e tem como objetivo os alunos recordarem-se das operações com raízes (matéria do 7.º ano). Desta forma, trata-se de uma atividade direcionada para o objetivo da aula e deve ser guiada pela professora. Ao longo da correção, a professora deve resolvê-la no quadro, objetivo por objetivo. Na ficha de trabalho proposta, a simplificação de raízes que não são quadrados perfeitos (objetivo 5) é o único conteúdo matemático que não é do conhecimento dos alunos, dado se tratar de números irracionais (8.º ano). Assim, a resolução desta ficha deverá impulsionar a capacidade de os alunos simplificarem raízes quadradas, tendo em conta cada objetivo da tarefa, como por exemplo, $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ que utiliza as propriedades dos objetivos 2 e 3, já resolvidos.

Ficha de trabalho, com a resolução a azul:

Matemática

8.º ano 2022/23

Nome: ____Nº________ Turma: _____

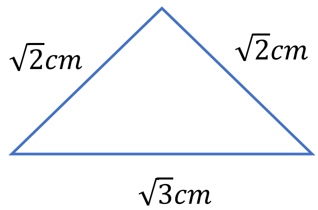
06/12/2022

Ficha de trabalho

Operações e simplificações com raízes quadradas

Nota: As figuras não estão desenhadas à escala.

Objetivo 1: Determinar o perímetro do seguinte triângulo.



- Apresenta a fórmula do perímetro do triângulo e substitui pelas medidas dos lados:

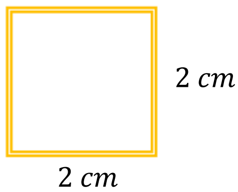
$$P = l + l + l = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

- Simplifica a expressão obtida anteriormente:

$$P = 1\sqrt{2} + 1\sqrt{2} + 1\sqrt{3} = (1+1)\sqrt{2} + 1\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 1\sqrt{3}\ cm$$

$$\boxed{a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}, \qquad a, b.c \geq 0}$$

Objetivo 2: Determinar a raiz quadrada da área do seguinte quadrado.



- Apresenta a área do quadrado na forma de potência:

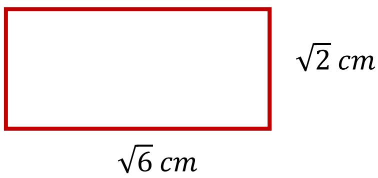
$$A = l \times l = 2 \times 2 = 2^2 cm^2$$

- Determina a raiz quadrada da potência determinada anteriormente:

$$\sqrt{2^2} = 2$$

$$\boxed{\sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2} = a, \qquad a \geq 0}$$

Objetivo 3: Determinar a área do retângulo apresentado ao lado.



- Apresenta a fórmula da área de um retângulo e substitui pela medida dos lados do retângulo apresentado:

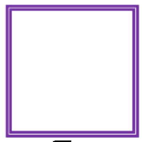
$$A = l \times l = \sqrt{2} \times \sqrt{6}$$

- Determina a área do retângulo, sabendo que do objetivo 2 sabemos que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2}$, então se tivermos $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ é igual a:

$$A = \sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 6} = \sqrt{12}\ cm^2$$

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}, \qquad a, b \geq 0}$$

Objetivo 4: Determinar o quociente da área do retângulo com a área do quadrado:



- Determina a área do retângulo, na forma de raiz quadrada:

$$A = l \times l = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16}\ cm^2$$

- Determina a área do quadrado, na forma de raiz quadrada:

$$A = l \times l = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4}\ cm^2$$

- O quociente da área do retângulo com a área do quadrado é: $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$
- Calcula $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \dfrac{4}{2} = 2$
- Calcula $\sqrt{\dfrac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \qquad a, b \geq 0}$$

Objetivo 5: No objetivo 3 desta aula, a área do retângulo de medidas $\sqrt{6}$ por $\sqrt{2}$, é $\sqrt{12}$ e 12 não é um <u>quadrado perfeito,</u> logo $\sqrt{12}$, como já sabes, é um **número irracional**. Descobre como podes simplificar $\sqrt{12}$.

- Começa por decompor 12 em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

- $12 = 2^2 \times 3$

- $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Bom trabalho!

Após a resolução da ficha de trabalho apresentada, a professora realizará alguns exemplos relativamente à simplificação de raízes quadradas, de forma a garantir a consolidação deste conteúdo.

Exemplos:

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{24} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2 \times 3} = 2\sqrt{6}$

c) $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Por fim, a professora deverá perguntar se há dúvidas e, caso haja, esclarecê-las, caso contrário, deve indicar o trabalho de casa e dar a aula como terminada.

Observações/Aprendizagem complementar

- Espera-se uma elevada participação ao longo da aula, principalmente durante a correção do trabalho de casa, dado que já o terem resolvido.
- Prevê-se que alguns alunos não se recordem das fórmulas das áreas das figuras apresentadas, contudo não deverá ser um entrave para a resolução da tarefa e, desta forma, recordam conceitos apreendidos em anos anteriores.
- Pressupõem-se algumas dificuldades a interpretar a ficha de trabalho, dado os enunciados serem diferentes do que estão familiarizados. Esta é uma ficha de trabalho que deve ser realizada ao mesmo tempo que se acompanha a resolução, pois através dela consolida-se e leciona-se novos conteúdos matemáticos.
- Espera-se que cerca de 2/3 alunos resolvam a ficha autonomamente, pois têm um elevado desempenho nesta disciplina e, por consequência, poderão terminá-la antes de se finalizar a resolução no quadro. Para tal, devem ser chamados a verificar se a resolveram corretamente e, atribuir os exercícios que serão para TPC, de forma a não desmotivarem por já terem terminado e não terem nada que fazer.

Trabalho autónomo (TPC)
Exercício 8 e 10 da ficha de reforço, da *classroom*.

Anexo F – Planificação das aulas de 16 de maio, 8.º ano

Escola ______

Plano de aula de **Matemática**

8.º__ – 16/05/2023 – 90min

Capítulo: Geometria e medida	
Sumário: Realização de uma tarefa sobre isometrias.	**Recursos Disponíveis:** PowerPoint Tarefa

OBJETIVOS	AÇÕES A DESENVOLVER COM OS ALUNOS
Promover o conhecimento da noção de reflexão deslizante; Desenvolver a capacidade visual dos alunos para o tema das isometrias; Proporcionar o contacto de padrões e regularidades.	Participação ativa dos alunos quando solicitada e por iniciativa própria. Resolução da tarefa proposta.

Desenvolvimento da aula/Estratégias:

Nesta aula será lecionada a isometria reflexão deslizante através de uma tarefa. Esta encontra-se dividida em três partes. A primeira consistirá em os alunos aprenderem a isometria referida acima, através de um movimento que certamente todos o fizeram em pequeno: gatinhar. A segunda parte relacionará a visita de estudo realizada no dia 26 de abril com as isometrias: reflexão axial, translação, rotação e reflexão deslizante, em que são utilizadas imagens que foram fotografadas no Museu Nacional do Azulejo. Por fim, serão elaborados exercícios de consolidação da matéria.

A seguir encontra-se a tarefa que será executada nesta aula:

REPÚBLICA PORTUGUESA | EDUCAÇÃO

Matemática

2022/23

Nome :____ Nº______ Turma:______ 16/05/ 2023	Isometrias 8.ºAno

Pré-requisitos:

- Reflexão axial
- Translação
- Rotação

Material:

- Lápis de cor
- Papel A3

Parte I

1. Quando eras mais pequeno/a, antes de andar, certamente começaste por gatinhar. Com a ajuda do **teu colega de carteira**, reproduz o **movimento das mãos de um bebé**, na tua folha A3. Contorna as tuas mãos com os lápis de cor de forma a obteres a deslocação.

2. Na figura que obtiveste anteriormente, que **isometria(s)** consegues determinar? Representa-a(s) na figura.

____

____

3. A isometria que está representada no movimento de um bebé a gatinhar denomina-se por _______________________ .

Parte II:

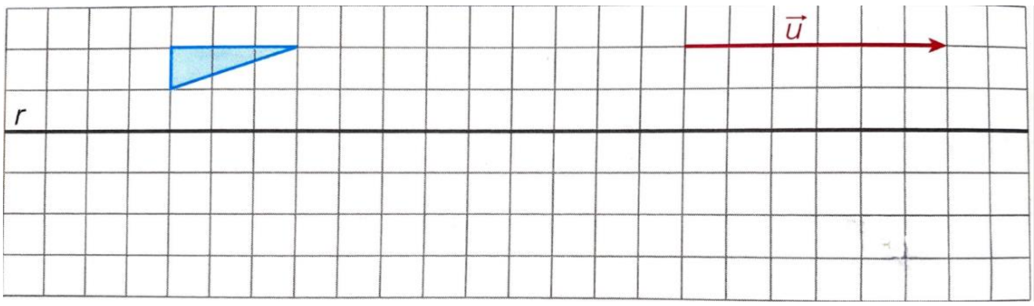
No passado dia **26 de abril** visitaste o **Museu Nacional do Azulejo**, onde tiveste a oportunidade de ficar a conhecer tanto a história desta peça de cerâmica, como de observar diversos azulejos.

1. Os azulejos que se encontram abaixo foram alguns dos que viste na passada visita de estudo. Para cada um deles, tenta descobrir que **isometria(s)** estão presentes.

2. Tal como fizeste no Museu Nacional do Azulejo, recria o teu próprio azulejo através da faixa de quadrados. Num azulejo é bastante vulgar verificar-se a existência de padrões e regularidades. Para tal deves utilizar a isometria que aprendeste: **reflexão deslizante**.

Parte III: Exercícios de consolidação

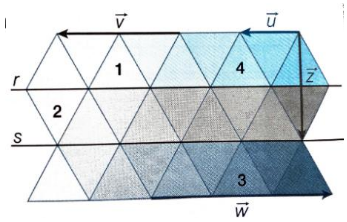
1. Na figura está representada uma grelha quadriculada na qual foi desenhado um triângulo, uma reta r e um vetor $\vec{u}$ com a mesma direção da referida reta.



a) Desenha a imagem do triângulo pela reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{u}$, na figura acima.

b) Desenha a imagem do triângulo pela reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{v}$, sendo $\vec{v}$ um vetor colinear a $\vec{u}$ de sentido oposto e com metade do seu comprimento.

2. Observa a figura abaixo, na qual estão representados triângulos equiláteros, duas retas r e s, paralelas entre si, e quatro vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{z}$.



O triângulo 2 é o transformado do triângulo 1 por uma:

(A) reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{u}$

(B) translação de vetor $\vec{u}$

(C) reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{v}$

(D) translação de vetor $\vec{v}$

O triângulo 4 é a imagem do triângulo 1 por uma:

(A) reflexão deslizante de eixo r e vetor $-\vec{v}$

(B) translação de vetor$-\vec{v}$

(C) reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{v}$

(D) translação de vetor $\vec{v}$

O triângulo 2 é a imagem do triângulo 3 por uma:

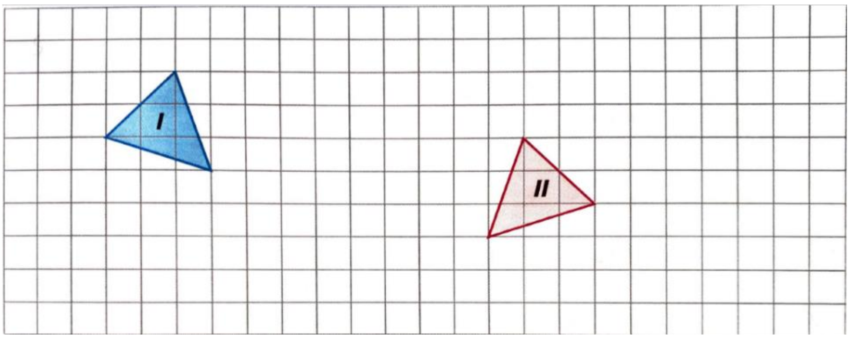
(A) reflexão deslizante de eixo s e vetor $\vec{w}$

(B) translação de vetor $\vec{w}$

(C) reflexão deslizante de eixo s e vetor $-\vec{w}$

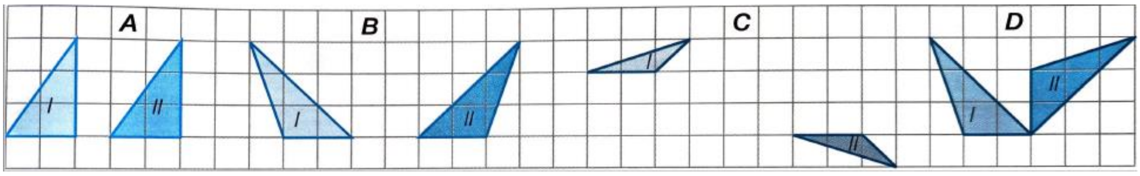
(D) translação de vetor $-\vec{w}$

3. Na figura abaixo está representada uma grelha quadriculada em que foram desenhados dois triângulos I e II, cujos vértices são pontos da referida grelha.



Desenha uma reta s e um vetor $\vec{u}$, de modo que o triângulo II seja imagem do triângulo I por uma reflexão deslizante de eixo s e vetor $\vec{u}$.

4. Na figura que se segue encontram-se situações, A, B, C e D. Em cada uma delas são apresentados dois triângulos geometricamente iguais, I e II, de tal forma que o triângulo II é o transformado do triângulo I por uma isometria.



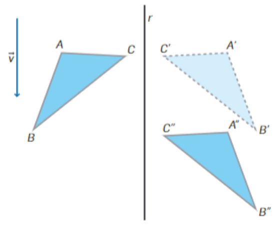
Identifica a isometria associada a casa situação:

A- ______________ B- _______________ C- _______________ D- ________________

Para a correção da tarefa preparada, será projetado um PowerPoint, não estando desta forma a resolução da tarefa neste documento. O PowerPoint apresentará também um suporte teórico sobre o conceito de reflexão deslizante. Após o desenho da deslocação das mãos de um bebé, a professora auxiliará os alunos quanto às isometrias presentes nesse movimento, chegando por fim à noção de reflexão deslizante.

Definição: Uma reflexão deslizante de eixo r e vetor $\vec{v}$ é a composta de uma translação $T_{\vec{v}}$ com uma reflexão R_r.

Exemplo: A imagem do triângulo [ABC] por uma reflexão deslizante associada à reta *r* e ao vetor $\vec{v}$ é o triângulo [A''B''C''].



De seguida e através do PowerPoint, será apresentada a sua definição e exemplo de aplicação, explicando que esta é também uma isometria. Por fim, a professora mostrará um vídeo do canal de Youtube "Isto é Matemática" intitulado "Se tem o vício de procurar padrões, este vídeo é para si." que elucida de forma simples e realista a aplicação de isometrias.

Após este momento, a professora pedirá aos alunos para realizarem a parte II da tarefa. Esta segunda parte pretende relacionar-se com o projeto interdisciplinar sobre padrões e regularidades, no qual a turma está inserida, com a visita de estudo e a disciplina de matemática. Por fim, a parte três permite que os alunos apliquem a matéria lecionada em exercícios, por forma a consolidarem o que foi dado. Para a aula espera-se que só seja possível resolver os exercícios um e dois.

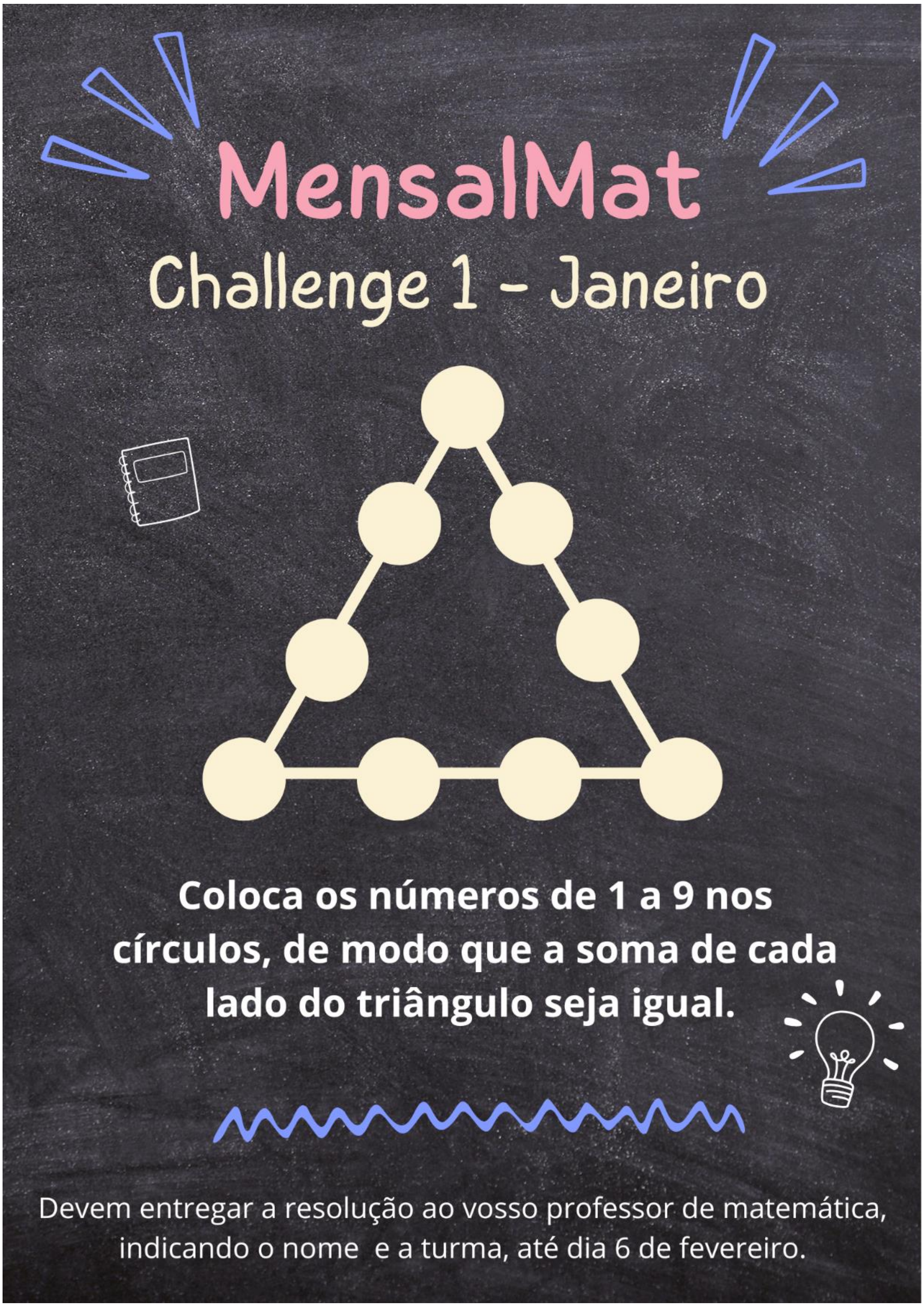
Observações/Aprendizagem complementar

- Espera-se uma elevada participação ao longo da aula que por vezes se poderá tornar incomodativa para o procedimento da mesma. Para tal, a professora deverá chamar os alunos a atenção por forma a manter um ambiente de trabalho harmonioso.
- Prevê-se que os alunos gostem da tarefa planeada, dado ser uma atividade dinâmica e fora do comum.
- Quanto à elaboração da faixa de azulejos, espera-se que professora tenha de apressar os alunos, por forma que seja possível concluir a planificação da aula, pois podem ficar demasiado tempo a pintar, tendo planeado cerca de 15 minutos para a sua realização.
- Por fim, os restantes exercícios da parte III que não forem possíveis realizar, ficarão para trabalho de casa. Caso haja a possibilidade de serem todos resolvidos, os alunos deverão realizar em casa o exercício 10 da página 135 do manual adotado

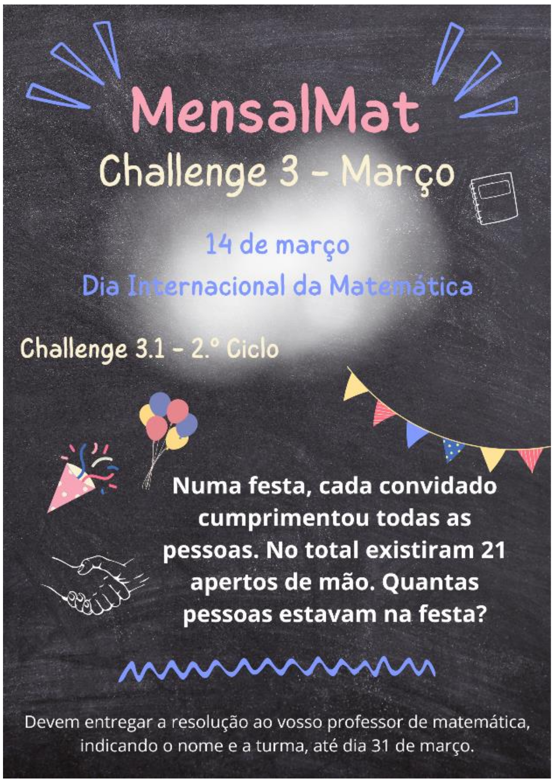
Trabalho autónomo (TPC)

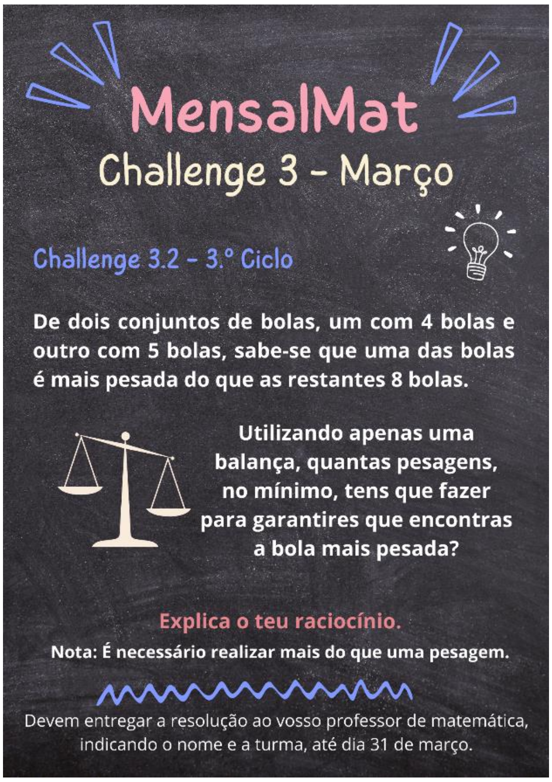
Exercícios 3 e 4 da tarefa, em caso de serem resolvidos em aula, exercício 10 da página 135.

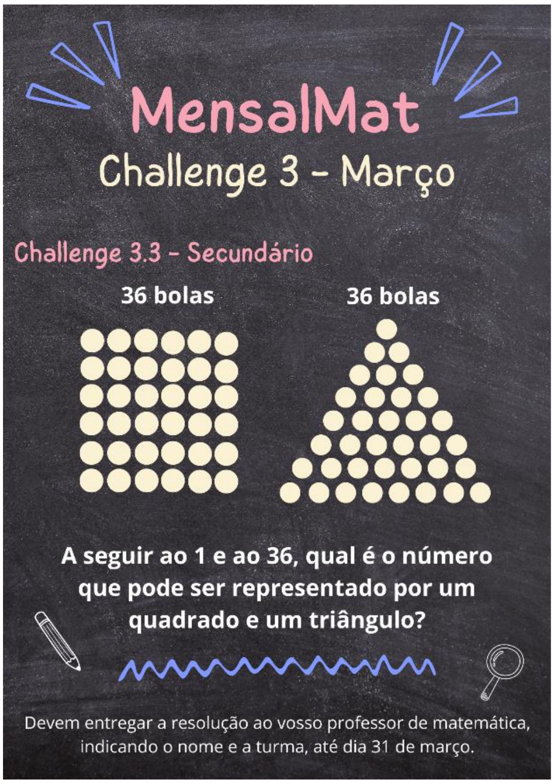
Anexo G – "MensalMat" janeiro



Anexo H – "MensalMat" março







Anexo I – Guião entrevistas

Entrevista inicial (7 voluntários)

1. O que te fez voluntariar para participares neste projeto?

2. No tema das funções derivadas, como decides adotar por uma abordagem gráfica ou por uma abordagem algébrica, por exemplo para estudar a monotonia de uma função?

3. O que pensas de cada uma das representações para definir uma função?

Entrevista (3 alunos participantes)

1. Porque adotaste uma abordagem mais/menos analítica/ gráfica?
2. Sabias por onde começar?
3. Porque vais fazer esse ajuste na janela de visualização?
4. Porque resolveste o exercício dessa maneira?
5. O que achaste deste exercício? E porquê?
6. Porque recorreste à expressão da primeira/segunda derivada para resolver o exercício?

Anexo J – Autorização de participação

Autorização de participação no projeto de investigação

Eu, ____, Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____, n.º ___, da turma 12.º D, tomei conhecimento da realização do projeto de investigação no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, e autorizo a participação do meu educando no referido projeto.

Autorizo a recolha de informação áudio e o seu uso para efeitos de investigação, salvaguardando o respetivo anonimato do meu educando, aquando da realização de entrevistas e tarefas no âmbito deste projeto de investigação.

___/___/______ ___________________________

(Encarregado de Educação)

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Anexo K – Informações

Projeto de Investigação

Informações

- Para a realização da seguinte tarefa, utiliza os conceitos que adquiriste no tema das funções derivadas;
- A utilização ou não da calculadora gráfica fica ao teu critério, contudo nas perguntas em que é indicado a sua utilização é de uso obrigatório;
- Quando pretendes utilizar a calculadora deves iniciar cada exercício numa nova página;
- Sempre que recorreres à calculadora gráfica deves indicar o que observas, desenhando, por exemplo, um esboço do gráfico que visualizas;
- Para o caso de procederes a arredondamentos, arredonda às centésimas.

Anexo L – Tarefa 1

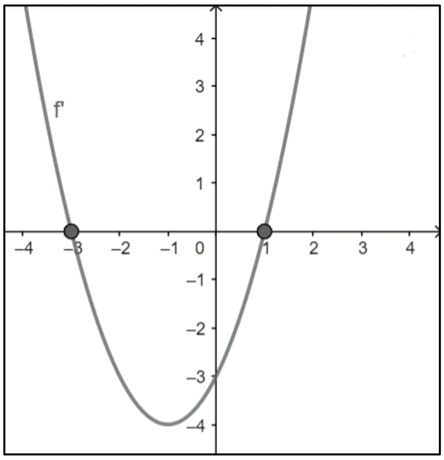
Tarefa 1 - Projeto de Investigação

1. Seja f uma função real de variável real, contínua em $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$$

Na Figura ao lado encontra-se representado o gráfico da sua derivada.

Estuda a função f quanto à existência de extremos.



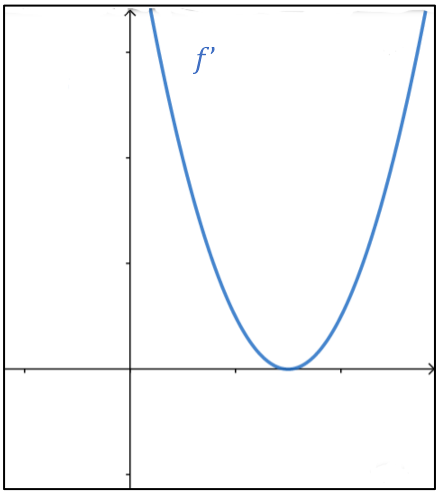
2. Seja h uma função definida, em $]0\,,\pi[$, por $h(x) = \ x + \cos\,(2x)$.

Estuda a função h quanto à monotonia e determina o(s) extremo(s), caso exista(m).

3. Considera uma função real de variável real, f, de domínio $\mathbb{R}$.

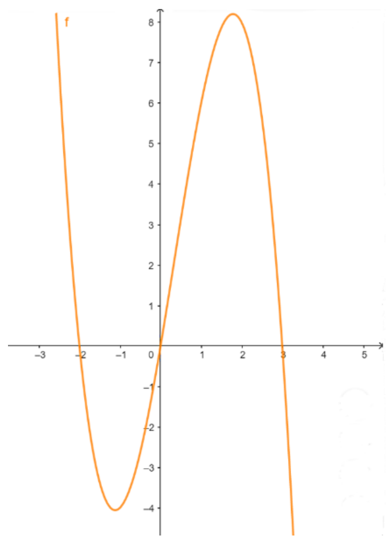
Sabe-se que:

- $f'(3) = 0$;
- f' encontra-se representado na Figura ao lado;
- $f''(x) = 2x - 6$.

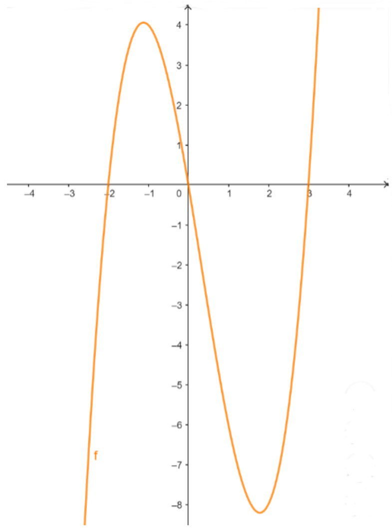


Em qual das seguintes representações se encontra representado o gráfico da função f? Justifica a tua resposta.

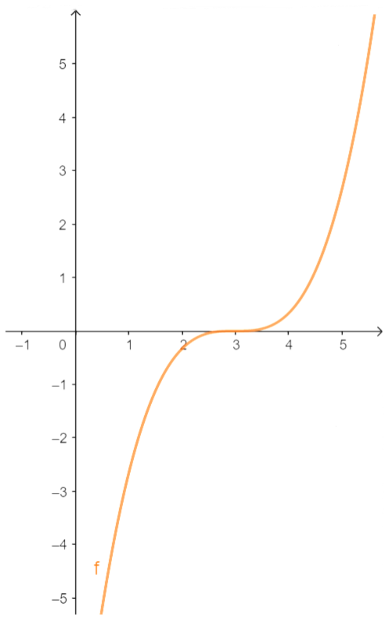
(A)



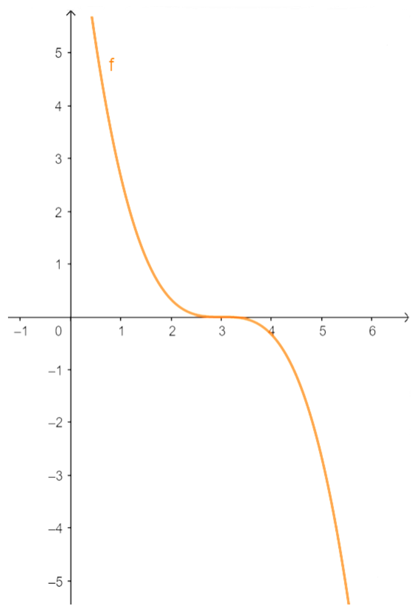
(B)



(C)



(D)



4. Seja g uma função real de variável real definida por $g(x) = x^2 - 15x + 6$.

Com exclusivo à calculadora gráfica, estuda a função g quanto à monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de extremos e pontos de inflexão.

Anexo M – Tarefa 2

Tarefa 2 - Projeto de Investigação

1. Seja f uma função de domínio $[0, \pi]$. Sabe-se que a sua função derivada é dada por

$$f'(x) = -2cos(x) - 1$$

Sabe-se que $f(0) = 0$ Que valor pode tomar $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

Justifica a tua resposta.

(A) $2 + \frac{\pi}{2}$ (B) $2 - \frac{\pi}{2}$ (C) $-2 - \frac{\pi}{2}$ (D) 0

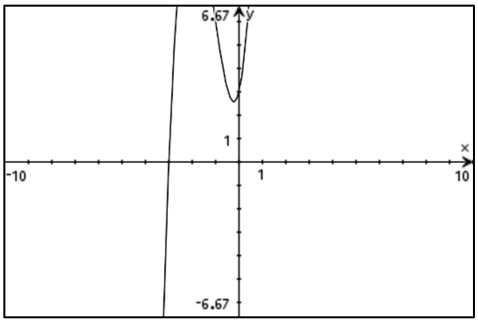
2. Considera a função f real de variável real, de domínio $\mathbb{R} \backslash \{1\}$, definida por

$$f(x) = \frac{4-2x}{(x-1)^2}.$$

Estuda a função f quanto à monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico e determina o(s) extremo(s).

Nota: $x = 4$ é o único ponto de inflexão.

3. De uma certa função g, contínua em $\mathbb{R}$, obteve-se com a calculadora, na janela de visualização *standard* $[-10,10] \times [-6,67;\ 6,67]$, o gráfico apresentado na Figura ao lado.



Relativamente à monotonia da função g, apenas se sabe que a função tem um máximo em $x = -2$ e é crescente em $\left[-\frac{2}{9}, +\infty\right[$.

a) Através da Figura acima, consegues descrever a monotonia e os extremos da função? Justifica.

Consideras necessário realizar algum ajuste na janela de visualização da calculadora gráfica? Se sim, indica que ajuste realizavas.

b) Considera $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 4x + 3$ a função representada na Figura anterior.

Caso tenhas considerado na alínea a), realiza o ajuste na janela de visualização e, de seguida, analisa a conclusão que efetuaste relativamente ao estudo da monotonia e existência de extremos. Altera, caso necessário, a conclusão que retiraste.

Por fim, o que concluis do sinal e dos zeros da função da primeira derivada de g?

Utiliza a calculadora gráfica para responderes a esta questão.

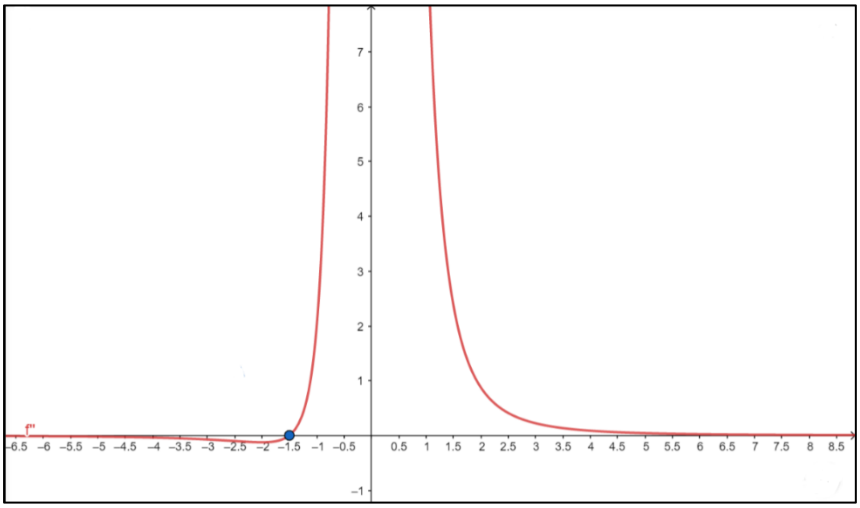
Anexo N – Tarefa 3

Tarefa 3 - Projeto de Investigação

1. Seja f uma função real de variável real, contínua no seu domínio, definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}$$

Na Figura abaixo encontra-se representado o gráfico da segunda derivada de f, com apenas um zero.



Estuda a função f quanto à existência de pontos de inflexão.

2. Considera a função h real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = x^3 - x^2 - x - 3$$

Estuda a função h quanto à monotonia e determina o(s) extremo(s) de h, caso exista(m).

3. Seja f uma função polinomial, contínua no seu domínio. Sabe-se que:

- A função f tem um máximo igual a 2;
- A função f tem um mínimo igual a -2;

- $f(-\sqrt{3}) = 0, \quad f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(\sqrt{3}) = 0;$
- A sua função derivada é definida por $f'(x) = 3x^2 - 3$;
- A variação da segunda derivada de f é representada na tabela abaixo:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$

Esboça o gráfico da função f.

4. Considera a função trigonométrica g definida por $g(x) = 15 + 2\sin(x+1)$, no intervalo $\left]0, \frac{7\pi}{6}\right[$.

Com recurso à calculadora gráfica, estuda a função g quanto à monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de extremos e pontos de inflexão.